UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Guermit Djamila Nourelimen

Thème

Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires,théorie et applications

Version de : /05/2016

Devant le jury composé de :

M. Abbassi Hossine	M. A. UKMO université-Ouargla	Président
M. Tellab. Brahim	M. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur
M.Mammeri.Mohammed	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur
M. Bencheikh. Abdelkrim	M. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur

l'année universitaire :2015/2016

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,
A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,
Qui m'ont aide à affronter les difficultés,
A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.
A mes très chères soeurs et mes frères.
A toute ma famille.
A tous les amis.
A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla.
A tous.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

* Je tiens à remercier le professeur **Brahim Tellab** de m'avoir fait l'honneur D'examiner ce mémoire et d'en être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail. J'admire beaucoup ses travaux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.*

* J'adresse également de vifs remerciements à **M. Bencheikh Abdelkrim** Je remercie d'avoir présidé le jury de soutenance, et lui adresse toute ma gratitude.*

* J'adresse mes remerciements à **M. Mammeri Mohammed** qui m'a fait l'honneur de juger ce travail.*

* Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail. *

* Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nos le connaissons aujourd'hui, Ces origines remontent à la fin du 17-ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral.

Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée n-ième d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hospital en 1695, L'Hospital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hospital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction, a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. De nombreuses tentatives pour la résolution des équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Maintenant, nous citons une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20-ième siècle :

P.S. Laplace(1812), J.B.J. Fourier(1822), N.H. Abel(1823-1826), J. Liouville(1832-1873), B. Riemann(1847), H. Holmgren(1865-1867), A.K. Grunwald(1867-1872), A.V. Letnikov(1868-1872), H. Laurent(1884), P.A. Nekrassov(1888), A. Krug(1890), J. Hadamard(1892), O. Heaviside(1892-1912), S. Pincherle(1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood(1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy (1923), A. Marchaud(1927), H.T. Davis(1924-1936), A. Zygmund(1935-1945), E.R. Amour(1938-1996), H. Kober(1940), D.V. Widder(1941), M. Riesz(1949)

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peut plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire. Pour plus de détails sur ce sujet on pourra consulter ([1], [2], [3], [4]).

Ces dernières années, il y a eu un développement considérable concernant l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire, (voir [1],[7],[8],[9],[10]).

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques opérateurs de dérivations fractionnaires.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles tout au long de ce mémoire.

Deuxième chapitre : Ce chapitre est consacré pour les définitions de quelques opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires et leurs propriétés.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, nous étudions quelques exemples d'équations différentielles et intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 1

Préliminaires et notions générales

1.1 fonctions usuelles pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques fonctions spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.
La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, z > 0. \tag{1.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Une propriété fondamentale de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \Big[- t^z e^{-t} \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\
... & \quad .... \quad ... \quad ... \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!
\end{aligned} \tag{1.3}$$

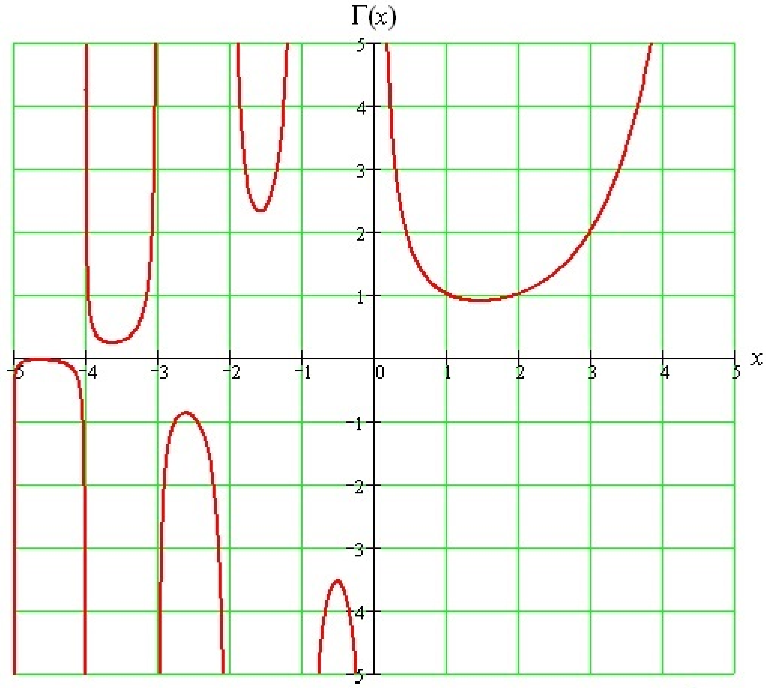


FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction gamma

Nous montrons maintenant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
De la définition (1.1) nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.4}$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.5}$$

Si nous multiplions ensemble (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} drd\theta = \pi. \tag{1.7}$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

L'équation fonctionnelle (1.2) entraine pour les entiers relatifs positifs n (voir [6])

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7...(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9...(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),
\end{aligned}$$

et pour les valeurs négatives,

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5...(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 La fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est définie par une intégrale finie. Sa définition est donnée par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x,y \in \mathbb{R}_+ \tag{1.8}$$

La fonction de Bêta peut également définie en termes de la fonction Gamma (voir [3]) :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x,y \in \mathbb{R}_+ \tag{1.9}$$

1.1.3 La fonction d'erreur

La définition de la fonction d'erreur est donnée par :

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt, \quad z \in \mathbb{R}_+ \tag{1.10}$$

et elle se présente par une série en tant que :

$$\begin{aligned}
erf(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^9}{216} + ...)
\end{aligned}$$

La fonction d'erreur complémentaire est une fonction étroitement liée qui peut être écrit en termes de la fonction d'erreur de la manière suivante :

$$erfc(z) = 1 - erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-t^2}dt \tag{1.11}$$

De la formule (1.10) en résulte que $erf(0) = 0$ et $erf(\infty) = 1$.
Sous forme d'une série la fonction $erfc(z)$ s'écrit sous la forme :

$$erfc(z) = \frac{e^{-z^2}}{z\sqrt{\pi}}\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!(2z)^{2n}}\right).$$

1.1.4 La fonction Mellin-Ross

La fonction Mellin-Ross, $E_t(\nu, a)$, se pose lors de la recherche de l'intégrale fractionnaire d'un fonction exponentielle e^{at}. Elle est définie par :

$$E_t(\nu, a) = t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\nu+1)} = t^\nu E_{1,\nu+1}(at).$$

1.1.5 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est nommée d'après un mathématicien suédois qui l'a défini en 1903. (voir [11]) Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, e^x, et il joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire. Les représentations de la fonction Mittag-Leffler à un et à deux paramètres peuvent être définies en terme d'une série de puissances :

$$\begin{aligned} E_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0, && (1.12)\\ E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. && (1.13) \end{aligned}$$

De la définition (1.13), il en résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

En effet, par définition on a,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\beta)}\\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). && (1.14) \end{aligned}$$

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple,

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x\\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x-1}{x}\\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

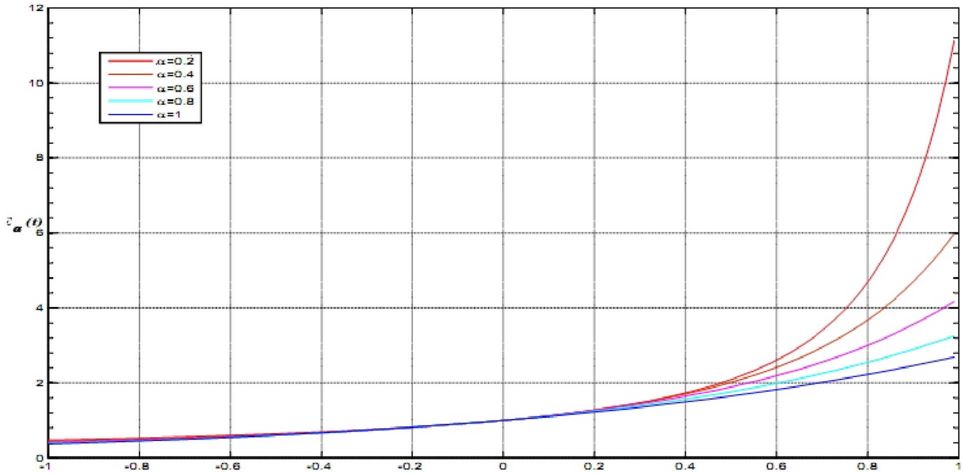


FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

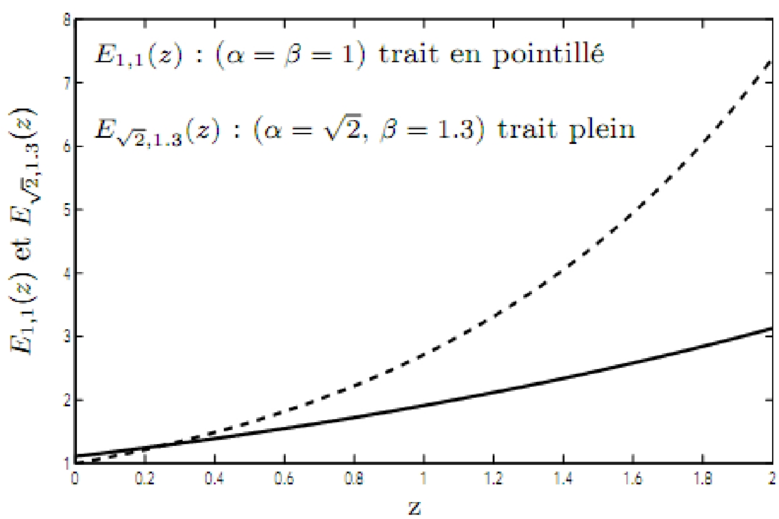


FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

Chapitre 2

Dérivées et Intégrales fractionnaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques approches de généralisation de la notion de dérivation et intégration.

2.1 Les Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

2.1.1 Unification des dérivées et des intégrales fractionnaires d'ordre entier

Dans cette section nous donnons une approche pour l'unification des deux notions, qui sont souvent présentées séparément dans l'analyse classique : dérivée d'ordre entier n et intégrale répétée n-fois.

Considérons une fonction continue $y = f(t)$.
On sait que la dérivée première de la fonction $f(t)$ est définie par :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.1}$$

En appliquant cette définition deux fois, on trouve la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

En utilisant (2.1) et (2.2) nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.3}$$

et par récurrence,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{2.4}$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}. \tag{2.5}$$

Considérons maintenant, l'expression suivante qui généralise les fractions (2.1) et (2.4) :

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{p}(-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \tag{2.6}$$

où p est un entier arbitraire, n est aussi un entier.
Il est évident que pour $p \leq n$, on a :

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \tag{2.7}$$

car dans un tel cas, comme entraîné de (2.5), tous les coefficients du numérateur après $\binom{p}{p}$ sont nuls.

Pour les valeurs négatives de p, et Par commodité, on note :

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)...(p+r-1)}{r!}, \tag{2.8}$$

alors, on a :

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)...(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

et en remplaçant p dans (2.6) par $(-p)$, on peut écrire :

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}}\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \tag{2.10}$$

où p est un nombre entier positif.

Si p est fixé, alors $f_h^{(-p)}(t)$ tend vers "0"
quand $h \to 0$. Pour arriver à une limite non nulle, on suppose que $n \to \infty$ quand $h \to 0$.
Alors, on peut prendre $h = \dfrac{t-a}{n}$, où a est une constante réelle, et on considère la valeur limite, (soit finie ou infinie), de $f_h^{(-p)}(t)$, que l'on notera comme suit :

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(-p)}(t) =_a D_t^{-p} f(t). \tag{2.11}$$

telle que : $nh = t - a$
Considérons quelques cas particuliers.
Pour $p = 1$, on a :

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=0}^{n} f(t-rh), \tag{2.12}$$

en tenant compte de $t - nh = a$ et que la fonction $f(t)$ est supposée continue, on conclut que :

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-1)}(t) =_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{2.13}$$

Pour $p = 2.$ on a :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3...(2+r-1)}{r!} = r+1,$$

et on a :

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (r+1)hf(t-rh). \tag{2.14}$$

En notant $t + h = y$, nous pouvons écrire :

$$f_h^{-2}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh)f(t-rh). \tag{2.15}$$

Si $h \longrightarrow 0$, alors :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f_h^{-2}(t) =_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dt = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

car $y \longrightarrow t$ quand $h \longrightarrow 0$.
Pour Le troisième cas particulier $p = 3$, en tenant compte de

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4...(3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2},$$

Nous avons :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^{n} (r+1)(r+2)h^2 f(t-rh). \tag{2.16}$$

En posant, comme ci-dessus, $t + 2h = y$, nous obtenons :

$$f_h^{(-3)} = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \tag{2.17}$$

L'expression (2.17), peut s'écrire sous la forme :

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \tag{2.18}$$

En faisant tendre $h \longrightarrow 0$, nous obtenons :

$${}_aD_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau \tag{2.19}$$

Parce que $y \longrightarrow t$ et $h \longrightarrow 0$ et

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh)=\lim_{h\longrightarrow 0}h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau=0$$

Les relations (2.13)-2.19) suggèrent l'expression générale suivante :

$$_aD_t^{-p}f(t)=\lim_{h\longrightarrow 0_{nh=t-a}}h^p\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}f(t-rh)=\frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau. \tag{2.20}$$

Pour la démonstration de la formule (2.20), on procède par récurrence (voir [3]).
Montrons maintenant, que (2.20) est une représentation d'une intégrale répétée p-fois.
En ingérant la relation

$$\frac{d}{dt}(_aD_t^{-p}f(t))=\frac{1}{(p-2!)}\int_a^t (t-\tau)^{p-2}f(\tau)d\tau =_a D_t^{-p+1}f(t)$$

de a à t, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t \Big(_a D_t^{-p+1}f(t)\Big)dt,\\
_aD_t^{-p+1}f(t) &= \int_a^t \Big(_a D_t^{-p+2}f(t)\Big)dt,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
_aD_t^{-p}f(t) &= \int_a^t dt\int_a^t (_aD_t^{-p+2}f(t))dt\\
&= \int_a^t dt\int_a^t dt\int_a^t (_aD_t^{-p+3}f(t))dt\\
&= \underbrace{\int_a^t dt\int_a^t dt...\int_a^t}_{p-fois} f(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

On remarque que la dérivée d'ordre entier n et l'intégrale répétée n-fois d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de la formule générale :

$$_aD_t^{-p}f(t)=\lim_{h\longrightarrow 0_{nh=t-a}}h^p\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh), \tag{2.22}$$

qui représente la dérivée d'ordre m si $p=m$ et l'intégrale répétée m-fois si $p=-m$.

Théorème 2.1.1 *Considérons une suite (β_k) de nombres réels et supposons que*

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\longrightarrow\infty}\beta_k=1,\\
&\lim_{n\longrightarrow\infty}\alpha_{n,k}=0 \quad \textit{pour tout } k,\\
&\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}=A, \quad \textit{pour tout } k,\\
&\sum_{k=1}^{n}\mid\alpha_{n,k}\mid< K \quad \textit{pour tout } n.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{n,k}\beta_k = A.$$

Preuve : Pour la démonstration, on renvoit à [3]

■

2.1.2 Les dérivées d'ordre arbitraire

Considérons le cas $p>0$. Notre but est d'évaluer la limite suivante :

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh) = \lim_{h\longrightarrow 0} f_h^{(p)}(t) \qquad (2.23)$$

où

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh) \qquad (2.24)$$

Pour évaluer la limite (2.23), on utilise la propriété des coefficients du binôme.

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1}, \qquad (2.25)$$

nous pouvons écrire donc,

$$\begin{aligned} f_h^{(p)}(t) &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh) \\ &+ h^{-p}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r-1}f(t-rh) \\ &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh) \\ &+ h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\binom{p-1}{r}f(t-(r+1)h) \\ &= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) \\ &+ h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}\Delta f(t-rh) \qquad (2.26) \end{aligned}$$

Où

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h).$$

En appliquant la propriété (2.25), répétée m-fois, on obtient en partant de (2.26)

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \binom{p-2}{r} \Delta^2 f(t-rh) \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + (-1)^{n-1} \binom{p-2}{n-1} h^{-p} \Delta f(a+h) \\
&+ (-1)^{n-2} \binom{p-3}{n-3} h^{p} \Delta^2 f(a+2h) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-3} (-1)^r \binom{p-3}{r} \Delta^3 f(t-rh)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
&+ h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r \binom{p-m-1}{r} \Delta^{m+1} f(t-rh). \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Évaluant maintenant, la limite du k-ième terme de la première somme dans (2.27).

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\longrightarrow 0} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) \\
=& \lim_{h\longrightarrow 0_{nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \times (\frac{n}{n-k})^{p-k} (nh)^{-p+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
=& (t-a)^{-p+k} \lim_{n\longrightarrow\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \times \lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{n}{n-k})^{p-k} \times \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
=& \frac{f^k(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}, \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

car (2.7) nous donne :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k}$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)\ldots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (\frac{n}{n-k})^{p-k} = 1,$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\triangle^k f(a+kh)}{h^k}=f^k(a).$$

Sachant la limite (2.28), nous pouvons facilement écrire la limite de la première somme dans (2.28).
pour évaluer la limite de la deuxième somme dans (2.27), nous l'écrivons sous la forme :

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}$$

$$\times h(rh)^{m-p}\frac{\triangle^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}} \tag{2.29}$$

Pour appliquer le théorème 2.1 nous prenons

$$\beta_r=(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p},$$

$$\alpha_{n,r}=h(rh)^{m-p}\frac{\triangle^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}},\qquad h=\frac{t-a}{n}$$

En utilisant l'identité

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$

on vérifie que,

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\beta_r=\lim_{r\longrightarrow\infty}(-1)^r\Gamma(-p+m-1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}=1. \tag{2.30}$$

Donc, si $m-p>-1$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}h(rh)^{m-p}\frac{\triangle^{m+1} f(t-rh)}{h^{m+1}}=\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{2.31}$$

en tenant compte (2.30) et (2.31) et en appliquant théorème $2.1.1$ nous concluons que

$$\lim_{h\longrightarrow 0}h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\triangle^{m+1} f(t-rh)$$

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau.$$

Utilisant (2.28) et (2.31), nous obtenons finalement

$${}_aD_t^pf(t)=\lim_{h\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{2.32}$$

Exemple 2.1.1 ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov***
En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante. Si f(t) = c et p non entier on a : $f^{(k)}(t)$= 0 pour k = 1,2,...,n

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1}}_{\Downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^n(\tau)d\tau}_{\Downarrow 0} \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}
\end{aligned}
$$

2.1.3 La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grünwald-Latnikov

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$ et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}$$

donc

$${}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_0^1 (1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.1.2

$${}_0D_t^{1/2}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}$$

2.1.4 Propriétés

Composition avec les dérivées d'ordre entier

proposition 2.1.1 *Pour m entier positif et p nom entier on a :*

$$\frac{d^m}{dt^m}({}_aD_t^p f(t)) ={}_a D_t^{m+p} f(t)$$

et

$${}_aD_t^p(\frac{d^m}{dt^m} f(t)) ={}_a D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}$$

Preuve : Pour m entier positif et p non entier avec ($n-1<p<n$), on a :

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dt^m}({}_aD_t^p f(t)) &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))}\int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Alors,

$$\frac{d^m}{dt^m}({}_aD_t^p f(t)) ={}_a D_t^{m+p} f(t)$$

, mais :

$$\begin{aligned}{}_aD_t^p(\frac{d^m}{dt^m} f(t)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))}\int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau)d\tau \\ &= {}_aD_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}\end{aligned}$$

on déduit alors que la dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne comutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-1$.

■

Composition avec les dérivées fractionnaires

proposition 2.1.2 * *Si $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, alors :*

$${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) ={}_a D_t^{p+q} f(t)$$

* *si $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$, alors :*

$${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) ={}_a D_t^{p+q} f(t)$$

Seulement si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,...,r-2$ avec $r=\max(m,n)$

Preuve : Si $q<0$ et $p<0$, alors :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}({}_aD_t^q f(\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}d\tau\int_a^\tau (t-s)^{-q-1}f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)}\int_a^t f(s)ds\int_s^t (\tau-s)^{-q-1}(t-\tau)^{-p-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-(p+q))}\int_a^t (t-s)^{-p-q-1}f(s)ds =_a D_t^{p+q}f(t)
\end{aligned}$$

* Si $q<0$ et $0\leq n-1<p<n$, on a : $p=n+(p-n)$ avec $(p-n)<0$, alors :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n}{}_aD_t^{p-n}({}_aD_t^q f(t)) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}{}_aD_t^{q+p-n}(f(t) \\
&= {}_aD_t^{p+q}f(t)
\end{aligned}$$

* Si $q<0$ et $0\leq n-1<p<n$, on a : $p=n+(p-n)$ avec $p-n<0$, alors :

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n}{}_aD_t^{p-n}({}_aD_t^q f(t)) \\
&= \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{q+p-n}f(t)) \\
&= {}_aD_t^{p+q}f(t)
\end{aligned}$$

* Pour $0\leq m-1<q<m$ et $p<0$, on a :

$${}_aD_t^q f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-q)}\int_a^t (t-\tau)^{m-q-1}f^{(m)}(\tau)d\tau$$

et $(t-a)^{k-q}$ ont des singularités non intégrables, donc ${}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t))$ n'existe que si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,...,m-2$ et dans ce cas on a

$${}_aD_t^q f(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{m-1-q}}{\Gamma(m-q)}+_a D_t^{q-m}f^{(m)}(t)$$

alors,

$$\begin{aligned}
{}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-q-p}}{\Gamma(m-q-p)}+_a D_t^{p+q-m}f^{(m)}(t) \\
&= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-(q+p)-1}}{\Gamma(m-q-p)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(m-(p+q)}\int_a^t (t-\tau)^{m-(p+q)-1}f^{(m)}(\tau)d\tau \\
&= {}_aD_t^{p+q}f(t)
\end{aligned}$$

* Pour $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$, on a :

$$_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}{}_aD_t^{p-n}({}_aD_t^q f(t)$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-2$ alors

$$_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) =_a D_t^{q+p-n} f(t)$$

par conséquent, :

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q f(t) &= \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^{q+p-n}(f(t)) \\ &=_a D_t^{p+q} f(t) \end{aligned}$$

■

2.1.5 Transformée de Laplace

soit f une fonction qui possède une transformée de Laplace $F(s)$. pour $0 \leq p < 1$, on a :

$$_0D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau$$

, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}_0D_t^p f(t)](s) &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}[sF(s) - f(0)] \\ &= s^p F(s) \end{aligned}$$

Pour $p \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi :

$$\mathcal{L}[{}_0D_t^p f(t)](s) = s^p F(s)$$

2.2 Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette partie, nous donnons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.2.1 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.
Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

Le théorème de Fubini, nous donne :

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2.1 *Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{2.34}$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 2.2.1

La formule (2.34) est une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.

Remarque 2.2.2

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$.

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = g_\alpha(t) \star f(t).$$

2.2.2 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} t^\beta dt \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

La relation (2.35) montre que l'intégrale frctionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par

$$ {}_a^R D_t^{-\alpha} C = I_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}. $$

Et en particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
{}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\
{}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\
{}_a^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.
\end{aligned}
$$

proposition 2.2.1

Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a,b))$.

$$ \text{i)} \qquad I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} f, \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0) \tag{2.36} $$

$$ \text{ii)} \qquad \frac{d}{dt}(I_a^{\alpha} f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 1 \tag{2.37} $$

$$ \text{iii)} \qquad \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} (I_a^{\alpha} f)(t) = f(t), \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.38} $$

Preuve :
i) Pour la demonstration on utilise la fonction Bêta d'Euler . En effet :

$$
\begin{aligned}
[I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^{\beta} f)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau ds,
\end{aligned}
$$

en utilisant le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$$ [I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right] d\tau. $$

Le changement de variable $s = \tau + (t-\tau)\mu$, nous donne :

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \\
&= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$ [I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f)](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t) $$

ii) Pour justifier la deuxième identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et la relation fondamentale de la fonction gamma d'Euler : $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.
iii) Pour la dernière identité, on considère la fonction $f \in C^0([a,b))$, on a

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De la relation (2.35) on peut écrire :

$$(I_a^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1 \;\; quand \;\; \alpha \to 0^+.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a,b)$ qui nous permet d'écrire :

$$\forall t, \tau \in [a,b), \;\; \forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0 : \;\; |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \varepsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \qquad (2.40)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\
&\leq 2 \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \;\; \forall t \in [a,b) \\
&= 2M \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \;\; \text{où} \;\; M = \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)|. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Une combinaison de (2.39), (2.40) et (2.41) nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| (I_a^\alpha f)(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\varepsilon \delta^\alpha + 2M((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)],
\end{aligned}$$

en faisant tendre α vers 0^+, on obtient :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left|(I_a^\alpha f)(t)-\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}f(t)\right|\leq\varepsilon$$

autrement dit :

$$\left|\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon,\ \ \forall\varepsilon>0,$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f)(t)=f(t)$$

■

2.2.3 Dérivées d'ordre arbitraire

Définition 2.2.2

Soit $\alpha\in[m-1,m[$ avec $m\in\mathbb{N}^\star$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par

$$\begin{aligned}({}_a^RD_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m[(I_a^{m-\alpha}f)(t)] \qquad (2.42)\\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_a^t(t-\tau)^{m-\alpha-1}f(\tau)d\tau,\ \ m-1\leq\alpha<m.\end{aligned}$$

2.2.4 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)=(t-a)^\beta$.
En utilisant (2.35) on peut écrire

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha(t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right],\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha}, \qquad (2.43)\end{aligned}$$

on sait que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t-a)^{\beta+m-\alpha} = (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \qquad (2.44)$$

Par substitution de (2.44) dans (2.43) on obtient :

$$\begin{aligned}{}_a^RD_t^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)}{(\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1)...(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \qquad (2.45)\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3

i) La formule de dérivation (2.45) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$$ {}_a^RD_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta. \tag{2.46}$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on on arrive au résultat suivant :

$$ {}_a^RD_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle ni constante ! mais on a

$$ {}_a^RD_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Définition 2.2.3 *(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)*

$$\forall t > a, \quad {}_a^RD_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

Définition 2.2.4 *(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche)*

$$\forall t > a, \quad {}_a^RD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau)d\tau$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f, c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

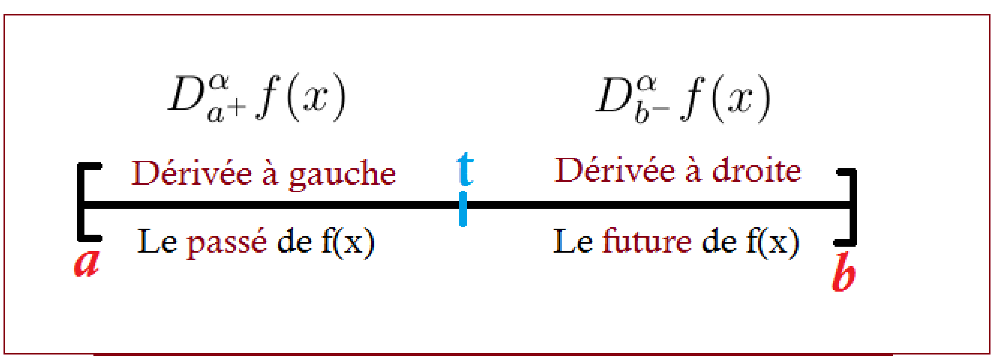
Définition 2.2.5 *(Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)*

$$\forall t < b, \quad {}_t^RD_b^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau)d\tau$$

Définition 2.2.6 *(Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite)*

$$\forall t < b, \quad {}_t^RD_b^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau)d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^RD_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^RD_b^\beta f(t)$ sont définies.



Les dérivées à droite et à gauche de f(x)

2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par M.Caputo. Soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in N^{\star}$) f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a,b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$
\begin{aligned}
{}_a^cD_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= I^{n-p}(\frac{d^n}{dt^n} f(t))
\end{aligned}
$$

2.3.1 Propriétés

1. **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville** soit $p \geq 0$ (avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in N^{\star}$). supposons que f est une fonction telle que ${}_a^cD_t^p f(t)$ et ${}_a^RD_t^p f(t)$ existe, alors :

$$
{}_a^cD_t^p f(t) =_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}.
$$

On déduit que, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ on aura ${}_a^cD_t^p f(t) =_a^R D_t^p f(t)$

2. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :**
Si f est une fonction continue, on a :

$$
{}_a^cD_t^p f(t) I_a^p = f
$$

et $I_a^p({}_a^cD_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)(t-a)^k}{k!}$.
Alors, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droit.

2.3.2 Transformée de Laplace

Si f possède un transformée de Laplace $F(s)$, alors :

$$
\mathcal{L}[{}_0^cD_t^p f(t)](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0)
$$

(avec n-1≤p<n).

Comme cette transformée induit les valeurs de la fonction f et ces dérivées $f^{(k)}$ en la borne inférieure $t = 0$ pour lesquelles certaines interprétations physique existent elle peut être très utile dans l'application.

Exemple 2.3.1

1. ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :***
La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$ {}_a^c D_t^p C = 0 $$

2. ***La dérivée de*** $f(t) = t - a)^\alpha$ ***au sens de Caputo :***
Soit p *non entier et* $0 \leq n - 1 < p < n$ *avec* $\alpha > n - 1$ *alors, on a :*

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-\tau)^{\alpha-n} $$

d'où

$$ {}_a^c D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau. $$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ *on aura :*

$$ \begin{aligned} {}_a^c D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1}(s)^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \end{aligned} $$

2.3.3 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$$ D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t) $$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

De même pour Rieman -Liouville les dérivées fractionnaires d'ordre p, (avec $k - 1 \leq p < k$), nous avons :

$$ \begin{aligned} {}_a D_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}(\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} $$

$$+\frac{\mu}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}g(\tau)d\tau$$
$$= \lambda_a D_t^p f(t) + \mu_a D_t^p g(t)$$

Règle de Leibniz
Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) - R_n^p(t)$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}g(\tau)d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)d\xi.$$

($\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n^p(t) = 0$).
Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a,t]$, la formule devient :

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t)$$

D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 3

Résolution de quelques équations différentielles fractionnaire

Dans ce chapitre, on va résoudre quelques équations différentielles fractionnaires, en se basant sur la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires.

3.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$.

$$ {}_0^R D_t^{\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \tag{3.1} $$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée dans [3] par :

$$ G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}. \tag{3.2} $$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$$ \mathcal{L}\{{}_0^R D_t^{\alpha} f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s). \tag{3.3} $$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$ {}_0^R D_t^{\alpha} f(t) = g^{(n)}(t), \tag{3.4} $$

ce qui entraine

$$ g(t) = {}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq p < n. \tag{3.5} $$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à :

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \tag{3.6}$$

où

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)} F(s). \tag{3.7}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, nous obtenons :

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t). \tag{3.8}$$

Par substitution de (3.7) et (3.8) dans (3.6), nous arrivons à l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0^R D_t^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \tag{3.9}$$

l'application pratique de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, est limitée par l'absence d'une interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.

En partculier, si $n = 1$ et $n = 2$, on a respectivement,

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.10}$$

$$\mathcal{L}\{{}_0^R D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - {}_0^R D_t^{\alpha-1} f(0) - s\,{}_0^R D_t^{\alpha-2} f(0), \quad 1 < \alpha \leq 2. \tag{3.11}$$

Le tableau 3.1 donne un bref résumé de certaines transformées de Laplace utiles. Nous allons souvent se référer à ce tableau le long de ce mémoire. a et b sont deux réels constants $(a \neq b)$ et $\alpha, \beta > 0$ arbitraires.

$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\}$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha+a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

TABLE 3.1 – Transformée de Laplace de quelques fonctions

3.2 Quelques applications sur la résolution des équations différentielles fractionnaires

Exemple 3.2.1

Soit l'équation différentielle fractionnaire

$$ {}_0^R D_t^{\frac{2}{3}} y(t) = a y(t), $$

où a est une constante réelle.
On a : $0 < \alpha = \frac{2}{3} \leq 1,$ nous pouvons utiliser donc la formule (3.10). En prenant la transformée de laplace des deux membres de cette équation, on obtient :

$$ \mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^{\frac{2}{3}} y(t)\} = a\mathcal{L}\{y(t)\}, $$

ce qui nous donne :

$$ s^{\frac{2}{3}} Y(s) - {}_0^R D_t^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = aY(s). \tag{3.12} $$

La constante ${}_0^R D_t^{-(1-\frac{2}{3})} y(0) = {}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$ est la valeur de ${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t)$ en $t = 0$. Si nous supposons que cette valeur existe, et nous l'appelons C_1, alors l'équation (3.12) devient :

$$ s^{\frac{2}{3}} Y(s) - C_1 = aY(s). $$

En résolvant cette équation, on arrive à :

$$ Y(s) = \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a} $$

Finalement, grâce au tableau 3.1, on trouve l'inverse de la transformée de Laplace de $Y(s)$, puis on conclut que :

$$ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c_1}{s^{\frac{2}{3}} - a} \right\} = C_1 t^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}\left(a t^{\frac{2}{3}} \right). $$

Dans l'exemple 3.2.1 (et toute autre situation similaire), on peut se demander si l'existence de ${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0)$ implique que sa valeur est en fait C_1 comme l'on a supposé. Nous allons montrer c'est effectivement le cas.

Encore, une autre fois nous utilisons la transformée de Laplace (3.3) on trouve :

$$ \mathcal{L}\left\{ {}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t) \right\} = s^{-\frac{1}{3}} Y(s). \tag{3.13} $$

Comme
$$Y(s) = \frac{C_1}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$
alors
$$\mathcal{L}\left\{ {}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t) \right\} = \frac{C_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a}$$
par conséquent
$${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c_1 s^{-\frac{1}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} - a} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{C_1 s^{\frac{2}{3}-1}}{s^{\frac{2}{3}} - a} \right\} = C_1 E_{\frac{2}{3},1}\left(a t^{\frac{2}{3}} \right)$$
en $t = 0$, on obtient
$${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}} y(0) = C_1 E_{\frac{2}{3},1}(0) = C_1.$$

Exemple 3.2.2

Considérons comme deuxième exemple l'équation suivante :
$${}_0^R D_t^{\frac{4}{3}} y(t) = 0,$$
Maintenant, on a : $1 < \alpha = \frac{4}{3} \leq 2$, nous pouvons donc utiliser la formule (3.11). En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de cette équation, on trouve :
$$\mathcal{L}\{ {}_0^R D_t^{\frac{4}{3}} y(t) \} = 0,$$
ce qui nous donne :
$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - s\, {}_0^R D_t^{-(2-\frac{4}{3})} y(0) - {}_0^R D_t^{-(1-\frac{4}{3})} y(0) = 0. \tag{3.14}$$

D'une façon analogue que dans l'exemple 3.3.1, nous supposerons que les constantes ${}_0^R D_t^{-(2-\frac{4}{3})} y(0)$ et ${}_0^R D_t^{-(1-\frac{4}{3})} y(0)$ existent et appelées C_1 et C_2 respectivement, alors (3.14) devient
$$s^{\frac{4}{3}} Y(s) - C_1 s - c_2 = 0.$$

En résolvant par rapport à $Y(s)$, nous obtenons :
$$Y(s) = \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} = 0,$$

nous utilisons encore une fois le tableau 2.1, on trouve la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$ et nous concluons que :
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c_1 s}{s^{\frac{4}{3}}} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{c_2}{s^{\frac{4}{3}}} \right\} \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})} t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})} t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Programme Matlab :

```
clear all;
clc;
% solution de l'équation "D^(alpha)y(t)=0",
t=0:0.1:20; alpha=4/3; c1=1; c2=1,
%Laplace{D^(4/3)}=0;
%s^(4/3)Y(s)- c1*s-c2=0;
%Y(s)=c1*s/(s^(4/3))+c2/(s^(4/3)),
%y=L^(-1){Y(s)};
y=c1*(t.^(1-alpha))/gamma(alpha-1)+c2*(t.^(alpha-
1))/gamma(alpha);
disp('y=');disp(y);
plot(t,y);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
```

3.3 Quelques applications sur la résolution des équations intégrales fractionnaires

3.3.1 Equation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel est bien étudiée, et il existe de nombreuses sources consacrées à ses applications dans différents domaines. Parmis les nombreux ouvrages existants sur divers aspects des équations d'Abel nous citons par exemple [12] et [13].

Il existe aussi d'autres types d'équations intégrales, qui apparaissent dans les applications et qui peuvent être réduites à l'équation intégrale d'Abel.

Définition 3.3.1

L'équation intégrale,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = f(t), \qquad (t>0), \tag{3.15}$$

où $0<\alpha<1$, est appelée équation intégrale d'Abel.

Remarque 3.3.1

La solution de l'équation d'Abel est donnée par la formule :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \qquad (t>0), \tag{3.16}$$

que nous préférons à écrire sous la forme inversée,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = \varphi(t), \qquad (t>0). \tag{3.17}$$

En terme des dérivées d'ordre fractionnaires, les équations (3.15) et (3.17) prennent respectivement les formes :

$${}_0^R D_t^{-\alpha}\varphi(t) = f(t), \qquad (t>0), \tag{3.18}$$

et

$${}_0^R D_t^{\alpha} f(t) = \varphi(t), \qquad (t>0). \tag{3.19}$$

3.3.2 Quelques équations réductibles à l'équation d'Abel

La solution de nombreuses problèmes appliqués conduisent à des équations intégrales, qui à première vue n'ont rien en commun avec l'équation intégrale d'Abel, et à cause de cette impression des efforts supplémentaires sont entrepris pour le développement de la procédure analytique ou numérique pour résoudre ces équations.
Cependant, leurs transformations à la forme de l'équation intégrale d'Abel peuvent souvent être pratique pour obtenir rapidement la solution, ce qui est la raison pour donner quelques exemples typiques d'équations qui peuvent être réduites à l'équation d'Abel. Pour plus de détails nous pouvons consulter [12] et [13].

Exemple 3.3.1

On considère l'équation

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sqrt{s^2+y^2})}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y}. \tag{3.20}$$

Posons

$$\frac{\varphi(r)}{r} = F(r^2).$$

Nous pouvons donc écrire l'équation (3.20) sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} F(s^2+y^2) ds = \frac{f(y)}{2y}. \tag{3.21}$$

En effectuant le changement de variables $x = y^2$, $\xi = s^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \xi = s^2 \quad &\Longrightarrow \quad d\xi = 2sds \\ &\Longrightarrow \quad d\xi = 2\xi^{\frac{1}{2}}ds \\ &\Longrightarrow \quad ds = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}ds. \end{aligned}$$

Par substitution dans (3.21) on arrive à :

$$\int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} F(x+\xi) d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \tag{3.22}$$

Effectuant encore une autre fois le changement de variable $\tau = \frac{1}{x+\xi}$, on aura d'une part,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x+\xi} \quad &\Longrightarrow \quad x+\xi = \frac{1}{\tau} \\ &\Longrightarrow \quad d\xi = -\frac{1}{\tau^2} d\tau. \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{x+\xi} \quad &\Longrightarrow \quad \xi = \frac{1}{\tau} - x \\ &\Longrightarrow \quad \xi^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\tau} - x\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi &= -\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{\tau} - x\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ &= -\tau^{-\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\tau} - x\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ &= -\tau^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \tau x\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ &= -x^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x} - \tau\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant les bornes de l'intégrale pour la nouvelle variable τ. On a

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{x} \\ \xi \longrightarrow +\infty \quad &\Longrightarrow \quad \tau \longrightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Si nous substituons dans (3.22) nous obtenons

$$\int_{\frac{1}{x}}^{0} -x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x} - \tau\right)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} F\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \tag{3.23}$$

après simplification, on trouve :

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - \tau\right)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} F\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau = f(\sqrt{x}) \tag{3.24}$$

si on pose maintenant $t = \frac{1}{x}$, et $\psi(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}} F\left(\frac{1}{\tau}\right)$ on arrive à une équation d'Abel de type (3.15) avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \psi(\tau) d\tau = f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{3.25}$$

Par la relation (3.18), on déduit que la solution de l'équation (3.25) s'écrit sous la forme

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \tag{3.26}$$

c'est-à-dire que :

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} {}_0^R D_t^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{3.27}$$

Exemple 3.3.2 *(équation intégrale de Poisson)*

Soit l'équation intégrale de Poisson suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r\cos\omega)\sin^{2\mu+1}\omega d\omega = f(r). \tag{3.28}$$

Ce types d'équations peut se réduire à une équation intégrale d'Abel par le changement de variable : $x = r\cos\omega$. En effet,

$$\begin{aligned} x = r\cos\omega \quad &\Longrightarrow \quad dx = -r\sin\omega d\omega \\ &\Longrightarrow \quad d\omega = \frac{-1}{r\sin\omega}dx \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} x = r\cos\omega \quad &\Longrightarrow \quad x^2 = r^2(1-\sin^2\omega) \\ &\Longrightarrow \quad \sin^2\omega = \frac{r^2 - x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2}, \end{aligned}$$

d'un autre côté on a : $\omega = 0 \Longrightarrow x = r$ et $\omega = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 0$.
En substituant dans l'équation (3.28) on arrive à l'équation

$$\int_0^r \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^\mu \psi(x)dx = rf(r), \tag{3.29}$$

si on pose maintenant $y = \frac{1}{r^2}$, alors l'équation (3.29) devient

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1-yx^2)^\mu \psi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{3.30}$$

ou plus simplement,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} (1-yx^2)^\mu \psi(x)dx = g(y) \tag{3.31}$$

où

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

puisque $(1-yx^2)^\mu = y^\mu \left(\frac{1}{y}-x^2\right)^\mu$, alors l'équation (3.31) peut se mettre encore sous la forme

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \left(\frac{1}{y}-x^2\right)^\mu \psi(x)dx = y^{-\mu}g(y) \tag{3.32}$$

En effectuant le changement de variables $\tau = x^2, t = \frac{1}{y}$ on obtient $dx = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}d\tau$, $y^{-\mu}g(y) = t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right)$ et parsuite l'équation (3.32) s'écrit sous la forme

$$\int_0^t (t-\tau)^\mu \psi(\sqrt{\tau})\frac{1}{\sqrt{\tau}}d\tau = 2t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right) \tag{3.33}$$

si on pose $\varphi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$, $h(t) = 2t^\mu g\left(\frac{1}{t}\right)$, on arrive à une équation intégrale d'Abel,

$$\int_0^t (t-\tau)^\mu \varphi(\tau)d\tau = h(t), \tag{3.34}$$

avec $\alpha = \mu + 1$ dont la solution est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} {}_0^R D_t^\mu h(t).$$

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de quelques théorèmes et applications des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire pour quelques équations différentielles d'ordre non entier comme l'équation d'Abel et quelques équations réductibles à l'équation d'Abel. On prend par exemple l'intégrale de poisson, dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé quelques outils de base utiles pour notre travail (les fonctions Gamma, Béta, Mettag-Leffler,...) et nous avons présenté trois approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo). On peut modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée d'ordre fractionnaire , depuis ces découvertes , beaucoup de contributions autant théorique que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre non entier et leur intérêt dans différentes disciplines telles que l'électricité, la chimie, la biologie , l'économie, l'automatisme et le traitement du signal et dans les différentes applications telles que la modélisation, l'identification et la commande. En effet , il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques ont un comportement qui peut être mieux décrit en utilisant des modèles mathématique d'ordre non entier.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam,2006.

[2] B. Ross, (1977) Developement of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 : 75-89.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering, vol. 198. New York/London : Springer ;1999.

[4] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Press ? Inc.

[5] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1964).

[6] M. Abramowitz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, (1964).

[7] S. G. Samko, A. A. Kilbas and Marchev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[8] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Appl. 204 (1996), 609-625.

[9] C. Yu and G. Gao, Existence of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 310 (2005), 26-29.

[10] S. Abbas and M. Benchohra, Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative, Commun. Math. Anal. 7 (2009), 62-72.

[11] R. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publishers, 2004.

[12] R. Gorenflo, Abel integral equations with special emphasis on applications, Lectures in Mathematical Sciences, Vol. 13, University of Tokyo, 1996.

[13] R. Gorenflo and S. Vessella, Abel integral Equations : Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.