



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :SOUmia HAMADA

Thème

Application des polynômes de Bernstein pour solution d'équations integro- différentielles

Soutenu publiquement le : 02/06/2016

Devant le jury composé de :

KOUIDRI MOHAMMED	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
ABBASSI HOSSINE	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
TELLAB BRAHIM	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
BENACHEIKH ABDELKRIM	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Merci **Allah**(mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Al hamdo li **ALLAH** "

Je dédie ce mémoire à :

mon parents :

mon mari, mes sœurs à ma sœur et tous les parents :

à tous les collègues et amis.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur Ben achik Abd Alkrim de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	1
1 Rappelles	4
1.1 Espace de Hilbert	4
1.2 Espace de $L^2[0, 1]$	6
2 Type d'équations intégr-différentielles	7
2.1 Équation intégrale	7
2.2 Équations intégr-différentielles	10
2.3 Les systèmes d'équations intégr-différ	11
3 Polynômes de Bernstein	12
3.1 Polynômes de Bernstein	12
3.1.1 Propriétés des polynômes de Bernstein	14
3.2 Dérivation des polynômes de Bernstein	17
3.3 Approximation des polynômes de Bernstein	19

4 Tests numériques sous Matlab	23
---------------------------------------	-----------

NOTATIONS

- \forall : quelque soit
- \exists : il existe
- $B_i^n(x)$: i ieme n ieme - degré du polynôme de Bernstein
- Er : Erreur
- Apprx : Approximation d'erreur
- Ex : solution exacte

INTRODUCTION

Une équation intégro- différentielle est une équation fonctionnelle dans laquelle la fonction inconnue paraît sous le signe d'intégrale, ainsi que ses dérivées.

Les méthodes Nouvelles sont toujours nécessaires pour résoudre les équations intégrales parce qu'aucune méthode unique ne fonctionne bien pour tous ces équations, il y a eu un intérêt considérable dans la résolution d'équations différentielles et intégrales à l'aide de techniques qui impliquent des méthode de polynômes de Bernstein.

Présentation du mémoire. Nous présentons ici le plan de travail, nous donnons les éléments principaux des chapitres composant ce mémoire.

Chapitre I : Type d'équations intégro-différentielles. Ce chapitre contient les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.

Chapitre II : Polynôme de Bernstein

Ce chapitre contient :

- Définition, propriété de Bernstein
- Dérivation des polynômes
- Fonction approximation

Chapitre III :Tests numériques sous Matlab

En fin de compte,nous avons étudié quatre exemples si illustratifs en utilisant le premier exemple étudie , équation intégro-différentielle de Volterra
Exemple deux étude, équation intégro-différentielle de Fredholm
Exemple trois et quatre étude,équation intégro-différentielle .

RAPPELLES

1.1 ESPACE DE HILBERT

Définition 1.1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur \mathbb{C} muni d'un produit scalaire $\langle x, x \rangle$, et qui est complet pour la norme $\langle x, x \rangle^2$.*

Définition 1.1.2 *Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé est un sous-ensemble E de H tel que pour tout e, f de E nous avons*

$$\langle e, f \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } e = f \\ 0 & \text{si } e \neq f \end{cases}$$

Définition 1.1.3 *Une famille $e_i, i \in I$ d'éléments de H est dite orthonormée si*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.1.4 Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthonormé dans un espace de Hilbert H et soit $x \in H$, alors,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Ce résultat est appelé l'inégalité de Bessel. Une base orthonormée de H est un système orthonormé E tel que

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e; \quad x \in H$$

où la convergence est dans H .

Définition 1.1.5 Soit H un espace de Hilbert et soit $S \subset H$: Le complément orthogonal de S est

$$S^\perp = \{x \in H : \langle x, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$$

Nous remarquons de cette définition que S^\perp est toujours un sous-espace fermé de H et que $S \cap S^\perp = \{0\}$

Définition 1.1.6 Un espace vectoriel X est la somme directe de deux sous-espaces Y et Z de X et on écrit

$$X = Y \oplus Z$$

si chaque $x \in X$ a une représentation unique,

$x = y + z$ ou $y \in Y$ et $z \in Z$. Soit M un sous-espace fermé de H : Alors $H = M \oplus M^\perp$

1.2 ESPACE DE $L^2[0, 1]$

Définition 1.2.1 *L'espace de fonctions $L^2[0, 1]$ défini par*

$$L^2[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et } \|f\| < \infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

TYPE D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

En mathématiques, une équation intégrale est une équation dans laquelle une fonction inconnue apparaît sous un signe intégral. Il existe un lien étroit entre équations différentielles et intégrales, et certains problèmes peuvent être formulés de toute façon. Voir, par exemple, la théorie de Fredholm.

2.1 ÉQUATION INTÉGRALE

Équations intégrales de Fredholm

La forme la plus classique des équations intégrales de Fredholm est de la forme ([1]) :

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2.1)$$

où les limites de l'intégration a et b sont des constantes et la fonction inconnue u apparaît de façon linéaire sous le signe intégral. Si la fonction $\phi(x) = 1$; alors (2.1) devient

simplement.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2.2)$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type ; si on considère si $\phi(x) = 0$, alors (2.1) devient.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.3)$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Équations intégrales de Volterra

La forme la plus classique des équations intégrales linéaires de Volterra est de la forme

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.4)$$

où les limites de l'intégration sont fonctions de x et la fonction inconnue u(x) apparaît linéairement sous le signe. Si la fonction $\phi(x) = 1$, alors l'équation (2.4) devient tout simplement

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (2.5)$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type ; si on considère $\phi(x) = 0$, alors l'équation (2.5) est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt = 0 \quad (2.6)$$

Remarque : $F(u(x)) = u^n(x), n \neq 1$; ou $\sin u(x)$ etc..., alors les équations de Volterra et équations intégrales de Fredholm sont classés comme des équations intégrales non-linéaires. Comme pour les exemples suivants, les équations intégrales sont non-linéaires :

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^2(t)dt \\ u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \sin(u(t))dt \\ u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \ln(u(t))dt \end{aligned}$$

Ensuite, si nous posons $f(x) = 0$, les équations de Volterra ou les équations intégrales de Fredholm, sont appelées équations intégrales homogènes, dans le cas contraire, elles sont appelées équations intégrales non homogènes.

2.2 ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES

Dans les équations intégrales, les fonctions inconnues paraissent sous des intégrales définies. On peut imaginer des relations du même type où, outre les fonctions inconnues, paraissent leurs dérivées. Ce sont les équations intégré-différentielles. Nous allons montrer que des équations intégré-différentielles([6]) se présentent dans quelques questions de Physique. Si dans un phénomène de Mécanique ou de Physique l'état futur du système envisagé ne dépend que de l'état actuel ou de celui infiniment voisin, on dit, selon la dénomination de M. Picard, que le phénomène n'est pas de nature héréditaire. Les problèmes qui s'y rattachent donnent lieu en général à des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Mais lorsque l'état futur du système dépend non seulement des valeurs de certains paramètres à l'instant actuel, mais de toutes leurs valeurs dans un intervalle de temps précédent, on dit que le phénomène est héréditaire.

Équation intégré-différentielle de Fredholm

On appelle équation intégré-différentielle de Fredholm une équation du type :

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x), \int_a^b k(x, t, u(x))dt) \\ u(a) = u_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et $a; b$ constants.

Équations intégré-différentielle de Volterra

On appelle équation intégré-différentielle de Volterra une équation du type :

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x), \int_a^x k(x, t, u(x))dt) \\ u(a) = u_0, \end{cases} \quad (2.8)$$

Où $u(x)$ est une fonction inconnue et $a; b$ constants

Équations intégré-différentielles linéaires de Volterra-Fredholm

On appelle équation intégré-différentielle de Volterra-Fredholm une équation du type :

$$p_j(x)y^j(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)y(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)y(t)dt \quad (2.9)$$

2.3 LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉR

Système d'équations intégré-différentielles de Fredholm

On appelle système d'équations intégré-différentielles de Fredholm un système du type :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n P_{ik}^{(j)}(x) y_k^{(j)}(x) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^n \int_a^b q_{ik}^{(j)}(x, t) y_k^{(j)}(t) dt = f_i(x) \\ y_k^{(0)}(a) = \beta_{k0}, y_k^1(a) = \beta_{k1}, \dots, y_k^{(n-1)}(a) = \beta_{k(n-1)} \end{cases} \quad (2.10)$$

ou $P_{ik}^{(j)}(i, k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, $f_i(x)(i = 1, 2, \dots, m)$ et $q_{ik}^{(j)}(x, t)(i, k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions connues ayant nième dérivées $n \geq m$ sur un intervalle $a \leq x, t \leq b$ est $y_k^j(x)(k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ désignent les dérivées j-èmes des fonctions inconnues $y_k(x)$, respectivement.

Système d'équations intégré-différentielles de Volterra-Fredholm d'ordre m

On appelle système d'équations intégré-différentielles de Volterra-Fredholm un système du type :

$$\sum_{\theta=0}^m \sum_{j=1}^k g_{ij}(x) y_j^\theta(x) + \int_0^x \sum_{j=0}^n r_{ij}(x, t) y_j(t) dt + \int_0^1 \sum_{j=0}^n q_{ij}(x, t) y_j(t) = f_i(x)$$

$$i = 1, 2, \dots, k; 0 \leq x, t < 1$$

Dans ce mémoire sont concernés les systèmes d'équations intégré-différentielles suivants

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (q_{ij}(t) y_j'(t) + r_{ij}(t) y_j(t)) + \sum_{j=1}^n \int_0^1 k_{ij}(t, s) y_j'(s) ds \\ + \sum_{j=1}^n \int_0^1 k_{2ij}(t, s) y_j(s) ds = x(t); i = 1, 2, \dots, n, \\ y_i(0) = y_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour les résoudre et des méthodes analytiques.

POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Dans ce chapitre nous allons présenter les polynômes de Bernstein, nommés ainsi en l'honneur du mathématicien ukrainien Segei Natanovich Bernstein (1880-1968).

3.1 POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Définition 3.1.1 *Les polynômes de Bernstein de degré n sont définies sur $[0, 1]$ par ([4])*

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.1)$$
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Exemple

Dans le cas cubique $n = 3$ les polynômes de Bernstein sont données par :

$$B_{0,3}(x) = (1-x)^3,$$

$$B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2,$$

$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x),$$

$$B_{3,3}(x) = x^3.$$

On voit, entre autre qu'il sont tout positifs pour $x \in [0, 1]$ et que leur somme est égale 1.

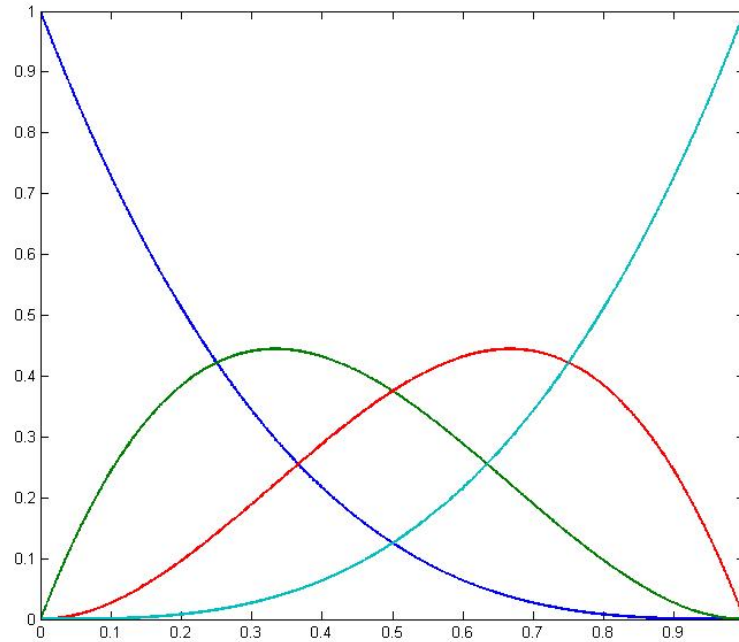


FIGURE 3.1 : polynômes de Bernstein de degré 3.

3.1.1 Propriétés des polynômes de Bernstein

Partition de l'unité :

$$\sum_{j=0}^n B_{j,n}(x) = 1$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 1 &= [(1-x) + x]^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n B_{j,n}(x) \end{aligned}$$

■

Positivité :

Les polynôme de Bernstein sont non négatif sur $[0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

Preuve.

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\binom{n}{i} > 0$ et pour $x \in [0, 1], x \geq 0$ et $1-x \geq 0 \implies x^i \geq 0$ et $(1-x)^{n-i} \geq 0$ donc $\forall x \in [0, 1], B_{i,n}(x) \geq 0$ ■

Symétrie :

Si $0 \leq i \leq n$ alors $B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x)$

Preuve.

$$\begin{aligned}\forall i \in 0, \dots, n, B_{i,n}(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\ \implies B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{i} (1-x)^i (1-(1-x))^{n-1} \\ &= \binom{n}{i} x^{n-i} (1-x)^i\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} \\ &= \binom{n}{n-i}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{n-i} x^{n-i} (1-x)^i \\ &= B_{n-i,n}(x)\end{aligned}$$

■

Récurrance :

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

avec $B_{0,0}(x) = 1$ et $B_{j,n}(x) = 0, \forall j \notin \{0, \dots, n\}$

Preuve.

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i+i)(i-1)!}{i!(n-1)!} \\ &= \frac{(n-i)(i-1)! + i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i)(i-1)!}{i!(n-i)!} + \frac{i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \end{aligned}$$

Pour $i \in [0, n]$

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= (1-x) \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} + x \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} \\ &= (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x) \end{aligned}$$

■

3.2 DÉRIVATION DES POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Théorème 3.2.1 Soient $B_{i,n}(x)$ les polynômes de Bernstein de degré n . Alors , on a les résultats suivant :

$$B'_{i,n}(x) = \frac{i - nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \quad (3.2)$$

$$B_{i,n}^{(2)}(x) = \frac{i(i-1) - 2i(n-1)x + n(n-1)x^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \quad (3.3)$$

$$B'_{i,n}(x) = n[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)] \quad (3.4)$$

Preuve. On commence par démontrer la relation (3.2).

$$\begin{aligned} B_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ \implies B'_{i,n}(x) &= \binom{n}{i} [ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}] \\ &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x} \right) \\ &= \left(\frac{i}{x} - \frac{n-i}{1-x} \right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \frac{(1-x)i - x(n-i)}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \\ &= \frac{i - nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

On démontre la relation (3.3)

$$\begin{aligned}
B_{i,n}^2(x) &= [B'_{i,n}(x)]' \\
&= \left[\frac{i-nx}{x(1-x)} B_{i,n}(x) \right]' \\
&= \frac{-nx(1-x) - (i-nx)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) + \frac{i-nx}{x(1-x)} B'_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx(1-x) - (i-nx)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) + \frac{(i-nx)^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx(1-x) - (i-nx)(1-2x) + (i-nx)^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \\
&= \frac{-nx + nx^2 + 2ix - i - 2nx^2 + nx + i^2 - 2inx + n^2x^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \\
&= \frac{(i^2 - i) + (2ix - 2inx) + (n^2x^2 - nx^2)}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x) \\
&= \frac{i(i-1) - 2i(n-1)x + n(n-1)x^2}{x^2(1-x)^2} B_{i,n}(x)
\end{aligned}$$

Enfin ,on démontre la relation (3.4)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} B_{i,n}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^n \right) \\
&= \frac{in!}{i!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \\
&= n \left[\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} \right] \\
&= n [B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)]
\end{aligned}$$

■

3.3 APPROXIMATION DES POLYNÔMES DE BERNSTEIN

Supposons que $H = L^2[0, 1]$ et $Y =$ sous-espace engendré $\{B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}\}$. H est l'espace Hilbert avec le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Puisque H est l'espace de Hilbert et Y est le sous espace de dimension-finie, donc Y est un sous-espace fermé de H , donc Y est un sous-espace complet de H . Ainsi si f est un élément arbitraire dans H , f meilleure approximation unique de Y comme y_0 , qui est

$$\exists y_0 \in Y; \forall y \in Y \|f - y_0\|_2 \leq \|f - y\|_2.$$

ou $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ comme $y_0 \in Y$ ainsi il existe des coefficients c_0, c_1, \dots, c_n tel que

$$f \simeq y_0 = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n} = c^T \phi,$$

où

$$\phi^T = [B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}]$$

et

$$c^T = [c_0, c_1, \dots, c_n]$$

et c^T s'obtient par

$$c^T \langle \phi, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle,$$

où $i = 0, 1, \dots, n$. Pour simplifier, nous écrivons

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \int_0^1 f(x) \phi(x)^T dx \\ &= [\langle f, B_{0,n} \rangle, \langle f, B_{1,n} \rangle, \dots, \langle f, B_{n,n} \rangle] \end{aligned}$$

La matrice $\langle \phi, \phi \rangle (n+1) \times (n+1)$ est une matrice carrée de ϕ . Soit

$$Q = \langle \phi, \phi \rangle = \int_0^1 \phi(x) \phi(x)^T dx$$

Alors

$$c^T = \left(\int_0^1 f(x) \phi(x)^T dx \right) Q^{-1} \quad (3.5)$$

Théorème 3.3.1 *Supposons que H est un espace de Hilbert et Y est un sous-espace fermé de H tel que $\dim Y < \infty$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est une base quelconque pour Y . Soit x un élément arbitraire dans H et y_0 la meilleure approximation unique de x dans Y . Alors*

$$\|x - y_0\|^2 = \frac{G(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{G(y_1, y_2, \dots, y_n)}, \quad (3.6)$$

Où

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle & \dots & \langle y_1, y_n \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \dots & \langle y_2, y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle y_n, y_1 \rangle & \langle y_n, y_2 \rangle & \dots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

Preuve. voir on[3] ■

Nous définissons le produit scalaire dans $L^2[0, 1]$ par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)$ et le sous-espace $Y =$ sous-espace engendré $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ ainsi présenté l'erreur absolue dans le théorème (3.3) peut être écrite

$$\|x - y_0\| = \frac{\det[\int_0^1 \psi(t)\psi^T(t)dt]}{\det[\int_0^1 \phi(t)\phi^T(t)dt]}$$

Lemme 3.3.2 *Supposons que la fonction $g : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ si $(n+1)$ périodes différentiables, $g \in C^{n+1}[t_0, t_f]$ et $Y =$ sous-espace engendré $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ si $c^T \phi$ la meilleure approximation de g hors de Y alors que la limite de l'erreur moyenne d'erreur est présentée comme suit :*

$$\|g - c^T \phi\|_2 \leq \frac{M^{\frac{2n+3}{2}}}{(n+1)! \sqrt{2n+3}}$$

ou $M = \max_{x \in [0,1]} |g^{(n+1)}(x)|$.

Preuve. Nous considérons le polynôme de Taylor

$$y_1(x) = g(t_0) + g'(t_0)(x - t_0) + \dots + g^n(t_0) \frac{(x - t_0)^n}{n!}$$

Nous savons que

$$|g(x) - y_1(x)| \leq |g^{(n+1)}(\eta)| \frac{(x - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.7)$$

ou $\eta \in (t_0, t_f)$. comme $c^T \phi$ est la meilleure approximation de g hors de Y , $y \in Y$ et en utilisant (6) nous avons

$$\begin{aligned} \|g - c^T \phi\|_2^2 &\leq \|g - y_1\|_2^2 = \int_0^1 |g(x) - y_1(x)|^2 dx \\ &\leq \left[g^{n+1}(\eta) \frac{(x - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right]^2 dx \\ &\leq \frac{M^2}{(n+1)!^2} \int_0^1 (x - t_0)^{2n+2} dx \\ &= \frac{M^2 (t_f - t_0)^{2n+3}}{[(n+1)!]^2 (2n+3)} \end{aligned}$$

et nous prenons la racines carrées nous trouvons le résultat. ■

Maintenant, nous voulons montrer que cette approximation est convergente vers f seulement avec uniformément la condition de continuité de f quand $n \rightarrow \infty$ ([2]).

Définition 3.3.3 On définit le module de continuité $\omega(f, \delta)$ d'une fonction générale f définie sur $[a, b]$ par

$$\omega(f, \delta) = \sup_{x, y \in [a, b] \text{ et } |x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Lemme 3.3.4 $f(x)$ est un fonction uniformément continu sur $[a, b]$ si et seulement si $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0$.

Preuve. voir [5] ■

Théorème 3.3.5 Si $f(x)$ dans $[0, 1]$ alors

$$\|f - p(f, n)\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ou $p(f, n) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_{i,n}$ et $\|f\|_\infty = \sup |f(x)| : x \in \text{domaine } f$ si satisfait également une condition de Lipschitz de l'ordre α dans $[0, 1]$ alors

$$\|f - p(f, n)\|_\infty \leq \frac{3}{2} k n^{-\frac{\alpha}{2}}$$

où k est constante de Lipschitz

Preuve. voir [5] ■

Lemme 3.3.6 si $f(x)$ sur $[0, 1]$ est $y =$ sous-espace engendré $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ puis

$$\|f - c^T \phi\|_2 \leq \frac{3}{2} \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$$

ou $c^T \phi$ la meilleure approximation f hors de Y .

Preuve. Soit $c^T \phi$ est la meilleure approximation f hors de Y et $p(f, n) \in Y$ et en utilisant $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ nous pouvons

$$\|f - c^T \phi\|_2 \leq \|f - p(t, f)\phi\|_2 \leq \|f - p(t, f)\phi\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Noter cela si f est défini sur $[t_0, t_f]$ nous pouvons transmettre $[t_0, t_f]$ $[0, 1]$ et si f uniformément continu sur $[0, 1]$ employer le lemme (3.3.2) et Lemme(3.3.4) que nous aurons $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$. ■

TESTS NUMÉRIQUES SOUS MATLAB

La forme générale de l'équation intégro différentielle de Volterra est donnée :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)y(x)dt \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (4.1)$$

En appliquant la méthode des polynômes de Bernstein , nous obtenir la formule suivante :

$$[01B_{1-1}^{n-1}(x)...B_n^n(x)] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = f(x) + \int_a^x k(x,t)[B_0^n(x)B_1^n(x)B_2^n(x)...B_n^n(x)] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} dt \quad (4.2)$$

Qui peut être converti en le forme suivante :

$$[0 \ 1 \ 2t \dots nt^{n-1}] \begin{bmatrix} b_{00} & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{0n} & b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = f(x) + \int_a^x k(x,t)[0 \ t \dots t^n] \begin{bmatrix} b_{00} & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{0n} & b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} dt \quad (4.3)$$

Maintenant, pour trouver toute l'intégration dans l'équation (4.3). Ensuite, afin de déterminer $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ nous avons besoin de n équations, Choix x_i $i = 1, 2, \dots, n$ dans l'intervalle $[0, 1]$, ce qui donne (n) équations.

Résoudre ces (n) équations par élimination de Gauss pour trouver les valeurs c_0, c_1, \dots, c_n . L'algorithme suivant résume les étapes pour trouver la solution approchée pour le deuxième type de linéaire intégro Volterra équation.

Exemple 1 :

Dans cet exemple nous considérons l'équation intégro- différentielle linéaire de Volterra suivante avec valeur initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + \sin(x) + \int_0^x y(t)dt \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

dont la solution exacte $y(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos(x)$.

Maintenant pour trouver la solution en utilisant la méthode des polynômes de Bernstein, nous pouvons utiliser ce processus suivant :

Quand l'algorithme des polynômes de Bernstein est appliqué aux deux côtés dans l'exemple. Alors choisissons le le degré des polynômes de Bernstein $n = 2$, nous arrivons :

$$-2c_0(1-x) + 2c_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = 1 + \sin(x) + \int_0^x [c_0(1-t)^2 + 2c_1t(1-t) + c_2t^2]dt$$

Ensuite

$$-2c_0(1-x) + 2c_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = 1 + \sin(x) + (c_0 \int_0^x (1-t)^2 dt + 2c_1 \int_0^x t(1-t) dt + c_2 \int_0^x t^2 dt)$$

Et après calcul des intégrales on obtient :

$$\begin{aligned} -2c_0(1-x) + 2c_1 - 4c_1x + 2c_2x &= 1 + \sin(x) - \frac{1}{3}c_0(1-x)^3 + \frac{1}{3}c_0 + c_1x^2 - \frac{2}{3}c_1x^3 + \frac{1}{3}c_2x^3 \\ (-2(1-x) + \frac{1}{3}c_0(1-x)^3 - \frac{1}{3})c_0 &+ (2(1-x) - 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3)c_1 + (2x - \frac{1}{3}x^3)c_2 = 1 + \sin(x) \end{aligned}$$

Alors pour déterminer c_0, c_1 etc c_2 , nous avons besoin de trois équations ; Choisissons maintenant $x_i, i = 1; 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$, dans la condition initiale dans équation

$$y'(x) = -2a_0(1-x) + 2a_1 - 4c_1x + 2c_2x$$

qui donne trois équations.

$$\begin{aligned} c_0 &= -1 \\ -\frac{31}{24}c_0 - \frac{1}{6}c_1 + \frac{23}{24}c_2 &= 1.4794 \\ -\frac{1}{3}c_0 - \frac{7}{3}c_1 + \frac{5}{3}c_2 &= 1.8415 \end{aligned}$$

Résolvons les trois équations par l'élimination Gauss pour trouver les valeurs c_0, c_1 et c_2 .
on trouve

$$\begin{aligned} c_0 &= -1 \\ c_1 &= -0.5783 \\ c_2 &= 0.0953 \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation intégral-différentielle linéaire de Volterra du deuxième espèce est :

$$\begin{aligned} y(x) &= (c_0 - 2c_1 + c_2)x^2 - 2(c_0 - c_1x + c_2) \\ y(x) &= 0.5219x^2 + 0.8434x - 1 \end{aligned}$$

pour $n = 1$: $y(x) = 1.6832x - 1$

La solution approchée pour quelques valeurs de x en utilisant la méthode des polynômes de Bernstein et valeurs exactes $y(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos(x)$ sur Exemple 1, selon l'erreur de moindres carrée (L.S.E), $Er = \sum_{k=0}^n (y_{Ex}(x) - y_{Approx}(x))^2$ sont présentés dans la Table 4.1 et figure 4.1.

TABLE 4.1 : Tableau(1)résultat de exemple 1

x	Ex $y(x)$	Apprx de degré(n=1)	Apprx de degré(n=2)
0	-1	-1	-1
0.1	-0.8998	-0.8317	-0.9131
0.2	-0.7987	-0.6634	-0.8212
0.3	-0.6958	-0.4951	-0.7243
0.4	-0.5903	-0.3268	-0.6223
0.5	-0.4815	-0.1586	-0.5153
0.6	-0.3687	0.0097	-0.4033
0.7	-0.2514	0.1780	-0.2862
0.8	-0.1290	0.3463	-0.1641
0.9	-0.00083	0.5146	-0.0369
1	0.1335	0.6829	0.0953
	$Er = \sum_{k=1}^{10} (y_{Ex}(x) - y_{Apprx}(x))^2$	1.357912	0.010062

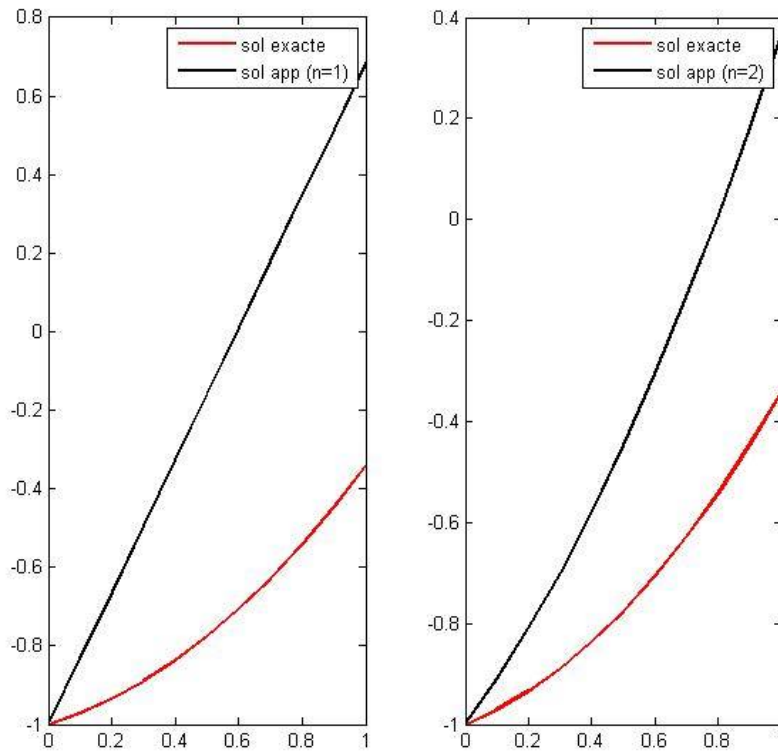


FIGURE 4.1 : solution exacte et solution approchée de exemple 1.

Exemple 2 :

Considérons l'équation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm suivante du deuxième espèce avec la condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xy(t)dt \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

et avec la solution exacte $y(x) = xe^x$. Maintenant pour trouver la solution en utilisant la méthode des polynômes Bernstein, nous pouvons utiliser processus suivant :

Quand l'algorithme des polynômes de Bernstein est appliqué aux deux côtés dans l'exemple. Nous choisissons le degré de polynômes Bernstein $n = 2$, nous arrivons :

$$-2a_0(1-x) + 2a_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = xe^x + e^x - x + \int_0^1 x[c_0(1-t)^2 + 2c_1t(1-t) + c_2t^2]dt$$

Ensuite

$$-2c_0(1-x) + 2c_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = xe^x + e^x - x + (c_0 \int_0^1 x(1-t)^2 dt + 2c_1 \int_0^1 xt(1-t) dt + c_2 \int_0^1 xt^2 dt)$$

Et après avoir effectué l'intégration.

$$\begin{aligned} -2c_0(1-x) + 2c_1 - 4c_1x + 2c_2x &= xe^x + e^x - x + \left[\frac{c_0}{3} + c_1 + \frac{c_2}{3}\right]x - \frac{2}{3}c_1 \\ (-2 + \frac{2}{3}x)c_0 + (\frac{8}{3} - \frac{5}{3}x)c_1 + \frac{5}{3}xc_2 &= xe^x + e^x - x \end{aligned}$$

Alors afin de déterminer c_0, c_1 et c_2 , nous avons besoin de trois équations ; Maintenant, le choix $x_i, i = 1, 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$, avec condition initiale dans l'équation $y'(x) = -2a_0(1-x) + 2a_1 - 4c_1x + 2c_2x$ ce qui donne trois équations.

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ \frac{-7}{6}c_0 + \frac{1}{6}c_1 + \frac{5}{6}c_2 &= \frac{3}{2}e^{0.5} - \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{3}c_0 - \frac{7}{3}c_1 + \frac{5}{3}c_2 &= 2e - 1 \end{aligned}$$

Résoudre trois équations par élimination de Gauss on trouve les valeurs constantes c_i :

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = -0,1839$$

$$c_2 = 2.4045$$

Alors la solution de l'équation linéaire d'intégré-différentielles de Fredholm du second type est :

$$y(x) = (c_0 - 2c_1 + c_2)x - 2(c_0 - c_1)x + c_0$$

$$y(x) = 2.7723x^2 - 0.3678$$

pour $n = 1$: $y(x) = 8.873x$.

La solution approchée pour quelques valeurs de x en utilisant la méthode des polynômes de Bernstein et valeurs exactes $y(x) = xe^x$ d'exemple, selon l'erreur de moindres carrés

(L.S.E), $Er = \sum_{k=1}^m (y_{Ex}(x) - y_{Approx}(x))^2$

sont présentés dans la Table 4.2 et figure 4.2.

TABLE 4.2 : Tableau(2)résultat de exemple 2

x	Ex $y(x)$	Apprx de degré(n=1)	Apprx de degré(n=2)
0	0	0	0
0.1	0.1105	0.8873	-0.0091
0.2	0.2443	1.7746	0.0373
0.3	0.4050	2.6620	0.1392
0.4	0.5967	3.5493	0.2964
0.5	0.8244	4.4366	0.5092
0.6	1.0933	5.3239	0.7773
0.7	1.4096	6.2112	1.1010
0.8	1.7804	7.0986	1.4800
0.9	2.2136	7.9859	1.9145
1	2.7183	8.8732	2.4045
	$Er = \sum_{k=1}^{10} (y_{Ex}(x) - y_{Apprx}(x))^2$	170.244	0.790595

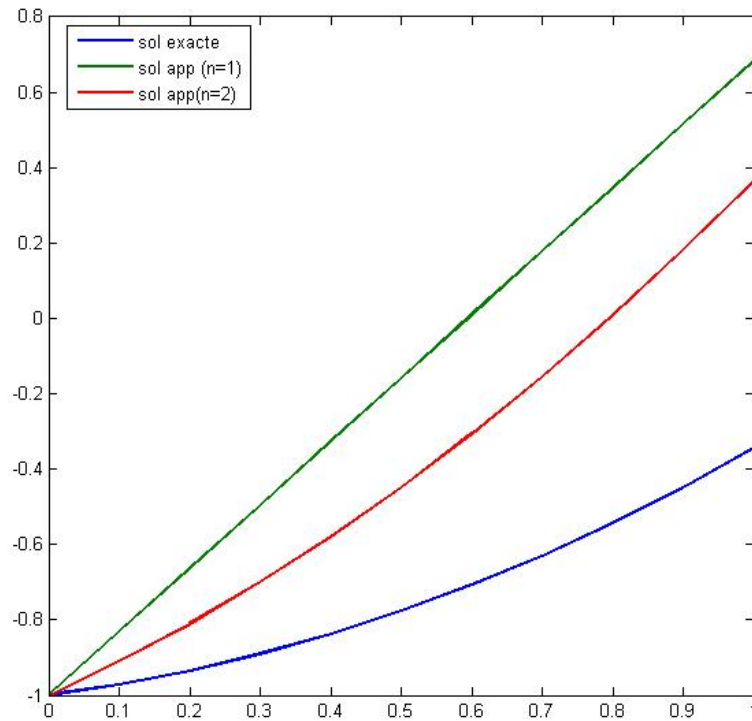


FIGURE 4.2 : solution exacte et solution approchée de exemple 2.

Exemple 3 :

Considérons l'équation Emden-fowler :

$$\begin{cases} y''(x) + \frac{k}{x}y'(x) + x^p y^m(x) = 0, & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1. & y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette équation est équivalente à l'équation intégral-différentielle :

$$\begin{cases} y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{t^k}{x^k}\right) t^p y^m(t) dt \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

1. Pour $P = m = 0$ et $k = 2$. L'équation (4.5) présente comme la solution exacte :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^2 \quad (4.6)$$

En appliquant méthode de polynôme de Bernstein, et en prenant $n = 2$

$$-2a_0(1-x) + 2a_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = - \int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right) dt.$$

Ensuite

$$-2c_0(1-x) + 2c_1(1-x) - 2c_1x + 2c_2x = - \frac{1}{x^2} \int_0^x t^2 dt$$

Et après avoir effectué l'intégration.

$-2c_0(1-x) + 2c_1 - 4c_1x + 2c_2x = -\frac{x}{3}$ Alors afin de déterminer c_0, c_1 et c_2 , nous avons besoin de trois équations; Maintenant, le choix $x_i, i = 1, 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$, avec condition initiale dans l'équation $y'(x) = -2a_0(1-x) + 2a_1 - 4c_1x + 2c_2x$ ce qui donne trois équations.

$$c_0 = 1$$

$$2c_1 = 2$$

$$c_2 = \frac{5}{6}$$

On trouve les valeurs constantes c_i :

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \frac{5}{6}$$

Par conséquent, la solution est la suivante :

$$y(x) = c^T \phi(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^2 \quad (4.7)$$

qui est la solution exacte.

2. Pour $p = 0, m = 1$ et $k = 2$:

Cette équation (4.5) est équivalente à l'équation intégro-différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = -\int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right)y(t)dt \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

qui a la solution exacte : $y(x) = \frac{\sin x}{x}$

Si nous écrivons l'expansion de Taylor, nous aurons :

$$y(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots$$

En appliquant méthode de polynôme de Bernstein, et en prenant $n = 4$ on a ce système :

$$\begin{aligned} c_0 - 1 &= 0 \\ \frac{13398761}{24706290}c_0 + \frac{4454482}{12353145}c_1 + \frac{741723}{8235430}c_2 + \frac{123568}{12353145}c_3 + \frac{2059}{4941258}c_4 - 1 &= 0 \\ \frac{220625}{823543}c_0 + \frac{1733472}{4117715}c_1 + \frac{1034416}{4117715}c_2 + \frac{275232}{4117715}c_3 + \frac{16496}{2470629}c_4 - 1 &= 0 \\ \frac{982783}{8235430}c_0 + \frac{272640}{823543}c_1 + \frac{3006531}{8235430}c_2 + \frac{746388}{4117715}c_3 + \frac{55809}{1647086}c_4 - 1 &= 0 \\ \frac{625729}{12353145}c_0 + \frac{2460784}{12353145}c_1 + \frac{306720}{823543}c_2 + \frac{4010752}{12353145}c_3 + \frac{265472}{2470629}c_4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Sa solution est :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 \\
 c_1 &= \frac{73203546419}{73203495144} \\
 c_2 &= \frac{1281054459697}{1317662912592} \\
 c_3 &= \frac{402630477169}{439220970864} \\
 c_4 &= \frac{369622585931}{4392209708}
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, le approximatif de $y(x)$:

$$y_4(x) = 1 + 2.8018 \times 10^{-6}x - 0.16671x^2 + 1.7196 \times 10^{-4}x^3 + 0.721 \times 10^{-3}x^4$$

En appliquant méthode de polynôme de Bernstein, et en prenant $n = 6$ et nous :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 \\
 c_1 &= \frac{40048596081456183847}{40048596095587559182} \\
 c_2 &= \frac{712865012682589145251}{720874729720576065276} \\
 c_3 &= \frac{464563706402973644279}{480583153147050710184} \\
 c_4 &= \frac{374009422385453807437}{400485960955875591820} \\
 c_5 &= \frac{160694922236620253296}{180218682430144016319} \\
 c_6 &= \frac{50549557193427338336}{60072894143381338773}
 \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, le approximatif de $y(x)$:

$$y_6(x) = 1 - 2.1171 \times 10^{-9}x - 0.16667x^2 - 5.4837 \times 10^{-7}x^3 + 8.3359 \times 10^{-3}x^4 - 6.0401 \times 10^{-5}x^5 - 1.9239 \times 10^{-4}x^6$$

Comme on peut le constater, à mesure que n augmente, la solution approchée se rapproche de la solution exacte

TABLE 4.3 : Tableau(3)résultat de exemple 3

x	n=4 et n=6	Ex	Er pour n=4	Er pour n=6
0	1.00000 1.00000	1.00000	0	0
0.1	0.998 33 0.998 33	0.99833	3.6836×10^{-8}	2.9575×10^{-12}
0.2	0.993 35 0.993 35	0.99334	2.6704×10^{-8}	2.3597×10^{-12}
0.3	0.985 07 0.985 07	0.98506	7.8329×10^{-9}	2.9622×10^{-12}
0.4	0.973 55 0.973 55	0.97354	2.0436×10^{-8}	6.1969×10^{-12}
0.5	0.958 85 0.941 07	0.95885	7.3683×10^{-8}	2.7311×10^{-11}
0.6	0.941 07 0.941 07	0.94107	1.6722×10^{-7}	5.3400×10^{-10}
0.7	0.920 31 0.920 31	0.92031	2.3365×10^{-6}	8.5175×10^{-9}
0.8	0.896 71 0.896 70	0.89669	9.9332×10^{-6}	5.2005×10^{-8}
0.9	0.870 39 0.870 36	0.87036	2.9239×10^{-5}	2.1082×10^{-7}
1	0.841 54 0.841 47	0.84147	7.0313×10^{-5}	6.6921×10^{-7}

Exemple 4 :

Équation Emden Fowler où $(\alpha = -2, h(x) = 2x^2 + 3; g(y(x)) = y(x))$.

Considérons l'équation Emden Fowler donnée dans

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{2}{x}y' - 2(2x^2 + 3)y(x) = 0, & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1. & y'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette équation est équivalente à l'équation intégral-différentielle :

$$\begin{cases} y''(x) + 2 \int_0^x \left(\frac{t^2}{x^2}\right)(2t^2 + 3)y(t)dt = 0, & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Ce problème a la solution exacte $y(x) = e^{x^2}$. La solution approchée pour $n = 4$ et $n = 6$ sont les suivantes Étant donné que la solution exacte est

$$y_4(x) = 0.75364x^4 - 0.17129x^3 + 1.0394x^2 - 2.8695 \times 10^{-3}x + 1$$

$$y_6(x) = 0.27240x^6 - 0.10901x^5 + 0.54731x^4 - 1.0179 \times 102x^3 + 1.001x^2 - 3.9837 \times 10^{-5}x + 1.$$

Etant donné que la solution exacte est $y(x) = e^{x^2}$; Si nous écrivons l'expansion de Taylor :

$$y(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \frac{1}{5!}x^{10}$$

Comme on peut le constater, lorsque N augmente, la solution approchée se rapproche de la solution exacte

TABLE 4.4 : Tableau(4)résultat de exemple 4

x	n=4 et n=6	Ex	Er pour n=4	Er pour n= 6
0	1.00000 1.00000	1.00000	0	0
0.1	1. 0100 1. 010 1	1. 010 1	3.9033×10^{-5}	5.2830×10^{-8}
0.2	1. 040 8 1. 040 8	1. 040 8	2.6883×10^{-5}	4.9297×10^{-8}
0.3	1. 094 2 1. 094 2	1. 094 2	9.3315×10^{-6}	5.463×10^{-8}
0.4	1. 173 5 1. 173 5	1. 173 5	2.3722×10^{-5}	1.2887×10^{-7}
0.5	1. 284 1 1. 2840	1. 2840	8.1708×10^{-5}	5.6006×10^{-7}
0.6	1. 433 1 1. 433 3	1. 433 3	1.9291×10^{-4}	1.1348×10^{-5}
0.7	1. 629 5 1. 632 3	1. 632 3	2.8206×10^{-3}	1.8745×10^{-4}
0.8	1. 883 9 1. 896 5	1. 896 5	1.2567×10^{-2}	1.1894×10^{-3}
0.9	2. 208 9 2. 247 9	2. 247 9	3.8979×10^{-2}	5.0329×10^{-3}
1	2. 618 9 2. 718 3	2. 718 3	9.9395×10^{-2}	1.6757×10^{-2}

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce mémoire les divers méthodes pour trouver les solution des équations intégro-différentielles, où on montre qu'on ne peut pas résoudre tous les types des équation intégro-différentielles avec les méthodes analytiques ,aussi nous avons besoin de chercher d'autre méthodes approchées ou appliquer les méthodes numériques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, Wiley, New York,(1999).
- [2] A.-M. Wazwaz, “Linear and nonlinear integral equations : methods and applications :” Springer. (2011).
- [3] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and sons. Inc., 1978.
- [4] Les Piegel and wayne Tiller.The NURBS book. Springer-Verlag. Etatsunies, 1996.
- [5] T.J. Rivlin, An Introduction to the Approximation of Functions, Dover Publications, 1981.
- [6] V. Volterra,Leçons Sur Les Équations Intégrales et Les Équations Intégro-différentielles,Paris, Gauthier -Villars ,(1913) p 138-157.

Résumé

Dans ce mémoire, on utilise les polynômes de Bernstein pour la résolution des équations Intégro-différentielle, cette méthode basée sur la transformation les équations Intégro- différentielle a système linéaires, nous montrons l'efficacité de cette méthode par des exemples illustratif, et la comparaison entre les solutions exactes et les solutions approximatives.

Mots clés : Équations Intégro-Différentielles, Équations intégro-différentielles de Volterra, Équations intégro-différentielles de Fredholm, Équations intégro-différentielles de Volterra- Fredholm, polynôme de Bernstein.

الملخص:

في هذه المذكرة نستعمل كثير حدود برنشتاين لحل المعادلات-التفاضلية-التكاملية، هذه الطريقة نعتمد على تحويل المعادلات(التفاضلية-التكاملية)إلى جمل خطية و نوضح فعالية هذه الطريقة بأمثلة توضيحية والمقارنة بين الحلول المضبوطة و التقريبية.

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية-التكاملية، المعادلات التكامل-تفاضلية لفولتيرا، المعادلات التكامل-تفاضلية لفرودهولم، المعادلات التفاضلية-التكاملية(إلى جمل خطية و نوضح فعالية هذه الطريقة بأمثلة توضيحية والمقارنة بين الحلول المضبوطة و التقريبية).

Abstract

In This dissertation, it used Bernstein polynomials for resolution the equations Integro-differential, this method based on the transformation the equation Integro- differential to linear system, we shows the efficiency of this method by examples illustratif, and the comparison between the exact solutions and approximate solutions.

Key words: Integro-Differential Equations, Volterra Integro-Differential Equations, Fredholm Integro-Differential Equations, Volterra – Fredholm Integro-Differential Equations, Bernstein polynomials.