UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et sciences de la matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Guendouz Nacer

Théme

Existence de solutions positives d'une équation différentielle d'ordre Trois avec conditions aux limites non Locales

Soutenu publiquement le :01/06/2016

Devant le jury composé de :

Mr.**Ben cheikh Abdelkrim**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.**Taleb Ibrahim**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Abassi hocin**	M. A. universitéde KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.**Kouidri Mohammed**	M. A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2015/2016

Dédication

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacri ces et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **Kouidri Mohammed** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.
Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

$\|.\|$ sa norme.

$dist$ la distance associée à cette norme.

$\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω et $\partial\Omega$ sa frontière.

$B(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r :

$u'(t)$ la dérivée ordinaire par rapport à t

$\oplus$ somme directe.

$\langle , \rangle$ produit scalaire.

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels

$(M.d)$ espace métrique.

$d(.,.)$: application de distance.

$c([a.b])$: l'espace des fonctions continues

Ω : un ensemble ouvert borné .

U : un ensemble ouvert borné

$\overline{U}$: c'est la fermeture de U

$\overline{C}^k(.,.)$: l'espace des fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$,k fois différentiable dans Ω

deg : degré topologique .

max : maximum

$\overline{B}$: la boule unité fermée

dim : dimension

K : un cone

$(E, \|\|)$ un espace banach

A : opérateur

T : opérateur

Introduction

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles d'ordre trois possèdent une large applications dans différents domaines de la science tels que la mécanique, la physique, la biologie, ect. D'ailleurs ces équations interviennent en grandes parties dans la modélisation de nombreux phénomènes comme exemples, les problèmes de drainages, les problèmes de revêtement d'écoulement des fluides, de diffusions non linéaires, d'allumages thermiques des gazs, ect. Pour plus de détails voir [5] [17] ainsi que leurs références.

Récemment, ce type de problèmes a attiré l'attention de plusieurs auteurs et depuis de nombreux articles sont apparus. On peut citer par exemple et la liste est non exhaustive les travaux d'Anderson et Davis [3], Graef et Yang [8] [9] ; Sun [16], Guo et Sun [11], et dans le même concept nous mentionons les fameux articles de R. Ma [14] et Agarwal [2] et les références s'y rattachant. Néanmoins, à notre connaissance, peu d'études ont été entreprises pour ce genre de problèmes dans le cas où f satisfait une condition de croissance de type :

$$|f(t,x,\overline{x})| \leq k(t)\,|x|^{p} + g(t)\,|\overline{x}|^{q} + h(t), (t,x,\overline{x}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^{2}$$

où $p, q > 0 . k, g, h \in L^{1}\left([0,1], \mathbb{R}_{+}\right)$(voir section 2.3, Théorème 46. Notons également que la présence de la dérivée u' dans l'expression de f entrainent des difficultées supplémentaires. Autant qu'on sache, il n'existe aucune contribution concernant l'existence de la solution positive du problème aux limites (P1) .

Dans [18], Graef et al donnent des conditions suffisantes pour l'existence et la non éxistence de la solution positive du problème suivant

$$\begin{aligned} u'''(t) + f\left(t, u(t), u'(t)\right) &= 0, 0 < t < 1 \\ u(0) &= u(p) - u(1) = u''(1) = 0, \end{aligned}$$

en considérant f et g deux fonctions continues définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et tel que $g(t) \neq 0$ sur $[0,1]$, avec $\frac{1}{2} < p < 1$.

De leurs côtés, R. Ma et al [14] considèrent le problème aux limites en deux points d'ordre quatre

$$\begin{aligned} u''''(t) + f(t, u(t), u'(t)) &= 0, 0 < t < 1 \\ u(0) &= u'(0) = 0 = u''(1) = u'''(1) = 0 \end{aligned}$$

et prouvent moyennant le théorème de point fixe dans un cône l'existence ainsi que la multiplicité de solutions positives dans le cas où f est continue verifiant $f(t,u,p) > -M$ où $(M > 0)$, $\lim\limits_{p \to 0} f(t,u,p) \backslash p = \infty$ et $f(t,u,0) > 0$ pour $(t,u) \in [0,1] \times [0,\infty)$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous citons les princpales notations, définitions et lemmes qui seront utilisés par la suite. La Section 2.3 traite de l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray Schauder. Quand à la section 2.4 elle traitera l'existence de la solution positive via le théorème bien connu de Guo-Krasnosels'kii. Pour clore nous donnons quelques exemples illustrant les résultats obtenus.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 théorème du point fixe

1.1.1 théorème du point fixe de Banach

Définition 1 *Soit T une application d'un ensemble X dans luis même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que $T(x) = x$.*

Le théorème du point fixe le plus élémentaire le plus utilisé est le principe de contraction de Banach. Pour cela nous commençons par une présentation de ce principe ainsi qu'un certain nombre de généralisations de ce résultat.

Théoréme 2 *[4] (Principe de contraction de Banach). Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $F : M \longrightarrow M$ une application contractante i.e qu'il existe $0 < k < l$ telle que $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$, alors F admet un point fixe $u \in M$ de plus pour tout $x \in M$ on a :$\lim_{n \longrightarrow \infty} F^n(x) = u$ et*

$$d(F^n, u) \leq \frac{k^n}{1 - K} d(x, F(x))$$

Preuve. D'abord, on montre l'unicité .

On suppose que il existe $x, y \in M$ avec $x = F(x); y = F(y)$et $d(x, y) = d(F(x), F(y) \leq kd(x, y)$.

Puisque $0 < k < 1$ alors la dernier inégalité implique que $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$, alors $\exists! x \in M$ tel que $F(x) = x$.

Maintenant, on preuve l'existence de x où $x \in M$.
On suppose que $F^n(x)$ est une suite de Cauchy où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq kd(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq .... \leq k^n d(x, F(x))$$

Si $m > n$ où $n \in \{0, 1, ...\}$

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)) + ... + (F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, Fx) + k^{n+1} d(x, Fx) + ... + k^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leq k^n d(x, F(x)) \left[1 + k + k^2 + ...\right] \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \end{aligned}$$

Pour $m > n; n \in \{0, 1, ...\}$ on a

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x)) \tag{1.1}$$

alors $F^n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet X en suite alors il existe $u \in X$ avec

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} F^n(x) = u$$

De plus par la continuité de F

$$u = \lim_{n \longrightarrow \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F(F^n) = F(u)$$

Alors u est un point fixe de F.
Finalement, $m \longrightarrow \infty$ in (1.1), on obtient

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, F(x))$$

■

Exemple 3 *Considérons l'application $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $T(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$; alors T une contraction avec $0 < k = \frac{1}{2} < 1$; et admet comme point fixe $x = 1$ de plus* $\lim\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} = 1$

Remarque : Les conditions du théoréme sont nécessaires, pour s'en convaincre consdérons les exemples suivants .

Exemple 4 *$T : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 1$,est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que $T([0,1]) \subsetneq [0,1]$ et on ne peut pas itérer : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, mais x_3 n'est pas déifni !*

Exemple 5 *$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ vérifie $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$, mais n'admet pas de point fixe. Le probléme est que T n'est pas contractante, et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on obtient $x_n \longrightarrow +\infty$*

1.1.2 Théorèmes du point fixe pour des contraction non définies sur tout l'espace métrique

Soit (M,d) un espace métrique complet, il est clair qu'une fonction définie seulement sur un sous-ensemble de M n'aura pas forcément un point fixe. Pour assurer cela, des conditions supplémentaires seront nécessaires.

Théoréme 6 *Soient $K \subset M$ un ensemble fermé et $T : K \longrightarrow M$ une k-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tel que*

$$\overline{B(x_0, r)} \subset K \qquad et \qquad d(x_0, T(x_0)) < (1 - k)r$$

alors F a un unique point fixe $x^* \in B(x_0, r)$.

Dans certaines applications, il y'a des cas où T est lipschitzienne sans être une contraction, alors qu'une certaine puissance de T est une contraction voir[1]. Dans ce cas nous avons le théorème suivant.

Théoréme 7 *Soit (M,d) un espace métrique complet $T : M \longrightarrow M$ une application telle que $d(T^m(x), T^m(y) \leq kd(x, y), \forall x, y \in M$, pour un certain $m \geq 1$ où $0 \leq k < 1$. Alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$*

Preuve. comme T^m est une contraction, il en resulte du théorème 6 que T^m a un unique point fixe , soit donc $x^* = T^m x^*$. alors $T^m(T(x^*)) = T(T^m(x^*)) = T(x^*)$,i.e.,$T(x^*)$ est un point fixe de T^m . mais T^m a un unique point fixe,d'où $T(x^*) = x^*$ .Donc T a un unique point fixe (x^*) ,et il est unique car tout point fixe de T est également point fixe de T^m ■

Exemple 8 *Considérons l'espace métrique M donné par :$M = C[a;b]$; l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a;b]$. M est un espace de Banach par rapport la norme $\|u\| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|$. $u \in M$. On définit $T : M \to M$ par :*

$$Tu(t) = \int_a^t u(s)ds$$

alors,

$$\|T(u) - T(v)\| \leq (b-a)\|u - v\|,$$

donc $(b-a)$ est la meilleure constante de Lipchitz pour T. D'autre part, on a :

$$T^2(u)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s u(\tau)d\tau \right) ds = \int_a^t (t-s)u(s)ds$$

et par induction

$$T^m u(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-s)^{m-1} u(s)ds,$$

dés lors

$$\|T^m(u) - T^m(v)\| \leq \frac{(b-a)^m}{m!} \|u - v\|,$$

et donc T^m serait une contraction si $\frac{(b-a)^m}{m!} < 1$

1.1.3 principes de continuation

une autre façon d'obtenir l'existence de point fixe pour une application non définie sur tout l'espace s'obtient via un processus de continuation . celui-ici consiste à déformer notre application en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. il va sans dire que cette déformation connue sous le nom devra vérifier certaines condition voir [1].

Définition 9 *Soient X et Y d deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \longrightarrow H(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour arriver à g, et varie continument. On note $f \simeq g$.

Exemple 10 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n$, on considére $c : \mathbb{R}^n \to R^n$ l'application constante $c(x) = 0$, et $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $i(x) = x$. Montrons que c et i sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$H(x,t) = tx.$$

Alors $H(x;0) = 0 = c(x)$ et $H(x,1) = x$:

Exemple 11 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n - \{0\}$; on considére cette fois $p(x) = x/\|x\|$; et $i(x) = x$ de nouveau. On voit que p et i sont homotopes en prenant*

$$H : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

Définition 12 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie lorsqu'il existe $g : Y \longrightarrow X$ telle que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_y$. On dit alors que X et Y ont le même type d'homotopie, ou parfois qu'ils sont homotopie équivalents, et on note $X \simeq Y$*

Exemple 13 *Soit $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $Y = S^{n-1}$, on prend alors $f : X \to Y$ définie par $f(x) = x/\|x\|$; et $g : Y \to X$ l'inclusion. Alors $f \circ g = id_y$, et l'exemple 11 montre que $g \circ f \simeq id_x$. Donc $R^n - \{0\}$ a le meme type d'homotopie que la sphére S^{n-1}.*

Soit (X,d)un espace métrique complet, et U un sous ensemble ouvert de X.

Définition 14 *Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow$ deux contractions, on dit que F et G sont homotopes s'il existe $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow X$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) $H(.,0) = G$ et $H(.,1) = F$.

(b) $H(x,t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0,1]$

(c) Il existe $\alpha \in [0,1)$ tel que $d(H(x,t); H(y,t) \leq \alpha d(x,y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$, et $t \in [0,1]$.

(d) Il existe $M \geq 0$ tel que $d(H(x,t), H(x,s) \leq M|t-s|$ pour tout $x \in \overline{U}$,et $t, s \in [0,1]$.

Théoréme 15 *Soit $F : \overline{U} \longrightarrow X$ et $G : \overline{U} \longrightarrow X$ deux applications homotopiquement con-tractives et G a un point fixe dans U. Alors, F admet un point fixe dans U.*

Preuve. Considérons l'ensemble $Q = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda)$, pour certain $x \in U$ où H est une homotopie entre F et G a décrite dans la définition (9) Notons que Q est non vide puisque G a un point fixe et que $0 \in Q$. On montre que Q est à la fois ouvert et fermé dans [0,1], et ainsi, par connexité on aura $Q = [0,1]$. Par conséquent F a un point fixe. Montrons d'abord que Q est un ensemble fermé dans [0,1]. En effet, soit $\{\lambda_n\}_{n \in N}$ une suite dans Q telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, alors, nous devons montrer que $\lambda \in Q$. Comme $\lambda_n \in Q$ pour $n = 1, 2....$, il existe $x_n \in U$ où $x_n = H(x_n, \lambda n)$. Également pour $n, m \in \{1, 2, ...\}$ on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n, \lambda_n) H(x_m, \lambda_m) \\ &\leq d(H(x_n, \lambda_n) H(x_m, \lambda_m)) + d(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha} |\lambda_n - \lambda_m|$$

Ce qui montre que $\{x_n\}$est une suite de Cauchy de X(car $\{\lambda_n\}$l'est aussi) et, puisque X est complet, il existe $x \in \overline{U}$ telle que $\lim_{x \longrightarrow \infty} x_n = x$. Par la continuité de H,

$$x = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = lim_{n \longrightarrow \infty} H(x_n, \lambda n) = H(x, \lambda)$$

Ainsi, $\lambda \in Q$ et Q est fermé dans $[0,1]$.

Montrons que Q est un ensemble ouvert de $[0, 1]$. Soit $\lambda_0 \in Q$, alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$. Puisque, par hypothèse, $x_0 \in U$, nous pouvons trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in X : (x, x_0) < r\} \subseteq U$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$ où $r \leq dist(x_0, \partial U)$, et $dist((x_0, \partial U)) = inf\{(x_0, x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Alors , pour $x_0 \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x, \lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0)H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x, \lambda) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda, \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r \end{aligned}$$

Alors pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$ fixé

$$H(., \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \longrightarrow \overline{B(x_0, r)}$$

Par le théorème (2), (6), on déduit que $H(., \lambda)$ un point fixe dans U. Alors, $\lambda \in Q$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$.et parconséquent Q est ouvert dans [0, 1] .

■

Du théorème précédent, nous déduisons le résultat suivant.

Théoréme 16 *(Alternative non-linéaire de Leray-Schauder)[1]. Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert d'un espace de Banach E tel que $0 \in U$, et soit $F : \overline{U} \longrightarrow E$ une contraction telle que $F(\overline{U})$ soit bornée. alors un des deux énoncés suivant est vérifié :*

(1) F a un point fixe dans $(\overline{U})$.

(2) il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $x \in \partial U$ tels que $x = \lambda F(x)$.

Preuve. Supposons que (2) n'est pas vérifié et que F n'a pas de point fixe sur ∂U c'est à dire $x \neq \lambda F(x)$ pour tout $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $H : \overline{U} \times [0, 1] \longrightarrow E$ donnée par $H(x, \lambda) = \lambda F(x)$, et soit G l'application nulle. Notons que G a un point fixe dans U (à savoir $(0 = G(0))$ et que F et G sont deux applications homotopiquement contractives. Par le théorème (15)F a également un point fixe et donc l'ennoncé (1) est vérifié. ■

1.2 Degré topologique

Dans cette section, nous donnons un brëf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X \longrightarrow X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique, métrique la plupart du temps. Pour plus de connaissance et d'amples détails voir [6] [7] [13] [15].

1.2.1 Degré topologique de Brouwer

Considérons un ouvert borné Ω et de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$. $\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ltimes)$ désignera l'espace des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω qu sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.

Définition 17 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$le Jacobien de f en un point x_0 de Ω .Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. Dans le cas contraire, x_0 est dite point régulier.*

On désigne par $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire :

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$$

Définition 18 *Un élément $y \in \mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$ Dans le cas contraire, y est dit valeur singulière.*

Définition 19 *Soit $f \in \overline{C}^1 \backslash f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y, le nombre entier*

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn J_f(x)$$

où $SgnJf(x)$ désigne le signe de $J_f(x)$, défini par $sgn(t) = 1$ si $t > 0$ et $sgn(t) = -1$ si $t < 0$

Remarque 20 *1) Par convention si $f^{-1}(y) = \emptyset, deg(f, \Omega, y) = 0$.*

2) $f^{-1}(y)$ contient un nombre fini d'éléments

Exemple 21 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ alors le $deg(f,]0, 2[, 1) = 0$*

Exemple 22 *soit $0 < \epsilon < 1$ et considérons la fonction $f(x, y)(x^2 - y^2 - \epsilon, 2xy)$, et $f^{-1}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = (0, 0)\}$ alors, on a*

$$x^2 - y^2 - \epsilon = 0 \tag{1.2}$$

et

$$2xy = 0 \tag{1.3}$$

D'aprés (1.3) on trouve $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x = 0$ alors : $-y^2 - \epsilon = 0 \Longrightarrow y^2 = -\epsilon$ c'est contradiction.
Si $y = 0$ alors : $x^2\epsilon = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\epsilon}$ *ou* $x = -\sqrt{\epsilon}$, donc

$$f^{-1}(0, 0) = \{(-\sqrt{\epsilon}, 0); (\sqrt{\epsilon}, 0)\}$$

Si $\Omega\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ alors $f^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \emptyset$. En outre, comme

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

et $det(J_f((x, y))) = 4(x^2 + y^2)$ et puisque $deg(f,_\Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} SgnJ_f(x)$ alors

$$SgndetJ_f(\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn4\epsilon = 1$$
$$SgndetJ_f(-\sqrt{\epsilon}, 0) = Sgn4\epsilon = 1$$
$$\Longrightarrow deg(f, \Omega, 0) = 1 + 1 = 2$$

Remarque 23 *Dans le cas où $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) \neq 0$, on a le lemme suivant.*

Lemme 1 (**Lemme de Sard**) *soit une fonction $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors l'ensemble $f(S_f)$ des valeurs critiques de f est de mesure nulle.*

Nous verrons maintenant qu'on peut étende la nation de degré au cas où la fonction f est est seulement continue.

Définition 24 *Soient $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. On définit le degré topologique de f dans Ω par rapport y par*

$$deg(f, \Omega, y) = [\lim_{n\to\infty} deg(f_n, \Omega, y)]$$

où $\{f_n\}_{n\in N^*}$ est une suite de fonction $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ qui converge uniformément vers f dans $\overline{\Omega}$.

Rappelons présent quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer.

Théoréme 25 *[6] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons*

$$A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial\Omega))\}$$

L'application $deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ satisfait les propriés suivantes

1. (Normalisation) $deg(I; \Omega, y) = 1$ si $y \in \Omega$ et $deg(I\Omega, y) = 0$ si $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ où I désigne l ?application identité sur $\overline{\Omega}$.

2. (Solvabilité) Si $deg(f, \Omega, y) \neq 0$, alors $f(x) = y$ admet au moins une solution dans Ω.

3. (Invariance par homotopie) Pour tout $h : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et tout $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continues telles que $y(t) \notin h(t; \partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, $deg(h(t,.), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

4 .(Additivité) Supposons que Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de Ω et $y \notin f(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \bigcup \Omega_2))$. Alors

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y)$$

5.$deg(f, \Omega, y)$ est constant sur toute composante connexe de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$

6.$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0)$.

7. Soit $g : \overline{\Omega} \to F_m$ *une application continue où* F_m *est un sous espace de* $\mathbb{R}^n$,$dim F_m = m$, $1 \leq m \leq n$ *: Supposons que* y *est tel que* $y \notin (I - g)\partial\Omega$ *. Alors*

$$deg(f, \Omega, y) = deg((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y)$$

Dans le but de démontrer l'existence de solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$*, la proprié (2) du théoréme ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérét principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes, elles ont le méme degré.*

Exemple 26 *Soit* $\Omega = (-1; 1)$ *et considérons*

$$h : (t; x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega} \to h(t, x) = (1 - t)x + txe^x$$

il est clair que cette appliction satisfait

1. h *est continue sur* $[0; 1] \times \overline{\Omega}$

2.$h(0; x) = x$ *et* $h(1; x) = xe^x$

3. Pour toutt $\in [0; 1]$ *; la fonction* $h(t; x)$ *ne s'annule pas en* $\{-1, 1\}$*. Donc si* $f(x) = xe^x$ *alors* $deg(f; (-1, 1), 0) = deg(I, (-1, 1), 0) = 1$

1.2.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie, $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné, $f : \bar{\Omega} \to X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ .Dans la section précédente , nous avons vu qu'en dimension finie , $C(\bar{\Omega}, X)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré , le degré de Brouwer , satisfaisant les propriétés 1,2 et 3 du théorème . Malheureusement, en dimention infinie, $C(\bar{\Omega}, X)$ ne l'est pas .En effet , un exemple du à Leray montre qu'il faut restreindre la classe des fonctions pour laquelle il y a existence et unicité d'une fonction degré de Leray-Schauder , a un ensemble strictement contenu dans $C(\bar{\Omega}, X)$.

Définition 27 *[13] Soient X un espace de Banach et Ω une partie fermé de X. Si $T : \Omega \to X$ est un opérateur continu , on dit que T est compact si pour toute partie bornée B de Ω , $T(B)$ est relativement compact dans X.*
On notera en particulier que si T est compact , alors T est borné sur les parties bornées de X.

Définition 28 *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application $T : \Omega \to X$ est de rang fini si $dim(Im(T)) < \infty$, autrement dit , si $Im(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.*

Lemme 2 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte . Alors , pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension fini noté F et une application continue $T_\epsilon : \bar{\Omega} \to F$ telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \quad pourtout \;\; x \in \bar{\Omega}.$$

Définition 29 *Soient X un espace de Banach , $\Omega \subset X$. un ouvert borné et $T : \bar{\Omega} \to X$ une application compacte . Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, le degré de Brouwer $deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ est bien défini comme dans le lemme 2. Par conséquent , nous définissons le degré de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

Remarque 30 *Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $Y \in X$ est tel que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant*

$$deg(I - T, \Omega, y) = deg(I - T - y, \Omega, 0).$$

Théoréme 31 *[6] Soit X un espace de Banach et*
$A = \left\{(I - T, \Omega, 0), \Omega \;\; un\ ouvert\ borné\ de\ \; X, T : \overline{\Omega} \to X \quad compacte \quad, 0 \notin (I - T)(\partial\Omega)\right\}$
alors , il existe une unique application $deg(f, \Omega, y) : A \to \mathbb{Z}$ appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :

1. *(Normalité) Si $0 \in \Omega$ alors $deg(I, \Omega, 0) = 1$;*
2. *(Solvabilité) Si $deg(I - T, \Omega, 0) \neq 0$, alors exists $x \in \Omega$ tel que $(I - T)x = 0$;*

3. *(Invariance par homotopie) Soit H : $[0,1]\bar{\Omega}$ une homotopie compacte, telle que $0 \notin (I - H(t,.))(\partial\Omega)$. Alors $deg(I - H(t,.),\Omega,0)$ ne dépend de $t \in [0,1]$;*

4. *(Additivité) Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et*

$$0 \notin (I - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Alors,

$$deg(I - T,\Omega,0) = deg(I - T,\Omega_1,0) + deg(I - T,\Omega_2,0).$$

Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brower. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques en particulier l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

1.3 Théorème du point fixe topologiques

Théoréme 32 *(Brouwer) Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \bar{B} \to \bar{B}$ continue. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \bar{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver. Sinon considérons l'application $h(t,x) = x - tf(x)$. On a h est continue , $h(0,x) = x$ et $h(1,x) = x - f(x)$. En outre si on suppose que $h(t,x_0) = 0$ pour certain $x_0 \in \partial B$, alors on obtient $x_0 = tf(x_0)$ ce qui implique comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $f(x_0) \in \partial B$, contradiction . comme est une homotopie admissible entre $I - f$ et I alors

$$deg(I - f,\Omega,0) = deg(I,\Omega,0) = 1.$$

En conclusion , il existe un $x \in B$, tel que $x - tf(x) = 0$ i.e. $f(x) = x$. ■

Théoréme 33 *(Schauder) Soit $\bar{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et f : $\bar{B} \to \bar{B}$ compacte .Alors f a un point fixe : il existe $x \in \bar{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Soit $h(t,x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0,1] \times \bar{B}$. Si, pour un $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t,x) = 0$, alors $tf(x) = x$; comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue . On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$1 = deg(I,B,0) = deg(I - f,B,0)$$

puisque $h(0,.) = 0$ et $h(1,0) = f$ donc l'existence d'un point fixe . ■

Théoréme 34 *[6] (Alternative non-linéaire de Leray-Schauder). Soit $\Omega \subset X$ un sous ensemble ouvert borné d'un espace de Banach X tel que $0 \in \Omega$, et soit $T : \bar{\Omega} \to X$ un opérateur compact . Alors un des deux énoncés suivants vérifié :*

(1) T a un point fixe dans Ω ;

(2) il existe $\lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tels que $Tx = \lambda x$.

Preuve. Si (2) est vraie alors on a rien à prouver. Sinon, on définit l'homotopie

$$H(t,x) = tTx \quad \textit{pour} \quad t \in [0,1].$$

Ainsi défini $H(t,x)$ est compacte , $H(0,x) = 0$ et $H(1,x) = Tx$. Supposons que $H(t,x_0) = x_0$ pour un certain $t \in [0,1]$ et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors on a $tTx_0 = x_0$. Si $t = 0$ ou $t = 1$ on a (1) ; Sinon

$$Tx_0 = \frac{1}{t}x_0 \ \ \textit{pour} \ \ \textit{un} \ \ \textit{certain} \quad t \in (0,1),$$

et alors on a (2) . Sinon, on a $deg(I - T, \Omega, 0) = deg(I, \Omega, 0) = 1$ et alors T a un point fixe dans Ω. ■

Théoréme 35 ***(Brouwer)*** *Soit M une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie $(X, \|.\|)$ et soit $A : M \to M$ une application continue, alors A admet un point fixe .*

Théoréme 36 ***(Schauder)*** *soit M une partie bornée, fermée, convexe et non vide d'un espace de Banach X et soit $A : M \to M$ une application compacte, alors A admet un point fixe.*

Théoréme 37 ***(Schaeffer)*** *Soit X un espace de Banach et soit $A : X \to X$ une application compacte ,alors*

i. Ou bien, l'équation $x = \lambda Ax$ admet une solution pour $\lambda = 1$,

ii. Ou bien, l'ensemble $\epsilon = \{x \in X, x = \lambda Ax, \lambda \in (0,1)\}$ est non borné.

Théoréme 38 ***(Krasnoselskii)*** *Soit M un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$. Supposons due A et B sont deux applications de M dans X telles que*

i. $Ax + By \in M, \forall x, y \in M.$

ii. *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.*

iii. *B est une contraction de constante $\alpha < 1$.*
Alors , il existe $x \in M$, avec $Ax + Bx = x$.

Notons, que si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de **Banach**. Si $B = 0$, alors le théorème n'est autre que le théorème de **Schauder**.

Théoréme 39 *[10]**Théorème de Krasnoselskii de compression et d'expanssion d'un cone*** *Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach E tels que $0 \in \Omega_1, \bar{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et K un cone de E. Soit $\mathbb{A} : K \cap (\bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \to K$ un opérateur complément continu , tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite,*

(i) $\|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $\quad u \in K \cap \partial\Omega_2$.

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \geqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1, \|\mathcal{A}u\| \leqslant \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega_2$.
Alors l'opérateur $\mathcal{A}$ admet au moins un poins fixe dans $K \cap (\bar{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ rappelons à présent le théorème d'Ascoli-Arzela ainsi que le théorème de convergence dominée de Lebesgue dont nous faisons un usage fréquent dans toute la suite.

Théoréme 40 ***(Ascoli-Arzela)*** *Considérons $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que*

i. *M est borné, i.e . $\|u\| \leqslant r, \quad \forall u \in M$ et $r > 0$ un nombre fixé,*

ii. *M est équicontinu, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad tq \quad |t_1 - t_2| < \delta \quad et \quad \forall u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

Théoréme 41 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ telle que* *i.* $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout sur* Ω.

ii. $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *presque partout sur* Ω, $\forall n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$. *Alors,*

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Chapitre 2

Application de théorème Guo-Krasnosel'skii

Dans ce chapitre, nous intéressons à l'étude d'une équation différentielle d'ordre trois avec conditions aux limites non locales suivante :

$$(P1)\begin{cases} u'''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1), u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0, \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,et f une fonction donnée. Au fait, nous proposons d'établir l'existence, l'unicité et l'existence de la solution positive du probléme (P1) via le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray Schauder, les propriétés de la fonction de Green et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône, dans le cas où la non linéarité de f est soit sur-linéaire où sous-linéaire.

2.1 Préliminaires :

Dans cette section, nous présentons quelques définitions lemmes et théorèmes que nous utiliserons pour la preuve des principaux résultats.
Soit $E = C^1([0,1], R)$, muni de la norme $\|y\|_1 = \|y\| + \|y'\|$; où $\|.\|$dénoté la norme dans $C([0,1], R)$ déffinie par $\|y\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$ et $L^1[0,1]$ l'espace de fonctions intégrables dans $[0,1]$ doté de la norme$\|.\|_{L^1} = \int\limits_0^1 |y(t)|\, dt$ pour tout $y \in L^1[0,1]$.

$E^+ = \{y \in C^1([0,1], \mathbb{R}), y(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$. On suppose que $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$.

Commençons par résoudre un problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant.

Lemme 3 *Soit $y \in E$. Alors le problème*

$$(P_2)\begin{cases} u'''(t) + y(t) = 0, 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1), u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

possède une unique solution

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta - s)\,y(s)\,ds \qquad (2.1) \\ &+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right)y(s)\,ds \end{aligned}$$

Preuve. En effet on a $u''' = -y(t)$, en intégrant trois fois l'équation il vient $u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds + At^2 + Bt + C$, oû les constantes A, B et C sont déterminées par les conditions aux limites du prblème (P_2). ■

Définition 42 *Une fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si*

(i) La fonction $t \to f(t,x,y)$ est mesurable pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) La fonction $(x,y) \to f(t,x,y)$ est continue presque pour tout $t \in [0.1]$,

Lemme 4 *[6]*

Soit F un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert, borné de F tel que $0 \in \Omega$:Soit $T : \overline{\Omega} \to F$ un opérateur complètement continu. Alors, soit qu'il existe $x \in \partial U$,$\lambda > 1$ tels que $T(x) = \lambda x$, ou il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$ de T.

Définition 43 *Une fonction $u(t)$ est dite solution positive de $(P1)$si $u(t) \geq 0$,$\forall t \in [0,1]$.*

Définition 44 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $K \subset E$ un sous ensemble non vide fermé de E.K est dit un cône s'il satisfait les conditions :*

1.$(\alpha u + \beta v) \in K$ *pour tout $u, v \in K$ et pour $\alpha, \beta \geq 0$.*

2.$u \in K$ *et $(-u) \in K$ implique $u = 0$.*

Théoréme 45 *[10] Soit* Ω_1*et* Ω_2 *deux ouverts bornés d'un espace de Banach* E *tels que* $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ *et* k *un cône de* E *.Soit .A .*$K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right) \to K$ *un opérateur complétment continu ,tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite ,*

(i) $\|Au\| \leq \|u\|, u \in k \cap \partial\Omega_1$,et $\|Au\| \geq \|u\|, u \in k \cap \partial\Omega_2$,
(ii) $\|Au\| \geq \|u\|, u \in k \cap \partial\Omega_1$,et $\|Au\| \leq \|u\|, u \in k \cap \partial\Omega_2$,
Alors l'opérateur A admet au moins un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1\right)$.

2.2 Théorèmes d'existence etd'unicité

D'abord, nous étudions l'existence de la solution non triviale en utilisant le lemme 4

Théoréme 46 *Supposons que* f *est une fonction de Carathéodory* $,f(t,0,0) \neq 0$ *et qu'ils existent trois fonctions non negatives* $k, g, h \in L^1([0,1], R_+)$ *telles que*

$$|f(t,x,\overline{x})| \leq k(t)|x|^p + g(t)|\overline{x}|^q + h(t), (t,x,\overline{x}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2, \tag{2.2}$$

$$0 \leq \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0.1]} + \|g\|_{L^1[0.1]}\right) < \frac{1}{2} \tag{2.3}$$

$$\left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|h\|_{L^1[0.1]} < \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

Alors le problème $(P1)$ *a au moins une solution non triviale* $u^* \in E$.

Preuve. Transformons le problème $(P1)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $T : E \to E$ défini par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &\quad -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s) f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right) f(s,u(s),u'(s))\,ds, \end{aligned}$$

d'aprés le lemme 3, les points fixes de l'opérateur T sont les solutions du problème (P_1) :

Posons

$$M=\left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]}+\|g\|_{L^1[0,1]}\right)$$

et

$$N=\left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|h\|_{L^1[0,1]}$$

On vertu de l'hypothèse 46, nous avons $0<M<\frac{1}{2}$ .Comme $f(t,0,0)\neq 0$, alors il existe un intervalle $[\sigma,\tau]\subset[0,1]$ tel que $\underset{\sigma\leq t\leq r}{min}|f(t,0,0)|>0$ par conséquent $N>0$.

Posons $\|u\|_1^\sigma = \max\left(\|u\|_1^p,\|u\|_1^q\right),(\sigma=p$ où $\sigma=q)$ $,n$ partie entière de σ et $m=\left(\frac{N}{M}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Définissons l'ouvert , borné Ω par $\Omega=\{u\in C[0,1]:\|u\|_1<m\}$.

Montrons que T est un opérateur complètement continu sur Ω.

(i) T est continu,

en effet, soit (u_n) une suite qui converge vers u dans E. Alors,

$$\begin{aligned}
&|Tu_n(t)-Tu(t)|\\
\leq\ & \int_0^1(1-s)^2\left|f(s,u_n(s),u_n'(s))-f(s,u(s),u'(s))\right|ds\\
&+\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\varsigma}\right|(1+2|\alpha|)\int_0^1(1-s)\left|f(s,u_n(s),u_n'(s))-f(s,u(s),u'(s))\right|ds\\
&+\frac{1}{2|\varsigma|}\int_0^1(1-s)(1+2|\alpha|+|\alpha\beta|(1-s))\left|f(s,u_n(s),u_n'(s))-f(s,u(s),u'(s))\right|ds\\
\leq\ & \left(1+\frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right)\times\left\|f(.,u_n(.),u_n'(.))-f(.,u(.),u'(.))\right\|_{L^1}
\end{aligned}$$

En outre, on a

$$
\begin{aligned}
\left|T'u_n(t)-T'u(t)\right| &\le \int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n(s),u_n'(s)\right)-f\left(s,u(s),u'(s)\right)\right| ds \\
&\quad +\frac{|\beta|}{|\varsigma|}(1+|\alpha|)\int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n(s),u_n'(s)\right)-f\left(s,u(s),u'(s)\right)\right| ds \\
&\quad +\frac{|1|}{|\varsigma|}(1+|\alpha|)\int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n(s),u_n'(s)\right)-f\left(s,u(s),u'(s)\right)\right| ds \\
&\le \left(1+\frac{(|\beta|+1)(1+|\alpha|)}{|\varsigma|}\right)\times\left\|f\left(.,u_n(.),u_n'(.)\right)-f\left(.,u(.),u'(.)\right)\right\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\left\|Tu_n-Tu\right\|_1 &\le \left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right) \\
&\quad \times\left\|f\left(.,u_n(.),u_n'(.)\right)-f\left(.,u(.),u'(.)\right)\right\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

En vu du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a $\left\|Tu_n-Tu\right\|_1 \to 0$,quand $n\to\infty$:

(ii) Montrons que $T(\Omega)$ est relativement compact.

a) Soit $u\in\Omega$ et compte tenu de 2.1 on a

$$
\begin{aligned}
\|Tu\|_1 &\le \left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right)\left(\|u\|_1^p\|k\|_{L^1[0.1]}+\|u\|_1^q\|g\|_{L^1[0.1]}\right)+N \\
&\le M\max\left(\|u\|_1^p,\|u\|_1^q\right)+N
\end{aligned}
$$

.Posons $\max\left(\|u\|_1^p,\|u\|_1^q\right)=\|u\|_1^\sigma$, $\sigma=p$ ou $\sigma=q$; alors

$$
\|Tu\|_1\le Mm^\sigma+N
$$

ce qui entraine que $T(\Omega)$ est uniformément borné.

b) $T(\Omega)$ est équicontinu. En effet pour $t_1,t_2\in[0,1]$, $t_1<t_2, u\in\Omega$, nous avons par application de 2.2

$$
\begin{array}{c}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\
\leq \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^2 - (t_1-s)^2\right)|f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\
+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^2|f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\
+\frac{|\beta(1-\alpha)|}{2|\varsigma|}\left(t_2^2-t_1^2\right)\int_0^{\eta}(\eta-s)|f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\
+\frac{|(1-\alpha)|}{2|\varsigma|}\left(t_2^2-t_1^2\right)\int_0^{1}(1-s)|f(s,u(s),u'(s))|\,ds
\end{array}
$$

Considérons la fonction $\Phi(x) = x^2 - 2x$, il est clair que est décroissante sur $[0,1]$, par conséquent $(t_2 - s)^2$ $-(t_1 - s)^2 \leq 2(t_2 - t_1)$,d'où on en déduit que

$$
\begin{aligned}
& |Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\
\leq\ & 2(t_2-t_1)\int_0^1 |f(s,u(s),u'(s))|\,ds + \int_{t_1}^{t_2}|f(s,u(s),u'(s))|\,ds \\
& + \frac{|(\beta+1)|\,|(1-\alpha)|}{|\varsigma|}\left(t_2^2-t_1^2\right)\int_0^1 |f(s,u(s),u'(s))|\,ds
\end{aligned}
$$

lorsque $t_1 \to t_2$, alors $|Tu(t_1) - Tu(t_2)|$ tend vers 0, par conséquent $T(\Omega)$ est equicontinu.

En vue du théorème d'Ascoli-Arzela,T est complètement continu.

A présent, nous pouvons appliquer l'alternative non linéaire pour $T.\overline{\Omega} \to E$ Supposons que $u \in \partial\Omega, \lambda > 1$ tels que $Tu = \lambda u$.On a

$$
\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right)\times \\
&\quad \left[\max|u(t)|^p\|k\|_{L^1[0.1]} + \max|u'(t)|^q\|g\|_{L^1[0.1]} + \|h\|_{L^1[0.1]}\right] \\
&\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right)\times \\
&\quad \left[\|u\|_1^{\sigma}\left(\|k\|_{L^1[0.1]} + \|g\|_{L^1[0.1]}\right) + \|h\|_{L^1[0.1]}\right]
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|T'u(t)| &\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+|\alpha|)}{|\varsigma|}\right)\times \\
&\quad \left[\|u\|_1^{\sigma}\left(\|k\|_{L^1[0.1]} + \|g\|_{L^1[0.1]}\right) + \|h\|_{L^1[0.1]}\right]
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Et donc en se servant des estimations 2.5 et 2.6 on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda m &= \lambda \|u\|_1 = \|Tu\|_1 = \max_{0\leq t\leq 1} |(Tu)(t)| + \max_{0\leq t\leq 1} |(T'u)(t)| \\
&\leq \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right) \times \\
&\quad \left[\|u(t)\|_1^\sigma \left(\|k\|_{L^1[0.1]} + \|g\|_{L^1[0.1]}\right) + \|h\|_{L^1[0.1]}\right] \\
&= M \|u\|_1^\sigma + N.
\end{aligned}$$

Choisissons n la partie entière de σ Alors

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq M^{\frac{((n+1)-\sigma)}{n}} N^{\frac{(\sigma-1)}{n}} + M^{\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}} \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{((n+1)-\sigma)}{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(\sigma-1)}{n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{n}} = 1,
\end{aligned}$$

Conséquemment $\lambda < 1$, contradiction avec le fait que $\lambda > 1$ En vertu du lemme 4 on conclut que T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$ et donc le problème P_1 a une solution non triviale $u^* \in E$.Ce qui achéve la preuve du théorème.

Le théorème suivant traite l'unicité de la solution.

Théoréme 47 *Supposons que f est une fonction de Carathéodory et qu'ils existent deux fonctions non négatives $k_1, k_2 \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$|f(t,x,\overline{x}) - f(t,y,\overline{y})| \leq k_1(t)|x-y| + k_2(t)|\overline{x}-\overline{y}|, \forall x,y \in \mathbb{R}, t\in[0,1] \tag{2.8}$$

et

$$\left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\varsigma|}\right)\left(\|k_1\|_{L^1[0.1]} + \|k_2\|_{L^1[0.1]}\right) < 1 \tag{2.9}$$

Alors le problème (P_1) admet une unique solution u^* dans E.

Preuve. *Prouvons que T est une contraction. En effet, soient $u, v \in E$,alors*

$$\begin{aligned}
&\left|Tu\left(t\right)-Tv\left(t\right)\right| \\
\leq\;& \frac{1}{2}\left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+2\left|\alpha\right|\right)+\left|\alpha\beta\right|}{\left|\varsigma\right|}\right) \\
& \int_{0}^{1}\left|f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)-f\left(s,v\left(s\right),v'\left(s\right)\right)\right|ds
\end{aligned}$$

Par 2.8 on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|Tu\left(t\right)-Tv\left(t\right)\right| \\
\leq\;& \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+2\left|\alpha\right|\right)+\left|\alpha\beta\right|}{\left|\varsigma\right|}\right) \\
& \max\left|u\left(t\right)-v\left(t\right)\right|\int_{0}^{1}k_{1}\left(s\right)ds+\max\left|u'\left(t\right)-v'\left(t\right)\right|\int_{0}^{1}k_{2}\left(s\right)ds \\
\leq\;& \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+2\left|\alpha\right|\right)+\left|\alpha\beta\right|}{\left|\varsigma\right|}\right)\left\|u-v\right\|_{1}\int_{0}^{1}\left(k_{1}\left(s\right)+k_{2}\left(s\right)\right)ds
\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
T'u\left(t\right) &= -\int_{0}^{t}\left(t-s\right)f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)ds \\
&\quad -\frac{\beta t\left(1-\alpha\right)}{\varsigma}\int_{0}^{\eta}\left(\eta-s\right)f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)ds \\
&\quad +\frac{t\left(1-\alpha\right)}{\varsigma}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)ds, \\
\forall t &\in [0.1]
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left|T'u\left(t\right)-T'v\left(t\right)\right| \\
\leq\;& \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+\left|\alpha\right|\right)}{\varsigma}\right) \\
& \left[\int_{0}^{1}k_{1}\left(s\right)\left|u\left(s\right)-v\left(s\right)\right|ds+\int_{0}^{1}k_{2}\left(s\right)\left|u'\left(s\right)-v'\left(s\right)\right|ds\right] \\
\leq\;& \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+\left|\alpha\right|\right)}{\left|\varsigma\right|}\right)\left\|u-v\right\|_{1}\int_{0}^{1}\left(k_{1}\left(s\right)+k_{2}\left(s\right)\right)ds
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En sommant 2.10 et 2.11, il suit en appliquant 2.8 et par passage au supremum que $\|Tu - Tv\|_1 < \|u - v\|$ *: Conséquemment* T *est une contraction dés lors, elle admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème* (P_1). ■

■

2.3 Existence de la solution positive

Dans cette section, en se servant de la fonction de Green et ses propriétés on établira la positivité de la solution du problème (P1) : Pour ce faire nous allons réécrire l'opérateur

T comme suit :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G_1(t,s) f(s, u(s), u'(s))\, ds \\ &+ \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta, s) f(s, u(s), u'(s))\, ds \\ &+ \frac{\alpha}{2\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta, s) f(s, u(s), u'(s))\, ds \end{aligned} \tag{2.12}$$

où$G_i(t,s), i = 1,2,3$ sont définies respectivement par

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[t^2(1-s) - (t-s)^2\right], s \leq t \\ \frac{1}{2} t^2 (1-s), t \leq s \end{cases} \tag{2.13}$$

$$G_2(t,s) = \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} \begin{cases} s(1-t), s \leq t \\ t(1-s), t \leq s \end{cases}$$

$$G_3 = \begin{cases} \beta s(1-t) + s(1-s)(1-\beta t), s \leq t \\ \beta t (1-s)^2 + s(1-s), t \leq s \end{cases}$$

Le résultat d'existence est basé sur la notion du cône et plus exactement sur le théorème de Krasnosels'kii.

2.3.1 Fonction de Green

Commençons par déterminer la fonction de Green en effet, on a

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds \qquad (2.14)\\
&\quad +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right) y(s)\,ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds \\
&\quad +\frac{t^2(1-\alpha)}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds + \frac{\alpha\beta\eta}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)^2 y(s)\,ds \\
&\quad +\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^1 s(1-s)\,y(s)\,ds.
\end{aligned}$$

comme $\varsigma = (1-\alpha)(1-\beta\eta)$ alors

$$\begin{aligned}
\frac{t^2(1-\alpha)}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds &= \frac{t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \qquad (2.15)\\
&= \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds + \frac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds
\end{aligned}$$

En regroupant le premier terme de 2.14 et le terme 2.15 on obtient

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\,ds + \frac{t^2}{2}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \\
&+\frac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(t^2(1-s)-(t-s)^2\right) y(s)\,ds \\
&+\int_0^1 \frac{t^2}{2}(1-s)\,y(s)\,ds + \frac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \\
&= \int_0^1 G_1(t.s)\,y(s)\,ds + \frac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

où

$$G_1(t,s) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(t^2(1-s)-(t-s)^2\right), 0 < s < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}t^2(1-s), 0 < t < s < 1 \end{array} \right.$$

En substituant 2.16 dans l'expression de $u(t)$ il vient que

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_1(t,s)\,y(s)\,ds + \tfrac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)} \int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds \\ &\quad -\frac{\beta t^2(1-\alpha)}{2\varsigma}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds - \frac{\alpha\beta}{2\varsigma}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds \\ &\quad +\frac{\alpha\eta\beta}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds + \frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^1 s(1-s)\,y(s)\,ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En regroupant encore une fois le deuxième terme de2.17 avec son troisième terme on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\eta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 (1-s)\,y(s)\,ds - \frac{\beta t^2(1-\alpha)}{2\varsigma}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds \\ = & \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^\eta [\eta(1-s)-(\eta-s)]\,y(s)\,ds + \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_\eta^1 \eta(1-s)\,y(s)\,ds \\ = & \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^\eta s(1-\eta)\,y(s)\,ds + \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_\eta^1 \eta(1-s)\,y(s)\,ds \\ = & \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 G_2(\eta,s)\,y(s)\,ds \end{aligned}$$

où

$$G_2 = \left\{ \begin{array}{l} s(1-\eta), 0 < s < \eta < 1 \\ \eta(1-s), 0 < \eta < s \leq 1 \end{array} \right.$$

Remarquons que $G_2(t,s) = \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}$ et donc l'expression de $u(t)$ devient

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_1(t,s)\,y(s) + \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 G_2(\eta,s)y(s)\,ds \\ &\quad -\frac{\alpha\beta}{2\varsigma}\int_0^1 (\eta-s)\,y(s)\,ds + \frac{\alpha\eta\beta}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds \\ &\quad +\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^1 s(1-s)\,y(s)\,ds \end{aligned} \tag{2.18}$$

Pour terminer calculons le troisième terme de 2.18

$$\begin{aligned}
&-\frac{\alpha\beta}{2\varsigma}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds+\frac{\alpha\eta\beta}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds+\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^1 s(1-s)\,y(s)\,ds\\
=\;&\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^\eta s(1-s)\,y(s)\,ds+\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_\eta^1 s(1-s)\,y(s)\,ds-\frac{\alpha\beta}{2\varsigma}\int_0^\eta (\eta-s)\,y(s)\,ds\\
&+\frac{\alpha\eta\beta}{2\varsigma}\int_0^\eta (1-s)^2\,y(s)\,ds+\frac{\alpha\eta\beta}{2\varsigma}\int_0^1 (1-s)^2\,y(s)\,ds\\
=\;&\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^\eta \left[\beta\eta(1-s)^2-\beta(\eta-s)+s(1-s)\right]y(s)\,ds\\
&+\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_\eta^1 \left[\beta\eta(1-s)^2+s(1-s)\right]y(s)\,ds\\
=\;&\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^\eta \left[\beta s(1-\eta)+s(1-\beta\eta)(1-s)\right]y(s)\,ds\\
&+\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_\eta^1 \left[\beta\eta(1-s)^2+s(1-s)\right]y(s)\,ds
\end{aligned}$$

Et dés lors

$$\begin{aligned}
u(t) \;=\; &\int_0^1 G_1(t,s)\,y(s)\,ds+\frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)}\int_0^1 G_2(\eta,s)\,y(s)\,ds\\
&+\frac{\alpha}{2\varsigma}\int_0^1 G_3(\eta,s)\,y(s)\,ds
\end{aligned}\tag{2.19}$$

où

$$G_3(\eta,s)=\begin{cases}\beta s(1-\eta)+s(1-s)(1-\beta\eta)\,, 0<s<\eta\leq 1\\ \beta\eta(1-s)^2+s(1-s)\,, 0<\eta<s\leq 1\end{cases}$$

Lemme 5 *si $\alpha>1$ et $\beta<\frac{1}{\eta}$, alors les fonctions $G_i(t,s)$, vérifient les propriétés suivantes :*

i) $G_i(t,s)\in C([0,1]\times[0,1]), i=1,2,3, G_i(t,s)\geq 0, i=1,2,$ et $G_3(\eta,s)\geq 0$ pour tout $t,s\in]0,1[$.

ii) Si $t,s\in[\tau_1,\tau_2], 0<\tau_1<\tau_2<1$,alors :

$$\tau_1^2 G_1(1,s)\leq G_1(t,s)\leq G_1(1,s)\tag{2.20}$$

$$\tau G_2(s,s)\leq G_2(t,s)\leq \frac{1}{\tau_1}G_2(s,s)\tag{2.21}$$

où $\tau = \max\left(\tau_1, (1-\tau_2)\right)$

Preuve. i) Il évident que $G_i\left(t.s\right) \in C\left([0,1]\times[0,1]\right)$,en outre pour tout $t, s \in \left]0,1\right[$, $G_1\left(t,s\right)$ et $G_2\left(t,s\right)$ sont positives et si $\alpha < 1$ et $\beta < \frac{1}{\eta}$ alors $G_3\left(t,s\right)$ est positive

ii) Soit $t, s \in [\tau_1, \tau_2]$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$, il est clair que $G_1\left(1,s\right) \neq 0$ et $G_2\left(s,s\right) \neq 0$ Si $0 < \tau_1 \leq s \leq t < \tau_2 < 1$,alors

$$\begin{aligned} G_1\left(t,s\right) &= \left[t^2\left(1-s\right) - \left(t-s\right)^2\right] \\ &= \frac{s}{2}\left[\left(1-s\right) - \left(t-1\right)^2\right] \leq \frac{s\left(1-s\right)}{2} = G_1\left(1,s\right) \end{aligned}$$

$$G_1\left(t,s\right) \geq t\frac{s\left(1-s\right)}{2} \geq \tau_1^2 G_1\left(1,s\right), 0 < \tau_1 \leq t \leq s < \tau_2 < 1,$$

et si $0 < \tau_1 \leq t \leq s < \tau_2 < 1$, alors

$$\begin{aligned} G_1\left(t.s\right) &= \frac{1}{2}t^2\left(1-s\right) \leq \frac{1}{2}s\left(1-s\right) = G_1\left(1,s\right) \\ G_1\left(t.s\right) &= \frac{1}{2}t^2\left(1-s\right) = \frac{1}{2}\left[t^2 s\left(t-s\right) + t^2\left(1-s\right)\right] \\ &\geq t^2\frac{s\left(1-s\right)}{2} \geq \tau_1^2 G_1\left(1,s\right) \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \frac{G_2\left(t,s\right)}{G_2\left(s,s\right)} &= \frac{\left(1-t\right)}{\left(1-s\right)} \leq 1 \leq \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{G_2\left(t,s\right)}{G_2\left(s,s\right)} &\geq \left(1-\tau_2\right), 0 < \tau_1 \leq t \leq s \leq \tau_2 < 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{G_2\left(t,s\right)}{G_2\left(s,s\right)} &= \frac{t}{s} \leq \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{G_2\left(t,s\right)}{G_2\left(s,s\right)} &\geq \left(1-\tau_2\right), 0 < \tau_1 \leq t \leq s \leq \tau_2 < 1, \end{aligned}$$

comme $G_2(s,s)$ sont non négatives alors

$$\tau G_2(s,s) \leq G_2(t,s) \leq \frac{1}{\tau_1} G_2(s,s)$$

Ce qui termine la preuve.

Supposons les hypothèses suivantes

H1) $f(t,u,v) = \alpha(t) f_1(u,v)$ où $\alpha \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et $f_1 \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$

H2) $0 < \int_0^1 G_1(s,s) \alpha(s) ds < \infty$

Lemme 6 *Si* $u \in E, \alpha > 1, 0 < \beta < \frac{1}{\eta}$, *alors la solution du problème aux limites* (P_1) *est positive et satisfait*

$$\min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} (u(t) + u'(t)) \geq \delta \|u\|_1$$

où $\delta = \max\left(\tau_1^2, \left(\tau + \frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right)\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)}\right)^{-1}\right)$

■

Preuve. De l'hypothèse H1, on peut écrire

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G_1(t,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \\ &+ \frac{\beta t^2}{2(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \\ &+ \frac{\alpha}{2\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En appliquant le membre droit de l'inégalité 2.20 on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \int_0^1 G_1(1,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \\ &+ \frac{\beta}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \\ &+ \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s) \alpha(s) f_1(u(s), u'(s)) ds \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^1 G_1(1,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ & + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ & + \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ \geq & \ \|u\| \end{aligned} \tag{2.24}$$

D'autre part, de l'inégalité 2.21 il en resulte que

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^1 G_2(t,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ & + \frac{\beta t}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ &\leq \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)}\right) \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \end{aligned} \tag{2.25}$$

Par conséquent

$$\int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \geq \delta_1 \|u'\| \tag{2.26}$$

où $\delta_1 = \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)}\right)^{-1}$. En tenant compte du membre gauche de 2.21 et 2.24 on obtient pour tout $t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\begin{aligned} u(t) &\geq \tau_1^2 \left[\int_0^1 G_1(1,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \right. \\ & + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(\eta,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ & \left. + \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \right] \geq \tau_1^2 \|u\| \end{aligned} \tag{2.27}$$

De plus compte tenu 2.26, il vient que

$$\begin{aligned} u'(t) &\geq \left(\tau + \frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right) \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\, f_1(u(s), u'(s))\, ds \\ &\geq \left(\tau + \frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right) \delta_1 \|u'\| \end{aligned} \tag{2.28}$$

Enfin par combinaison de 2.27 et 2.28 on obtient

$$\begin{aligned}\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]}\left(u\left(t\right)+u'\left(t\right)\right) &\geq \tau_1^2\left\|u\right\|+\left(\tau+\frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right)\delta_1\left\|u'\right\| \\ &\geq \delta\left\|u\right\|_1\end{aligned}$$

où $\delta=max\left(\tau_1^2,\left(\tau+\frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right)\delta_1\right)$ Ceci termine la preuve.

Deffinissons les quantités A_0 et A_∞ par

$$A_0=\lim_{(|u|+|v|)\to 0}\frac{f_1\left(u,v\right)}{|u|+|v|},A_\infty=\lim_{(|u|+|v|)\to\infty}\frac{f_1\left(u,v\right)}{|u|+|v|}.$$

On dit que f est superlinéaire respectivement sublinéaire lorsque $A_0=0$ et $A_\infty=\infty$,respectivement $A_0=\infty$ et $A_\infty=0.$

A présent démontrons le resultat principal de cette section. ■

2.3.2 Existence de la solution positive

Théoréme 48 *Sous les hypothèses H1-H2 et si* $\alpha>1,0<\beta<\frac{1}{\eta}$ *alors le problème aux limites* (P_1) *admet au moins une solution positive dans les deux cas superlinéaire ainsi*

que sublinéaire.

Preuve. Deffinissons le cône K par

$$K=\left\{u\in E,\min_{t\in[\tau_1,\tau_2]}\left(u\left(t\right)+u'\left(t\right)\right)\geq\delta\left\|u\right\|_1\right\}$$

Il est facile de vérifier que K est sous ensemble non vide, fermé et convexe de E, donc c'est un cône. De plus en vue du Lemme 6 on peut voir que $TK\subset K$.De plus via la preuve du théorème 46,T est complètement continu.dans E,

Examinons le cas où f est sur-linéaire. Comme $A_0=0$, alors pour tout $\varepsilon>0$,il existe $R_1>0$, tel que

$$f_1\left(u,v\right)\leq\varepsilon\left(|u|+|v|\right)$$

pour $0<|u|+|v|\leq R_1$. posons $\Omega_1=\left\{u\in E,\left\|u\right\|_1<R_1\right\}$, pour tout $u\in k\cap\partial\Omega_1$, il vient que

$$\begin{aligned} Tu(t) &\leq \varepsilon \|u\|_1 \left[\int_0^1 G_1(1,s)\,\alpha(s)\,ds \right. \\ &\left. + \frac{\beta}{\tau_1(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s) + \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s)\,\alpha(s)\,ds, \right] \end{aligned} \tag{2.29}$$

Par ailleurs, nous avons

$$Tu(t) \leq \varepsilon \|u\|_1 \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{\beta}{(1-\beta\eta)} \right) \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\,ds \tag{2.30}$$

De 2.29 et 2.30 on conclut

$$\begin{aligned} \|Tu\|_1 &\leq \varepsilon \|u\|_1 \left[\int_0^1 G_1(1,s)\,\alpha(s)\,ds \right. \\ &\left. + \left(\frac{1+2\beta}{\tau_1(1-\beta\eta)} \right) \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\,ds + \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s)\,\alpha(s)\,ds \right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

En vue du lemme 5, on peut choisir ε tel que

$$\varepsilon \leq \left(\int_0^1 \left[G_1(1,s) + \left(\frac{1+2\beta}{\tau_1(1-\beta\eta)} \right) G_2(s,s) + \frac{\alpha}{\varsigma} G_3(\eta,s) \right] \alpha(s)\,ds \right)^{-1} \tag{2.32}$$

Les inégalités 2.31 et 2.32 implique que $\|Tu\|_1 \leq \|u\|_1, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$. Maintenant si $A_\infty = \infty$, alors pour tout $M > 0$; il existe $R_2 > 0$, telle que $f_1(u,v) \geq M(|u|+|v|)$ pour $|u|+|v| \geq R_2$. Soit $R = \max\left\{2R_1, \frac{R_2}{\delta}\right\}$ et notons par Ω_2 L'ensemble ouvert $\{u \in E, \|u\|_1 < R\}$ .Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$ Alors

$$\min_{t \in [\tau_1,\tau_2]} (u(t) + u'(t)) \geq \delta \|u\|_1 = \delta R \geq R_2 \tag{2.33}$$

En utilisant la partie gauche de 2.20 et 2.21 on obtient

$$\begin{aligned} Tu(t) &\geq \tau_1^2 \left[\int_0^1 G_1(1,s)\,\alpha(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds \right. \\ &+ \frac{\beta\tau}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds \\ &\left. + \frac{\alpha}{\varsigma} \int_0^1 G_3(\eta,s)\,\alpha(s)\,f_1(u(s),u'(s))\,ds \right] \end{aligned}$$

ainsi

$$Tu(t) \geq \tau_1^2 M \|u\|_1 \int_0^1 \left(G_1(s,s) + \frac{\beta\tau}{(1-\beta\eta)} G_2(s,s) + \frac{\alpha}{\varsigma} G_3(\eta,s) \right) \alpha(s)\,ds \tag{2.34}$$

De plus, en vertu de 2.28 on a

$$T'u(t) \geq M\|u\|_1 \left(\tau + \frac{\beta\tau_1}{(1-\beta\eta)}\right) \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\,ds \tag{2.35}$$

En vue de 2.34 et 2.35 on obtient

$$\begin{aligned}
& Tu(t) + T'u(t) \\
\geq\ & M\|u\|_1 \left[\int_0^1 \tau_1^2 \left(G_1(s,s) + \frac{\alpha}{\varsigma} G_3(\eta,s)\right)\alpha(s)\,ds \right. \\
& \left. + \frac{\tau\left(1+\tau_1^2\beta - \beta\eta\right) + \beta\tau_1}{(1-\beta\eta)} \int_0^1 G_2(s,s)\,\alpha(s)\,ds \right] \\
\geq\ & M\|u\|_1 \tau_1^2 \int_0^1 G_1(s,s)\,\alpha(s)\,ds
\end{aligned}$$

Choisissons M de sorte que

$$M \geq \left(\tau_1^2 \int_0^1 G_1(s,s)\,\alpha(s)\,ds\right)^{-1}$$

alors on obtient $Tu(t) + T'u(t) \geq \|u\|_{1.}$ Par conséquent,

$$\|Tu\|_1 \geq \|u\|_1, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

D'où suite à la première assertion du théorème 45, il en resulte que T a point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2}/\Omega_1\right)$ tel que $R_2 \leq \|u\| \leq R$. Enfin en ce qui concerne la sublinéairité la preuve est analogue à celle du cas où f est superlinéaire. ■

2.3.3 Exemples

A fin d'illustrer nos resultat obtenus, considérons les deux exemples suivants.

Exemple 49 *Le problème aux limites en trois points suivant*

$$\begin{cases} u''' = (1+t)^{-10}\left(\sin u + e^{-t}u'(t)\right) + \ln(1+t), 0 < t < 1 \\ u(0) = 10^{-2}u(1), u'(1) = 10^{-4}u'\left(\frac{1}{2}\right), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

a une unique solution $u \in E$:

En effet, on a $\alpha = 10^{-2}, \beta = 10^{-4}, \eta = \frac{1}{2}, \varsigma = 0.98995$ *et*

$$|f(t,x,\overline{x}) - f(t,y,\overline{y})| \leq k(t)|x-y| + g(t)|\overline{x}-\overline{y}|$$

où $k(t) = (1+t)^{-10}, g(t) = (1+t)^{-10} e^{-t}, k, g \in L_1([0,1], \mathbb{R}_+)$ *.En utilisant le théorème 47, il vient que*

$$\begin{aligned} M &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{\varsigma}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) \\ &= 0.20976 \times 4.0508 = 0.84970 < 1 \end{aligned}$$

et donc le problème 2.36 admet une unique solution u dans E.

Exemple 50 *Le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' = 10^{-2}\left(\frac{u}{4+u^2}\sin t + u' e^{-u^2}\ln(1+t) + \tan t\right), 0 < t < 1 \\ u(0) = -2u(1), u'(1) = 3u'\left(\frac{1}{2}\right), u'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

possède au moins une solution nontriviale u dans E.

En effet, on a $\alpha = -2, \beta = 3, \eta = \frac{1}{2}, \varsigma = \frac{3}{2}$,

$$f(t,x,y) = 10^{-2}\left(\frac{x}{4+x^2}\sin t + y e^{-x^2}\ln(1+t) + \tan t\right)$$

$f(t,0,0) = 10^{-2}\tan t \neq 0, t \in (0,1)$

$$|f(t,x,y)| \leq k(t)|x| + g(t)|y| + h(t)$$

où $k(t) = 10^{-2}\sin t, g(t) = \frac{\ln(1+t)}{100}, h(t) = 10^{-2}\tan t, k, g, h \in L_1([0,1], \mathbb{R}_+)$, *,Vérifions les hypothèses du théorème 46, en effet on a*

$$\begin{aligned} M &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{\varsigma}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) \\ &= 27.333 \times 8.4599 \times 10^{-3} = 0.23123 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{\varsigma}\right)\|h\|_{L^1[0.1]} \\ &= 27.333 \times 0.61563 \times 10^{-2} = 0.16827 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors le problème 2.37 admet au moins une solution non triviale u dans E.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. OíRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] R. P. Agarwal, Focal boundary value problems for differential and difference equations, Kluwer Academic Publ., 1998.

[3] D. R. Anderson, J. M. Davis, Multiple solutions and eigenvalues for third-order right-focal boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., 267 (2002), 135-157.

[4] V. IS. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fundamenta Math., 3 (1922), pp. 133-181.

[5] F. Bernis, L.A. Peleter, Two problems from draining flows involving third-orderordinary differential equation, SIAM J. Math. Anal. 27 (1996), 515-527

[6] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[7] G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer Degree and Applications, January 17, 2009.

[8] J. R. Graef and Bo Yang, Positive solutions for a third order nonlocal boundary value problem, Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S., 1 (2008), 89-97.

[9] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

[10] D. Guo, V. Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones. Academic Press, San Diego. 1988.

[11] L. J. Guo, J. P. Sun, Y. H. Zhao, Existence of positive solutions for nonlinear thirdorder three-point boundary value problem, Nonlinear Anal., 68 (2008), 3151-3158.

[12] V. I. Istratescu, Fixed Point Theory : An Introduction, Springer, 30 nov. 2001 - 488 pages

[13] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques Applications. Springer-Verlag, 1993.

[14] R. Ma, Multiple positive solutions for a semipositone fourth-order boundary value, problem, Hiroshima Math. J. 33 (2003), 217-227.

[15] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman Hall/CRC, (2006).

[16] Y. P. Sun, Positive solutions for third-order three-point nonhomogeneous boundary value problems, Applied Mathematics Letters. 22 (2009), 45-51.

[17] W. C. Troy, Solutions of third order differential equations relevant to draining and coating flows, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993) 155-71.

[18] J. R. Graef, B. Yang, Positive solutions of a third order eigenvalue problem, Dynam. Systems Appl. 15 (2006), 97-110.

ملخص

نهتم بدراسة مسألة متعلقة بوجود ووحدانية حل مسألة ذات قيم حدية غير محلية باستعمال مبدأ التقليص لـ بناخ والمتناوبة الغير خطية لاري شودر وخواص دالة قرين ونظرية قيوكرونولوسكي في مخروط في الحالة الغير خطية **f** فوق الخطية او تحت الخطية.

كلمات مفتاحية : القيم الحدية غير محلية **,** المتناوبة غيرخطية للاري شوردر **,** دالة قرين **,** تحت الخطية **,** فوق الخطية **,** وجدانية الحل .

Résumé:

On s'intéressera à l'étude d'un problème concernant l'existence et l'unicité des solutions d'un problème à valeurs aux limites non locales en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et les propriétés de La fonction de Green et le théorème de Guo-Krasnosel'skii dans un cône, dans le cas ou la non linéarité de f est soit sur-linéaire ou sous-linéaire.

Mos clés :

valeurs aux limites non locales, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le La fonction de Green, sous-linéaire, sur-linéaire, Existence de la solution.

Abstract:

We are interested in the study of a problem concerning the existence and uniqueness of solutions to a problem for the boundary value problem nonlocal By using Banach contraction principle, Leray-chauder nonlinear alternative, properties of the Green function and Guo-Krasnosel'skii fixed point theorem in cone, in the case where the nonlinearity f is either superlinear or sublinear.

Key words: non locales boundary value problem, , Leray-Schauder nonlinear alternative, Green function,