جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع الرياضيات

اختصاص تحليل

من إعداد الطالب : هاله جلال

بعنوان

بعض طرق حل المعادلات التكاملية والتكامل-تفاضلية غير الخطية لفولتيرا

نوقشت يوم: 2016/05/29 من طرف لجنة الأساتذة :

د.عسيلة مصطفــــى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيســا
د.السعيد محمد السعيـد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشـا
د.عبد القادر أعماره	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشـا
د.عمــــاره قرفـــي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مؤطـرا

2016 | 2015

الإهداء

أحمد الله عز وجل الذي أنعم علي بنعمة العلم و سهل لي طريقا أبتغي فيه علما ووفقني في إنهاء هذا العمل المتواضع.

أهدي ثمرة جهدي

إلي نبراس الحياة ونبع الحنان إلى أغلي ما وهبني الرحمان إلى دفئ المشاعر ,إلى منبع الثقة و التي مهما كتبت لن أفي حقها إلى أمي العزيزة حفظها الله و رعاها

إلى من علمني ودعمني طوال سنينّ دراستي إلى من كان سر بهجتي والنور الذي أضاء ظلمتي إلى أبي الغالي حفضه الله ورعاه

والى أخواتي كل واحدة باسمها

وأخي الصغير وائل

وابنة أختي الكتكوتة سلمى

إلى كل أخوالي وخالاتي وأعمامي وعماتي وأبنائهم كل واحد باسمه

إلى كل رفقاء الدرب و زملائي طوال مشواري الدراسي .

شكر وعرفان

الحمد لله رب العالمين، الذي جعل بعد العسر يسرا، والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين محمد عليه أفضل الصلاة والتسليم وبعد .

يطيب لي أن أضع أخر اللمسات لمذكرتي المتواضعة وأن أتقدم ببالغ الشكر و التقدير للأستاذ الفاضل" عماره قرفي " على اقتراحه موضوع المذكرة، وما بذله من جهد ومتابعه مدة الإشراف، وإنه لمن عظيم الشرف لي أن كان هو من أشرف عليا طيلة هذا العام.

كما أقدم شكري للدكتور "عسيلة مصطفى" على قبوله ترؤس لجنة المناقشة، فضلا على أن الواجب يقتضي مني اعترافا وعرفانا بالفضل لأهل الفضل، أن أتقدم بخالص شكري وعظيم امتناني للمربي الفاضل ومناقش اللجنة الدكتور "السعيد محمد السعيد" على ما أحاطني به من علمه، وأسال الله القدير أن يديمه ذخرا لطلبة العلم، كما أقدم شكري للدكتور "عبد القادر أعماره" مناقش اللجنة.

وأخيرا وليس أخرا، ومن باب من لم يشكر الناس لم يشكر الله، فأنني أثمن دور الأهل والأصدقاء الذين ساعدوني وباستمرار بأي شكل كان ومهما كان بسيطا .

اَلمُحتَوَيَاتُ

المقـــدمة العَامة

عندمَا تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التدَاخلَات بينهَاوتطورت بشكل سريع لجَا العلمَاءِ الَى المعَادلَات التكَاملية لتفسير العديد من الظوَاهر سوَاءِ كَانت فيزيَائِية أو كيميَائِية أَو بيولوجية أَو هندسية ......،
لذلك يمكن القول أَنه لَايوجد علم من العلوم الَاوتلعب المعَادلَات التكَاملية دورَا بَارزَا فيهَا لهذَا استطَاع العديد من البَاحثين التوصل الَى العديد من طرق حل المعَادلَات التكَاملية سوَاء كَانت خطيةأَوغير خطيّة.
لهذَا خصصنَا هذه المذكرة بعنوَان :

∴ **طرق حل المعَادلَات التكَاملية و المعَادلَات التكَامل تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا** ∴

في الفصل الأَول أَشرنَا لأَشكَال المعَادلَات التكَاملية الخطية و غير الخطية نذكر منهَا : معَادلة فريد هولم التكَاملية ،معَادلة فولتيرَا التكَاملية ، معَادلة وينر هويف التكَاملية، معَادلة رينوَال التكَاملية، معَادلة آبل التكَاملية ،............. الخ . أَمَا غير خطية معَادلة هَامريشتين التكَاملية ، معَادلة كوشي الشَاذة ، معَادلة فريد هولم – فولتيرَا التكَاملية ،معَادلة يورشون – فولتيرَا. ثم وضحنَا شروط وجود و وحدَانية حل المعَادلَات التكَاملية غير خطية لفولتيرَا.
الفصل الثَاني قمنَا بدرَاسة بعض طرق حل المعَادلَات التكَاملية و المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير الخطية من النمطين الأَول و الثَاني ، بنسبة لنوع الأَول نذكر طريقتين : طريقة التقريب المتتَالي و طريقة الحل بسلسلة هذَا لـلمعَادلَات من النمط الثَاني ، أَمَا لـلمعَادلَات من النمط الأَول همَا: طريقة تحويل لَابلَاس و طريقة التحويل الَى معَادلة من النمط الثَاني.
أَمَا نوع الثَاني قمنَا بدرَاسته بطريقتين همَا : طريقة مشتركة بين لَابلَاس و التحلـل و طريقة التكرَار و التبَاين و هذَا بَالنسبة لـلمعَادلَات من النمط الثَاني ، أَمَا المعَادلَات من النمط الأَول سوف نذكر طريقتين : طريقة مشتركة بين لَابلَاس و التحلـل و طريقة التحويل لمعَادلة من النمط الثَاني.
أَمَا في الفصل الثَالث درسنَا بعض طرق حل أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمطين حيث نمط الثَاني ذكرنَا طريقة مشتركة بين التكرَار و التحلـل و طريقة التحويل إِلَى نظَام من النمط الثَاني و هذَا بنسبة إِلَى النظَام من النمط الأَول أَمَا بنسبة لأَنظمة المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني سوف ندرس طريقة التكرَار و التبَاين .

الفَصلُ 1

أَشكَال المعَادلَات التكَاملية الخطية و غير الخطية

بَالرغم من أَن معظم المسَائِل الفيزيَائِية يمكن صيَاغتها و تحليلهَا بدلَالة المعَادلَات التفَاضلية الَا أَنه يمكننَا استبدَال المعَادلَات التفَاضلية بمعَادلَات تكَاملية سوَاء كَانت خطية أَو غير خطية ليكون حل المعَادلة بكفَاءة أَكثر و بطرق أَبسط و في مَايلي سوف نذكر أَشكَال المعَادلَات التكَاملية الخطية و غير الخطية.

تعريف: المعَادلة التكَاملية هي المعَادلة التي يكون فيهَا المجهول تحت علَامة التكَامل و قد يضَاف أَيضَا خَارج التكَامل و يكون في أَحد طرفي المعَادلة و تكون علَى سبيل المثَال :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

$$0 = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

فَاذَا كَان x (الجزء العلوي لتكَامل) عدد ثَابت فهي معَادلة فريد هولم و أَمَا إِذَا كَان مجهول فهي لفولتيرَا .

و هي عبَارة عن معَادلَات تكَاملية حيث الدَالة :

- $\varphi(x)$ هي دَالة المجهول .
- $f(x)$ و $K(x,t)$ دوَال معلومة و قد تكون مركبة أَو حقيقية و ذلك من قيم x و t .
- و هنَاك نوعَان من المعَادلَات التكَاملية معَادلَات تكَاملية خطية و غير خطية.

1.1 المعَادلَات التكَاملية الخطية

يقَال عن المعَادلَات التكَاملية أَنهَا خطية إِذَا كَانت العمليَات الخطية منطبقة و متحقـقة علَى الدوَال المجهولة و تكون المعَادلَات التكَاملية الخطية بصفة عَامة من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

حيث :

ـ λ ثَابت يحمل معَاني فيزيَائِية عن خوَاص المَادة.

ـ $K(x,t)$ معلومة و تسمَى نوَاة المعَادلة و تحمل صفَات و خوَاص المَادة المستخدمة و قد تكون متصلة أَو غير متصلة.

ـ الدَالة $f(x)$ معلومة أَيضًا أَمَا بَالمفهوم الفيزيَائِي تمثل دَالة السطح المرَاد حسَاب التكَامل عليه.

إِمَا $\varphi(x)$ هي الدَالة المجهولة المطلوب تعينهَا و تمثل فيزيَائِيًا دَالة الهمد .

و المعَادلة (1.1) خطية لأَن الدَالة المجهولة هي من الدرجة الأَولَى.

و هنَاك العديد من أَشكَال المعَادلَات التكَاملية الخطية و هي :

*معَادلة فريد هولم التكَاملية.

*معَادلة ويز هويف التكَاملية.

*معَادلة آبل التكَاملية.

*معَادلة رينوَال التكَاملية.

*معَادلة التكَاملية المختلطة.

*معَادلة فولتيرَا التكَاملية.

و في مَا يلي سوف نذكر بعض أَشكَال المعَادلَات التكَاملية الخطية:

1) معَادلة فريد هولم التكَاملية

في جميع معَادلَات فريد هولم التكَاملية تكون نهَاية الجزء العلوي عبَارة عن ثَابت محد د . معلوم أَي $x \in [a,b]$ و تكون علَى الشكل التَالي :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.1)$$

* في المعَادلة (2.1) إِذَا $\mu = 0$ أَي المعَادلة من الشكل

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

فهي معَادلة فريد هولم من النمط (النوع) الأَول.

* في المعَادلة (2.1) أَيضًا إِذَا كَان $\mu = C^{int} \neq 0$ أَي العَادلة من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

و في هذه الحَالة تقول أَن معَادلة فريد هولم من النمط الثَاني.

* و في حَالة خَاصة لمَا تأَخذ $\mu = 1$ و $f(x) = 0$ أَي تصبح المعَادلة (2.1) من الشكل $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$ و هي معَادلة فريد هولم التكَاملية المتجَانسة.

* تكون المعَادلة (2.1) من النمط الثَالث في حَالة $\mu = \mu(x)$

2) معَادلة فولتيرَا التكَاملية

تكون معَادلة فولتيرَا التكَاملية الخطية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (3.1)$$

و تكون من النمط الأَول إِذَا كَان $\mu = 0$ ، و من النمط الثَاني لمَا $\mu = C^{int} \neq 0$ و النمط الثَالث لمَا يكون $\mu = \mu(x)$.

ملَاحظة: ليس شكل المعَادلة هو الدليل علَى نوعهَا فمعَادلة فريد هولم نشأَت من مسأَلة تفَاضلية ذَات شروط حدية بينمَا معَادلة فولتيرَا فقد نشأَت من مسأَلة تفَاضلية ذَات شروط إِبتدَائِية.

3) معَادلة وينر هويف التكَاملية

تسمَى معَادلة التكَاملية

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \tag{4.1}$$

معَادلة وينر هويف التكَاملية

4) معَادلة رينوَال التكَاملية

تسمَى معَادلة التكَاملية من الشكل

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{x} K(x-t)\varphi(t)dt \tag{5.1}$$

معَادلة رينوَال التكَاملية

5) معَادلة آبل التكَاملية

تكون معَادلة آبل التكَاملية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \tag{6.1}$$

حيث $0 \leq \alpha < 1$.

و قد سميت بهذَا الأَسم نسبة إِلَى العَالم آبل الذي توصل إِليهَا.

6) معَادلة كوشي الشَاذة

و تكون المعَادلة من الشكل

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{(x-t)}dt + \int_{\Gamma}K(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{7.1}$$

حيث Γ يعني قوس مغلق أَو مفتوح .

7) معَادلة التكَاملية المختلطة

نعتبر المعَادلَات التَالية

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda\int_0^t F(t,T)\varphi(x,t)dT + \lambda\int_a^b K(x,r)\varphi(r,t)dr \tag{8.1}$$

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda\int_0^t\int_a^b F(t,T)K(x,r)\varphi(r,T)drdT \tag{9.1}$$

حيث $T < \infty, t \in [0,T], x \in [a,b]$.

ـ نسمَى المعَادلة (8.1) بمعَادلة لفريد هولم ـ فولتيرَا ، إِمَا المعَادلة (9.1) بمعَادلة فولتيرَا ـ فريد هولم.

ـ الجزء التكَاملي لفريد هولم مقَاسَا بَالنسبة لـلموضع بينمَا الجزء التكَاملي الخَاص بفولتيرَا يعتبر مقَاسَا بَالنسبة لزمن .

ـ الدَالة $K(x,t)$ مقَاسة بَالنسبة لـلموضوع ، الدَالة $F(t,T)$ مقَاسة بَالنسبة لزمن .

ـ الدَالة $f(x,t)$ دَالة معلومة ، و λ ثَابت قد يكون مركب و هو يحمل معَاني فيزيَائِية.

ـ $\varphi(x,t)$ هي الدَالة المجهولة المرَاد تعيينهَا، و يكون الحل محقـق في الفضَاء

$$L_2([a,b]) \times C[0,T], 0 \le t \le T \le \infty$$

.

2.1 المعَادلَات التكَاملية غير الخطية

تعريف: المعَادلة التكَاملية غير خطية هي معَادلة يكون المجهول فيهَا تحت علَامة التكَامل حيث تكون الدَالة مجهولة عبَارة عن دَالة مركبة ، أَي تكون $F(\varphi(x))$ علَى سبيل المثَال $\varphi^2(x), \varphi^3(x), \cos\varphi(x), \sin\varphi(x), e^{\varphi}(x)$.......... .
قد يضَاف المجهول خَارج علَامة التكَامل .
و هنَاك العديد من أَشكَال غير الخطية نذكر بعض منهَا :

1) معَادلة يورشون ـ فولتيرَا

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt, x \in [0,T], T < \infty \tag{10.1}$$

حيث $f(x), K(x,t,\varphi(t))$ دَالتَان معلومتَان أَي $f(x) \in C[0,T]$ و λ ثَابت يحمل معَاني فيزيَائية و $\varphi(x)$ الدَالة المجهولة . نسمي المعَادلة (10.1) بمعَادلة فولتيرَا الغير خطية.
و تكون من النمط (النوع) الأَول إِذَا كَان $\mu = 0$.
تكون من النمط (النوع) الثَاني إِذَا كَان $\mu = C^{int} \neq 0$.
تكون من النمط (النوع) الثَالث إِذَا كَان $\mu = \mu(x)$.
و بصفة عَامة نسمي معَادلة التكَاملية بغير الخطية إِذَا إِختلفت درجة الدَالة المجهولة عن الوَاحد الصحيح .

2) معَادلة هَامريشتين التكَاملية

معَادلة هَامريشتين التكَاملية تكون من الشكل :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D K(x,t)F(t,\varphi(t))dt, D \in \Re^n, 1 \leq n \tag{11.1}$$

و نعتمد علَى قيم μ فَاذَا كَانت $\mu = 1$ لتصبح المعَادلة من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)F(t,\varphi(t))dt \tag{12.1}$$

فَانـنَا نسمي المعَادلة (12.1) بمعَادلة هَامريشتين ـ فولتيرَا التكَاملية من النمط الثَاني .

أَمَا في حَالة $\mu = 0$ تصبح المعَادلة من الشكل :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)F(t,\varphi(t))dt = 0 \tag{13.1}$$

فَانـنَا نسمي المعَادلة (13.1) بمعَادلة هَامريشتين ـ فولتيرَا التكَاملية من النمط الأَول.

3) معَادلة كوشي الشَاذة

تكون هذه المعَادلة من الشكل :

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-x)}dt + \int_\Gamma F(x,t,\varphi(t))\,dt = f(x) \tag{14.1}$$

.

4) معَادلة فريد هولم ـ فولتيرَا التكَاملية

تكون معَادلة فريد هولم ـ فولتيرَا غير خطية من الشكل :

$$\mu\varphi(\overline{x},t) + \lambda\int_\Omega K\left(\overline{x}-\overline{\xi},\overline{y}-\overline{s}\right)F\left(t,\varphi\left(\overline{\xi},\overline{s}\right)\right)d\overline{\xi}d\overline{s} + \lambda\int_0^t G(t,T)\,\varphi(\overline{x},\overline{y},T)\,dT = f(\overline{x},\overline{y},t) \tag{15.1}$$

حيث $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3........x_n), \overline{t} = t(t_1, t_2, t_3........t_n)$.

نسمي المعَادلة (15.1) بمعَادلة فريد هولم ـ فولتيرَا الغير خطية ، حيث Ω تعتمد علَى منحنَى التكَامل .

3.1 مسأَلة الوجود و الوحدَانية لمعَادلة فولتيرَا التكَاملية غير الخطية

سوف نكتفي في هذَا الجزء علَى ذكر شروط وجود و وحدَانية الحل لمعَادلة فولتيرَا التكَاملية غير الخطية و التي من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x G(x,t,\varphi(t))dt \tag{16.1}$$

لَاثبَات وجود و وحدَانية الحل للمعَادلة (16.1) يكفي حل مسأَلة كوشي هو تحقيق الشروط التَالية :

1) تكَامل الدَالة $f(x)$ محدود علَى المجَال $x \in [a, b]$.

2) تكَامل الدَالة $G(x, t, \varphi(t))$ محدود أَي $|G(x, t, \varphi(t))| < K$ حيث $a \leq x, r \leq b$.

3) الدَالة $f(x)$ تحقـق شرط ليبشيتز علَى المجَال $x \in [a, b]$ أَي $|f(x) - f(t)| < K|x - t|$.

4) الدَالة $G(x, t, \varphi(t))$ تحقـق شرط ليبشيتز أَي

$$|G(x, t, z) - G(x, t, z^{'})| < K|z - z^{'}|$$

اَلفَصلُ 2

بعض طرق حل المعَادلَات التكَاملية و المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا

لقد تعدـدت طرق حل المعَادلَات التكَاملية و التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية من النمطين فسوف نتطرق لذكر طريقتين لكل نمط .

1.2 بعض طرق حل المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا

1.1.2 المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني

تعرف المعَادلة التكَاملية الغير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{1.2}$$

حيث الدَالة $\varphi(x)$ هي الدَالة المجهولة إمَا الدَالة $f(x)$ و النوَاة $K(x,t)$ معلومتَان .

* و في هذه الحَالة سوف نتطرق إلَى طريقتين همَا :

– طريقةَالتقريب المتـتَابع (المتـتَالي) .

– طريقة حل السلسلة.

1.1.1.2 طريقة التقريب المتـتَابع (المتـتَالي)

تعتمد طريقة التقريب المتـتَابع (المتـتَالي) إلَى إعطَاء أَو فرض تقريب صفري .

أي φ_0 و بَالتكرَار المتعَاقب لـلقيم البَاقية $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 ....\varphi_n$. و تكون في الحَالة العَامة من الشكل التَالي :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{2.2}$$

و بَاعطَاء أو فرض القيمة الاَبتدَائِية φ_0 لنجد :

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x) = & f(x) + & \int_0^x K(x,t)\,F(\varphi_0)\,dt \\ \varphi_2(x) = & f(x) + & \int_0^x K(x,t)\,F(\varphi_1)\,dt \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \varphi_n(x) = & f(x) + & \int_0^x K(x,t)\,F(\varphi_{n-1})\,dt \end{array} \tag{3.2}$$

و بَادخَال النهَاية لـلمعَادلة (3.2) نجد $\varphi(x)$ و هو حل لـلمعَادلة (2.2) .

مثَال : حل المعَادلة التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا بَاستخدَام الطريقة التقريبية المتعَاقبة:

$$\varphi(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\varphi^2(t)dt \tag{4.2}$$

علمَا أن التقريب الصفري $\varphi_0(x) = 0$ ، و كمَا ذكرنَا سَابقًا أن هذه الطريقة تعتمد علَى إستخدَام التكرَار المتعَاقب (4.2) لنجد :

$$\varphi_1(x) = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\,\varphi_0^2(t)\,dt = 4x - \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 \tag{5.2}$$

$$\varphi_2(x) = 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\,\varphi_1^2(t)\,dt = 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\left(4t - \tfrac{16}{3}t^3 - \tfrac{4}{3}t^4\right)^2 dt$$

$$= 4x + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right)x^3 + \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right)x^4 - \frac{128}{15}x^5 - \frac{16}{5}x^6 + ... \tag{6.2}$$

$$\varphi_3(x) = 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\,\varphi_2^2(t)\,dt = 4x - \tfrac{16}{3}x^3 - \tfrac{4}{3}x^4 + \int_0^x (x-t+1)\left(-\tfrac{128}{15}t^5 - \tfrac{16}{5}t^6 + ...\right) dt$$

$$= 4x + \left(\frac{128}{15} - \frac{128}{15}\right)x^5 + \left(\frac{16}{5} - \frac{16}{5}\right)x^6 \tag{7.2}$$

و من التكرَارَات المتعَاقبة نحصل علَى النتيجة التَالية:

$$\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n(x) = 4x \tag{8.2}$$

و منه حل المعَادلة التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا (4.2) هو (8.2) أي $\varphi(x) = 4x$.

و ذلك بَاستعمَال طريقة التكرَارَات أَو التقريب المتتَابع (المتتَالي) .

2.1.1.2 طريقة الحل بسلسلة

تعتمد طريقة الحل بسلسلة إِلَى نشر تَايلور و ذلك بتعويض

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{9.2}$$

ثم المطَابقة بين الطرفين لنتحصل علَى المعَاملَات a_n و تكون في الحَالة العَامة بَالطريقة التَالية:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) F(\varphi(t)) dt \tag{10.2}$$

و بَاستعمَال العلَاقة (9.2) و تعويضهَا في المعَادلة (10.2) نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) + \int_0^x K(x,t) F(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt \tag{11.2}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = f(x) + \int_0^x K(x,t) F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n) dt \tag{12.2}$$

و من خلَال المعَادلة (12.2) نستطيع حسَاب المعَاملَات $a_0, a_1, a_3......a_n$ ثم تعويضهَا في الشكل العَام للحل أَي في المعَادلة (9.2) .

مثَال: حل المعَادلة التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا بطريقة الحل بسلسلة :

$$\varphi(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)^2 dt \tag{13.2}$$

لَاستخدَام هذه الطريقة يجب إِستعمَال العلَاقة (9.2) و تعويضهَا في العلَاقة (13.2) لتصبح المعَادلة من الشكل :

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n)^2 dt \tag{14.2}$$

بَالحسَاب نجد

$$a_0+a_1x+a_2x^2+.........+a_nx^n = 1+x+\frac{1}{2}(a_0^2-1)x^2+\frac{1}{3}(a_0a_1-1)x^3+\frac{1}{12}(a_1^2+2a_0a_1-1)x^4 \quad (15.2)$$

بمطَابقة الطرفين لـلمعَادلة (15.2) نجد

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, ...a_n = 0 \quad (16.2)$$

و بتعويض المعَاملَات $a_0, a_1, ...a_n$ في العلَاقة (14.2) نتحصل علَى:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x = 1 + x \quad (17.2)$$

و عبَارة عن حل المعَادلة (13.2) .

2.1.2 المعَادلَات التكَاملية لفولتيرَا غير الخطية من النمط الأَول

نعرف المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول في الشكل العَام بَالعلَاقة :

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \quad (18.2)$$

حيث الدَالة $\varphi(x)$ هي دَالة مجهولة .

و الدَالة $f(x)$ و النوَاة $K(x,t)$ معطَاة.

* و في هذه الحَالة سوف نقوم بدرَاسة طريقتين لـلحل همَا :

ـ بَاستعمَال تحويل لَابلَاس .

ـ و بطريقة التحويل إلَى معَادلة تكَاملية من النمط الثَاني .

تذكير حول تحويل لَابلَاس

يمكن القول بأَن تحويل لَابلَاس هو عبَارة عن تحويل ريَاضي خطي يتم فيه تحويل الدَالة الزمنية إلَى دَالة مركبة ،كمَا يمكن به تحويل المعَادلَات التفَاضلية أَو التكَاملية ، التفَاضلية ـ التكَاملية إلَى معَادلَات ريَاضية يمكن تبسيطهَا و إختصَارهَا و التعَامل معهَا بسهولة ، و نعرف تحويل لَابلَاس كمَا يلي :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \quad (19.2)$$

حيث $F(p)$ الدَالة المجهولة بدلَالة الكمية المركبة $p = \alpha + i\beta$ ، $f(t)$ الدَالة الأَصلية بدلَالة الزمن و رمز تحويل لَابلَاس . و رغم أَن تحويل لَابلَاس العكسي المعطَى بَالعلَاقة:

$$L^{-1}(F(p)) = L^{-1}(L(f(t))) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\beta}^{c+i\beta} F(p)e^{pt}dt \tag{20.2}$$

مثَال : لدينَا تحويل لَابلَاس $f(x) = x$ هو $L(x) = \frac{1}{p^2}$.

*** بعض خصَائِص تحويل لَابلَاس**

1) الخطية :

$$L(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha f(t) + \beta g(t) \tag{21.2}$$

2) التنَاسب :

$$L(Af(t)) = AL(f(t)) \tag{22.2}$$

3) التفَاضلية:

$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{k-1}(0) \tag{23.2}$$

4) الَازَاحة في المجَال p :

$$L(e^{at} f(t)) = F(p-a) \tag{24.2}$$

5) الجدَاء التنسوري :

$$f * g = L(\int_0^t f(t-s)g(s)ds) = F(p).G(p) \tag{25.2}$$

.

1.2.1.2 طريقة تحويل لَابلَاس

تعتمد طريقة تحويل لَابلَاس علَى إدخَاله علَى المعَادلة التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول .
لتكن المعَادلة التكَاملية التَالية:

$$f(x)=\int_0^x K(x-t)F(\varphi(t))dt \tag{26.2}$$

و بَادخَال تحويل لَابلَاس علَى المعَادلة (26.2) نجد :

$$L(f(t))=L\left(\int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt\right) \tag{27.2}$$

و بَاستعمَال العلَاقة (25.2) في الطرف الثَاني من المعَادلة (27.2) تصبح :

$$F(p)=L(K(x-t)).L(F(\varphi(t))) \tag{28.2}$$

و بوضع $L(F(\varphi(t)))=V(p)$ و $L(K(x-t))=K(p)$ نتحصل :

$$V(p)=\frac{F(p)}{K(p)} \tag{29.2}$$

من العلَاقة (20.2) و إدخَال تحويل لَابلَاس العكسي علَى المعَادلة (29.2) نتحصل علَى حل المعَادلة التكَاملية (26.2) هو $\varphi(x)$.

مثَال : حل المعَادلة التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول بَاستعمَال طريقة لَابلَاس :

$$e^{2x}-e^x=\int_0^x e^{x-t}\varphi^2(t)dt \tag{30.2}$$

نضع $\varphi^2(t)=V(t)$ ، لتصبح المعَادلة 30.2 من الشكل :

$$e^{2x}-e^x=\int_0^x e^{x-t}V(t)dt \tag{31.2}$$

بَادخَال تحويل لَابلَاس

$$L\left(e^{2x}-e^x\right)=L\left(\int_0^x e^{x-t}V(t)dt\right) \tag{32.2}$$

و من العلَاقة (21.2) بَالنسبة لطرف الأَول و العلَاقة (25.2) بَالنسبة لطرف الثَاني لـلمعَادلة (32.2) نجد :

$$\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p-1}V(p)$$

$$V(p) = \frac{p-1-p+2}{(p-2)(p-1)} = \frac{1}{p-2} \tag{33.2}$$

بَادخَال تحويل لَابلَاس العكسي لـلمعَادلة (33.2) نجد :

$$V(p) = e^{2x} \tag{34.2}$$

و برجوع إِلَى المتغيرَات الحقيقية و من العلَاقة (34.2) نحصل :

$$\varphi(x) = \mp\sqrt{e^{2x}} = \mp e^{x} \tag{35.2}$$

و هو حل لـلمعَادلة التكَاملية (30.2) .

2.2.1.2 طريقة التحويل إِلَى معَادلة من النمط الثَاني

كمَا ذكرنَا سَابقًا أَن الشكل العَام لمعَادلة فولتيرَا غير الخطية من النمط الثَاني من الشكل :

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{36.2}$$

و بَاشتقَاق المعَادلة (36.2) طرف لطرف نجد

$$f'(x) = K(x,x)F(\varphi(x)) + \int_0^x K'(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{37.2}$$

و بَالقسمة علَى $K(x,x)$ و بوضع

$$\frac{f'(x)}{K(x,x)} = h(x), -\frac{-K'(x,t)}{K(x,x)} = T(x,t)$$

لتصبح المعَادلة (37.2) من الشكل

$$F(\varphi(x)) = h(x) + \int_0^x T(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{38.2}$$

تعتبر المعَادلة (38.2) معَادلة تكَاملية من النمط الثَاني حيث $T(x,t)$ هي نوَاة لـلمعَادلة التكَاملية الجديدة.
ولحل هذه المعَادلة (38.2) تستعمل أَحد الطرف المذكورة سَابقًا أَي بطريقة التقريب المتـتَابع (المتـتَالي) طريقة الحل بسلسلة أَو تستعمل طريقة تحويل لَابلَاس.
ملَاحظة: في حَالة $K(x,x)=0$ فَان المعَادلة التكَاملية تصبح من النمط الثَالث ، و في بعض الحَالَات تشتق مرة أُخرَى لنجد شكل المعَادلة التكَاملية من النمط الثَاني.
مثَال : لنحل نفس المثَال السَابق بطريقة تحويل المعَادلة من النمط الثَاني :

$$e^{2x}-e^{x}=\int_{0}^{x} e^{x-t}\varphi^{2}(t)dt \tag{39.2}$$

و بَاشتقَاق المعَادلة (39.2) طرف لطرف نجد

$$2e^{2x}-e^{x}=\varphi^{2}(t)+\int_{0}^{x} e^{x-t}\varphi^{2}(t)dt$$
$$\varphi^{2}(x)=2e^{2x}-e^{x}-\int_{0}^{x} e^{x-t}\varphi^{2}(t)dt \tag{40.2}$$

و هي معَادلة تكَاملية من النمط الثَاني.
و بوضع $\varphi^{2}(t)=h(t)$ و تعويضهَا في المعَادلة (40.2) نتحصل علَى

$$h(x)=2e^{2x}-e^{x}-\int_{0}^{x} e^{x-t}h(t)dt \tag{41.2}$$

و كمَا هو معلوم يمكن حل المعَادلة (41.2) بعدة طرق .
و في هذه الحَالة سوف نختَار طريقة تحويل لَابلَاس علَى المعَادلة (41.2) و بَاستعمَال العلَاقة (25.2) و (21.2) لطرف الثَاني نتحصل علَى:

$$H(p)=\frac{2}{p-2}-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p-1}H(p)\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{p-1}\right)H(p)=\frac{2p-2-p+2}{(p-2)(p-1)}$$
$$H(p)=\frac{p}{(p-2)(p-1)}.\frac{p-1}{p}=\frac{1}{p-2} \tag{42.2}$$

و بَادخَال تحويل لَابلَاس العكسي لـلمعَادلة (42.2) نتحصل علَى :

$$h(x)=e^{2x} \tag{43.2}$$

وبرجوع إِلَى المتغيرَات الحقيقية و العلَاقة (43.2) نجد

$$\varphi(x) = \mp\sqrt{e^{2x}} = \mp e^{x} \tag{44.2}$$

و هو حل لـلمعَادلة التكَاملية (39.2) .

2.2 طرق حل المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرًا

تعتبر المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية مزيج بين التكَامل و التفَاضل و تكون من الشكل العَام :

$$\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{45.2}$$

أَو من الشكل

$$\int_0^x K_1(x,t)F(\varphi(t))dt + \int_0^x K_2(x,t)\varphi^{i}(t)dt = f(x) \tag{46.2}$$

حيث الدَالة $f(x)$ و النوَاة $K(x,t)$ معلومتَان ، و الدَالة $\varphi(t)$ هي الدَالة المجهولة المرَاد البحث عنهَا.
و في مَا يلي سوف نتطرق بعض حلول لـلمعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرًا من النمطين الأَول و الثَاني .

1.2.2 المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرًا من النمط الثَاني

تكون المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية من النمط الثَاني في الحَالة العَامة من الشكل

$$\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \tag{47.2}$$

و لهذَا الشكل من المعَادلَات سوف نذكر طريقين من الحل و همَا:
ـ الطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلـل.
ـ طريقةَالتكرَار و التبَاين .

1.1.2.2 الطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلـل

تعتمد هذه الطريقة بَاعطَاء قيمة الَابتدَائية $\varphi(0)$ و تكون النوَاة $K(x,t)$ من الشكل $K(x-t)$.

لتصبح المعَادلة (47.2) من الشكل

$$\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)F(\varphi(t))dt \tag{48.2}$$

بَادخَال تحويل لَابلَاس علَى المعَادلة (48.2) و العلَاقة (24.2) لطرف الأَول و (26.2) لطرف الثَاني نجد

$$P^{(i)}L\left(\varphi\left(x\right)\right) - P^{(i-1)}\varphi\left(0\right) - P^{(i-2)}\varphi'\left(0\right).....\varphi^{(i-1)} = L\left(f\left(x\right)\right) + L\left(K\left(x-t\right)\right).L\left(F\left(\varphi\left(x\right)\right)\right) \tag{49.2}$$

و بقسمة المعَادلة (49.2) علَى P^i نجد

$$L\left(\varphi\left(x\right)\right) = \frac{1}{P}\varphi\left(0\right) + \frac{1}{P^2}\varphi'\left(0\right) + ... + \frac{1}{P^i}\varphi^{(i-1)}\left(0\right) + \frac{1}{P^i}L\left(f\left(x\right)\right) + \frac{1}{P^i}L\left(K\left(x-t\right)\right)L\left(F\left(\varphi\left(x\right)\right)\right) \tag{50.2}$$

و لَازَاحة صعوبة المعَادلة (50.2) و الضبط $L(F(\varphi(t)))$ نقوم بَادخَال طريقة التحلل

$$\varphi\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\left(x\right), n \geq 0 / F\left(\varphi\left(x\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(x\right) \tag{51.2}$$

خيث : $A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\varphi_i\right)\right]_{\lambda=0}$.

و بَاستعمَال تغيرَات العلَاقة (51.2) و تعويضهَا في المعَادلة (50.2) نجد

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\left(x\right)\right) = \frac{1}{P}\varphi\left(0\right) + .. + \frac{1}{P^i}\varphi^{(i-1)}\left(0\right) + \frac{1}{P^i}L\left(f\left(x\right)\right) + \frac{1}{P^i}L\left(K\left(x-t\right)\right)L\left(\sum_{i=0}^{n}A_n\left(x\right)\right) \tag{52.2}$$

من أَجل $n = 0$ تكون المعدلة (52.2) نتحصل :

$$\begin{cases} L\left(\varphi_0\left(x\right)\right) = \frac{1}{P}\varphi\left(0\right) + \frac{1}{P^2}\varphi'\left(0\right) + ... + \frac{1}{P^i}\varphi^{(i-1)}\left(0\right) + \frac{1}{P^i}L\left(f\left(x\right)\right) \\ L\left(\varphi_{k+1}\left(x\right)\right) = \frac{1}{P^i}L\left(K\left(x-t\right)\right)L\left(A_k\left(x\right)\right), k \geq 0 \end{cases} \tag{53.2}$$

مثَال: حل المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني بطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلل

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{3}(2\sin x + \sin(2x)) + \int_0^x \cos(x-t)\varphi^2(t)dt \tag{54.2}$$

و بَادخَال تحويل لَابلَاس و بَاستعمَال العلَاقَات المذكورة سَابقًا نجد :

$$L\left(\varphi'\left(x\right)\right) = L\left(\frac{-2}{3}\left(2\sin x + \sin 2x\right)\right) + L\left(\cos\left(x-t\right)\right)L\left(\varphi^2\left(t\right)\right)$$

.

$$p\varphi\left(p\right) - \varphi\left(0\right) = \frac{-4}{3p\left(p^2+1\right)} - \frac{2}{3p\left(p^2+4\right)} + \frac{p}{p^2+1}L\left(\varphi^2\left(t\right)\right)$$

.

$$\varphi\left(p\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{4}{3p\left(p^2+1\right)} - \frac{2}{3p\left(p^2+4\right)} + \frac{1}{p^2+1}L\left(\varphi^2\left(t\right)\right) \quad (55.2)$$

و من المعَادلة (55.2) و بَادخَال تحويل لَابلَاس العكسي و (51.2) تصبح :

$$\varphi_0\left(x\right) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{60}x^6 + ... \quad (56.2)$$

$$\varphi_1\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{37}{720}x^6 + ... \quad (57.2)$$

$$\varphi_2\left(x\right) = \frac{1}{22}x^4 - \frac{1}{20}x^6 + ... \quad (58.2)$$

$$\varphi_3\left(x\right) = \frac{1}{72}x^6 + ... \quad (59.2)$$

و هكذَا نتحصل علَى الشكل العَام $\varphi_n(x) = \frac{(-1)^{2i}}{2i!}x^{2i}$ و منه :

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2i}}{2i!}x^{2i} \simeq \cos x \quad (60.2)$$

إِذن $\varphi(x) = \cos x$ هو حل المعَادلة (54.2) .

2.1.2.2 طريقة التكرَار و التبَاين

تعتبر طريقة التكرَار و التبَاين من أَسهل و أَدق الطرف لحل معَادلة تكَاملية لفولتيرًا غير خطية من النمط الثَاني .

و تكون المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرًا من الشكل

$$\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(\varphi(t))dt \quad (61.2)$$

و في هذه الطريقة نضع

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left(\varphi_n^{(i)}(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi K(\xi, r) F(\widetilde{\varphi}_n(r)) dr \right) d\xi \tag{62.2}$$

و تسمَى هذه الطريقة أَيضًا بَاستخدَام أَسلوب التغييري و تتم إِستخدَامهَا بَاتبَاع و تطبيق خطوتين أَساسيتين همَا:

ـ تحديد مضَاعف λ لَاغرَانج و قد يكون ثَابت .

ـ طريقة التحديد المتعَاقبة φ_{n+1} .

$$\varphi' + f(\varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0, \lambda = -1, \varphi_0(x) = \varphi(0) \tag{63.2}$$

$$\varphi'' + f(\varphi(\xi), \varphi'(\xi), \varphi''(\xi)) = 0, \lambda = \xi - x, \varphi_0(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x \tag{64.2}$$

$$\varphi''' + f(\varphi(\xi), \varphi'(\xi), \varphi''(\xi), \varphi'''(\xi)) = 0, \lambda = \frac{-1}{2!}(\xi - x)^2, \varphi_0(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)x^2 \tag{65.2}$$

و بنفس الطريقة حتَى نتحصل علَى

$$\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) \tag{66.2}$$

مثَال : حل المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية من النمط الثَاني بطريقة التكرَار و التبَاين

$$\varphi'(x) = 1 + e^x - 2xe^x - e^{2x} + \int_0^x e^{x-t} \varphi^2(t) dt, \varphi(0) = 2 \tag{67.2}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - \int_0^x \left[-\varphi_n'(t) + 1 + e^t - 2te^t - e^{2t} + \int_0^x e^{t-r} \varphi_n^2(r) dr \right] dt \tag{68.2}$$

لدينَا $\lambda = -1$ و $\varphi_0(x) = \varphi(0) = 2$.

بعد الحسَاب و بَاستعمَال نشر تَايلور ل e^x نجد

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 2 + x \quad + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 \quad - \tfrac{3}{8}x^4 - \tfrac{19}{120}x^5 + \ldots \\
\varphi_2(x) &= 2 + x \quad + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 \quad + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{8}x^5 + \ldots \\
\varphi_3(x) &= 2 + x \quad + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 \qquad + \tfrac{1}{5!}x^5 + \ldots\ldots
\end{aligned} \tag{69.2}$$

و بنفس الطريقة و بَاستعمَال العلَاقة (66.2) نجد : $\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x)$.

و الحل علَى الشكل

$$\varphi(x)=1+(1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2)........=1+e^x \qquad (70.2)$$

و منه $\varphi(x)=1+e^x$ حل المعَادلة (67.2) .

2.2.2 المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول

تكون المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول من الشكل

$$f(x)=\int_0^x K_1(x,t)F(\varphi(t))dt+\int_0^x K_2(x,t)\varphi^{(i)}(t)dt \qquad (71.2)$$

حيث $K_1(x,t)$ و $K_2(x,t)$ نوَاتين معلومتين ، و $f(x)$ أَيضَا دَالة معلومة .
$F(\varphi(t))$ هي الدَالة غير الخطية المجهولة و $\varphi^{(i)}(t)$ هي مشتقة الدَالة المجهول من الرتبة (i) .
لهذَا الشكل من المعَادلَات سوف نتطرق إِلَى طريقتين لحل المعَادلَات التكَامل ـ تفَاضلية من النمط الأَول و همَا :
ـ الطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحليل .
ـ طريقة التحويل إِلَى معَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني.

1.2.2.2 الطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلل

في هذه الطريقة يشترط أَن تكون كل $K_1(x,t)$ و $K_2(x,t)$ من الشكل $K_1(x-t),K_2(x-t)$ و هذَا لتسهل عملية تحويل لَابلَاس و ذلك بَاستعمَال علَاقة الجدَاء التنسوري و تكون المعَادلة من الشكل

$$f(x)=\int_0^1 K_1(x-t)F(\varphi(t))dt+\int_0^x K_2(x-t)F(\varphi^{(i)}(t))dt \qquad (72.2)$$

بَادخَال تحويل لَابلَاس و علَاقة الَاشتقَاق (23.2) و علَاقة الجدَاء التنسوري (25.2) نجد

$$L\left(f\left(x\right)\right)=L\left(K_1\left(x-t\right)F\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)+\left(K_2\left(x-t\right)\varphi^i\left(t\right)\right)$$

$$\psi\left(p\right)=\widetilde{K}_1(p)L\left(F\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)+\widetilde{K}_2(p)L\left(F\left(\varphi^{(i)}\left(t\right)\right)\right)$$

$$\psi\left(p\right)=\widetilde{K}_1(p)L\left(F\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)+\widetilde{K}_2(p)L\left(p^iL\left(\varphi\left(t\right)\right)-p^{i-1}\varphi\left(0\right)-p^{i-2}\left(0\right)...\varphi^{i-1}\left(0\right)\right)$$

$$\psi\left(p\right)-\widetilde{K}_1(p)L\left(F\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)+\widetilde{K}_2(p)L\left(p^{i-1}\varphi\left(0\right)+p^{i-2}\left(0\right)...\varphi^{i-1}\left(0\right)\right)=\widetilde{K}_2(p)L\left(p^iL\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)$$

$$\varphi(p)=\frac{\psi\left(p\right)-\widetilde{K}_{1}(p)L\left(F\left(\varphi\left(t\right)\right)\right)+\widetilde{K}_{2}(p)\left(p^{i-1}\varphi\left(0\right)+p^{i-2}\left(0\right)...\varphi^{i-1}\left(0\right)\right)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}(p)} \tag{73.2}$$

و لتسهيل الحل و تفكيك $F(\varphi(t))$ نقوم بَادخَال طريقة التحلـل و ذلك حسب العلَاقَات التّالية :

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n}(x),F(\varphi(x))=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}(x),/A_{n}=\frac{1}{n!}\frac{d^{n}}{d\lambda^{n}}\left[F\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_{i}\varphi_{i}\right)\right]_{\lambda=0} \tag{74.2}$$

و بَاستعمَال العلَاقة (74.2) و تعويضهَا في المعَادلة (73.2) نجد :

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n}\left(x\right)\right)=\frac{1}{p}\varphi\left(0\right)+\frac{1}{p^{2}}\varphi^{'}\left(0\right)+....+\frac{1}{p^{i}}\varphi^{(i-1)}\left(0\right)+\frac{\psi\left(p\right)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}\left(p\right)}-\frac{\widetilde{K}_{1}\left(p\right)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}\left(p\right)}L\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}\left(x\right)\right) \tag{75.2}$$

و بَاستعمَال طريقة التحلـل في المعَادلة (74.2) نجد :

$$\begin{cases}\varphi_{0}\left(p\right)=\frac{1}{p}\varphi_{0}\left(0\right)+\frac{1}{p^{2}}\varphi^{2}\left(0\right)+..+\frac{1}{p^{i}}\varphi^{(i-1)}\left(0\right)+\frac{\psi(p)}{p^{i}K_{2}(p)}\\ L\left(\varphi_{k+1}\left(x\right)\right)=\frac{-\widetilde{K}_{1}(p)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}(p)}L\left(A_{k}\left(x\right)\right),k\geq0\end{cases} \tag{76.2}$$

بشرط :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\widetilde{K}_{1}\left(p\right)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}\left(p\right)}=0 \tag{77.2}$$

ملَاحظة: في بعض الَاحيَان تصَادفنَا أَمثلة نجد فيهَا العلَاقة (77.2) لَاتؤُول إِلَى الصفر و في هذه الحَالة لَا يمكن إِستعمَال الطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلـل و يجب إِستخدَام طريقة أَخرَى لتعَامل مع هذه القضية ، فمثلَا إِذَا وضعنَا $K_1(x,t)=x-t, K_2(x,t)=\cosh(x-t)$ فنجد من أَجل $\varphi'(x)$:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\widetilde{K}_{1}\left(p\right)}{p^{i}\widetilde{K}_{2}\left(p\right)}=\frac{p^{2}}{p^{2}}=1$$

مثَال : حل المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول بطريقة المشتركة بين لَابلَاس و التحلـل

$$\int_{0}^{x}(x-t)\varphi^{2}(t)dt\int_{0}^{x}(x-t)\varphi^{'}(t)dt=\frac{7}{8}+\frac{1}{4}x^{2}-\cos x+\frac{1}{8}\cos(2x),\varphi(0)=0. \tag{78.2}$$

بَادخَال تحويل لَابلَاس نجد :

$$\frac{1}{p^2}L(\varphi^2(t))+\frac{1}{p^2}(p\varphi(p)-\varphi(0))=\frac{7}{8p}+\frac{1}{2p^3}-\frac{p}{p^2+1}\frac{p}{8(p^2+4)} \tag{79.2}$$

$$\varphi(p)=\frac{7}{8}+\frac{1}{2p^2}-\frac{p^2}{p^2+1}+\frac{p^2}{8(p^2+4)}-\frac{1}{p}L(\varphi^2(p)) \tag{80.2}$$

و بَاستخدَام طريقة التحلـل علَى المعَادلة (80.2) و العلَاقة (74.2) نجد :

$$\begin{cases} \varphi_0\left(p\right)=\frac{7}{8}+\frac{1}{2p^2}-\frac{p^2}{p^2+1}+\frac{p^2}{8(p^2+4)} \\ L\left(\varphi_{k+1}\left(x\right)\right)=-\frac{1}{p}L\left(A_k\left(x\right)\right), k\geq 0 \end{cases} \tag{81.2}$$

و بَادخَال تحويل لَابلَاس العكسي علَى العلَاقة التكرَارية (81.2) نتحصل علَى :

$$\begin{aligned} \varphi_0\left(x\right)&=x \quad +\tfrac{1}{3!}x^3 \quad -\tfrac{7}{120}x^5+.. \\ \varphi_1\left(x\right)&=-\tfrac{1}{3}x^3 \quad -\tfrac{1}{15}x^5 \quad +....... \\ \varphi_2\left(x\right)&=\tfrac{2}{15} \quad x^5+..... \quad .... \end{aligned} \tag{82.2}$$

و منه

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n\left(x\right)=\varphi(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}+......\simeq\sin x \tag{83.2}$$

و منه حل المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول هو :

$$\varphi(x)=\sin x \tag{84.2}$$

.

2.2.2.2 طريقة التحويل إِلَى معَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني

تكون معَادلة تكَاملية ـ تفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمط الأَول في الشكل العَام :

$$\int_0^x K_1\left(x,t\right)F\left(\varphi\left(t\right)\right)dt+\int_0^x K_2\left(x,t\right)\varphi^{(n)}\left(t\right)dt=f\left(x\right), K_2\left(x,x\right)\neq 0 \tag{85.2}$$

و لكن في هذه الدرَاسة سوف ندرس و نتطرق إِلَى المعَادلة تفَاضلية من الدرجة الأَولَى و الدرجة الثَانية :

$$\int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt+\int_0^x K_2(x,t)\,\varphi^{(')}(t)\,dt=f(x)\,,K_2(x,x)\neq 0 \qquad (86.2)$$

أَو

$$\int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt+\int_0^x K_2(x,t)\,\varphi^{('')}(t)\,dt=f(x)\,,K_2(x,x)\neq 0 \qquad (87.2)$$

و تعتمد هذه الطريقة علَى الَاشتقَاق و بَالنسبة لطرف الثَاني من المعَادلة.
إِذن بَاشتقَاق الطرف الثَاني لمعَادلة (86.2) نجد:

$$\int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt+K_2(x,x)\,\varphi(x)-K_2(x,0)\,\varphi(0)-\int_0^x \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (88.2)$$

$$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{f(x)}{K_2(x,x)}+\frac{K_2(x,0)}{K_2(x,x)}\varphi(0)+\frac{1}{K_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial(K_2(x,t))}{\partial t}\varphi(t)\,dt \\ \qquad -\frac{1}{K_2(x,x)}\int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt,\,/K_2(x,x)\neq 0 \end{cases} \qquad (89.2)$$

تعتبر المعَادلة (89.2) معَادلةتكَامل ـ تفَاضلية غير خطية من النمط الثَاني .
ـ و بنفس الطريقة المعَادلة (87.2) و بَاشتقَاق الطرف الثَاني أَيضَا نجد :

$$\begin{cases} \int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt+K_2(x,x)\,\varphi'(x)-K_2(x,0)\,\varphi'(0) \\ \qquad -\int_0^x \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t}\varphi'(t)\,dt=f(x)\,,/K_2(x,x)\neq 0 \end{cases} \qquad (90.2)$$

$$\begin{cases} \varphi'(x)=\frac{f(x)}{K_2(x,x)}+\frac{K_2(x,0)}{K_2(x,x)}\varphi'(0)+\frac{1}{K_2(x,x)}\int_0^x \frac{\partial(K_2(x,t))}{\partial t}\varphi'(t)\,dt \\ \qquad -\frac{1}{K_2(x,x)}\int_0^x K_1(x,t)\,F(\varphi(t))\,dt,\,/K_2(x,x)\neq 0 \end{cases} \qquad (91.2)$$

و بهذه الطريقة توصلنَا إِلَى أَن المعَادلة (91.2) معَادلة من النمط الثَاني .
* و بنفس الطريقة إِذَا كَانت المعَادلة من الدرجة النونية ، فبوَاسطة الَاشتقَاق تتحول المعَادلة إِلَى معَادلة التكَامل ـ تفَاضلية غير خطية من النمط الثَاني.

مثَال :

$$\begin{cases} \int_0^x \varphi^2(t)\,dt+\int_0^x (x-t+1)\,\varphi''(t)\,dt=\sin x-\cos x-\frac{1}{4}\sin(2x)+1+\frac{1}{2}x \\ \varphi(0)=\varphi'(0)=1 \end{cases} \qquad (92.2)$$

بَالَاشتقَاق لطرف الثَاني أَو الَاستعمَال المبَاشر من المعَادلة (91.2) نجد :

$$\varphi'(x)=1+\frac{1}{2}x+\sin x-\cos x-\frac{1}{4}\sin(2x)+1+x-\int_0^x\varphi'(t)\,dt-\int_0^x\varphi^2(t)\,dt \qquad (93.2)$$

و بهذه الطريقة حولنَا المعَادلة (92.2) إِلَى معَادلة من النمط الثَاني المعَادلة (93.2) .

و سوف نقوم بحل هذه المعَادلة بأَحد الطرق المدروسة سَابقًا و في هذه المعَادلة سوف نقوم بحلهَا بطريقة التكرَار التغييري.

$$\begin{cases}\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-\left(\int_0^x\begin{pmatrix}\varphi_n'(t)-2-\frac{3}{2}t-\sin t+\cos t+\frac{1}{4}\sin(2t)\\ +\int_0^t\left(\varphi_n'(r)+\varphi_n^2(r)\right)dr\end{pmatrix}dt\right)\end{cases} \qquad (94.2)$$

و من التكرَار المتتَالي و المتعَاقب نجد :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)&=1+x\quad-\tfrac{1}{3!}x^3-\tfrac{1}{4!}x^4\quad-\tfrac{1}{5!}x^5+..\\ \varphi_2(x)&=1+x\quad-\tfrac{1}{3!}x^3-\tfrac{1}{5!}x^5\qquad+.......\\ \varphi_3(x)&=1+x\quad-\tfrac{1}{3!}x^3+\tfrac{1}{5!}x^5\qquad+........\end{aligned} \qquad (95.2)$$

و منه الحل الدقيق يكون من الشكل :

$$\varphi(x)=1+\sin x \qquad (96.2)$$

و هو حل المعَادلة التكَامل ـ تفَاضلية (92.2) .

اَلفَصلُ 3

بعض طرق حل أَنظمة المعَادلَات التكَاملية و التكَامل – تفَاضلية غير خطية لفولتيرَا

1.3 أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير خطية لفولتيرَا

1.1.3 أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني

تكون الأَنظمة للمعَادلَات التكَاملية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني من الشكل :

$$\begin{cases} U(x) = f_1(x) + \int_0^x \left(K_1(x,t) F_1(U(t)) + \widetilde{K}_1(x,t) \widetilde{F_1}(V(t)) \right) \\ V(x) = f_2(x) + \int_0^x \left(K_2(x,t) F_2(U(t)) + \widetilde{K}_2(x,t) \widetilde{F_2}(V(t)) \right) \end{cases} \tag{1.3}$$

حيث ـ $U(x)$ و $V(x)$ دَالتَان مجهولتَان .

ـ $K_{(i)}(x,t), \widetilde{K}_{(i)}(x,t)$ هي دوَال معلومة.

ـ $f_{(i)}(x)$ دوَال معلومة ذَات متغيرَات حقيقية.

ـ $F_i, \widetilde{F}_i$ دوَال غير خطية متعلقة بـ $U(x)$ ، $V(x)$ من أَجل كل قيم $i = 1, 2$.

1.1.1.3 طريقة المشتركة بين التكرَار و التحلـل

تعتمد هذه طريقة علَى طريقة التحلـل و التكرَار المتعَاقب حيث تكون في الحَالة العَامة كمَا يلي :

$$\begin{aligned} A_0 &= F\left(U_0\right), A_1 = U_1 F'\left(U_0\right) \\ A_2 &= U_2 F'\left(U_0\right) + \tfrac{1}{2!} U_1^2 F''\left(U_0\right) \\ A_3 &= U_3 F'\left(U_0\right) + U_1 U_2 F''\left(U_0\right) + \tfrac{1}{3!} U_1^3 F'''\left(U_0\right) \\ A_4 &= U_4 F'\left(U_0\right) + \left(\left(\tfrac{1}{2!} U_2^2 + U_1 U_3\right) F''\left(U_0\right) + \tfrac{1}{2!} U_1^2 U_2 F'''\left(U_0\right) + \tfrac{1}{4!} U_1^4 F\left(U_0\right)\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= f_1(x) + \int_0^x \left(K_1(x,t) F_1\left(U_n(t)\right) + \widetilde{K}_1(x,t) \widetilde{F_1}\left(V_n(t)\right)\right) \\ V_{n+1}(x) &= f_2(x) + \int_0^x \left(K_2(x,t) F_2\left(U_n(t)\right) + \widetilde{K}_2(x,t) \widetilde{F_2}\left(V_n(t)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

مثَال: حل نظَام للمعَادلَات التكَاملية لفولتيرَا غير خطية من النمط الثَّاني بَاستعمَال طريقة التحلـل :

$$\begin{aligned} U(x) &= \cos x + \sin x + (1+x)\cos^2 x - \left(1+x^2\right) + \int_0^x \left(xU^2(t) - V^2(t)\right) dt \\ V(x) &= \cos x - \sin x + (1-x)\cos^2 x - \left(1+x^2\right) + \int_0^x \left(U^2(t) + xV^2(t)\right) dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

و بَاستخدَام الأَسلوب التقريبي و نفترض : $\begin{cases} U_0(x) = 1 \\ V_0(x) = 1 \end{cases}$.

و التكرَار المتعَاقب نجد :

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= \cos x + \sin x + (1+x)\cos^2 x - \left(1+x^2\right) + \int_0^x \left(xU_n^2(t) - V_n^2(t)\right) dt \\ V_{n+1}(x) &= \cos x - \sin x + (1-x)\cos^2 x - \left(1+x^2\right) + \int_0^x \left(U_n^2(t) + xV_n^2(t)\right) dt \end{aligned} \tag{5.3}$$

و يمكن التعبير عنهَا بَاستعمَال السلسلة الَامتهية:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x), V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) \tag{6.3}$$

لنتحصل

$$A_0 = U_0^2, A_1 = 2U_0U_1, A_2 = 2U_0U_1 + U_0^2$$

و

$$\begin{aligned} B_0 &= V_0(t), B_1 = V_0(t)U_1(t) + U_0(t)V_1(t) \\ B_2 &= V_0(t)U_2(t) + U_0(t)V_2(t) + U_1(t)V_1(t) \end{aligned} \tag{7.3}$$

بَاستعمَال نشر تَايلور لـ $\cos x$ و $\sin x$ نجد :

$$
\begin{aligned}
U_0(x) = 1, U_1(x) &= 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{41}{120}x^5 + ...\\
U_2(x) &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^4 - \frac{9}{8}x^5 + ...\\
U_3(x) &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{89}{120}x^5 + ...\\
U_3(x) &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^5 + ...\\
U_5(x) &= 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ...
\end{aligned}
$$

.

$$
\begin{aligned}
V_0(x) = 1, V_1(x) &= 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{41}{120}x^5 + ...\\
V_2(x) &= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^4 + \frac{9}{8}x^5 + ...\\
V_3(x) &= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{8}x^4 - \frac{89}{120}x^5 + ...\\
V_4(x) &= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + ...\\
V_5(x) &= 1 - x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + ... \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

و بنفس الطريقة و من العلَاقة 5.3 نجد:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...\right)\\
U(x) &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...\right) \qquad (9.3)
\end{aligned}
$$

و بَالتّالي

$$
(U(x), V(x)) = (\cos x + \sin x, \cos x - \sin x) \qquad (10.3)
$$

و حل هو عبَارةعن حل (4.3) .

2.1.3 أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول

1.2.1.3 طريقة التحويل إِلَى أَنظمة معَادلَات تكَاملية غير الخطية من النمط الثَّاني

تكون أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الأَول من الشكل:

$$f_1(x) = \int_0^x (K_1(x,t)U(t) + \widetilde{K}_1(x,t)\widetilde{F}_1(V(t)))dt$$
$$f_2\left(x\right) = \int_0^x \Big(K_2\left(x,t\right) F_2\left(U\left(t\right)\right) + \widetilde{K}_2\left(x,t\right) V\left(t\right)\Big)\, dt \qquad (11.3)$$

في هذه الحَالة يجب تحويل هذَا الشكل من الأَنظمة إِلَى أَنظمة معَادلَات تكَاملية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني و لتحويلهَا و نقوم بَاشتقَاق النظَام طرف لطرف بَالنسبة لـ x لنتحصل علَى الشكل التَّالي:

$$f_1'\left(x\right) = K_1\left(x,x\right) U\left(x\right) + \widetilde{K}_1\left(x,x\right) \widetilde{F}_1\left(V\left(x\right)\right) + \int_0^x \Big(K_1'\left(x,t\right) U\left(t\right) + \widetilde{K}_1'\left(x,t\right) \widetilde{F}_1\left(V\left(t\right)\right)\Big)\, dt$$

$$f_2'\left(x\right) = K_2\left(x,x\right) F_2(U\left(x\right)) + \widetilde{K}_2\left(x,x\right) V\left(x\right) + \int_0^x \Big(K_2'\left(x,t\right) F_2\left(U\left(t\right)\right) + \widetilde{K}_2'\left(x,t\right) V\left(t\right)\Big)\, dt$$

$$U\left(x\right) = \frac{f_1'\left(x\right) - \widetilde{K}_1\left(x,x\right) \widetilde{F}_1\left(V\left(x\right)\right)}{K_1\left(x,x\right)} - \frac{1}{K_1\left(x,x\right)} \int_0^x \Big(K_1'\left(x,t\right) U\left(t\right) + K_2'\left(x,t\right) \widetilde{F}_1\left(V\left(t\right)\right)\Big)\, dt$$

$$V\left(x\right) = \frac{f_2'\left(x\right) - K_2\left(x,x\right) F_2\left(V\left(x\right)\right)}{\widetilde{K}_2\left(x,x\right)} - \frac{1}{\widetilde{K}_2\left(x,x\right)} \int_0^x \Big(K_2'\left(x,t\right) F_2\left(U\left(t\right)\right) + \widetilde{K}_2'\left(x,t\right) V\left(t\right)\Big)\, dt \qquad (12.3)$$

نلَاحظ أَن النظَام 12.3 هو أَنظمة معَادلَات تكَاملية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني .

لقد تطرقنَا فيمَا سبق لكيفية حل هذَا الشكل من الأَنظمة و ذلك حسب طريقة التحلل و التقريبَات المتعَاقبة.

ملَاحظة:

* إِذَا كَان $K_1(x,x) \neq 0$ و $\widetilde{K}_2\left(x,x\right) \neq 0$ فَان أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني .

* إِذَا كَان $K_1(x,x) = 0$ و $\widetilde{K}_2\left(x,x\right) = 0$ في هذه الحَالة نقوم بَاشتقَاق مرة أُخرَى بَالنسبة لـ x دومَا ليصبح نظَام المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني .

مثَال: حل أَنظمة المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{56}x^5 &= \int_0^x \big((x-t+1)\,U(t)+(x-t)\,V^2(t)\big)\,dt \\ \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{30}x^6 &= \int_0^x \big((x-t)\,U^2(t)+(x-t+1)\,V(t)\big)\,dt \end{aligned} \tag{13.3}$$

بَالأَشتقَاق نجد

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{7}x^7 &= U(x)+\int_0^x \big(U(t)+V^2(t)\big)\,dt \\ x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5 &= V(x)+\int_0^x \big(U^2(t)+V(t)\big)\,dt \end{aligned} \tag{14.3}$$

ليصح نظَام المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني و يكتب بشكل أَفضل أَي :

$$\begin{aligned} U(x) &= x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{7}x^7-\int_0^x \big(U(t)+V^2(t)\big)\,dt \\ V(x) &= x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\int_0^x \big(U^2(t)+V(t)\big)\,dt \end{aligned} \tag{15.3}$$

$$\begin{aligned} U_0(x) &= x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{7}x^7, V_0(x)=x^3+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^5 \\ U_1(x) &= -\int_0^x \big(U_0(t)+V_0^2(t)\big)\,dt=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7+\ldots\ldots \\ V_1(x) &= -\int_0^x \big(U_0^2(t)+V_0(t)\big)\,dt=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+\ldots\ldots \end{aligned} \tag{16.3}$$

نلَاحظ في هذه الحَالة بأَخذ التقريب الصفري لـ $U_0(x)$ و $V_0(x)$ نجد : $U(x)=x^2, V(x)=x^3$.
أَي

$$(U(x),V(x))=(x^2,x^3) \tag{17.3}$$

و هو حل نظَام المعَادلَات التكَاملية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَّاني (13.3) .

2.3 أَنظمة المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني

سوف ندرس في هذَا الجزء أَنظمة المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمط الثَاني علَى الشكل:

$$\begin{aligned} U^{(i)}(x) &= f_1(x) + \int_0^x \left(K_1(x,t)\,F_1(U(t)) + \widetilde{K}_1(x,t)\,\widetilde{F_1}(V(t))\right) \\ V^{(i)}(x) &= f_2(x) + \int_0^x \left(K_2(x,t)\,F_2(U(t)) + \widetilde{K}_2(x,t)\,\widetilde{F_2}(V(t))\right) \end{aligned} \tag{18.3}$$

و هنَاك العديد من الطرق المتنوعة لحل الأَنظمة المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني .

1.2.3 طريقة التكرَار و التبَاين

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= U_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(U_n^{(i)}(t) - f_1(t) - \int_0^t y_1(t,r)\,dr\right)dt \\ V_{n+1}(x) &= V_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(V_n^{(i)}(t) - f_2(t) - \int_0^t y_2(t,r)\,dr\right)dt \end{aligned} \tag{19.3}$$

حيث

$$\begin{aligned} y_1(t,r) &= K_1(t,r)\,F_1\left(U(r) + \widetilde{K}_1(t,r)\,\widetilde{F}_1(V(r))\right) \\ y_2(t,r) &= K_2(t,r)\,F_2\left(U(r) + \widetilde{K}_2(t,r)\,\widetilde{F}_2(V(r))\right) \end{aligned}$$

و تعتمد هذه طريقة علَى خطوتين أَسَاسيتين همَا كمَا هو مذكور في الجزء السَابق و همَا :

ـ تحديد مضَاعف λ لَاغرَانج.

ـ طريقة التحديد المتعَاقبة U_{n+1}, V_{n+1} و ذلك بَاعطَاء أَو فرض V_0, U_0 .

يكون الحل

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x)\,,\, V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x) \tag{20.3}$$

مثَال:

حل أَنظمة المعَادلَات التكَامل – تفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمط الثَاني:

$$U'(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x \left((x-t)\, U^2(t) + V^2(t)\right) dt$$
$$V'(x) = -1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x \left((x-t)\, V^2(t) + U^2(t)\right) dt \qquad (21.3)$$

و ليكن $U_0(x) = V_0(x) = 0$ ، و بَاستعمَال الطريقة المذكورة و الموضحة في (19.3) .

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) - \int_0^x \left(U_n'(t) - 1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - \int_0^t y_1(t,r)\, dr\right) dt$$
$$V_{n+1}(x) = V_n(x) - \int_0^x \left(V_n'(t) + 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4 - \int_0^t y_2(t,r)\, dr\right) dt \qquad (22.3)$$

حيث

$$y_1(t,r) = (t-r)\, U^2(r) + V^2(r)$$
$$y_2(t,r) = (t-r)\, V^2(r) + U^2(r)$$

نلَاحظ أَن مضَاعف لَاغرَانج $\lambda = -1$.

و بَاستعمَال التقريب المتعَاقب و بعد الحسَاب $V_0(x) = U_0(x) = 1$.

$$U_1(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{60}x^5, V_1(x) = 1 - x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5$$
$$U_2(x) = 1 + x + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^4\right) - \frac{1}{30}x^5 + ...$$
$$V_2(x) = 1 - x + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^4\right) + \frac{1}{30}x^5 + ...$$
$$U_3(x) = 1 + x + \left(\frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{30}x^5\right) + ..., V_3(x) = 1 - x + \left(\frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{30}x^5\right) + ... \qquad (23.3)$$

و بنفس الطريقة نستنتج أَن حل أَنظمة التكَامل – تفَاضلية (21.3) من الشكل :

$$(U(x), V(x)) = (1 + x, 1 - x) \qquad (24.3)$$

الخَاتمة

يندج محتوَى هذه المذكرة في العمل علَى تحديد بعض طرق حل المعَادلَات التكَاملية و المعَادلَات تكَاملية التفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا.

وتكمن أَهمية المعَادلَات التكَاملية الخطية و غير الخطية علَى العموم في المسَائِل الفيزيَائِية و التي يطلق عليهَا العلَاقَات الطيفية و مسَائِل الَاتصَال في علم المرونة.

لذلك قمنَا أولَا بعرض موجز لبعض أَشكَال و المعَادلَات التكَاملية مهمَا كَانت خطية أَو غير خطيةودرَاسة مفصلة حول المعَادلَات التكَاملية وَالمعَادلَات التكَاملية – التفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمطين الَاول و الثَاني و أَنظمتهَا.

المعَادلَات فولتيرَا لهَا تطبيقَات في علم تركيب سكَاني و كذلك في درَاسة الموَاد ذَات المرونة اللزجة و كذلك في علم ريَاضيَات المخَاطر من خلَال نظرية التجديد في نظرية الأَحتمَال .

المصَادر

[1] Abdul −majid wazwaz ,Linear and non−linear integral equtions methods and applications, Sait xavier university chicago.USA.
[2] Berlin heidelberg, volterra − stieltjes integral equations and generalized ,Ordinary differentil expressions springer− vealag, New york ,Tokyo 1983.
[3] Juren appell espedito de pascale alfonso vignoli , Non−linear spectral theory, walter de gruyter , Berlin, New york.
[4] M.rahman, integral equations and their applications , Dalhousie university, Canada.
[5]Peter J.collins. Differential and integral equtions,Senior st edmund,Oxford.
[6] T.A.burton, volterra integral and differential equations,Southern illnois university carbondale ,illnois ,USA.

الملخص:

تكمن أَهمية هذَا العمل في درَاسة بعض طرق حل المعَادلَات التكَامليةو التكَاملية – التفَاضلية غير خطية لفولتيرَا من النمطين الَاول و الثَاني .

كمَا قمنَا بدرَاسة طرق حل أَنظمة المعَادلَات التكَاملية و التكَاملية – التفَاضلية غير الخطية لفولتيرَا من النمطين الأَول و الثَاني.

الكلمَات الَافتتَاحية: المعَادلَات التكَاملية غير خطية لفولتيرَا .:. المعَادلَات التكَاملية – التفَاضلية غير خطية لفولتيرَا.

Abctracl:

The aim of this study is to show some methods of solving the integral equations and the non− linear volterra integro−differentiol in two ways, the first and second.

Also, we study the methods of solving the systems of the integnal equations and non− linear volterra integro− differentiol in two ways.

The keys words:

*non− linear volterra integral equations.

*non− linear volterra integro differentiol equations