



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : REZZAG BARA Rihana

Thème

Méthode de point intérieur pour le problème d'obstacle

Soutenu publiquement le : 25/05/2016

Devant le jury composé de :

Chacha Djamel Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Ghezal Abderrazek	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère Fatiha

À mon père Khaled, écolier de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger. Que dieu les garde et les protège.

*À mes adorables sœurs : Meriem , Aya, Nour, Tassnim et khadidja
n'oublie pas mes grandes-mère et mon grand-père .*

À tout ma famille (Rezzag Bara).

À mes amies

À tous ceux qui me sont chers.

À tous ceux qui m'aiment.

À tous ceux que j'aime.



REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail. Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur *M^r MERABET Ismail* doctorant à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Je remercie sincèrement *M^r CHACHA Djamel Ahmed*, Professeur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, et *M^r BEN TERKI Djamel*, Professeur à l'université de Ferhat Abbas Setif, qui ont eu l'amabilité de répondre à mes questions et de fournir les explications nécessaires. Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Merci à tous et à toutes.

Merci 

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Préliminaires	v
Introduction	1
1 Modélisation mathématique du problème d'obstacle	3
1.1 Position du problème	3
1.2 Problème de minimisation	5
1.2.1 Existence et unicité	5
1.3 Formulation variationnelle	8
1.4 Problème classique	11
2 Approximation par éléments finis du problème d'obstacle	13
2.1 Discrétisation par éléments finis	13
2.2 Estimation d'erreur a priori	15
2.3 Estimation d'erreur a posteriori	17

3	Méthode de point intérieur pour le problème d'obstacle	22
3.1	Méthode de point intérieur	22
3.2	Le chemin central	25
3.3	L'approche correcteur-prédicteur	29
3.3.1	L'étape correcteur	29
3.3.2	L'étape prédicteur	31
3.4	Algorithme	34
4	Implémentation et tests numériques sous Freefem++	36
4.1	IPOPT et L'interface FreeFem++ pour IPOPT	36
4.2	Tests numériques	37
	Conclusion	44

NOTATIONS

- $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.
- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: Le gradient de v .
- $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla \cdot (\nabla v)$: Laplacien de v .
- $(., .)$: Le produit scalaire et $\langle ., . \rangle$: Le produit de dualité.
- $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$
- $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1 / v = 0 \text{ dans } \partial\Omega\}$.
- H' dual de l'espace H .
- H^{-1} dual de l'espace H_0^1 .
- \hookrightarrow l'injection continue.
- $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$.
- $\left[\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$
- $\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- J' La première dérivée au sens de Fréchet de J .
- J'' La deuxième dérivée au sens de Fréchet de J .

INTRODUCTION

Le problème d'obstacle est un problème classique de mécanique et l'un des problèmes les plus étudiés de l'analyse numérique et possède différentes formulations mathématiques [1], problème de minimisation, inéquation variationnelle et un problème classique non linéaire. L'état physique à ce problème est la déformation de la membrane qui est tendue vers le bas sous une force, et dont la déformation est limitée par le bas par un obstacle rigide.

L'existence et l'unicité de la solution de problème d'obstacle a été étudié dans de nombreux ouvrages, par exemple par G.Stampacchia, il est difficile de trouver la solution analytique dans le cas général. C'est pour cette raison les méthodes numériques, éléments finis, différences finis, volumes finis,...etc prennent leurs importance dans les applications.

Dans ce travail on considère une méthode de point intérieur pour la solution approchée du problème d'obstacle. Dans le premier chapitre on explique la modélisation mathématique de problème d'obstacle et l'existence et l'unicité de la solution, ce chapitre est basé sur les travaux [1] et [2]. Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques estimations d'erreur a priori et a posteriori obtenus à l'aide de l'approximation par la méthode des éléments finis.

Dans le troisième chapitre nous construisons une méthode de point intérieur pour le problème d'obstacle. Dans le quatrième chapitre nous présentons quelques tests numérique programmés sous FreeFem++.

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME D'OBSTACLE

1.1 POSITION DU PROBLÈME

Pour visualiser ce problème, il faut imaginer une membrane élastique $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ fixée sur sa frontière soumise à une force vertical f , $v(x, y)$ est le déplacement transversal de la membrane, $v(x, y) = 0$ dans $\partial\Omega$, nous supposons que le corps rigide que l'on appelle " obstacle" est placé sous la membrane. $\varphi(x, y)$ est la surface de l'obstacle et vérifie $\varphi(x, y) \leq 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$, voir la figure (1.1) .

On suppose que l'énergie potentielle de la déformation de la membrane est proportionnelle à la variation de la superficie de sa surface.

Étant donné :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} d\omega - \mu(\Omega) &\approx \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(v_x^2 + v_y^2)] d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\omega. \end{aligned}$$

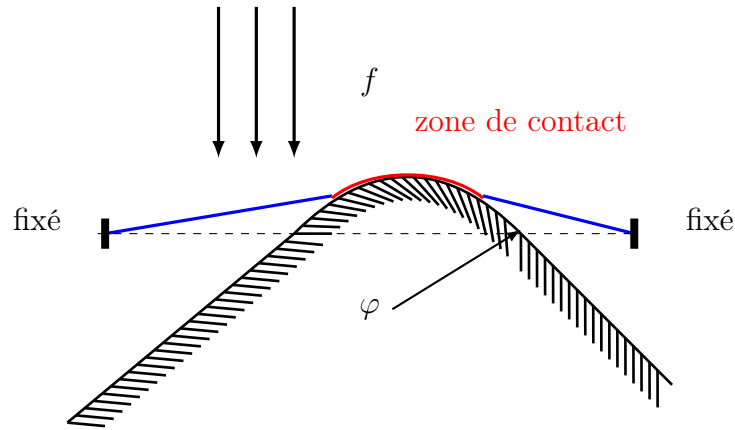


FIGURE 1.1 – Contact entre une membrane élastique et un obstacle rigide.

Donc l'énergie potentielle de la déformation est a l'expression fonctionnelle :

$$D(v) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\omega$$

$\lambda > 0$ constant dépendant a la propriété de l'élasticité de la membrane. Pour simplifié on pose $\lambda = 1$.

D'autre part l'énergie des forces extérieures est donnée par :

$$F(v) = \int_{\Omega} f v d\omega.$$

L'énergie total de la membrane est $J = D - F$ sera, par définition,

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\omega - \int_{\Omega} f v d\omega.$$

Le problème d'obstacle consiste à trouver l'état de la membrane, à savoir l'équilibre en minimisant l'énergie $J(v)$, lorsque la déviation de la membrane est limitée par le bas par l'obstacle alors l'ensemble de déplacement admissibles est donnée par :

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \geq \varphi \text{ dans } \Omega\}.$$

1.2 PROBLÈME DE MINIMISATION

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine borné, $f \in H^{-1}$ et $\varphi \in L^2(\Omega)$, on définit le problème de minimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (\text{P})$$

où la fonctionnelle $J : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\omega - \langle f, v \rangle.$$

1.2.1 Existence et unicité

Définition 1.2.1 Soit V un espace de Hilbert, la forme bilinéaire $a(., .)$ est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V.$$

Définition 1.2.2 Soit V un espace de Hilbert, la forme bilinéaire $a(., .)$ est V -elliptique ou coercive sur $V \times V$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Définition 1.2.3 On dit que y la projection de x sur K si :

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in K.$$

Lemme 1.2.4 Si K un convexe, fermé d'un espace de Hilbert H , alors pour tout $x \in H$ admet un unique projection sur K .

Preuve : On pose $d = \inf_{z \in K} \|x - z\|$

soit $d_n = \|x - z_n\|$ une suite minimisante c'est à dire $d_n \rightarrow d$ quand $n \rightarrow \infty$.

On montre que la suite $\{z_n\}$ est convergent il suffit de montrer qu'elle de Cauchy.

Soient $z_n, z_m \in K$, on applique l'égalité du parallélogramme ($\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$), on prend $a = x - z_n, b = x - z_m$ alors :

$$\begin{aligned} \|2x - (z_n + z_m)\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 &= 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 \\ \implies \|z_n - z_m\|^2 &= 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car } \frac{1}{2}(z_n + z_m) \in K). \end{aligned}$$

Donc $\{z_n\}$ est une suite de Cauchy par conséquent elle est convergente vers un élément $y \in H$ (H est complet) et puisque K est fermé alors $y \in K$

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - z_n\| = \|x - y\|.$$

On suppose qu'il existe deux projections y_1, y_2 de x alors on a :

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - 4d^2 = 0.$$

Alors $y_1 = y_2$. ■

Théorème 1.2.5 Soit H un espace de Hilbert, $K \subset H$ un convexe fermé, $f \in H'$, $a(.,.) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive i.e.

$$\exists \alpha > 0 : a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad v \in H.$$

Alors il existe une unique solution pour le problème de minimisation suivant :

$$\text{Trouver } u \in K : J(u) = \min_{v \in K} J(v) \quad \forall v \in K,$$

tel que la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle.$$

Preuve : On considère la forme bilinéaire $a(.,.)$ comme un produit scalaire dans l'espace de Hilbert H et $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ comme une norme dans H .

D'après le lemme de Riesz on peut trouver un élément $v^* \in H$ tel que

$$\langle f, v \rangle = a(v^*, v) \quad \forall v \in H.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - a(v^*, v) \\
 &= \frac{1}{2}a(v, v) - a(v^*, v) + \frac{1}{2}a(v^*, v^*) - \frac{1}{2}a(v^*, v^*) \\
 &= \frac{1}{2}a(v - v^*, v - v^*) - \frac{1}{2}a(v^*, v^*) \\
 &= \frac{1}{2}\|v - v^*\|_a^2 - \frac{1}{2}\|v^*\|_a^2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$J(u) \leq J(v) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\|u - v^*\|_a^2 - \frac{1}{2}\|v^*\|_a^2 \leq \frac{1}{2}\|v - v^*\|_a^2 - \frac{1}{2}\|v^*\|_a^2$$

\Rightarrow

$$\|u - v^*\|_a \leq \|v - v^*\|_a.$$

Donc u est l'unique projection de v^* sur un convexe fermé K d'après le lemme (1.2.4) alors l'existence et l'unicité de la solution du problème minimisation. ■

Théorème 1.2.6 Le problème (P) admet un solution unique u .

Preuve : On applique le Théorème (1.2.5)

1. K est un convexe fermé,

soit $u, v \in K$. pour tout $0 < t < 1$: $tu + (1 - t)v \geq t\varphi + (1 - t)\varphi = \varphi$ donc la convexité de K .

Soit $\{v_k\} \in K$ une suite convergente dans $H_0^1(\Omega)$ alors la convergence dans $L^2(\Omega)$, $\{v_n\} \rightarrow v$. Supposons que $v \notin K$. Il existe $A \subset \Omega$: $\mu(A) > 0$ tel que $v < \varphi$ dans A ; $\exists \varepsilon > 0$: $v \leq \varphi - \varepsilon$ dans A . On a :

$$\int_{\Omega} |v_n - v|^2 dx dy \geq \int_A |v_n - v|^2 dx dy$$

mais $v_n - v \geq v_n - \varphi + \varepsilon \geq \varepsilon$ alors

$$\int_{\Omega} |v_n - v|^2 dx dy \geq \varepsilon^2 \mu(A) > 0.$$

Contradiction, donc $v \in K$.

$$2. a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega = \int_{\Omega} \nabla v \nabla u d\omega = a(v, u), \text{ forme bilinéaire symétrique.}$$

$$3. a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega \text{ est continue :}$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega \right| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

$$4. a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega \text{ est coercive :}$$

$$\exists \alpha > 0 : a(v, v) = \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in H_0^1 \quad (\text{d'après Poincaré-Friedrichs}).$$

K est un convexe fermé, $a(u, v)$ forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive donc l'existence et l'unicité.

■

1.3 FORMULATION VARIATIONNELLE

Soit Ω un borné de \mathbb{R}^2 , $K \subset H_0^1(\Omega)$ un convexe fermé et $f \in H^{-1}$ donc on peut réécrire le problème d'obstacle sous forme inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{Où } a(u, v - u) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) d\omega.$$

Théorème 1.3.1 $u \in K$ est solution de (P) si et seulement si u est vérifie (1.1).

Preuve :

(\implies)

Soit $u \in K$ solution de problème de minimisation (P), alors pour $t \in [0, 1] : u + t(v - u) \in K$ on a $J(u) \leq J(u + t(v - u)) \quad \forall v \in K$

On a $M(t) = J(u + t(v - u))$, $t \in [0, 1]$ et atteint son minimum au point $t = 0$ alors :

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{M(t) - M(0)}{t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\omega - \langle f, u \rangle = J(u) &\leq J(u + t(v - u)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u + t(v - u))|^2 d\omega - \langle f, u + t(v - u) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\omega + t \int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) d\omega + \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2 d\omega \\
&\quad - \langle f, u \rangle - t \langle f, v - u \rangle
\end{aligned}$$

donc

$$0 \leq \int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) d\omega - \langle f, v - u \rangle + \frac{t}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2 d\omega$$

par passage a la limite ($t \rightarrow 0$) on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) d\omega \geq \langle f, (v - u) \rangle \quad \forall v \in K.$$

(\Leftarrow)

Soit $u \in K$ tel que $\int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) d\omega - \langle f, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K.$

Pour tout $v \in K$:

$$J(v) = J(u + (v - u)) = J(u) + \int_{\Omega} \nabla u \nabla(v - u) d\omega - \langle f, v - u \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2 d\omega \geq J(u).$$

Donc $J(u) \leq J(v)$ ■

Théorème 1.3.2 [3] Le problème (1.1) admet une solution unique. De plus l'application $f \mapsto u$ est Lipschitzien c'est-à-dire, si u_1, u_2 sont deux solutions de problème (1.1) correspondants à $f_1, f_2 \in H^{-1}$, alors :

$$\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} \quad (1.2)$$

$\alpha > 0$ la constante de la coercivité de $a(., .)$.

Preuve : L'existence et l'unicité de la solution d'après l'équivalence entre le problème (1.1) et le problème de minimisation (P).

Maintenant on montre (1.2), on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla(v - u_1) d\omega \geq \langle f_1, v - u_1 \rangle \quad (1.3)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla(v - u_2) d\omega \geq \langle f_2, v - u_2 \rangle \quad (1.4)$$

on remplace v par u_2 dans (1.3) et v par u_1 dans (1.4)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla (u_2 - u_1) d\omega &\geq \langle f_1, u_2 - u_1 \rangle \\ \int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) d\omega &\geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle\end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) d\omega &\geq - \langle f_1, u_1 - u_2 \rangle \\ \int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) d\omega &\geq \langle f_2, u_1 - u_2 \rangle\end{aligned}$$

Par l'addition on trouve

$$\int_{\Omega} |\nabla (u_1 - u_2)|^2 d\omega \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle$$

d'après la coercivité de la forme $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega$, on trouve

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}} \|u_1 - u_2\|_{1,\Omega}$$

\implies

$$\|u_1 - u_2\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha} \|f_1 - f_2\|_{H^{-1}}.$$

Si $f_1 = f_2$ alors l'unicité de la solution.

■

1.4 PROBLÈME CLASSIQUE

Maintenant, nous supposons que $u \in H^2(\Omega) \cap K$ est la solution de problème d'obstacle, $f \in L^2(\Omega)$. Le problème d'obstacle est l'exemple typique d'un problème de frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution u divise le domaine Ω en deux sous domaines :

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_0$$

tel que :

$$\Omega_+ = \{A \in \Omega : u(A) > \varphi(A)\}$$

$$\Omega_0 = \{A \in \Omega : u(A) = \varphi(A)\}.$$

u est un solution de l'inéquation variationnelle (1.1), on applique la formule de Green on obtient :

$$-\int_{\Omega} \Delta u (v - u) d\omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} (v - u) ds \geq \int_{\Omega} f (v - u) d\omega \quad \forall v \in K.$$

on a u, v dans $K \subset H_0^1(\Omega)$ donc le terme de la frontière est nul alors :

$$-\int_{\Omega} \Delta u (v - u) d\omega \geq \int_{\Omega} f (v - u) d\omega \quad \forall v \in K. \quad (1.5)$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction non négative tel que $v = u + \varepsilon\chi \in K$ pour $\varepsilon > 0$. On remplace v dans (1.5), on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \chi d\omega \geq \int_{\Omega} f \chi d\omega \quad \forall \chi \in C_0^\infty, \chi \geq 0.$$

Donc :

$$-\Delta u \geq f \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On pose $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, $u \in H^2 \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, le domaine Ω_+ et un ouvert, soit $A \in \Omega_+$ on trouve un voisinage $U_\delta(A)$ tel que $U_\delta(A) \subset \Omega_+$. Pour tout $\chi \in C_0^\infty(U_\delta(A))$, on choisit un $\varepsilon > 0$ tel que : $v = u \pm \varepsilon\chi \in K$. On remplace v dans (1.5), on trouve :

$$(\pm)\varepsilon \int_{U_\delta(A)} \Delta u \chi d\omega \geq (\pm)\varepsilon \int_{U_\delta(A)} f \chi d\omega$$

donc

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } U_\delta(A).$$

Alors p.p. dans Ω_+ .

Alors $u \in H^2(\Omega) \cap K$ solution de problème d'obstacle satisfait ces relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u \geq f & \text{p.p. dans } \Omega, \\ u \geq \varphi & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \text{Si } u(A) > \varphi(A) \text{ alors } -\Delta u(A) = f(A), & \\ u = \varphi & \text{dans } \Omega_0, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La frontière libre $\Lambda = \partial\Omega_+ \cap \Omega = \partial\Omega_0 \cap \Omega$, est la frontière de la zone de contact entre la membrane et l'obstacle.

Alors on peut résumer le problème(1.6) dans le système suivant qui s'appelle **Problème classique**.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - f \geq 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u \geq \varphi & \text{p.p. dans } \Omega \\ (u - \varphi)(-\Delta u - f) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

La formulation (1.7) du problème d'obstacle est la formulation forte.

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME D'OBSTACLE

2.1 DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

On considère une triangulation \mathcal{T}_h du domaine Ω , \mathcal{T}_h est un ensemble fini de triangles T tels que :

$$T \subset \bar{\Omega}, \forall T \in \mathcal{T}_h, \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega}.$$
$$\mathring{T}_1 \cap \mathring{T}_2 = \emptyset \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h \text{ et } T_1 \neq T_2.$$

De plus, pour tout $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ et $T_1 \neq T_2$, on a les conditions suivantes :

1. $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.
2. T_1 et T_2 ont un seul côté commun.
3. T_1 et T_2 ont un seul sommet commun.

$E_h = \{e \in \overline{\Omega}, e \text{ est un arr\^et de } T \in \mathcal{T}_h\}$, $S_h = \{s \in \overline{\Omega}, s \text{ est un sommet de } T \in \mathcal{T}_h\}$.

L'espace $V = H_0^1(\Omega)$ est approch\^e par l'espace d'\^el\^ements finis suivant :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : (v_h)|_T \in \mathbb{P}^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ dans } \partial\Omega\}$$

tel que : $\mathbb{P}^1 = \{p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, p(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$.

V_h est un espace de dimension finie.

On suppose que $\varphi \in H^2(\Omega)$, alors le convexe K est approch\^e par :

$$K_h = \{v_h \in V_h, v_h \geq \varphi_h\}$$

tel que $\varphi_h = \mathcal{J}_h^1(\varphi)$ l'interpol\^e de Lagrange de φ dans V_h .

K_h est un convexe non vide, ferm\^e de V_h [5].

On d\^efinit le probl\^eme discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq \langle f, v_h - u_h \rangle \forall v_h \in K_h \end{cases} \quad (2.1)$$

Th\^eor\^eme 2.1.1 [5] Le probl\^eme (2.1) admet une solution unique.

2.2 ESTIMATION D'ERREUR A PRIORI

Remarque 2.2.1 *La première difficulté dans l'analyse d'erreur pour les inéquation variationnelle réside dans le fait que même si $K_h \subset V_h$ et $V_h \subset V$ K_h n'est pas forcément incluse dans K .*

Ceci est du on fait que φ_h peut être $< \varphi$ et donc $v_h \geq \varphi_h$ garanti pas que $v_h \geq \varphi$.

Nous rappelons que le cas d'une équation variationnelle si $V_h \subset V$ le lemme de Céa

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v_h \in V_h$$

où M est la constante de la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et α la constante de coercivité et nous rappelons aussi que si la solution $u \in H^2(\Omega)$ alors on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Cte h \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

pour ceci il suffit de choisir $v_h = \mathcal{J}_h^1(u)$, \mathcal{J}_h^1 est l'interpolé de Lagrange.

Nous rappelons que si $f \in L^2(\Omega)$ la solution u satisfait le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - f \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u \geq \varphi \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ (u - \varphi)(-\Delta u - f) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

En utilisant cette caractérisation on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante :

Lemme 2.2.2 [6] Soit u la solution du problème continue (1.1) et u_h la solution problème discret (2.1) alors si $f \in L^2(\Omega)$ et $\varphi \in H^2(\Omega)$ on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}).$$

Preuve : Tout d'abord nous démontrons que :

$$a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - v_h) + (\Delta u + f, u - v_h) + (\Delta u + f, \varphi_h - \varphi)$$

en effet on a :

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&\leq a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u, v_h - u_h) - (f, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h + \varphi_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h) - (\Delta u + f, \varphi_h - u_h)
\end{aligned}$$

ici on utilisant le fait que $(\Delta u + f, \varphi_h - u_h) \geq 0$

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &\leq a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u + u - \varphi + \varphi - \varphi_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u) - (\Delta u + f, u - \varphi) - (\Delta u + f, \varphi - \varphi_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u) - (\Delta u + f, \varphi - \varphi_h)
\end{aligned}$$

donc $a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u) - (\Delta u + f, \varphi - \varphi_h)$

on utilise l'inégalité ($ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}b^2 \forall \varepsilon > 0$) avec $\varepsilon = \frac{M^2}{\alpha}$, $a = M\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$,

$$b = \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

on obtient

$$\alpha\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{\alpha}{2}\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{M^2}{2\alpha}\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u + f\|_{L^2(\Omega)}(\|v_h - u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Omega)})$$

on a :

$$\|u - \mathcal{J}_h^1 u\|_{H^1(\Omega)} \leq Cte h\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\|u - \mathcal{J}_h^1 u\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte h^2\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte h^2\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left(\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u + f\|_{L^2} \|v_h - u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u + f\|_{L^2} \|\varphi_h - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) h^2 (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}) \right) \\
&\leq C h^2 (\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)})^2.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.3 Pour déterminer u_h on peut utiliser le problème de minimisation pour

$$v_h \in K_h, \quad v_h = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j(x)$$

$$J(v_h) = \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - (f, v_h) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \beta_j \beta_i a(\phi_j, \phi_i) - \sum_{i=1}^N \beta_i (f, \phi_i) = (A\beta, \beta) - (F, \beta)$$

le point clé réside dans le fait que $v_h - \varphi_h$ est linéaire sur chaque T donc le problème est un problème de minimisation d'une forme quadratique sous contrainte $(v_h - \varphi_h)(a_i) \geq 0 \quad \forall a_i$ dans l'ensemble des sommets ($a_i \in S_h$).

Mais en chaque sommet a_i , $v_h(a_k) = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j(a_k) = \beta_k$ par conséquent la construction de K_h est équivalente l'ensemble des conditions $\beta_k \geq \varphi_h(a_k) \quad k = 1, \dots, N$ ce qui est un nombre fini de contraintes sur β .

2.3 ESTIMATION D'ERREUR A POSTERIORI

Comme dans le cas des équations variationnelles l'analyse a priori nécessite régularité additionnelle sur la solution ainsi que pour l'obstacle pour que la convergence soit assurée. Dans cette section nous faisons une analyse a posteriori [7].

Théorème 2.3.1 [9] (L'interpolé de Clément) Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, il existe $C > 0$ tel que $\mathcal{C}_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h$ est vérifiée :

$$\|\mathcal{C}_h v - v\|_{0,T} \leq Ch_T |v|_{1,V(T)} \quad (2.3)$$

$$\|\mathcal{C}_h v - v\|_{0,e} \leq C|e|^{\frac{1}{2}} |v|_{1,W(e)} \quad (2.4)$$

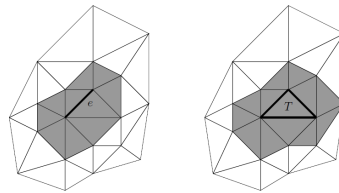


FIGURE 2.1 – L'ensemble $W(e)$ et L'ensemble $V(T)$.

On introduit le Lagrangien pour le problème d'obstacle :

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u) - (\lambda, u - \varphi).$$

Qui vient de l'écriture du problème d'obstacle sous la forme d'un problème de type point selle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver}(u, \lambda) \in V \times \Lambda \\ a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \\ (u, \mu - \lambda) \geq (\varphi, \mu - \lambda) \quad \forall \mu \in \Lambda \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \lambda) &= \inf_v \sup_{\mu} \mathcal{L}(v, \mu) \\ \mathcal{L}(v, \mu) &= \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) - (\mu, v - \varphi). \end{aligned}$$

mais rappelons d'abord comment obtenir(2.5) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - f \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u \geq \varphi \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ (u - \varphi)(-\Delta u - f) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

On pose $\lambda = -\Delta u - f$ donc $\lambda \geq 0$

on pose $\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega); \mu \geq 0\}$

donc $(-\Delta u - f, v) = (\lambda, v)$, $(u, \lambda) \geq (\varphi, \lambda)$ et $(u, \mu) \geq (\varphi, \mu)$ donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \\ (u - \varphi, \lambda) \geq 0 \\ (u - \varphi, \mu) \geq 0 \end{array} \right.$$

on a $(u, \mu) \geq (\varphi, \mu)$

\implies

$$\begin{aligned} (u, \mu) - (u, \lambda) &\geq (\varphi, \mu) - (u, \lambda) \\ (u, \mu - \lambda) &\geq (\varphi, \mu) - (u - \varphi + \varphi, -\Delta u - f) \\ &= (\varphi, \mu) - (\varphi, \lambda) \end{aligned}$$

donc $(u, \mu - \lambda) \geq (\varphi, \mu - \lambda)$

donc

$$\begin{cases} a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \\ (u - \varphi, \mu - \lambda) \geq 0 \end{cases}$$

Alors le problème discret correspondant à (2.5) s'écrit

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) - (\lambda_h, v_h) = (f, v_h) \\ (u_h - \varphi_h, \mu_h - \lambda_h) \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour la suite on note $e = u - u_h$.

Lemme 2.3.2 Soit u solution de (2.5) et u_h solution de (2.6) alors on a :

$$\int_{\Omega} \nabla e \nabla e_h d\omega \leq (\nabla u, \nabla(e_h - e)) - (f, (e_h - e))$$

tel que $e_h = \mathcal{C}_h e$, \mathcal{C}_h l'interpolé de Clément.

Preuve : On a si $v_h \in V_h \subset V$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_h d\omega - (\lambda, v_h) &= (f, v_h) \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h d\omega - (\lambda_h, v_h) &= (f, v_h) \end{aligned}$$

par soustraction on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla e \nabla v_h d\omega - (\lambda - \lambda_h, v_h) &= 0 \\ \int_{\Omega} \nabla e \nabla v_h d\omega &= (\lambda - \lambda_h, v_h) \end{aligned}$$

pour $v_h = \mathcal{C}_h u - u_h = e_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla e \nabla e_h d\omega &= (\lambda - \lambda_h, e_h) \\ &= (\lambda, e_h - e) + (\lambda, e) - (\lambda_h, e_h) \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} (\lambda, e) &= (-\Delta u - f, u - u_h) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - u_h) d\omega - \int_{\Omega} f(u - u_h) d\omega \\ &= -a(u, u_h - u) + (f, u_h - u) \end{aligned}$$

donc $(\lambda, e) \leq 0$ d'autre part on a :

$$\begin{aligned} -(\lambda_h, e_h) &= \int_{\Omega} f e_h d\omega - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla e_h d\omega \\ &= \int_{\Omega} f(\mathcal{C}_h u - u_h) d\omega - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla(\mathcal{C}_h u - u_h) d\omega \leq 0 \end{aligned}$$

admettant que $\mathcal{C}_h u \in K$ et $\mathcal{C}_h u_h = u_h$, voir [7].

Donc

$$\int_{\Omega} \nabla e \nabla e_h d\omega \leq (\lambda, e_h - e) = (\nabla u, \nabla(e_h - e)) - (f, e_h - e)$$

■

Lemme 2.3.3 On a l'estimation :

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 d\omega \leq (f, e - e_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla(e - e_h) d\omega.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} (\nabla e, \nabla e) &= (\nabla e, \nabla(e - e_h)) + (\nabla e, \nabla e_h) \\ &\leq (\nabla e, \nabla(e - e_h)) + \int_{\Omega} \nabla u \nabla(e_h - e) d\omega - \int_{\Omega} f(e_h - e) d\omega \end{aligned}$$

d'après le lemme (2.3.2), donc

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 d\omega \leq (f, e - e_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla(e - e_h) d\omega$$

■

Théorème 2.3.4 [7] Soit u solution de (2.5) et u_h solution de (2.6) alors on a :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(f, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où nous avons introduit l'indicateur erreur

$$e_T(f, u_h) = h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} |e|^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,e}.$$

tel que $\left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right]$ le saut de la dérivée normale de u_h à travers e .

Preuve : D'après le lemme (2.3.3) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla e|^2 d\omega &\leq \int_{\Omega} f(e - e_h) d\omega - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla(e - e_h) d\omega \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(e - e_h) d\omega + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \Delta u_h (e - e_h) d\omega - \sum_{e \in \partial T} \int_{\partial T} \frac{\partial u_h}{\partial n} (e - e_h) d\sigma \right) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (f + \Delta u_h) (e - e_h) d\omega - \sum_{e \in \partial T} \int_e \frac{\partial u_h}{\partial n} (e - e_h) d\sigma \right) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|e - e_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,e} \|e - e_h\|_{0,e} \right).
\end{aligned}$$

On utilise les deux inégalité de théorème (2.3.1) on trouve :

$$\int_{\Omega} |\nabla e|^2 d\omega \leq Cte \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} \|\nabla e\|_{0,V(T)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} |e|^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,e} \|\nabla e\|_{0,W(e)} \right)$$

Alors :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq Cte \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|f + \Delta u_h\|_{0,T} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial T} |e|^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{0,e} \right) \|\nabla e\|_{0,\Omega}.$$

Finalement¹ :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(f, u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

¹On utilise le fait que : $\sum_i a_i \leq (\sum_i a_i^2)^{\frac{1}{2}}$

MÉTHODE DE POINT INTÉRIEUR POUR LE PROBLÈME D'OBSTACLE

3.1 MÉTHODE DE POINT INTÉRIEUR

L'idée générale de la méthode de point intérieur est de remplacer un problème de minimisation sous contrainte par une suite des problèmes de minimisation sans contrainte, pour lequel on peut utiliser la méthode de Newton.

Lorsqu'on désire appliquer une méthode d'optimisation sans contrainte à un problème sous contraintes, il existe un moyen de retirer les contraintes, moyennant leur incorporation dans la fonction objectif : ceci se fait à l'aide d'une fonction barrière $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est simplement une fonction différentiable telle que $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi(z) = +\infty$ multiplié par un paramètre ε (paramètre barrière) réel positive [11].

On peut remplacer le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \quad \text{tel que } h_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m$$

par une famille paramétrée des problèmes non contraints :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \phi(h_i(x)).$$

La méthode de point intérieur est basée sur l'utilisation d'une fonction barrière bien spécifique, appelée "barrière logarithmique" :

$$\phi(z) = -\ln(z).$$

Pour la résolution numérique de problème d'obstacle par la méthode de point intérieur on remplace le problème de minimisation (P) par une suite des problèmes sans contraintes qui minimise la fonctionnelle $J_\varepsilon(v) = J(v) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(v - \varphi) d\omega$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Où la fonctionnelle $J_\varepsilon : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\ln(z) = \begin{cases} \ln(z) & \text{si } z > 0 \\ -\infty & \text{si } z \leq 0. \end{cases}$$

Théorème 3.1.1 Soit V un espace de Hilbert et $G : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une fonction propre, semi continue inférieurement. Si G est coercive i.e.

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} G(u) = \infty,$$

alors le problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in V} G(u)$$

admet une solution. Si G est strictement convexe alors l'unicité de la solution.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V$ une suite minimisante :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n) = \inf_{u \in H} G(u). \quad (3.1)$$

$l < \infty$ et $G(u)$ est coercive : si $\|u_n\| \rightarrow \infty$ alors $G(u_n) \rightarrow \infty$ contradiction avec (3.1) donc :

$$\|u_n\| < C.$$

Alors on peut extraire une sous suite $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ converge faiblement vers \bar{u} dans V .
D'après la semi continuité inférieurement de $G(u)$:

$$G(\bar{u}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n)$$

$$G(\bar{u}) \leq \inf_{u \in V} G(u) = l \leq G(u) \quad \forall u \in V$$

donc

$$G(\bar{u}) \leq G(u) \quad \forall u \in V$$

donc \bar{u} est un solution de $\min_{u \in V} G(u)$.

Soit \bar{u}_1 et \bar{u}_2 deux solutions de problème de minimisation ($\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2$) :

$$G(\bar{u}_1) = \min_{u \in V} G(u)$$

$$G(\bar{u}_2) = \min_{u \in V} G(u)$$

$G(u)$ est un fonction strictement convexe alors

$$G(\bar{u}_1) \leq G\left(\frac{1}{2}\bar{u}_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_2\right) < \frac{1}{2}G(\bar{u}_1) + \frac{1}{2}G(\bar{u}_2) = G(\bar{u}_1)$$

contradiction, donc $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ ■

Théorème 3.1.2 Supposons qu'il existe $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\int_{\Omega} \ln(\tilde{u} - \varphi) d\omega < \infty$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ le problème (P_ε) admet une solution unique u_ε .

Preuve : Pour montrer l'existence et l'unicité de (P_ε) on applique le théorème précédent, on montre que la fonctionnelle $J_\varepsilon(v)$ propre, coercive, semi continue inférieurement et strictement convexe dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ (espace de Hilbert).

$J_\varepsilon(v)$ est un somme de deux fonctions $J(v)$ et $\psi(v) = -\int_{\Omega} \ln(v - \varphi)$, $J(v)$ est un fonction strictement convexe, $\psi(v)$ fonction convexe donc $J_\varepsilon(v)$ est un strictement convexe.

On a :

$$\psi(v) \geq -\int_{\Omega} \max\{v - \varphi, 0\} \geq -\|v - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}$$

$\|v - \varphi\|_{H^1(\Omega)} \geq \|v - \varphi\|_{L^2(\Omega)}$, par l'hypothèse ($\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\int_{\Omega} \ln(\tilde{u} - \varphi) d\omega < \infty$), J_ε est propre. De plus on a :

$$J_\varepsilon(v) \geq c\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|f\|_{H^{-1}}\|v\|_{H^1(\Omega)} - \varepsilon\|v - \varphi\|_{H^1(\Omega)} \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J_\varepsilon(v) = \infty.$$

Pour montrer la semi continuité inférieurement de J_ε on montre que ψ est semi continue inférieurement car J est continue.

Par définition de l'intégrale de Lebesgue :

$$\psi(v) = \sup_{k>0} \psi_k(v)$$

tel que $\psi_k(v) = - \int_{\Omega} \ln(\max\{u - \varphi, k\})$, k petit réel positif, $\psi_k(v)$ famille des fonctions continues donc semi continues inférieurement.

$\psi(v)$ est la borne supérieure de cette famille donc semi continue inférieurement.

■

3.2 LE CHEMIN CENTRAL

Définition 3.2.1 Pour chaque $\varepsilon > 0$ on trouve u_ε , cette suite est appelée le chemin central.

on peut voir le chemin central comme un guide vers la solution optimale, c'est-à-dire u_ε converge vers u tant que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les deux théorèmes suivants prouvent la convergence :

Théorème 3.2.2 Soit $R_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}a(u, u) - (\lambda, \varphi) + J_\varepsilon(v)$ et $a(u, v) - (f, v) = (\lambda, v)$
 $\lambda \geq 0$, $\lambda \in L^2(\Omega)$ et on a $\lambda(u - \varphi) = 0$

alors on a :

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte\sqrt{\varepsilon}$$

tel que u la solution de (P) et u_ε la solution de (P_ε) .

Preuve :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(v) &= \frac{1}{2}a(u - v, u - v) + a(u, v) - (\lambda, \varphi) - (f, v) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(v - \varphi) d\omega \\ &= \frac{1}{2}a(u - v, u - v) + (\lambda, v - \varphi) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(v - \varphi) d\omega \end{aligned}$$

soit $w = u + \varepsilon \in \overset{\circ}{K}$ alors :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(w) &= \frac{1}{2}a(\varepsilon, \varepsilon) + (\lambda, u + \varepsilon - \varphi) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u + \varepsilon - \varphi) d\omega \\ &= (\lambda, \varepsilon) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u + \varepsilon - \varphi) d\omega. \end{aligned}$$

$$u_\varepsilon = \operatorname{argmin}_{v \in H_0^1(\Omega)} J_\varepsilon(v) \text{ donc } u_\varepsilon = \operatorname{argmin}_{v \in H_0^1(\Omega)} R_\varepsilon(v)$$

$$R_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) + (\lambda, u_\varepsilon - \varphi) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u_\varepsilon - \varphi) d\omega$$

alors on obtient :

$$\frac{1}{2}a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u_\varepsilon - \varphi) d\omega \leq (\lambda, \varepsilon) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u + \varepsilon - \varphi) d\omega$$

donc :

$$\frac{1}{2}a(u - u_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \leq (\lambda, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u_\varepsilon - \varphi) d\omega - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(u + \varepsilon - \varphi) d\omega$$

on utilise la coercivité de la forme $a(.,.)$ et comme \ln est lipschitzienne on trouve :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 &\leq c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon \|u_\varepsilon - u - \varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \frac{\alpha c_2}{2} \varepsilon^2 + \frac{c_2}{2\alpha} \|u - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

finalemt, si $\alpha > \frac{c_2}{2\alpha}$ alors

$$\|u - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte\sqrt{\varepsilon}.$$

■

Théorème 3.2.3 Soit u la solution de (P) et u_ε la solution de (P_ε) , alors pour tout $\varepsilon > 0$

on a :

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon\mu(\Omega).$$

Preuve : On a $\psi(v) = - \int_{\Omega} \ln(v - \varphi) d\omega$. Soit $\eta(t) = J_\varepsilon(v_t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, tel que

$$v_t = tu + (1 - t)u_\varepsilon.$$

$$v_t - \varphi = tu + (1 - t)u_\varepsilon - \varphi$$

$$= tu + (1 - t)u_\varepsilon - \varphi + t\varphi - t\varphi$$

$$= t(u - \varphi) + (1 - t)(u_\varepsilon - \varphi) \geq (1 - t)(u_\varepsilon - \varphi) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

D'après la monotonie de la fonction \ln on a :

$$\begin{aligned}\eta(0) \leq \eta(t) &= J(v_t) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln(v_t - \varphi) d\omega \\ &\leq J(v_t) - \varepsilon \int_{\Omega} \ln((1-t)(u_\varepsilon - \varphi)) d\omega \\ &= J(v_t) + \varepsilon \psi(u_\varepsilon) - \varepsilon \ln(1-t) \mu(\Omega) < +\infty, \quad t \in [0, 1).\end{aligned}$$

La fonction $\eta(t)$ est convexe dans $[0, 1)$.

On a la fonction $\frac{\eta(t) - \eta(0)}{t}$ monotone et croissante et limité par le bas par 0 donc :

$$\eta'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\eta(t) - \eta(0)}{t} \geq 0, \quad t \in (0, 1).$$

Alors :

$$0 \leq \eta'(0) = \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (u - u_\varepsilon) d\omega - \langle f, u - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(v_t) - \psi(v_0)}{t}$$

tel que $\frac{\psi(v_t) - \psi(v_0)}{t} = \int_{\Omega} t^{-1} (\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)) d\omega.$

Maintenant on calcule $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(v_t) - \psi(v_0)}{t}$

- Dans le cas $\{u_\varepsilon \geq u\}$ on a :

$$0 \leq t^{-1} (\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)) \leq \frac{u_\varepsilon - u}{v_t - \varphi} \leq \frac{u_\varepsilon - \varphi}{v_t - \varphi} \leq \frac{1}{1-t}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)}{t} d\omega = \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi}$$

donc d'après le théorème de convergence dominée on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{u_\varepsilon \geq u\}} t^{-1} (\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)) d\omega = \int_{\{u_\varepsilon \geq u\}} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega.$$

- Dans le cas $\{u_\varepsilon < u\}$ on a :

$$\frac{\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\searrow} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} < 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{u_\varepsilon < u\}} t^{-1} (\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)) d\omega &= \frac{\eta'(0) - \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (u - u_\varepsilon) d\omega + \langle f, u - u_\varepsilon \rangle}{\varepsilon} \\ &\quad - \int_{\{u_\varepsilon \geq u\}} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega\end{aligned}$$

donc d'après le théorème de convergence monotone

$$0 \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\{u_\varepsilon < u\}} t^{-1} (\ln(v_0 - \varphi) - \ln(v_t - \varphi)) d\omega = \int_{\{u_\varepsilon < u\}} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega > -\infty.$$

Donc $\int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega$ existe.

$$0 \leq \eta'(0) = \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (u - u_\varepsilon) d\omega - \langle f, u - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega.$$

$t = 0$ est une solution de problème d'optimisation :

$$\min_{t \geq 0} J(v_t) + \varepsilon t \int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega.$$

Donc :

$$J(v_0) \leq J(v_1) + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{u_\varepsilon - u}{u_\varepsilon - \varphi} d\omega$$

\implies

$$J(v_0) \leq J(v_1) + \varepsilon \int_{\Omega} 1 - \frac{u - \varphi}{u_\varepsilon - \varphi} \leq J(v_1) + \varepsilon \mu(\Omega)$$

et on a $v_0 = u_\varepsilon$, $v_1 = u$, alors on obtient :

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u) + \varepsilon \mu(\Omega). \quad (3.2)$$

■

On utilise l'expression de Taylor de $J(u_\varepsilon)$ au point u dans l'inégalité (3.2) on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla (u_\varepsilon - u)|^2 d\omega \leq \varepsilon \mu(\Omega).$$

est équivalent à :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte \sqrt{\varepsilon}.$$

3.3 L'APPROCHE CORRECTEUR-PRÉDICTEUR

Dans cette section on peut remplacer $H_0^1(\Omega)$ par un sous espace fermé $V \subset H_0^1(\Omega)$, donc pour chaque $\varepsilon > 0$ le problème

$$\min_{v \in V} J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in V$$

admet une solution unique u_ε si $\exists \tilde{u} \in V$ tel que $-\int_{\Omega} \ln(\tilde{u} - \varphi) d\omega < \infty$.

Remarque 3.3.1 Dans ce qui suit on note l'approximation de u_ε par u .

3.3.1 L'étape correcteur

Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $u \in V$ une approximation de u_ε et nous voulons trouver une meilleure approximation u^+ par la méthode de Newton, i.e. $u^+ = u + \delta u$.

δu est la solution de $\min_{v \in V} \Psi_{\varepsilon, u}(v)$ avec :

$$\Psi_{\varepsilon, u}(v) = J_\varepsilon(u) + J'_\varepsilon(u)v + \frac{1}{2} J''_\varepsilon(u)(v, v).$$

tel que $J'_\varepsilon(u) : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $J''_\varepsilon(u) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$J'_\varepsilon(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\omega - \langle f, v \rangle - \varepsilon \int_{\Omega} \frac{v}{u - \varphi} d\omega$$

$$J''_\varepsilon(u)(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w d\omega + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{vw}{(u - \varphi)^2} d\omega.$$

J'_ε et J''_ε sont définies si $u - \varphi \geq k > 0$ p.p. dans Ω .

On a $\Psi_{\varepsilon, u}$ est continue et strictement convexe dans V donc l'unicité de δu . L'unique minimiseur δu de $\Psi_{\varepsilon, u}$ satisfait $J''_\varepsilon(u)(\delta u, v) = -J'_\varepsilon(u)v \quad \forall v \in V$.

Le correcteur suivante δu^+ est l'unique solution du problème $\min_{v \in V} \Psi_{\varepsilon, u^+}(v)$.

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u^+)v &= \int_{\Omega} \nabla u^+ \nabla v d\omega - \langle f, v \rangle - \varepsilon \int_{\Omega} \frac{v}{u^+ - \varphi} d\omega \\ &= J'_\varepsilon(u)v + J''_\varepsilon(u)(\delta u, v) - \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{v}{u^+ - \varphi} - \frac{v}{u - \varphi} + \frac{\delta u v}{(u - \varphi)^2} \right) d\omega \\ &= -\varepsilon \int_{\Omega} \frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} d\omega \end{aligned}$$

on obtient :

$$J''_\varepsilon(u^+)(\delta u^+, v) = -J'_\varepsilon(u^+)v = \varepsilon \int_\Omega \frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} d\omega \quad \forall v \in V.$$

remplacer v par δu^+ on trouve :

$$\int_\Omega |\nabla \delta u^+|^2 d\omega + \varepsilon \int_\Omega \frac{(\delta u^+)^2}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega = \varepsilon \int_\Omega \frac{(\delta u)^2 \delta u^+}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} d\omega. \quad (3.3)$$

On utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient :

$$\varepsilon \int_\Omega \frac{(\delta u^+)^2}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \leq \varepsilon \left(\int_\Omega \frac{(\delta u^+)^2}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \frac{(\delta u)^4}{(u - \varphi)^4} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\int_\Omega \frac{(\delta u^+)^2}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \leq \int_\Omega \frac{(\delta u)^4}{(u - \varphi)^4} d\omega \quad (3.4)$$

Considérons maintenant le pas de Newton $u^{k+1} = u^k + \delta u^k$, $k = 0, 1, \dots$, tel que δu^k est l'unique minimiseur de Ψ_{ε, u^k} .

Définition 3.3.2 On dit que une suite x^k est converge R-superlinéaire vers x si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|x^k - x\|} = 0.$$

Théorème 3.3.3 Soit $\varepsilon > 0$ fixé, supposons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc pour tout point de départ $u^0 > \varphi$ avec $\left\| \frac{\delta u^0}{u^0 - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau}{C}$, $0 < \tau < 1$, les itérations de Newton sont converge vers u_ε . De plus la convergence est R-superlinéaire.

Preuve :

$$\text{On a : } \left\| \frac{\delta u^0}{u^0 - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau}{C}$$

$$\left\| \frac{\delta u^{k+1}}{u^{k+1} - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

donc

$$\left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau^{2^k}}{C}.$$

D'après (3.3) on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla \delta u^{k+1}|^2 d\omega \leq \varepsilon \int_{\Omega} \frac{(\delta u^k)^2 \delta u^{k+1}}{(u^{k+1} - \varphi)(u^k - \varphi)^2} d\omega.$$

$$\Rightarrow \|\delta u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left\| \frac{\delta u^{k+1}}{u^{k+1} - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|\delta u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon} \tau^{2^{k+1}}}{C}$$

par passage à la limite : $\|\delta u^{k+1}\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, donc la suite u^k est de Cauchy et converge vers un élément $u^* \in V$, on a $J_\varepsilon(v) > J_\varepsilon(u^k) + J'_\varepsilon(u^k)(v - u^k) \quad \forall v \in V$ d'après la stricte convexité de J_ε .

On a :

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u^k)(v - u^k) &= -J''_\varepsilon(u^k)(\delta u^k, v - u^k) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \delta u^k \nabla (v - u^k) d\omega + \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\delta u^k (v - u^k)}{(u^k - \varphi)^2} d\omega \\ &\leq \|\delta u^k\|_{H_0^1(\Omega)} \|v - u^k\|_{H_0^1(\Omega)} + \varepsilon \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v - u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

donc $J'_\varepsilon(u^k)(v - u^k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. On obtient

$$J_\varepsilon(v) \geq J_\varepsilon(u^*) \quad \forall v \in V.$$

Ainsi $u^* = u_\varepsilon$.

$$\|u^k - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|\delta u^i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} \sum_{i=k}^{\infty} \tau^{2^i} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C} \frac{\tau^{2^k}}{1 - \tau^2}.$$

Donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|u^k - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

■

3.3.2 L'étape prédicteur

Soit $u^+ = u + \delta u$ le résultat de l'étape correcteur et très proche à u_ε lorsque

$$\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau}{C} \quad 0 < \tau < 1.$$

Maintenant on recherche une approximation de u_{ε^+} pour le nouveau paramètre ε^+ tel que $\varepsilon^+ = (1 - \rho)\varepsilon$, si pour ça on calcule un prédicteur p l'unique solution de problème de

minimisation suivant :

$$\min_{v \in V} J(u^+) + J'(u^+)v + \frac{1}{2}J''_\varepsilon(u^+)(v, v) \quad \forall v \in V$$

qui satisfait

$$J''_\varepsilon(u^+)(p, v) = -J'(u^+)v \quad \forall v \in V \quad (3.5)$$

on prend $\tilde{u} = u^+ + \rho p$ comme un point de départ pour la méthode de Newton suivante, pour cela on choisi ρ tel que le prochain correcteur $\delta\tilde{u}$ satisfait $\left\| \frac{\delta\tilde{u}}{\tilde{u} - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau}{C}$.

on présenter maintenant une analyse pour un bon choix de ρ .

Et pour la prochaine étape de correcteur on on a :

$$J''_\varepsilon(\tilde{u})(\delta\tilde{u}, v) = -J'_\varepsilon(\tilde{u})v \quad \forall v \in V \quad (3.6)$$

On a :

$$J'(\tilde{u})v = J'(u^+ + \rho p)v = J'(u^+)v + \rho \int_\Omega \nabla p \nabla v \quad \forall v \in V,$$

d'après (3.5) on obtient :

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad J'(\tilde{u})v &= J'(u^+)v + \rho \left(-J'(u^+)v - \varepsilon \int_\Omega \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \right) \\ &= (1 - \rho)J'(u^+)v - \rho\varepsilon \int_\Omega \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \\ &= (1 - \rho) \left(J'_\varepsilon(u^+)v + \varepsilon \int_\Omega \frac{v}{u^+ - \varphi} d\omega \right) - \rho\varepsilon \int_\Omega \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \\ &= -\varepsilon^+ \int_\Omega \frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} d\omega + \varepsilon^+ \int_\Omega \frac{v}{u^+ - \varphi} d\omega - \rho\varepsilon \int_\Omega \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad -J'_{\varepsilon^+}(\tilde{u})v &= -J'(\tilde{u})v + \varepsilon^+ \int_\Omega \frac{v}{\tilde{u} - \varphi} d\omega \\ &= \int_\Omega \varepsilon^+ \left(\frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} - \frac{v}{u^+ - \varphi} + \frac{v}{\tilde{u} - \varphi} \right) + \rho\varepsilon \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \\ &= \int_\Omega \varepsilon^+ \frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} - \rho\varepsilon^+ \frac{pv}{(u^+ - \varphi)(\tilde{u} - \varphi)} + \rho\varepsilon \frac{pv}{(u^+ - \varphi)^2} d\omega \\ &= \int_\Omega \varepsilon^+ \frac{(\delta u)^2 v}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} + \rho^2 \varepsilon \frac{p(u^+ + p - \varphi)v}{(u^+ - \varphi)^2(\tilde{u} - \varphi)} d\omega \end{aligned}$$

on remplace v par $\delta\tilde{u}$ on trouve :

$$\begin{aligned}
-J'_{\varepsilon^+}(\tilde{u})\delta\tilde{u} &= \int_{\Omega} \varepsilon^+ \frac{(\delta u)^2 \delta\tilde{u}}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} + \rho^2 \varepsilon \frac{p(u^+ + p - \varphi)\delta\tilde{u}}{(u^+ - \varphi)^2(\tilde{u} - \varphi)} d\omega \\
&= \varepsilon^+ \int_{\Omega} \frac{(\delta u)^2 \delta\tilde{u}(\tilde{u} - \varphi)}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2(\tilde{u} - \varphi)} + \frac{\rho^2 p}{(1 - \rho)} \frac{(u^+ + p - \varphi)\delta\tilde{u}}{(u^+ - \varphi)^2(\tilde{u} - \varphi)} d\omega \\
&= \varepsilon^+ \int_{\Omega} \frac{\delta\tilde{u}}{\tilde{u} - \varphi} \left(\frac{(\delta u)^2(u^+ + \rho p - \varphi)}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} + \frac{\rho^2 p}{(1 - \rho)} \frac{(u^+ + p - \varphi)}{(u^+ - \varphi)^2} \right) d\omega \\
&= \varepsilon^+ \int_{\Omega} \frac{\delta\tilde{u}}{\tilde{u} - \varphi} \left(\frac{(\delta u)^2}{(u - \varphi)^2} + \frac{\rho p (\delta u)^2}{(u^+ - \varphi)(u - \varphi)^2} + \frac{\rho^2 p}{(1 - \rho)(u^+ - \varphi)} \left(1 + \frac{p}{u^+ - \varphi} \right) \right) d\omega.
\end{aligned}$$

D'après (3.6) on a $J''_{\varepsilon^+}(\tilde{u})(\delta\tilde{u}, \delta\tilde{u}) = -J'_{\varepsilon^+}(\tilde{u})\delta\tilde{u}$, et on applique Cauchy-Schwartz,

on trouve

$$\int_{\Omega} |\nabla \delta\tilde{u}|^2 d\omega + \varepsilon^+ \int_{\Omega} \frac{(\delta\tilde{u})^2}{(\tilde{u} - \varphi)^2} d\omega \leq \varepsilon^+ \Xi^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \frac{(\delta\tilde{u})^2}{(\tilde{u} - \varphi)^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

alors

$$\int_{\Omega} \frac{(\delta\tilde{u})^2}{(\tilde{u} - \varphi)^2} d\omega \leq \Xi$$

tel que

$$\Xi = \int_{\Omega} \left(\zeta^2 \left(1 + \rho \frac{p}{u^+ - \varphi} \right) + \frac{\rho^2 p}{(1 - \rho)(u^+ - \varphi)} \left(1 + \frac{p}{u^+ - \varphi} \right) \right)^2 d\omega$$

avec $\zeta = \frac{\delta u}{u - \varphi}$.

Ainsi, on choisit ρ qui satisfait les 3 conditions suivantes :

1. $0 < \rho < 1$.
2. $u^+ + \rho p > \varphi$ dans Ω .
3. $\Xi \leq \left(\frac{\tau}{C}\right)^2$.

3.4 ALGORITHME

Le principe de la méthode de point intérieur est de suivre le chemin central donc est constitué d'un cycle externe **correcteur-prédicteur** et un cycle interne **correcteur**. D'après la preuve de théorème(3.3.3) on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\delta u^{k+1}}{u^{k+1} - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C \left\| \frac{\delta u^{k+1}}{u^{k+1} - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \tau^{2k} \left\| \frac{\delta u^k}{u^k - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Ainsi, si nous choisissons à chaque étape de prédiction le facteur ρ pour la diminution de ε tel que le point de départ \tilde{u} pour la prochaine méthode de Newton satisfait $\left\| \frac{\delta \tilde{u}}{\tilde{u} - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\tau}{C}$ et on définit le critère d'arrêt de les étapes correcteur si est satisfait $\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} < \tau$

$$\left\| \frac{\delta u^1}{u^1 - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\delta u^0}{u^0 - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\delta u^0}{u^0 - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C^2 \frac{\tau^2}{C^2} < \tau$$

Nous devons aussi déterminer la constante C pour les hypothèses du théorème(3.3.3)

on a :

$$\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

\Rightarrow

$$\frac{\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)}}{\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}} \leq C.$$

Cette constante peut être trouvée en mettant à jour à chaque Newton itérer comme la valeur maximale de l'ancien et $\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} / \left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}$.

Après la résolution de l'équation de le correcteur δu on choisi α tel que $u + \alpha \delta u > \varphi$ tel que $0 < \alpha \leq 1$, alors $\alpha \frac{\delta u}{u - \varphi} > -1$ pour l'implémentation on écrit $\left\| \alpha \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Algorithm 1 Correcteur-prédicteur

1 : Précision $k, \varepsilon, \tau, u^0$

2 : $i = 0$

3 : **répéter**

4 : $u \leftarrow u^i$

5 : **répéter**

6 : Résoudre pour $\delta u : J''_\varepsilon(u)(\delta u, v) = -J'_\varepsilon(u)v \ \forall v \in V$.

7 : $C = \max\{C, \left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} / \left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^2(\Omega)}\}$

8 : Choisir $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\left\| \alpha \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0.99$

9 : $u = u + \alpha \delta u$

10 : **Jusqu'à** $\left\| \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} < \tau$

11 : Résoudre pour le prédicteur $p : J''_\varepsilon(u)(p, v) = -J'(u)v \ \forall v \in V$.

12 : Choisir $0 < \rho < 0.99$ tel que :

- $\left\| \rho \frac{\delta u}{u - \varphi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0.99$
- $\Xi \leq \left(\frac{\tau}{C}\right)^2$

13 : $i = i + 1$

14 : $u^{i+1} = u + \rho p$

15 : $\varepsilon = (1 - \rho)\varepsilon$

16 : **Jusqu'à** $\varepsilon \leq k$.

IMPLÉMENTATION ET TESTS NUMÉRIQUES SOUS FREEFEM++

4.1 IPOPT ET L'INTERFACE FREEFEM++ POUR IPOPT

IPOPT (**I**nterior **P**oint **O**ptimizer) est un logiciel open source pour une grande échelle d'optimisation non linéaire, il implémente la méthode de point intérieur[14].

Il peut être utilisé pour résoudre des problèmes de programmation non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(x) \\ \forall i \leq n, x_i^{lb} \leq x_i^* \leq x_i^{ub} & \text{(bornes simples)} \\ \forall i \leq m, c_i^{lb} \leq c_i(x_i^*) \leq c_i^{ub} & \text{(fonctions contraintes)} \end{cases} \quad (4.1)$$

les caractéristiques de IPOPT qui donne quelque information comme :

- *iter* : l'étape d'itération.
- *objective* : la valeur de la fonction objectif $f(x)$ au point considéré.
- $lg(mu)$: logarithme décimale de la valeur de paramètre barrière.

- *Number of Iteration* : Le nombre totale des itérations.

Les différents prototypes pour la construction d'un problème d'optimisation et sa résolution par IPOPT depuis un script FreeFem++ peuvent être chargés avec le paquet ff-Ipopt.

4.2 TESTS NUMÉRIQUES

Dans cette section, nous résolvons le problème d'obstacle en utilisant la méthode de point intérieur présenté dans le chapitre précédent, l'implémentation a été préparé par le logiciel FreeFem++-cs 15.2 32 on utilise l'interface de IPOPT, et quelques présentations graphiques par MATLAB.

On présente les résultats pour plusieurs exemples, pour tous ces exemples la valeur initiale est $u^0 = 0$ et $\varepsilon_0 = 1$.

On utilise les deux maillages suivant : maillage structuré et maillage non structurées

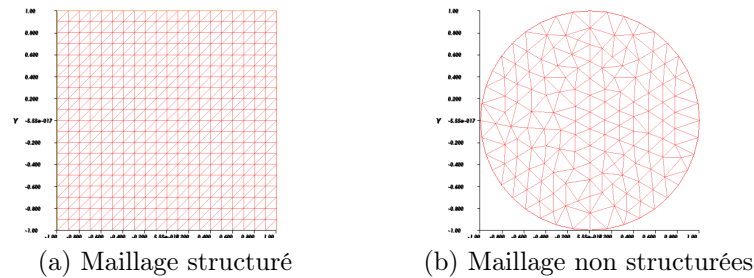
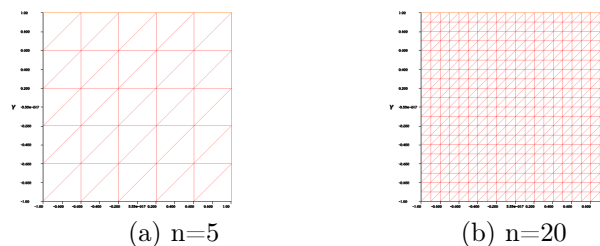


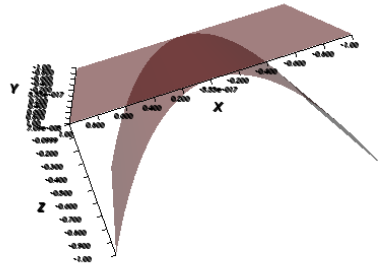
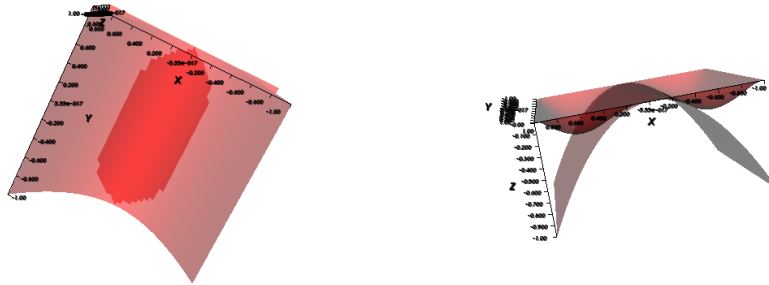
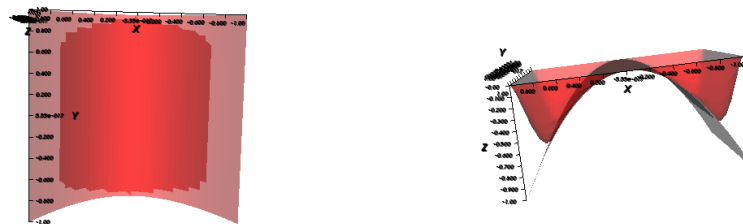
FIGURE 4.1 – Maillage de domaine Ω

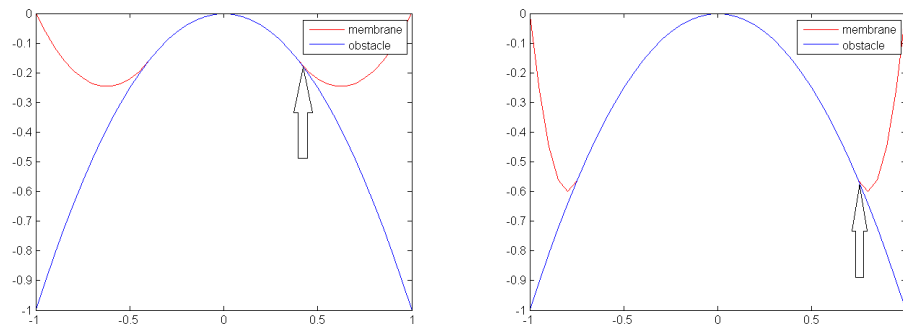
Si le nombre de triangle de la frontière de maillage est différent alors on trouve les deux différentes formes suivant :



Exemple 1 :

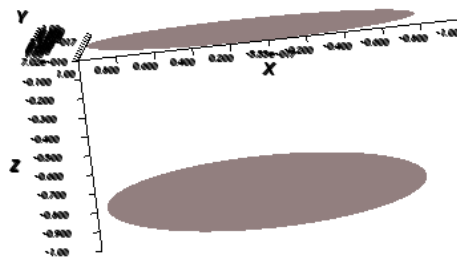
Dans cet exemple, le domaine $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$ et l'obstacle est définie comme $\varphi = -x^2$, et on utilise quelque forces extérieure

FIGURE 4.2 – Contact membrane-obstacle, cas $f = 0$ FIGURE 4.3 – Contact membrane-obstacle , cas $f = -4$ et la zone de contactFIGURE 4.4 – Contact membrane-obstacle , cas $f = -30$ et la zone de contact

FIGURE 4.5 – L'emplacement de la frontière libre dans les deux cas $f = -4$ et $f = -30$ **Exemple 2 :**

Dans cet exemple le domaine Ω est cercle d'unité, l'obstacle est le plan $z = -1$.

Si $f = 0$ la forme est donnée comme suit :

FIGURE 4.6 – la force $f = 0$

Si $f = -32$ alors la solution exacte de ce problème est :

$$u = \begin{cases} -1 & \text{si } s < 0.7374 \\ 8s^2 - 8.699 \ln s - 8 & \text{si } s \geq 0.7374 \end{cases}$$

tel que $s = \sqrt{x^2 + y^2}$.

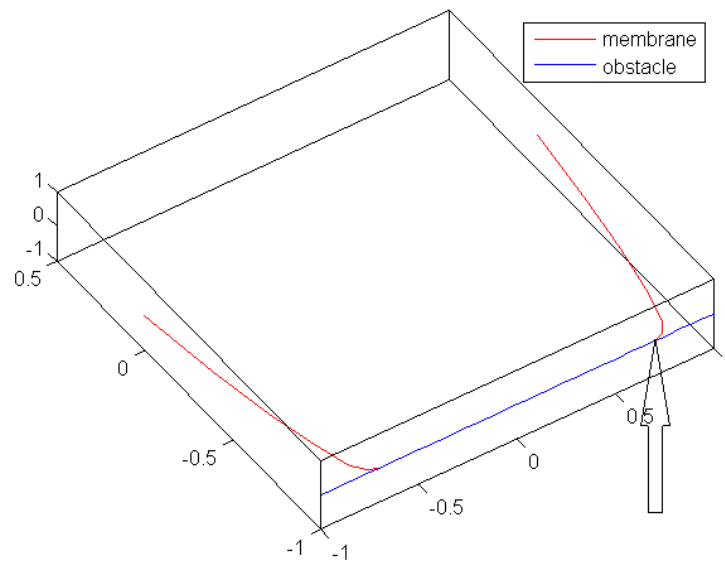


FIGURE 4.7 – L'emplacement de la frontière libre

Le tableau ci-dessous est donne quelque informations pour la convergence entre la solution exacte et le résultat de la méthode de point intérieur u_h , on utilise la norme L^2 , N est le nombre de triangle de la discrétisation de Ω , voir le tableau (4.8)

N	162	280	644	1120	1788
Nombre d'itération	11	10	12	12	11
$\ u - u_h\ _{L^2}$	0.0315399	0.0136948	0.0080448	0.00548291	0.00288827

FIGURE 4.8 – La norme L^2 de l'erreur en fonction de nombre des triangles.

Exemple 3 :

Dans cet exemple le domaine Ω est le carré $] - 1, 1[\times] - 1, 1[$, l'obstacle est définie comme :

$\varphi = -\cos(x^2) - \sin(x^2)$ et la force extérieur $f = -15$.

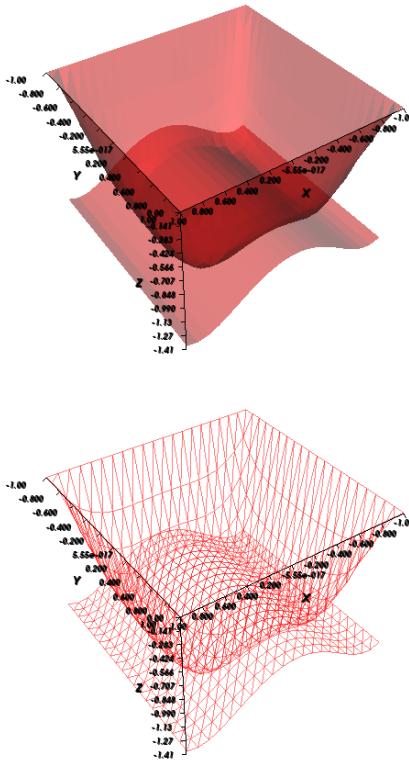


FIGURE 4.9 – Contact membrane-obstacle pour l'exemple 3

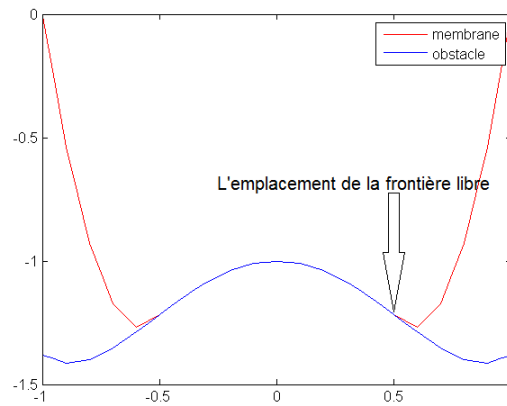


FIGURE 4.10 – L'emplacement de la frontière libre

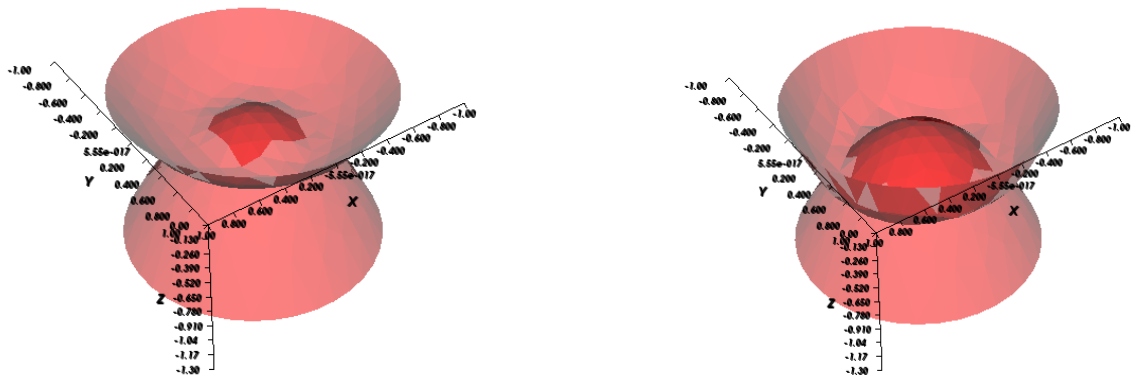
Le tableau suivant qui donne quelque informations sur la convergence de la solution.

L'itération	L'objectif J	$\log(\varepsilon)$
1	1.6004549e+003	-0.8
2	2.1548285e+002	-0.8
3	-6.3781128e+000	-1.7
4	-3.0980094e+001	-1.9
5	-3.5508622e+001	-3.4
6	-3.6017425e+001	-4.5
7	-3.6071638e+001	-5.8
8	-3.6073352e+001	-8.5
9	-3.6073360e+001	-11

FIGURE 4.11 – Nombre d'itérations pour la convergence

Exemple 4 :

Dans cet exemple le domaine Ω est le cercle d'unité, l'obstacle est $\varphi = -x^2 - y^2 - 0.3$ nous donnons des informations pour la convergence dans deux cas, si $f = -4$ et $f = -10$.



(a) Contact membrane-obstacle, cas $f = -4$

(b) Contact membrane-obstacle, cas $f = -10$

FIGURE 4.12 – Contact membrane-obstacle, dans les deux cas $f = -4$ et $f = -10$

L'itération	L'objectif J	$\log(\varepsilon)$
1	5.1365254e+002	-0.7
2	6.6326138e+001	-0.9
3	5.7626336e+000	-1.7
4	-1.7057696e+000	-2.7
5	-1.7057696e+000	-3.6
6	-2.3012062e+000	-5.0
7	-2.3061755e+000	-6.4
8	-2.3063811e+000	-8
9	-2.3063951e+000	-9.7
10	-2.3063954e+000	-11.0

FIGURE 4.13 – Nombre d'itérations pour la convergence, le cas $f = -4$

L'itération	L'objectif J	$\log(\varepsilon)$
1	5.9304360e+002	-0.6
2	7.9705571e+001	-0.8
3	1.5382748e+000	-1.7
4	-7.6201061e+000	-2.5
5	-9.0008866e+000	-3.3
6	-9.1273899e+000	-4.8
7	-9.1385631e+000	-6.3
8	-9.1392428e+000	-7.4
9	-9.1392739e+000	-9.0
10	-9.1392757e+000	-10.7
11	-9.1392757e+000	-11.0

FIGURE 4.14 – Nombre d'itérations pour la convergence, le cas $f = -10$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons considéré la simulation numérique du modèle mathématique du problème d'obstacle en utilisant la méthode de point intérieur. Nous avons discuté l'existence et l'unicité de la solution du problème d'obstacle comme un problème de minimisation avec contraintes mais la détermination de la solution exacte est difficile voire impossible. Ceci est dû au fait que le problème peut être vu comme un problème non linéaire et de plus la difficulté de trouver un opérateur d'interpolation qui préserve la positivité $v \geq 0 \implies \Pi v \geq 0$. Alors pour surmonter cette difficulté, la méthode de point intérieur consiste à remplacer le problème de minimisation avec contrainte par une suite de problèmes de minimisation sans contrainte en ajoutant une fonction logarithmique dite fonction barrière et nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution de ce problème (sans contraintes) et que cette solution converge vers la solution du problème d'origine lorsque le paramètre barrière converge vers zéro.

La résolution numérique de problème d'obstacle par la méthode de point intérieur est basé sur l'algorithme **Correcteur-Prédicteur** et cette algorithme est implémenté dans IPOPT (Interior Point Optimizer) si pour ça on utilisé l'IPOPT avec Freefem++ pour calculer la solution et pour visualiser les résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] José Francisco Rodrigues ; *obstacle problems in mathematical physics* ; North-holland mathematics studies 134 ; N.H.P.C.1987.
- [2] Ciarlet, Philippe G. *The finite element methods for elliptic problems*, SIAM, 2002.
- [3] Kinderlehrer David, Stampacchia Guido ; *An introduction to variational inequalities and their applications*, SIAM, New York : Academic Press, 1980.
- [4] A.Friedman ; *Variational principles and free-boundary problems*, Wiley, New York, 1982.
- [5] Glowinski R. ; *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag.New York.(1984).
- [6] Richard S. Falk ; *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities* ; AMS 2011.
- [7] Dirk Biermann, Heribert Blum, Ivan Iovkov, Nicole Klein, Andreas Rademacher and Franz-Theo Suttmeier ; *Stabilization techniques and a posteriori error estimates for the obstacle problem* ; Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

-
- [8] Zhiming Chen, Ricardo H. Nochetto; *Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems*; Numerische Mathematik; Springer-Verlag 2000.
- [9] Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002. p69.
- [10] Bonnans, J.F., Gilbert, J.C., Lemaréchal, C., Sagastizàbal, C.A.; *Numerical Optimization*, Berlin, Heidelberg, New-York : Springer-Verlag, 1997.
- [11] Jacques Teghem, *Programmation linéaire*(2003), 263–285, Editions Ellipses (ISBN 978-2-8004-1317-4).
- [12] Anders Forsgren, Philip E. Gilland and Margaret H. Wright; *Interior Methods for Nonlinear Optimization**, SIAM REVIEW 2002 Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 44, No. 4, pp. 525–597.
- [13] G. Allaire et M. Benaim; *Conception optimale de structures*; *Centre de Mathématiques Appliquées* École Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex France, Springer 2007.
- [14] *Introduction to IPOPT : A tutorial for downloading, installing, and using, IPOPT*
Revision number of this document : Revision : 2422 November 16, 2013.

المخلص:

قمنا في هذا العمل بتقديم طريقة النقطة الداخلية لحل مشكلة العقبة. برهنا وجود و وحدانية الحل الذي يتقارب للحل الأصلي لمشكلة العقبة. قدمنا بعض تقديرات الخطأ (ابريوري, ابوستيريوري) باستخدام طريقة العناصر المنتهية. قمنا باختبار رقمي عن طريق المبرمج (فريفا++).

الكلمات المفتاحية: طريقة النقطة الداخلية, مشكلة العقبة, العناصر المنتهية.

Résumé :

Dans ce travail nous présentons la méthode du point intérieur pour la résolution numérique du problème d'obstacle et l'existence et l'unicité de la solution qui converge vers la solution du problème d'obstacle. Nous donnons quelques estimations d'erreur a priori et a posteriori obtenus à l'aide de l'approximation par la méthode des éléments finis. Un test numérique programmé sous Freefem++ et aussi présenté.

Mots Clés : La méthode du point intérieur, problème d'obstacle, les éléments finis.

Abstract :

In this work we present interior point method for the numerical solution of the obstacle problem. We prove the existence and uniqueness of the solution which converges to the solution of the obstacle problem. We give some error estimates a priori and a posteriori obtained using the approximation by the finite elements method.

A numerical test with Freefem++ is also presented.

Keywords : Interior point method, obstacle problem, finite elements .