



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la
Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :KHENFER Soukina

Thème

Une approche primale-duale pour le problème d'obstacle

Soutenu publiquement le : 26/05/2016

Devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------|--|-------------|
| Chacha Djamel Ahmed | Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla | Président |
| Bensayah Abdallah | M.C. Universié KASDI Merbah- Ouargla | Examinateur |
| Ghezal Abderrazek | M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla | Examinateur |
| Merabet Ismail | M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla | Rapporteur |

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes enseignants du cycle primaire jusqu'au cycle universitaire dont les conseils précieux m'ont guidé, qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

En particulier : l'ensemble des enseignants de l'université Kasdi Merbah Ouargla.

Mes très chère parents «**Mohamed lahcen** » et «**Samia** » qui ont oeuvré pour ma réussite, par leurs amours, ses soutiens, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute ses assistances et sa présence dans ma vie.

Mes frères : Malik, Badre, Youcef

Mes sœurs : Hanaa, Oumayma, Israa

Mes oncles, tantes, cousins et cousines.

Mes camarades : Torkia, Rihana, Houda,...

Mes amies : Amina, Yamina, Karima, Zaineb...

et toutes.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **MERABET Ismail** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail, et tous **les enseignants** qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux. J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys qui m'ont honoré en acceptant de juger ce travail.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| Dédication | i |
| Remerciement | ii |
| Notations | 1 |
| 1 Modélisation mathématique du problème d'obstacle | 4 |
| 1.1 Position du problème | 4 |
| 1.2 Les formulations variationnelles équivalentes | 7 |
| 1.2.1 La formulation variationnelle primale | 7 |
| 1.2.2 L'existence et l'unicité de la formulation variationnelle primale | 8 |
| 1.2.3 La formulation classique | 10 |
| 1.2.4 La nouvelle formulation primale : | 11 |
| 1.2.5 L'existence et l'unicité du nouvelle formulation primale | 13 |
| 1.2.6 Existence et unicité du formulation mixte | 13 |
| 2 Approximation du problème d'obstacle | 17 |
| 2.1 Discrétisation par éléments finis | 18 |
| 2.1.1 Approximation du nouvelle formulation primal et problème mixte | 19 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.2 | Estimation d'erreur | 20 |
| 2.2.1 | L'estimation a priori : | 20 |
| 3 | Solution du problème discret | 25 |
| 3.1 | Méthode d'Uzawa | 30 |
| 3.1.1 | La convergence de la méthode d'Uzawa | 31 |
| 3.2 | Méthode d'Uzawa non-exacte | 33 |
| 4 | Tests numériques sous Freefem++ | 35 |
| 4.1 | Traitement d'un exemple | 38 |
| 5 | Conclusion | 42 |

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .
- $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla \cdot (\nabla v)$: Laplacien de v .
- $(.,.)$: Le produit scalaire et $\langle ., . \rangle$: Le produit de dualité.
- $H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall \alpha : |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$.
- $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1 / v = 0 \text{ dans } \partial\Omega\}$.
- H^{-1} : dual de l'espace H_0^1 .
- $\text{div } v = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$: La divergence de v .
- $H(\text{div}, \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^d; \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$.
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$: l'espace des fonctions k -fois continue, différentiable sur Ω .
- \mathbb{RT}_0 : l'espace des éléments finis de Raviart Thomas d'ordre 0.
- $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot n$.
- $\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

Le type le plus simple des problèmes de contact est celui qui concerne le contact entre une membrane élastique et un obstacle rigide. Les problèmes de cette catégorie sont appelés "problèmes d'obstacle", ce genre des problèmes peut être considéré comme un problème de frontière libre. Plusieurs modèles physiques importants peuvent être reformulé comme un problème d'obstacle, par exemple : le problème de filtration d'un fluide, problème de l'écoulement, problème de Stefan,...etc, grâce à la non linéarité de problème d'obstacle, le calcul des solutions exactes ou approximatives peut être difficile, pour cela nous nous intéressons dans ce mémoire à présenter une approche primale-duale qui nous aide à résoudre le problème d'obstacle. Cette approche duale consiste à trouver une formulation mixte à l'aide de méthode de multiplicateur de Lagrange.

Dans ce mémoire on va étudier le problème d'obstacle dans quatre chapitre, dans le premier chapitre on va reformuler le modèle physique à un problème mathématique sous forme d'un problème de minimisation qui est équivalent à des formulations d'inéquations variationnelles. Après on va trouver la formulation mixte, étudier l'existence et l'unicité de ces formulations qui ont été discutées dans plusieurs ouvrages.

Ensuite dans le deuxième chapitre, on va discrétiser le problème d'obstacle par méthode des éléments finis de Raviart-Thomas, puis on va montrer quelques théorèmes sur les estimations des erreurs.

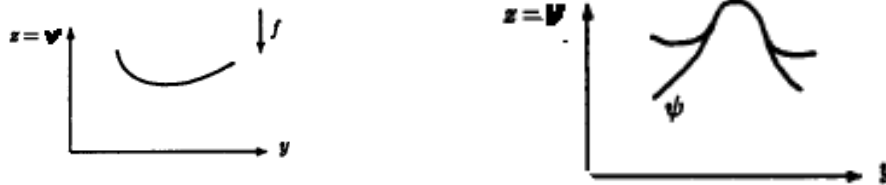
Dans le chapitre suivant, on va développer les algorithmes d'Uzawa et Uzawa non exacte avec ses variantes pour résoudre le système de problème d'obstacle qui est formé par une équation de variable p et inégalité de variable λ , puis on passe à montrer la convergence de ces deux algorithmes.

Finalement, nous programmons sous Freefem++ les schémas numériques développés dans les chapitres précédents, afin de valider les résultats théoriques.

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME D'OBSTACLE

1.1 POSITION DU PROBLÈME

On considère le problème où une membrane élastique ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) est fixée au bord, soumise à une force extérieure f dans le sens vertical. Cette membrane étant en contact avec un corps rigide (l'obstacle), qu'est placé en dessus de la membrane(voir la figure (1.1)).



(a) La membrane en absence d'obstacle (b) Le membrane avec un obstacle

FIGURE 1.1 – La déformation d'une membrane avec/sans obstacle

On désigne par v le déplacement transversal de cette membrane en un point $(x, y) \in \Omega$, de sorte que $v(x, y) = g$ sur $\partial\Omega$, mais on étudie seulement le cas où $g = 0$, et on désigne la surface de l'obstacle par $\psi(x, y)$ avec l'hypothèse que $\psi(x, y) < 0$ pour tous $(x, y) \in \partial\Omega$. On définit l'énergie totale de cette membrane déformée par :

$$J(v) = P(v) - E(v).$$

Où $P(v)$ représente l'énergie potentielle et $E(v)$ le travail des forces extérieures, en supposant que l'énergie potentielle est proportionnelle à la variation de surface du membrane tel que (par l'approximation de Taylor) :

$$P(v) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{dv^2}{dx} + \frac{dv^2}{dy}} dx dy - \text{mes}(\Omega) \simeq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Où $\text{mes}(\Omega)$: la mesure de Lebesgue qui représente l'aire superficielle de la membrane non déformée.

Le travail des forces extérieures correspondant est donné par : $E(v) = \int_{\Omega} f v dx dy$. donc

$$J(v) = P(v) - E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Le problème d'obstacle consiste à trouver l'état d'équilibre de la membrane, c'est à dire à minimiser la fonctionnelle d'énergie $J(v)$, lorsque la déviation de la membrane est limitée en bas par l'obstacle, donc l'ensemble admissible de v noté par K tel que :

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi, \text{ p.p dans } \Omega\}.$$

On remarque que K est non linéaire. Maintenant on suppose que $\psi \in L^2(\Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$, Alors le problème de minimisation correspondant est :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (1.1)$$

avec :

$$J : H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle,$$

où : (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

Proposition 1.1.1 *L'ensemble $K = \{v \in H_0^1(\Omega), v \geq \psi \text{ p.p dans } \Omega\}$ est fermé et convexe.*

Preuve. Soit $v_n \in K$ tel que $v_n \rightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$, pour montrer que K fermé, on va montrer que $v \in K$:

$$v_n \in K \implies v_n \geq \psi \implies v_n - v + v \geq \psi$$

on prend la limite tel que : $|v_n - v| \rightarrow 0$

donc :

$$|v_n - v| \geq v_n - v \geq \psi - v$$

$$0 \geq \psi - v \implies v \geq \psi.$$

alors $v \in K$.

Maintenant on considère $t \in [0, 1]$, et $u, v \in K \implies u \geq \psi \quad v \geq \psi$.

Alors

$$tu + (1 - t)v \geq t\psi + (1 - t)\psi = \psi.$$

donc

$$tu + (1 - t)v \in K \implies K \text{ convexe.}$$

■

1.2 LES FORMULATIONS VARIATIONNELLES ÉQUIVALENTES

1.2.1 La formulation variationnelle primale

Pour déterminer les propriétés de la solution du problème d'obstacle on peut reformuler le problème (1.1) comme une inéquation variationnelle, comme suit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (1.2)$$

Théorème 1.2.1 *Si la forme $a(.,.)$ est bilinéaire positive, symétrique et K un ensemble convexe fermé, alors $u \in K$ résout le problème (1.1) si et seulement s'il résout le problème (1.2)*

Preuve.

- on suppose que (1.1) est vérifié :

$$u \in K \text{ (convex)} \implies u + \epsilon(v - u) \in K, \quad \forall 0 < \epsilon < 1$$

$$J(u) \leq J(v)$$

$$J(u) \leq J(u + \epsilon(v - u))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle &\leq \frac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), u + \epsilon(v - u)) - \langle F, u + \epsilon(v - u) \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle + \epsilon((a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v - u, v - u)) \end{aligned}$$

par simplification et division sur ϵ on obtient :

$$0 \leq (a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle) + \frac{\epsilon}{2}a(v - u, v - u)$$

on prend la limite : $\epsilon \rightarrow 0$ on trouve :

$$a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \quad v \in K.$$

- inversement : on suppose (1.2) est vérifié :

soit $v \in K$ et $u \neq v$, et la fonction $f(\epsilon) = J(u + \epsilon(v - u))$. $\forall 0 < \epsilon < 1$.

On remarque que $f(0) = J(u)$, $f(1) = J(v)$ et f continue. on calcule $f'(\epsilon)$:

$$f'(\epsilon) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(u + (\epsilon + h)(v - u)) - J(u + \epsilon(v - u))}{h}$$

on prend $w = u + \epsilon(v - u)$

$$\begin{aligned} f'(\epsilon) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(w + h(v - u)) - J(w)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ha(w, (v - u)) + \frac{h^2}{2}a(v - u, v - u) - h \langle F, v - u \rangle}{h} \\ &= a(w, v - u) - \langle F, v - u \rangle \\ &= a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle + \epsilon a(v - u, v - u) \\ &> a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle \geq 0 \quad (\text{par(1.2)}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(1) \geq f(0)$$

$$J(u) \leq J(v).$$

Ce qui termine la démonstration.

■

1.2.2 L'existence et l'unicité de la formulation variationnelle primale

Comme on a vu, le problème d'obstacle admet une formulation de minimisation. Ce dernier est équivalent au problème variationnel primale (inéquation variationnelle). Maintenant on veut présenter quelques définitions et théorèmes sur l'existence et l'unicité d'une solution de problème d'obstacle.

Définition 1.2.2 On dit que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est :

1. coercive sur $V \times V$ s'il existe une constante $\alpha > 0$, tel que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

2. continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

Théorème 1.2.3 (Stampachia) Soient V un espace de Hilbert, et $K \subset V$ sous espace non vide, fermé et convexe. et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$ et $F \in V'$ (l'espace dual de V) tel que :

$$a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (1.3)$$

alors (1.3) admet une solution unique. En plus Si u_1, u_2 sont des solutions au problème (1.3) avec correspondants côtés droit $F_1, F_2 \in V'$, alors l'estimation de la stabilité suivante est vérifiée :

$$\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F_2 - F_1\|$$

Preuve. voir [2]

■

Maintenant nous démontrons que la formulation primale du problème d'obstacle satisfait les conditions requises dans le théorème (1.2.3) :

on écrit le problème d'obstacle sous forme d'un problème variationnel primale :

Trouve $u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi, \text{ p.p dans } \Omega\}$ tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \quad \forall v \in K \quad (1.4)$$

avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On a déjà vu que l'ensemble K est convexe ,fermé.

La forme $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$: est bilinéaire, symétrique (évident), et continue (par l'inégalité de Cauchy Schwarz) :

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}.$$

Et coercive dans $H_0^1(\Omega)$ par inégalité de Ponicarré :

$$\exists C > 0 \quad a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq C \|\nabla u\|_1^2.$$

De plus, il est claire que F est linéaire continue ,donc l'existence et l'unicité de la solution $u \in K$ sont obtenus, à partir du théorème(1.2.3).

1.2.3 La formulation classique

Maintenant on dérive une autre formulation appelée problème classique d'obstacle.

On suppose que u la solution du problème d'obstacle est régulière : $u \in H^2(\Omega) \cap K$, et $f \in L^2(\Omega)$, alors on applique la formule de Green sur

$$(\nabla u \nabla(v - u)) \geq \langle F, v - u \rangle \quad \forall v \in K$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(v - u) dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v - u) ds \geq \int_{\Omega} (f, v - u) dx dy \quad \forall v \in K. \quad (1.5)$$

Puisque $v - u = 0$ dans $\partial\Omega$ donc l'inégalité (1.5)se réduit à :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(v - u) dx dy \geq \int_{\Omega} (f, v - u) dx dy$$

et soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (fonction non négative) :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(v - u)\phi dx dy \geq \int_{\Omega} (f, v - u)\phi dx dy$$

tel que : $v = u + t\phi \in K$ pour tout $0 < t \leq 1$ et par substitution de v on trouve pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$-\Delta u \geq f \quad p.p \text{ dans } \Omega$$

puis on diviser le domaine Ω :

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+$$

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega, u(x) = \psi(x)\} \text{ (la zone de contact)}$$

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega, u(x) > \psi(x)\}$$

supposons que $\psi \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $x \in \Omega_+$, puisque Ω_+ est un ouvert donc il existe un voisinage $V(x) \subset \Omega_+$. Si $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(V(x))$ on peut trouver $v = u \pm t\phi$ tel que $t > 0$. Par substitution de v on trouve :

$$\pm t \int_{V(x)} \Delta u \phi \, dx dy \geq \pm t \int_{V(x)} f \phi \, dx dy$$

ceci implique pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(V(x))$:

$$-\Delta u = f \quad p.p \text{ dans } V(x).$$

Après on résume tous les relations obtenu, on trouve la formulation classique suivante qui présente le problème d'obstacle de frontière libre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u \geq f & \text{dans } \Omega \\ u \geq \psi & \text{dans } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 & p.p \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

1.2.4 La nouvelle formulation primale :

Maintenant à partir de la formulation classique, on dérive une nouvelle formulation variationnelle primale qui nous aide à trouver la formulation mixte, mais premièrement on définit l'espace :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \text{div } q \in L^2(\Omega)\}$$

et le produit scalaire : $[q, p] = (q, p)_\Omega + (\text{div } q, \text{div } p)_\Omega$, $\|q\|_{H,\Omega} = [q, q]_\Omega^{1/2}$.

On prend : $p = \nabla u$, puis on définit un nouveau ensemble convexe \tilde{K} tel que :

$$\tilde{K} = \{q \in H(\text{div}, \Omega); \text{div } q + f \leq 0\}$$

Si on multiplie l'équation $p = \nabla u$ par une fonction de test $q \in \tilde{K}$, puis on intègre sur Ω par Green on obtient :

$$(p, q) = (\nabla u, q) = -(u, \text{div } q)_\Omega + (u, q \cdot n)_{\partial\Omega}.$$

Et comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient :

$$(p, q) = -(u, \text{div } q)_\Omega + (u, q \cdot n)_{\partial\Omega} = -(u, \text{div } q)_\Omega$$

car $p \in \tilde{K}$ donc on peut remplacer q par $q - p$, on obtient :

$$(p, q - p) = -(u, \operatorname{div} (q - p))_{\Omega}. \quad (1.6)$$

D'une part on a : $\psi - u \leq 0$, et $\operatorname{div} q + f \leq 0$

en combinant les deux relations :

$$(\psi - u, \operatorname{div} q + f) \geq 0 \quad (1.7)$$

d'autre part : (la troisième relation du problème classique) :

$$(\psi - u)(-\Delta u - f) = 0 \quad p.p \text{ sur } \Omega$$

car $\Delta u = \operatorname{div} p$ on obtient :

$$(\psi - u, \operatorname{div} p + f) = 0 \quad p.p \text{ sur } \Omega. \quad (1.8)$$

par la soustraction de (1.7)-(1.8) on trouve :

$$\begin{aligned} & (\psi - u, \operatorname{div} (q - p)) \geq 0 \\ & = (\psi, \operatorname{div} (q - p)) - (u, \operatorname{div} (q - p)) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

si on ajout la relation (1.9) à (1.6) on obtient :

$$(p, q - p) \geq -(\psi, \operatorname{div} (q - p)) \quad \forall q \in \tilde{K}$$

puisque $q \in \tilde{K}$:

$$\begin{aligned} & \implies (\operatorname{div} q + f, \mu) \leq 0 \quad \text{si } \mu \geq 0 \\ & \implies b(q, \mu) \leq (\phi, \mu) \end{aligned}$$

tell que :

$$b(q, \mu) = (\operatorname{div} q, \mu) \text{ et } (\phi, \mu) = -(f, \mu).$$

On reformule le convexe \tilde{K} , on obtient : $K^* = \{q \in H(\operatorname{div}, \Omega); b(q, \mu) \leq (\phi, \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda\}$

avec : $\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega), \mu \geq 0 \text{ p.p sur } \Omega\}$.

Maintenant on résume tous les résultats dans un nouvelle problème variationnel primale :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in K^* \text{ tel que} \\ a(p, q - p) \geq \langle F, q - p \rangle \end{cases} \quad (1.10)$$

avec :

$$a(p, q) = (p, q) / \langle F, q \rangle = -\langle \psi, \operatorname{div} q \rangle$$

1.2.5 L'existence et l'unicité du nouvelle formulation primale

Théorème 1.2.4 *si $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$, et u la solution unique de problème primale (1.3) alors $p = \nabla u$ est la solution unique de nouveau problème primale (1.10).*

Preuve. l'existence est déjà démontré quand on a formé le problème (1.10)

l'unicité :

on suppose que il existe deux solutions p_1 et $p_2 \in H(\text{div}, \Omega)$ alors pour tous $q \in K^*$ on a :

$$a(p_1, q - p_1) \geq \langle F, q - p_1 \rangle$$

$$a(p_2, q - p_2) \geq \langle F, q - p_2 \rangle$$

et si on prend $q = p_2$ dans l'inéquation variationnel de p_1 , et $q = p_1$ dans l'inéquation de p_2 , on obtient après l'addition :

$$a(p_1 - p_2, p_1 - p_2) \leq 0.$$

mais on a la positivité de $a(., .)$ tel que :

$$a(q, q) = \int_{\Omega} q^2 > 0. \quad \forall q \in H(\text{div}, \Omega) \text{ avec } q \neq 0$$

donc :

$$p_1 - p_2 = 0 \implies p_1 = p_2.$$

■

1.2.6 Existence et unicité du formulation mixte

Maintenant on transforme notre problème qu'il est sous forme inéquation vers un autre formulation de type équation avec contrainte. on a vu dans les paragraphes précédentes que :

$$a(p, q) \geq \langle F, q \rangle \quad \forall q \in \tilde{K} \tag{1.11}$$

où

$$\tilde{K} = \{q \in H(\text{div}, \Omega), \text{div } q + f \leq 0\}$$

et :

$$a(p, q) = \int_{\Omega} p \cdot q \quad , \quad \langle F, q \rangle = - \int_{\Omega} \psi \text{div } q = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot q \quad (\text{au sens de dérivé faible})$$

Avant que nous suivons, on définit premièrement la méthode de multiplicateur de Lagrange.

Remarque 1.2.5 *Le multiplicateur de Lagrange est un méthode permettant de trouver les points stationnaires (maximum, minimum, ...) d'un fonction dérivable d'une ou plusieurs variables sous contraintes.*

Visuellement la méthode de multiplicateur de Lagrange permet de trouver un optimum, Formellement on note comme suit l'écriture du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \phi(x) + \lambda \psi(x).$$

Maintenant on donne le problème de minimisation équivalent à notre problème (1.11) tel que J et F sont des fonctionnelles convexe :

$$\min_{F(q) \leq 0} J(q) \quad \forall q \in \tilde{K} \tag{1.12}$$

où

$$J(q) = \frac{1}{2} a(q, q) - (\nabla \psi, q) \quad \text{et} \quad F(q) = \text{div } q + f \leq 0$$

sous hypothèse de théorème de Kuhn-Tucker résoudre (1.12) revient à trouver un point selle (p, λ) du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(q, \mu) = J(q) + \mu F(q).$$

Le point selle (p, λ) caractériser par :

$$\mathcal{L}(p, \mu) \leq \mathcal{L}(p, \lambda) \leq \mathcal{L}(q, \lambda) \quad \forall (q, \mu) \in H(\text{div}, \Omega) \times \Lambda$$

Pour trouver $(p, \lambda) \implies \nabla \mathcal{L}(p, \lambda) = 0$.

calcul de $\nabla \mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(p + q, \lambda) = \mathcal{L}(p, \lambda) + \nabla \mathcal{L}(p, \lambda)(q) + o(\|q\|)$$

$$\mathcal{L}(p + q, \lambda) = J(q + p) + \lambda F(q + p).$$

$$= \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + \langle p, q \rangle + \frac{1}{2} \langle q, q \rangle - \langle \nabla \psi, p \rangle - \langle \nabla \psi, q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} p + f \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle$$

$$\nabla \mathcal{L}(p, \lambda)(q) = \langle p, q \rangle - \langle \nabla \psi, q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle = 0$$

$$\implies \langle p, q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle = - \langle \psi, \operatorname{div} q \rangle$$

et dans autre part : $p \in \tilde{K} \implies \langle \mu, \operatorname{div} p + f \rangle \leq 0$.

et par les relations de problème classique si $\lambda = u - \psi$ alors : $\langle \lambda, \operatorname{div} p + f \rangle = 0$

assembler les deux relations précédentes on obtient :

$$\langle \operatorname{div} p + f, \mu - \lambda \rangle \leq 0$$

$$\langle \operatorname{div} p, \mu - \lambda \rangle \leq - \langle f, \mu - \lambda \rangle$$

$$b(p, \mu - \lambda) \leq (\phi, \mu - \lambda)$$

donc la nouvelle formulation qui s'appelle formulation mixte est :

trouver (p, λ) tel que :

$$\langle p, q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle = - \langle \psi, \operatorname{div} q \rangle \quad (1.13)$$

$$\langle \operatorname{div} p, \mu - \lambda \rangle \leq - \langle f, \mu - \lambda \rangle \quad (1.14)$$

Théorème 1.2.6 *Supposons qu'il existe un constant $\beta > 0$ tel que :*

$$\inf_{\mu \in Q} \sup_{q \in V} \frac{b(q, \mu)}{\|q\|_V \|\mu\|_Q} \geq \beta \quad \mu, q \neq 0. \quad (1.15)$$

alors les problème (1.11) et (1.13) et (1.14) sont équivalents, c'est à dire si l'un admet une solution unique revient que l'autre aussi a une solution unique. En plus si (p, λ) résout (1.13) et (1.14), alors p résout (1.11)

Preuve. On montre premièrement l'unicité de problème mixte : s'il existe deux solutions (p_1, λ_1) et (p_2, λ_2) de problème mixte :

on obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle (p_1, p_1 - p_2) \rangle + \langle \lambda_1, \operatorname{div} (p_1 - p_2) \rangle &= - \langle \psi, \operatorname{div} (p_1 - p_2) \rangle \\
 \langle \operatorname{div} p_1, \mu - \lambda_1 \rangle &\leq - \langle f, \mu - \lambda_1 \rangle \\
 \langle (p_2, p_2 - p_1) \rangle + \langle \lambda_2, \operatorname{div} (p_2 - p_1) \rangle &= - \langle \psi, \operatorname{div} (p_2 - p_1) \rangle \\
 \langle \operatorname{div} p_2, \mu - \lambda_2 \rangle &\leq - \langle f, \mu - \lambda_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

par l'addition, on trouve : $a(p_1 - p_2, p_1 - p_2) \leq 0$, mais on a la positivité de a alors $p_1 = p_2$.
 Maintenant on pose (p, λ_1) et (p, λ_2) des solutions de (1.13) alors :

$$\begin{aligned}
 \langle p, q \rangle + \langle \lambda_1, \operatorname{div} q \rangle &= - \langle \psi, \operatorname{div} q \rangle \\
 \langle p, q \rangle + \langle \lambda_2, \operatorname{div} q \rangle &= - \langle \psi, \operatorname{div} q \rangle
 \end{aligned}$$

Par la soustraction on obtient :

$$\langle \lambda_2 - \lambda_1, \operatorname{div} q \rangle = 0 \quad \forall q \in V$$

en utilisant la condition inf sup on trouve :

$$0 = \langle \lambda_2 - \lambda_1, \operatorname{div} q \rangle \geq \beta \|q\|_H \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall q \in V. \implies \lambda_1 = \lambda_2.$$

Maintenant on montrer l'équivalence entre (1.11) et (1.13) et (1.14) :

on a déjà prouvé que (1.11) \implies (1.13) et (1.14) (dans le paragraphe précédent, en utilisant Lagrangien).

Il reste de montrer l'inverse :

on pose (1.14) est vérifier, si on choisit $\mu = 0$ et $\mu = 2\lambda$,

on obtient : $\langle \operatorname{div} p, \lambda \rangle = - \langle f, \lambda \rangle$ et aussi : $\langle \operatorname{div} p, \mu \rangle \leq - \langle f, \mu \rangle \implies p \in \tilde{K}$

et par (1.13) :

$$\begin{aligned}
 \langle p, q - p \rangle &= - \langle \psi, \operatorname{div} (q - p) \rangle - \langle \lambda, \operatorname{div} (q - p) \rangle \\
 &= - \langle \psi, \operatorname{div} (q - p) \rangle - \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} p \rangle
 \end{aligned}$$

on substitue $\langle \lambda, \operatorname{div} p \rangle$ par $- \langle f, \lambda \rangle$ et on utilise $\langle \operatorname{div} q, \mu \rangle \leq - \langle f, \mu \rangle$ donc :

$$\langle p, q - p \rangle \geq - \langle \psi, \operatorname{div} (q - p) \rangle \implies a(p, q - p) \geq \langle F, q - p \rangle.$$

■

APPROXIMATION DU PROBLÈME D'OBSTACLE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à trouver l'approximation de la solution de problème d'obstacle et montrer leur existence et unicité, en utilisant les éléments finis mixte de Raviart-Thomas, puis on étudie le comportement de ce solution approché s'il converge vers la solution exacte ou non.

Rappelons-nous du chapitre précédent la nouvelle formulation primale du problème d'obstacle :

$$\begin{cases} \text{trouver } p \in \tilde{K} \text{ tel que} \\ \langle p, q - p \rangle \geq -\langle \psi, \operatorname{div} (q - p) \rangle \quad \forall q \in \tilde{K} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec :

$$\tilde{K} = \{q \in H(\operatorname{div}, \Omega); \operatorname{div} q + f \leq 0\}$$

Cette formulation a été jugée équivalente au problème mixte : trouver $(p, \lambda) = (\nabla u, u - \psi) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times \Lambda$ tel que :

$$\begin{cases} \langle p, q \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} q \rangle = -\langle \psi, \operatorname{div} q \rangle \quad \forall q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \langle \operatorname{div} p, \mu - \lambda \rangle \leq -\langle f, \mu - \lambda \rangle \quad \forall \mu \in \Lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

L'existence et l'unicité du solution (p, λ) de (2.2) et leur équivalent (2.1) étaient satisfaisant dans le chapitre précédent, maintenant on veut de discrétiser le domaine Ω afin de résoudre le problème primale-duale.

2.1 DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de Ω , et puisqu'on a besoin d'utiliser une fonction linéaire sur chaque élément de la triangulation et de composante normale continue au milieu des faces (voire le figure(2.1)).

Pour cela, on introduit l'espace d'élément finis de Raviart-Thomas de plus bas degré $\mathbb{RT}_0(\mathcal{T})$.

Définition 2.1.1 $\mathbb{RT}_0(T)$ est l'espace vectoriel des polynômes en x de la forme :

$$\mathbb{RT}_0 = [\mathbb{P}_0]^d \oplus x\mathbb{P}_0$$

On considère l'espace des éléments finis continus de Raviart-Thomas :

$$V^h = \{\phi \in H(\text{div}, \Omega) : \phi|_T = (a_1 + bx, a_2 + by) \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}\} \subset H(\text{div}, \Omega)$$

$$Q^h = \{\tau : \tau \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h) \text{ (l'espace des fonctions constantes par morceaux)}\} \subset L^2(\Omega)$$

Aussi on mis : $\Lambda^h = \Lambda \cap Q_h$:

$$\Lambda^h = \mathbb{P}_0(\mathcal{T}) = \{\mu^h \in L^2(\Omega) : T \in \mathcal{T}, \mu^h|_T \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}), \mu^h \geq 0\}$$

alors il est claire que : $V^h \subset H(\text{div}, \Omega)$ et $\Lambda^h \subset L^2(\Omega)$.

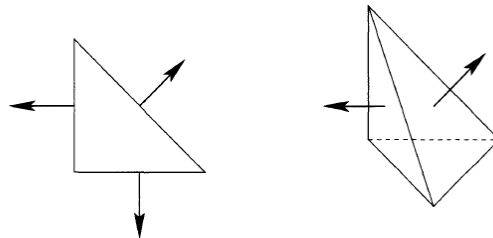


FIGURE 2.1 – Élément finis de Raviart-Thomas en 2D(à gauche) et 3D (droite).

2.1.1 Approximation du nouvelle formulation primal et problème mixte

Maintenant on approxime le nouveau problème primale en utilisant les sous espaces ci-dessus V^h et Λ^h , on obtient :

le problème discrète de (2.1) est :

Trouver $p^h \in \tilde{K}^h$ tel que :

$$\langle p^h, q^h - p^h \rangle \geq - \langle \psi, \operatorname{div} (q^h - p^h) \rangle \quad \forall q^h \in \tilde{K}^h \quad (2.3)$$

où : $\tilde{K}^h = \{q^h \in H(\operatorname{div}, \Omega); \operatorname{div} q^h + f \leq 0 \text{ p.p dans } \Omega\}$.

Et le problème discrète du formulation mixte :

Trouver $(p^h, \lambda^h) \in V^h \times \Lambda^h$ tel que :

$$\begin{cases} \langle p^h, q^h \rangle + \langle \lambda^h, \operatorname{div} q^h \rangle = - \langle \psi, \operatorname{div} q^h \rangle & \forall q^h \in V^h \\ \langle \operatorname{div} p^h, \mu^h - \lambda^h \rangle \leq - \langle f, \mu^h - \lambda^h \rangle & \forall \mu^h \in \Lambda^h \end{cases} \quad (2.4)$$

Maintenant, on étudie l'existence et l'unicité des problèmes discrets précédentes :

Proposition 2.1.2 *Le problème discrète (2.3) admet une solution unique.*

Preuve. Puisque $V^h \subset V$ est de dimension finie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est coercive sur V^h , donc il existe une unique solution pour (2.3).

■

Théorème 2.1.3 *Supposons qu'il existe un constant $\beta > 0$ tel que :*

$$\inf_{\mu^h \in Q^h} \sup_{q^h \in V^h} \frac{b(q^h, \mu^h)}{\|q^h\|_{H,\Omega} \|\mu\|_0} \geq \beta. \quad (2.5)$$

avec : $b(q^h, \mu^h) = (\mu^h, \operatorname{div} q^h)$

alors les problème (2.3) et (2.4) sont équivalents, c'est à dire si l'un admet un solution unique implique que l'autre aussi admet solution unique. De plus si (p^h, λ^h) résout (2.4), alors p^h résout (2.3).

Preuve. L'existence et l'unicité sont des conséquences évidents du théorème (1.2.6) ■

2.2 ESTIMATION D'ERREUR

2.2.1 L'estimation a priori :

La question de la convergence peut être résolue facilement à partir des théorèmes suivants :

Théorème 2.2.1 *Si (p, λ) satisfait (2.2), alors pour tous $q^h \in K^h$ et $\mu^h \in \Lambda^h$ on a :*

$$\|p - p^h\|_0^2 \leq \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} p + f \rangle + \langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle + \langle \mu^h, \operatorname{div} (p - q^h) \rangle \quad (2.6)$$

Preuve. On note que :

$$\begin{aligned} \langle p - p^h, p - p^h \rangle &= \langle p - p^h, p - q^h + q^h - p^h \rangle = \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle p - p^h, q^h - p^h \rangle \\ &= \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle p, q^h - p^h \rangle - \langle p^h, q^h - p^h \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mais : $\langle p, q^h - p^h \rangle = -\langle \lambda + \psi, \operatorname{div} (q^h - p^h) \rangle$.

si on substitue ceci dans (2.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle p - p^h, p - p^h \rangle &= \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle \lambda + \psi, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle \\ &= \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle - \underbrace{\langle \psi, \operatorname{div} (q^h - p^h) \rangle}_{\leq 0} - \langle p^h, q^h - p^h \rangle \\ \langle p - p^h, p - p^h \rangle &\leq \langle p - p^h, p - q^h \rangle + \langle \lambda, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

et si on utilise les relations :

$$\langle \operatorname{div} p, \lambda \rangle = \langle -f, \lambda \rangle \text{ et } \langle \operatorname{div} p, \mu^h \rangle \leq \langle -f, \mu^h \rangle \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle &= \langle \operatorname{div} (p^h - p^h), \lambda - \mu^h \rangle + \langle \operatorname{div} (p - q^h), \mu^h \rangle \\ &\quad + \langle \operatorname{div} p, \lambda - \mu^h \rangle + \langle f, \lambda - \mu^h \rangle + \langle \operatorname{div} p^h, \mu^h \rangle + \langle f, \mu^h \rangle \\ &\leq \langle \operatorname{div} (p^h - q^h), \lambda - \mu^h \rangle + \langle \operatorname{div} (p - q^h), \mu^h \rangle \\ &\quad + \langle \operatorname{div} p, \lambda - \mu^h \rangle + \langle f, \lambda - \mu^h \rangle \end{aligned}$$

puis on substitue ceci dans (2.8) .

Donc l'estimation est claire.

■

Théorème 2.2.2 *Si (p, λ) satisfait (2.2), alors il existe un constant C (indépendant de h) tel que :*

$$\|\lambda - \lambda^h\|_0 \leq C\{\|p - p^h\|_0 + \inf_{\mu^h \in Q^h} \|\lambda - \mu^h\|_0\} \quad (2.9)$$

Preuve. Soit $(p^h, \lambda^h) \in V^h \times \Lambda^h$ la solution de (2.4), pour montrer l'estimation d'erreur on note que : (par l'inégalité triangulaire)

$$\|\lambda - \lambda^h\|_0 \leq \|\lambda - \mu^h\|_0 + \|\mu^h - \lambda\|_0 \quad (2.10)$$

maintenant on estime chacun de ces termes dans cette inéquation, commençons par l'estimation du terme $\|\mu^h - \lambda\|_0$:

à partir de problème discrète(2.4) et le problème (2.2) ,on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \lambda^h - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle &= -\langle \psi, \operatorname{div} q^h \rangle - \langle p^h, q^h \rangle - \langle \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle \\ \langle p, q^h \rangle + \langle \lambda + \psi, \operatorname{div} q^h \rangle &= 0 \end{aligned}$$

par l'addition :

$$\langle \lambda^h - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle = \langle p - p^h, q^h \rangle + \langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle \quad (2.11)$$

on divise cette équation par $\|q^h\|_H$ et on prend le borne supérieur on obtient :

$$\sup_{q^h \in V^h} \frac{\langle \lambda^h - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle}{\|q^h\|_H} = \sup_{q^h \in V^h} \frac{\langle p - p^h, q^h \rangle}{\|q^h\|_H} + \sup_{q^h \in V^h} \frac{\langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle}{\|q^h\|_H}$$

Mais par la condition (2.5) on a :

$$\beta \|\lambda^h - \mu^h\|_0 \leq \sup_{q^h \in V^h} \frac{\langle \lambda^h - \mu^h, \operatorname{div} q^h \rangle}{\|q^h\|_H}$$

alors :

$$\beta \|\lambda^h - \mu^h\|_0 \leq \sup_{q^h \in V^h} \frac{\langle p - p^h, q^h \rangle}{\|q^h\|_H} + \|\lambda - \mu^h\|_0$$

aussi :

$$\frac{\langle p - p^h, q^h \rangle}{\|q^h\|_H} \leq \frac{\|p - p^h\|_0 \|q^h\|_0}{\|q^h\|_H} \leq \frac{\|p - p^h\|_0 \|q^h\|_0}{\|q^h\|_0} \leq \|p - p^h\|_0$$

Puisque : $H(\text{div}, \Omega) \subset L^2(\Omega) : \|q\|_0 \leq \|q\|_H$ et la forme $a(.,.)$ est continue sur $H(\text{div}, \Omega)$.

Donc :

$$\beta \|\lambda^h - \mu^h\|_0 \leq \|p - p^h\|_0 + \|\lambda - \mu^h\|_0$$

On prend le born inférieure sur tous $\mu^h \in \lambda^h$, puis en combinant cette inégalité et (2.10) on trouve le résultat (2.9). ■

Les estimations d'erreur sont maintenant établies pour des sous-espaces particuliers.

Après avoir les estimations précédentes, nous entamons la tâche d'estimation $\|\lambda - \lambda^h\|_0$ et $\|p - p^h\|_0$. Si l'on utilise (2.9) pour estimer $\|\lambda - \lambda^h\|_0$, nous constatons que nous besoin une informations sur $\|p - p^h\|_0$ et $\inf_{\mu^h \in Q^h} \|\lambda - \mu^h\|_0$ pour estimer $\|p - p^h\|_0$. nous utilisera (2.6). À cette fin, nous affirmons le théorème suivant qui prend le cas d'un domaine polygonale.

Théorème 2.2.3 *Si Ω est un polygonal, $\psi \in H^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et (p, λ) est une solution au problème mixte (2.2) alors que l'erreur dans l'approximation (p^h, λ^h) produite par (2.4) satisfait :*

$$\|p - p^h\|_0 = O(h)$$

$$\|\lambda - \lambda^h\|_0 = O(h)$$

Preuve. Raviart-Thomas [14] consiste que $p^I \in V^h$ tel que :

$$\langle 1, (p - p^I) \cdot n \rangle_e = 0$$

où n est la normale extérieure sur l'arrêt e du triangle, de plus les estimations suivantes sont vérifier :

$$\|p - p^I\|_0 = O(h) \quad \text{si } p \in H^1(\Omega) \quad (2.12)$$

$$\|\text{div} (p - p^I)\|_0 = O(h) \quad \text{si } \text{div } p \in H^1(\Omega) \quad (2.13)$$

$$\langle \mu^h, \text{div} (p - p^I) \rangle = 0 \quad \forall \mu^h \in Q^h \quad (2.14)$$

En combinant les relations (2.14) et $\text{div } p + f \leq 0$ et $p^I \in K^h$ on obtient :

$$\langle \mu^h, \text{div} (p - p^I) + f - f \rangle = 0$$

Ceci implique : $\langle \mu^h, \operatorname{div} p^I + f \rangle = \langle \mu^h, \operatorname{div} p + f \rangle \leq 0 \quad \forall \mu^h \in \Lambda^h.$

Soit λ^I représente la projection L^2 de $\lambda = u - \psi$ sur Q^h et $\lambda^I \geq 0$,

Si $(p^h, \lambda^h) = (p^I, \lambda^I)$ alors on peut estimer (2.6) terme par terme, on va commençons par : $\langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} (p^h - q^h) \rangle$ et $\langle \mu^h, \operatorname{div} (p - q^h) \rangle.$

Par (2.14) et la relation d'orthogonalité $(\lambda - \lambda^I) \perp Q^h$:

$$\langle \lambda - \lambda^I, \operatorname{div} (p^h - p^I) \rangle = 0$$

$$\langle \lambda^I, \operatorname{div} (p - p^I) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \langle p - p^h, p - p^I \rangle &\leq \|p - p^h\|_0 \|p - p^I\|_0 \quad (\text{puisque } p = \nabla u \in H^1(\Omega)) \\ &= ch \|p - p^h\|_0 \quad (\text{par la relation (2.12)}) \end{aligned}$$

Pour conclure :

$$\langle \lambda - \mu^h, \operatorname{div} p + f \rangle = \langle \lambda - \lambda^I, \operatorname{div} p + f \rangle.$$

On considère deux cas :

- Si $u > \psi$ sur triangle $T \implies \operatorname{div} p + f = 0$ sur T

$$\implies \langle \lambda - \lambda^I, \operatorname{div} p + f \rangle = 0$$

- Si $u = \psi \implies \lambda = 0$ sur un sous-ensemble de T avec mesure positive, puis par la propriété de projection (contractante) et la théorie classique d'interpolation :

$$\|\lambda^I\|_{0,T} \leq \|\lambda\|_{0,T} \leq \|\lambda\|_{2,T}$$

Si Z est un région de triangles où $\lambda = 0$ sur un sous ensemble de mesure positive , alors :

$$\begin{aligned} \langle \lambda - \lambda^I, \operatorname{div} p + f \rangle &= \langle \lambda - \lambda^I, \operatorname{div} p + f \rangle_Z \leq \|\operatorname{div} p + f\|_{0,Z} \|\lambda - \lambda^I\|_{0,Z}. \\ &\leq 2 \|\operatorname{div} p + f\|_{0,Z} \|\lambda\|_{0,Z} = O(h^2). \end{aligned}$$

En combinant tous les résultats on obtient :

$$\|p - p^h\|_0^2 \leq ch\|p - p^h\|_0 + O(h^2).$$

Ainsi

$$\|p - p^h\|_0 = O(h).$$

Depuis Raviart-thomas il existe $\beta > 0$ qui satisfaisant (2.5), donc si l'on substitue μ^h par λ^I dans l'équation (2.9) on trouve l'estimation $\|\lambda - \lambda^h\|_0 = O(h)$.

■

SOLUTION DU PROBLÈME DISCRET

L'objet de cette section est de présenter et analyser un algorithme permettant d'approcher la solution de problème d'obstacle, il s'agit de l'algorithme d'Uzawa qui est effectivement utilisé en pratique pour résoudre sur ordinateur des problèmes concrets d'optimisation. La méthode d'Uzawa est basée à utiliser des projections **très simples** et concerne beaucoup plus la recherche des points selle et elle est bien adaptée pour des ensembles de contraintes définies par des inégalités larges. Considérons le problème de minimisation qu'on a déjà vu dans première chapitre :

$$\min_{F(q) \leq 0} J(q) \tag{3.1}$$

où

$$J(q) = \frac{1}{2}a(q, q) - (\nabla\psi, q) \text{ et } F(q) = \text{div } q + f \leq 0$$

La résolution du (3.1) revient à trouver un point selle (p, λ) du Lagrangien :

$$\mathcal{L}(q, \mu) = J(q) + \mu F(q)$$

sur $V \times \Lambda$.

Le point selle est caractérisé par :

$$\mathcal{L}(p, \mu) \leq \mathcal{L}(p, \lambda) \leq \mathcal{L}(q, \lambda) \quad \forall (q, \mu) \in H(\text{div}, \Omega) \times \Lambda \quad (3.2)$$

Tel que :

$$\Lambda = \{\mu \in L^2(\Omega) : \mu \geq 0\}$$

et par substitution l'expression de \mathcal{L} dans (3.2) on trouve :

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)F(p) &\geq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda \\ (\lambda - \mu)(\lambda - \lambda + \alpha F(p)) &\geq 0 \end{aligned}$$

ceci implique : $\lambda = P_\Lambda(\lambda + \alpha F(p))$

où P_Λ désigne la projection de $L^2(\Omega)$ sur Λ et α est une constante positif.

Au vu de cette propriété et la seconde inégalité dans (3.2), nous pouvons introduire l'algorithme Uzawa à partir d'un élément quelconque $\lambda^0 \in \Lambda$.

on construit (p^n) et (λ^n) déterminer par les itérations :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p^n, \lambda^n) &= \inf_{q \in V} \mathcal{L}(q, \lambda^n) \\ \lambda^{n+1} &= P_\Lambda(\lambda^n + \alpha F(p^n)). \end{aligned}$$

Maintenant on passe à l'étape suivant, détailler l'algorithme d'Uzawa. Mais d'abord, nous allons mettre l'accent sur les détails pour d'obtenir le système des équations et des inégalités à partir la formulation mixte. Suite à notre approche d'approximation dans le chapitre précédent, nous choisissons l'espace de dimension fini $V^h \subset H(\text{div}, \Omega)$ et $Q^h \subset L^2(\Omega)$.

On considère le problème approché :

$$\begin{cases} \langle p^h, q^h \rangle + \langle \lambda^h, \text{div } q^h \rangle = -\langle \psi, \text{div } q^h \rangle & \forall q^h \in V^h \\ \langle \text{div } p^h, \mu^h - \lambda^h \rangle \leq -\langle f, \mu^h - \lambda^h \rangle & \forall \mu^h \in \Lambda^h \end{cases} \quad (3.3)$$

Choix de base pour V^h et Q^h

Soit $\{\phi_1, \dots, \phi_2, \dots, \phi_N\}$, la base de l'espace $V^h \subset \mathbb{RT}_0(\mathcal{T})$.

Encore, on considère $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L\}$ la base de l'espace Q^h L-dimensionnel. Dans notre cas nous choisissons τ_k en fonction caractéristique de l'élément \mathcal{T}_L en \mathcal{T} (constante par morceaux), où $L = \text{card}(\mathcal{T})$.

Systeme d'équation et d'inégalité

Après avoir les bases de nos espaces, alors l'équation (3.3) peut être écrite comme suivante :

$$\langle p^h, \phi^h \rangle + \langle \lambda^h, \text{div } \phi^h \rangle = - \langle \psi, \text{div } \phi^h \rangle \quad \forall \phi^h \in V^h$$

Chaque $p^h \in V^h$ et $\mu^h \in Q^h$ peut être représenté uniquement par des vecteurs $p = (p_k), p_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda = (\lambda_i), \lambda_i \in \mathbb{R}$, respectivement. Ainsi, nous pouvons faire un développement en série de p^h et λ^h en termes de ϕ_k et τ_j tel que :

$$p^h = \sum_{k=1}^N p_k \phi_k \quad (\phi_k \in V^h) \quad \text{et} \quad \lambda^h = \sum_{j=1}^L \lambda_j \tau_j.$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^N p_k \int_{\Omega} \phi_k \phi_i dx + \sum_{j=1}^L \lambda_j \int_{\Omega} \tau_j \text{div } \phi_i dx = - \int_{\Omega} \psi \text{div } \phi_i dx. \quad (3.4)$$

Si on représente dans cette expression par :

g le vecteur de coté adroite tel que :

$$g = (g_i), \quad (g_i) = - \int_{\Omega} \psi \text{div } \phi_i dx,$$

et les matrices A, B^T tel que :

$$A = (A_{ik}), \quad A_{ik} = \int_{\Omega} \phi_k \phi_i dx,$$

$$B^T = (B_{ij}^T), \quad B_{ij}^T = \int_{\Omega} \tau_j \nabla \cdot \phi_i dx.$$

Nous pouvons enfin jeter (3.4) dans un système d'équations linéaires

$$Ap + B^T \lambda := g$$

les même étapes pour l'inégalité de problème (3.3), mais on prend que

$$\bar{f} = (f_i), \quad (f_i) = \int_{\Omega} f \tau_j dx,$$

Et le vecteur μ tel que :

$$\mu = (\mu_k), \quad (\mu_k) \geq 0,$$

On obtient :

$$(\mu - \lambda)^T Bp \leq (\mu - \lambda)^T \bar{f}$$

Rassembler toutes les relations que nous avons recueillies jusqu'à présent dans ce paragraphe, nous pouvons voir que la formulation mixte discrète peut être réécrite comme un système d'équations et inégalités pour $p \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}^L$, $\lambda \in \Lambda$

$$Ap + B^T \lambda := g \tag{3.5}$$

$$(\mu - \lambda)^T Bp \leq (\mu - \lambda)^T \bar{f} \quad \forall \mu \in \Lambda \tag{3.6}$$

Où

$$\Lambda = \{\mu : \mu_k \geq 0, \quad k \leq L\}.$$

En utilisant l'équation (3.5) on obtient :

$$p = -A^{-1}(B^T \lambda - g).$$

Insérer ceci dans notre système inégalité (3.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} -(\mu - \lambda)^T B A^{-1} (B^T \lambda - g) &\leq (\mu - \lambda)^T \bar{f} \\ -(\mu - \lambda)^T B A^{-1} B^T \lambda &\leq -(\mu - \lambda)^T (\bar{f} - B A^{-1} g). \end{aligned}$$

Cela nous laisse notre problème seulement avec un problème de λ .

Maintenant, on prend le complément de Shur : $S = BA^{-1}B^T$ et le coté droite $h = BA^{-1}g - \bar{f}$, on obtient :

$$(\mu - \lambda)^T(S\lambda - h) \geq 0. \quad (3.7)$$

Il s'agit que A est symétrique, définit positive et le rang de $B = L$, donc le complément de Shur S est aussi symétrique, définit positive, il existe s_1, s_2 tel que :

$$\langle S\mu, \mu \rangle \geq s_1\|\mu\|^2, \quad \langle S\mu, \lambda \rangle \leq s_2\|\mu\|\|\lambda\|$$

l'équation (3.7) est équivalent à le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{F}(\lambda) = \min_{\mu \in \Lambda} \mathcal{F}(\mu) \quad (3.8)$$

où

$$\mathcal{F}(\mu) = \frac{1}{2}\mu^T S\mu - h^t \mu.$$

le gradient de \mathcal{F} est : $\nabla \mathcal{F} = S\mu - \mu$.

Dans le reste on présent l'algorithme d'Uzawa pour minimiser la fonction \mathcal{F} sur Λ .

Une fois on a calculé λ par un tel procédé, on peut alors déterminer u par : $u = \lambda + \psi$. dans le suivant, nous aurons besoin à l'opérateur de projection P_Λ , qu'il s'agit de R^L sur Λ . Pour $\mu \in R^L$, $P_\Lambda(\mu)$ est le projection de μ sur le convexe fermé dans la norme L^2 défini par :

$$(\mu, \lambda)_M = (M\mu, \lambda),$$

où

$$M = (M_{i,j}), \quad M_{i,j} = \int_{\Omega} \tau_i \tau_j \, dx.$$

et :

$$\|\lambda\|_M = \sqrt{(M\lambda, \lambda)}$$

Lemme 3.0.4 les composants de $P_\Lambda(\mu)$ sont donnée par :

$$P_\Lambda(\mu)_k = \max(\mu_k, 0)$$

Preuve. Voire[5] ■

3.1 MÉTHODE D'UZAWA

La méthode d'Uzawa consiste à découpler la résolution du système (3.5 -3.6) en deux étapes : en variable primale p , puis en variable dual λ . En commençant par une certaine valeur initiale λ_0 , λ peut être calculée à partir du problème de minimisation sous contrainte (3.8), mais p à partir l'équation ; $p = -A^{-1}(B^T \lambda - g)$.

Donc la procédé classique de ce type est l'algorithme d'Uzawa suivant :

Algorithm 1 d'Uzawa

1. donner une valeur initial λ^0
 2. $K = 0$
 3. répéter :
 4. calculer $p^{(k+1)}$ à partir de l'équation :
 $Ap^{(k+1)} + B^T \lambda^{(k)} := g$
 5. $\lambda_*^{(k+1)} := \lambda^k + \alpha M^{-1}(Bp^{(k+1)} - \bar{f})$
 { α étant paramètre positif fixé }
 6. prend $\lambda^{(k+1)}$ comme projection de $\lambda_*^{(k+1)}$ sur Λ :
 $\lambda^{(k+1)} := P_\Lambda(\lambda_*^{(k+1)})$
 7. $k = k + 1$
 8. jus qu'à : $\{\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\|/\|P^{(k+1)}\|, \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|/\|\lambda^{(k+1)}\|\} \leq \varepsilon$
-

Pour un choix adapté de α on peut montrer que la séquence $(p^{(k)}, \lambda^{(k)})$ converge à (p, λ) du problème d'obstacle réduite (3.5-3.6). En utilisant le complément de Schur S et le côté droit h , nous pouvons éliminer les $p^{(k+1)}$ de la construction de $\lambda^{(k+1)}$. Cela veut dire que l'on calcule $\lambda^{(k+1)}$ directement à partir de $\lambda^{(k)}$, sans trouver $p^{(k+1)}$. À partir de la première étape de la k ème itération, on obtient :

$$p^{(k+1)} = -A^{-1}(B^T \lambda^{(k)} - g).$$

Insérer ceci dans la formule de $\lambda_*^{(k+1)}$, on trouve :

$$\lambda_*^{(k+1)} = (\lambda^{(k)} + \alpha(-BA^{-1}B^T \lambda^{(k)} + BA^{-1}g - f)) \quad (3.9)$$

$$= \lambda^{(k)} - \alpha(s\lambda^{(k)} - h). \quad (3.10)$$

On peut donc formuler l'algorithme 1, tel que à chaque itération, on calcule $\lambda^{(k+1)}$ à partir de $\lambda^{(k)}$, en deux étapes, alors on obtient l'algorithme d'Uzawa suivant :

Algorithm 2 d'Uzawa

1. donner la valeur initial λ^0
 2. $K = 0$
 3. répéter :
 4. $\lambda_*^{(k+1)} := \lambda^{(k)} - \alpha M^{-1}(S\lambda^{(k)} - h)$
 { α étant paramètre positif fixé }
 5. prend $\lambda^{(k+1)}$ comme le projection de $\lambda_*^{(k+1)}$ sur Λ :
 $\lambda^{(k+1)} := P_\Lambda(\lambda_*^{(k+1)})$
 6. $k = k + 1$
 7. jusqu'à $\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| \leq \varepsilon \|\lambda^{k+1}\|$
 8. $p^{k+1} = -A^{-1}(B^T \lambda^{k+1} - f)$
-

3.1.1 La convergence de la méthode d'Uzawa

Le choix du paramètre α détermine la convergence de la séquence $(p^{(k)}, \lambda^{(k)})$ à (p, λ) du problème d'obstacle réduite (3.5-3.6). De bons choix du scalaire α sont déterminés par l'observation de l'équation $S\lambda = h$. Notre objectif maintenant est d'analyser la convergence de la méthode d'Uzawa.

Théorème 3.1.1 *Soient A, B sont des matrices de problème (3.5) , et (p, λ) la solution du système (3.5-3.6). Soit s_1, s_2 désignent les valeurs propres les plus petits et les plus grands de $M^{-1}S$, et soit $(p^{(k)}, \lambda^{(k)})$ est défini par la méthode de Uzawa. Alors il existe une constante positive $\bar{\alpha} > 0$ tel que pour chaque choix $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ il vérifie que :*

$$p^k \rightarrow p, \quad \lambda^k \rightarrow \lambda.$$

Preuve. à partir de l'algorithme 1 on a :

$$\begin{aligned} \lambda_*^{(k+1)} &:= \lambda^{(k)} - \alpha M^{-1}(S\lambda^{(k)} - h) \\ &= (I - \alpha M^{-1}S)\lambda^{(k)} + \alpha M^{-1}h \end{aligned}$$

donc $\lambda^{(k+1)} := P_\Lambda((I - \alpha M^{-1}S)\lambda^{(k)} + \alpha M^{-1}h)$

Aussi, si $\lambda \in \Lambda$ la solution de problème mixte, alors on a :

$$\lambda := P_\Lambda((I - \alpha M^{-1}S)\lambda + \alpha M^{-1}h)$$

donc on trouve l'erreur :

$$\lambda^{(k+1)} - \lambda = P_\Lambda((I - \alpha M^{-1}S)\lambda^{(k)} + \alpha M^{-1}h) - P_\Lambda((I - \alpha M^{-1}S)\lambda + \alpha M^{-1}h)$$

si cet projection est contractent (ou lipschitzien avec un constant 1) on obtient :

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda\|_M \leq \|I - \alpha M^{-1}S\|_M \|\lambda^{(k)} - \lambda\|_M. \quad (3.11)$$

on note $\|\lambda^{(k+1)} - \lambda\|_M$ par r^{k+1} et $\|\lambda^{(k)} - \lambda\|_M$ par r^k , alors l'erreur satisfait :

$$r^{k+1} \leq \|I - \alpha M^{-1}S\|_M r^k$$

Par conséquent :

$$(r^{k+1}, r^{k+1}) \leq ((I - \alpha M^{-1}S)r^k, (I - \alpha M^{-1}S)r^k).$$

Puisque S est symétrique, il s'ensuit que $\rho(I - \alpha M^{-1}S) = \|I - \alpha M^{-1}S\|_M$, de sorte que la norme d'erreur satisfait :

$$\|r^{k+1}\|_M \leq \rho(I - \alpha M^{-1}S) \|r^k\|_M.$$

maintenant si s_1 et s_2 sont les plus grand et plus petit valeurs propres de $M^{-1}S$ respectivement, et soit ν_i noté comme valeur propre de $I - \alpha M^{-1}S$, alors :

$$1 - \alpha s_2 \leq \nu_i \leq 1 - \alpha s_1.$$

et la méthode d'Uzawa converge à condition $\rho(I - \alpha M^{-1}S) \leq 1$, et $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 2/s_2$.

Comme p^k dépend en continu sur λ^k , nous pouvons conclure que $p^k \rightarrow p$. ■

3.2 MÉTHODE D'UZAWA NON-EXACTE

Chaque étape de l'algorithme d'Uzawa nécessite la résolution d'un système linéaire avec matrice inverse A^{-1} , ceci est une opération coûteuse pour de nombreuses applications. Uzawa non exacte remplace l'action de A^{-1} par un préconditionneur \hat{A} . Ce préconditionneur est un opérateur linéaire, $\hat{A} : V \rightarrow V$, défini positif.

Notre but est de montrer que si le système (3.5-3.6) n'est pas résolu exactement, alors on définit l'algorithme Uzawa non exacte qui peut également être convergent.

Algorithm 3 d'Uzawa non exacte

1. donner la valeur initiale $\lambda^{(0)} \in \Lambda, p^{(0)} \in V$
 2. $K = 0$
 3. répéter :
 4. calculer $p^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}$ à partir des équations :

$$Ap^{(k+1)} = p^{(k)} + \hat{A}^{-1}(g - Ap^{(k)} - B^T \lambda^{(0)})$$
 5. $\lambda_*^{(k+1)} := \lambda^k - \alpha M^{-1}(S\lambda^{(k)} - h)$
 { α est un paramètre positif fixé }
 6. prend $\lambda^{(k+1)}$ comme la projection de $\lambda_*^{(k+1)}$ sur Λ :

$$\lambda^{(k+1)} := P_\Lambda(\lambda_*^{(k+1)})$$
 7. $k = k + 1$
 8. jusqu'à $\max \{ \|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| / \|P^{(k+1)}\|, \|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\| / \|\lambda^{(k+1)}\| \} \leq \epsilon$
-

Une seule étape de l'algorithme d'Uzawa non exacte implique une évaluation de chacun des opérateurs A, B, B^T, \hat{A}^{-1} et M^{-1} .

Maintenant on parle un peu sur la convergence de cet algorithme, dans le cas d'équation.

Théorème 3.2.1 *On suppose que \hat{A} et \hat{B} , les préconditionner d'algorithme d'Uzawa non exacte sont linéaires, symétrique et défini positif, alors ce algorithme converge à condition que les préconditionner satisfont :*

$\hat{A} - 2A - B^T \hat{B}^{-1} B$ est défini positif.

Preuve. voir [8] ■

Maintenant, on peut donner un exemple où les systèmes (3.5-3.6) de problème d'obstacle sont résolus à l'aide du préconditionnement de Richardson, donc la méthode d'Uzawa non exacte précédente peut être considérée comme méthode de Richardson préconditionnée ;

$$\hat{\mathcal{K}}_1 \begin{pmatrix} p_{k+1} - p_k \\ \lambda_*(k+1) - \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} - \mathcal{K} \begin{pmatrix} p_k \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

où la projection supplémentaire pour $\lambda^{(k+1)}$ définie comme :

$$\lambda^{(k+1)} := P_\Lambda(\lambda_*^{(k+1)}).$$

Avec un préconditionneur

$$\hat{\mathcal{K}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ B & -\hat{S} \end{pmatrix}$$

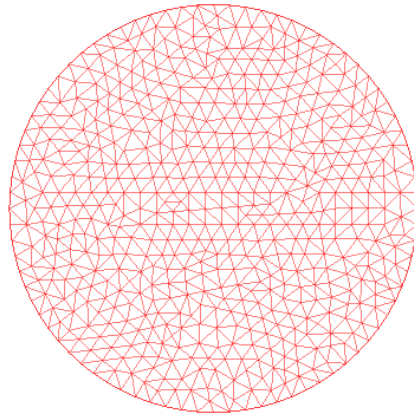
et la matrice \mathcal{K} :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

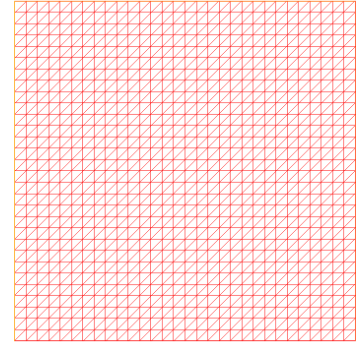
TESTS NUMÉRIQUES SOUS FREEFEM++

Dans ce e chapitre, on a consacré à analyser numériquement le problème d'obstacle, cet analyse est illustrée et complétée à l'aide de plusieurs exemples en utilisant le logiciel Freefem++, ce dernier est un environnement de développement intégré dédié à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles en dimension 2 et 3, son langage ergonomique permet à l'utilisateur d'exploiter facilement ses nombreux outils de création de maillages, de résolution de systèmes linéaires, ainsi que ses bibliothèques d'éléments finis,...etc.

Dans ce chapitre, nous attachons à l'évaluation de l'efficacité des estimations proposé dans le chapitre(2). Pour cela, nous résolvons sous Freefem++ le problème d'obstacle par l'algorithme d'Uzawa. D'abord on discrétise ce problème par une triangulation de maillage Ω , nous utilisons des maillage structuré ou non structuré (regarde le figure(4.1)).



(a) Maillage non structuré



(b) Maillage structuré

FIGURE 4.1 – les maillage de Ω

De plus, à partir les fonctions de Freefem++, on peut insérer plusieurs données, comme le type de maillage, le type d'élément finis...etc, avec le détaille d'algorithme d'Uzawa. Ensuite, pour analyser la convergence de ce méthode, on fait des changements sur les données et les conditions, par exemple (les triangle de maillage, le paramètre α de cet algorithme, la valeur initial de λ).

Maintenant, on donne quelque exemples représente le problème d'obstacle avec ses schémas numériques (la déformation finale du membrane qu'il est attachée à une obstacle).

Voici la formulation classique de problème d'obstacle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u \geq f & in\Omega \\ u \geq \psi & in\Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 & in\Omega \end{array} \right.$$

on choisit le maillage Ω une disque tel que :

$$\Omega = \{(x, u) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dans le tableau suivant, on présente quelques exemples sur le problème décrit précédemment :

| Figure | Obstacle | f | g |
|--------|---------------------------|----|-------------------|
| a | $\psi = -x^2 - y^2 + 0.3$ | 0 | 0 |
| b | $\psi = -x^2 - y^2 + 0.3$ | -4 | 0.7 |
| c | $\psi = 0.2$ | -4 | $x^2 + y^2 + 0.3$ |
| d | $\psi = -x^2$ | -4 | 0 |

Les schémas numériques de ce tableau illustrés par les figures (4.2).

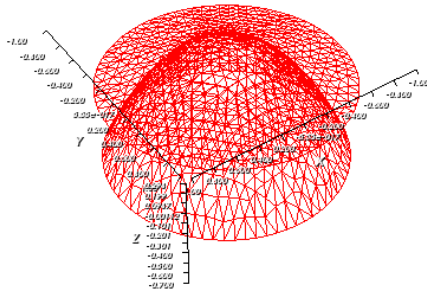


Figure: (a)

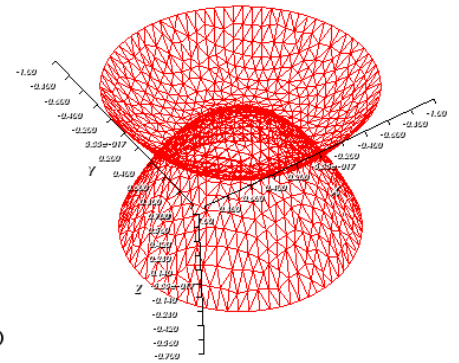


Figure: (b)

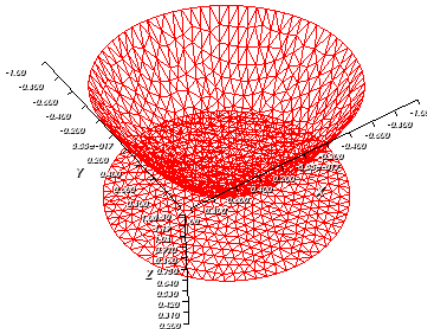


Figure: (c)

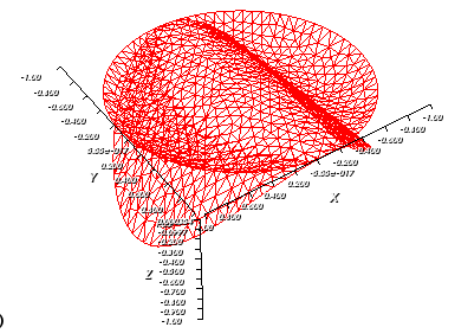


Figure: (d)

FIGURE 4.2 – Membrane sur un obstacle (des différents cas)

4.1 TRAITEMENT D'UN EXEMPLE

Maintenant on analyse la convergence de la méthode d'Uzawa et les estimations d'erreur sur un exemple où la solution exacte est connue. On considère l'exemple (b) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u \geq -4 & \text{in } \Omega \\ u \geq \psi, & \text{in } \Omega \\ (-\Delta u + 4)(u - \psi) = 0 & \text{in } \Omega. \\ u = 0.7 & \text{in } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Où : $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\psi = -x^2 - y^2 + 0.3$$

On calcule la solution analytique, on pose : $u = u(r)$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$$

si $u \geq \psi$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -4 \\ u_{rr} + \frac{1}{r}u_r &= 4 \\ u(r) &= r^2 + c_1 \ln(r) + c_2 \end{aligned}$$

sinon $u = \psi$: (par exemple dans position a)

$$u(a) = \psi(a), \quad u'(a) = \psi'(a), \quad u(1) = 0.7$$

on obtient si : $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} a^2 + c_1 \ln a + c_2 &= -a^2 + 0.3, \\ 2a + \frac{c_1}{a} &= -2a, \end{aligned}$$

donc $c_1 = -4a^2$ et $c_2 = -2a^2 + 0.3 + 4a^2 \ln a$,

on obtient : $u(r) = r^2 - 4a^2 \ln r - 2a^2 + 0.3 + 4a^2 \ln a$

et par la relation :

$$u(1) = 0.7 \implies c_2 = 0.3$$

on obtient :

$$-2a^2 + 0.3 + 4a^2 \ln a = -0.3 \quad (4.2)$$

si on résoudre analytiquement (4.2), on trouve que $a = 0.2953$.

ioip et si on dessiner (4.2) sous Matlab, on remarque que a est très proche à 0.3, voici le figure(4.3) :

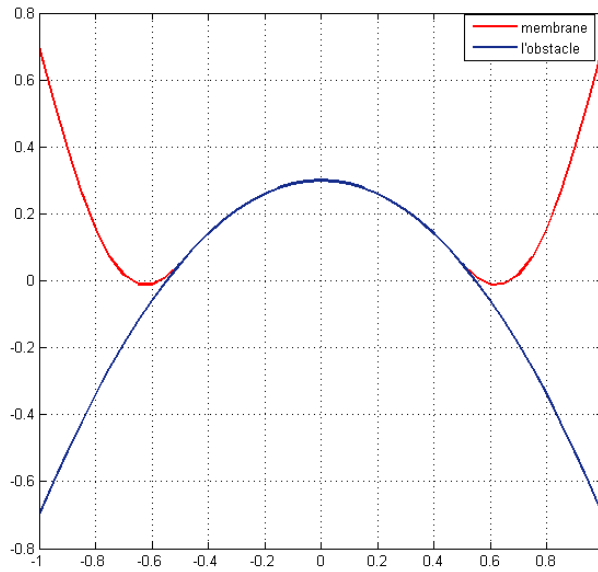


FIGURE 4.3 – Localisation de frontière libre

Maintenant pour comparer la solution numérique et la solution analytique, voici le figure (4.4), mais d'abord on définit la solution exacte tel que :

$$u(x, y) = \begin{cases} 0.3 - x^2 - y^2 & \text{on } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.2953 \\ x^2 + y^2 - 0.3 - 0.3489166809 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{on } 0.2953 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

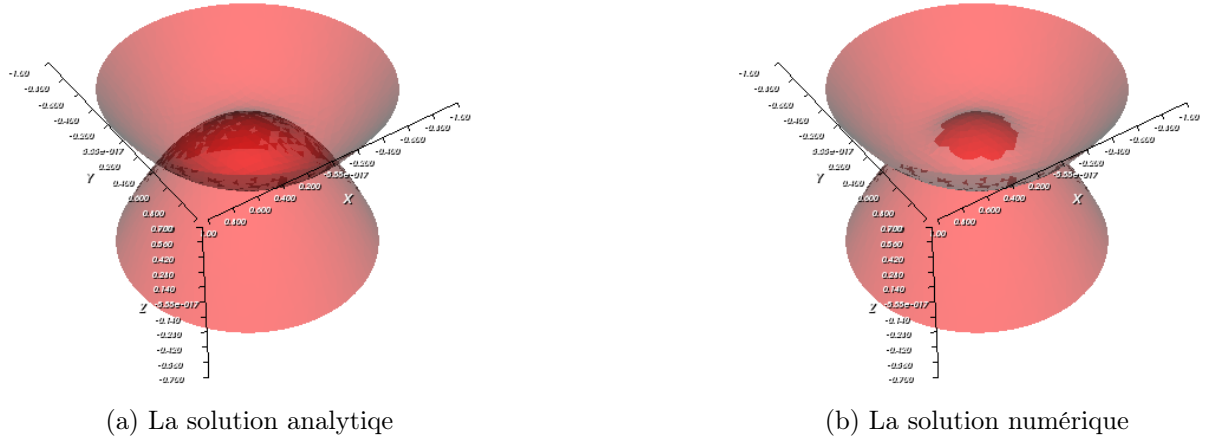


FIGURE 4.4 – La comparaison entre la solution analytique et la solution numérique

D'autre part, on présente les résultats numériques des estimations d'erreur pour le problème d'obstacle avec incrémentation des discrétisations de maillage Ω , puis on fait changement sur l'ordre et le type des éléments finis.

Si on considère les éléments finis de Lagrange, les résultats sont représentés dans le tableau (4.1) suivant :

| l'ordre | nb des triangles | $\ u - u_h\ _0$ |
|----------------|------------------|-----------------|
| \mathbb{P}_1 | 444 | 0.015107 |
| \mathbb{P}_1 | 1778 | 0.004398 |
| \mathbb{P}_2 | 444 | 0.0046998 |
| \mathbb{P}_2 | 1778 | 0.00126844 |

TABLE 4.1 – Triangulation de maillage et l'estimation d'erreur

Si on considère les éléments finis mixtes de Raviart-Thomas \mathbb{RT}_0 et \mathbb{RT}_1 , on trouve les résultats dans le tableau suivant :

| l'ordre | nb des tringles | $\ u - u_h\ _0$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| \mathbb{RT}_0 | 4999 | 0.0351343 |
| \mathbb{RT}_0 | 3501 | 0.0162937 |
| \mathbb{RT}_1 | 4999 | 0.00278187 |
| \mathbb{RT}_1 | 3501 | 0.00050196 |

TABLE 4.2 – L'estimation d'erreur avec les élément finis de \mathbb{RT}_0

Maintenant, on étudie la convergence de méthode d'Uzawa :
à chaque fois, on modifié la valeur de α (paramètre d'Uzawa), puis on reporte dans le tableau suivant le nombre des itérations obtenu pour la convergence de λ^k vers λ :

| les itérations | $\ u - u_h\ _0$ | $\ \lambda - \lambda_h\ _0$ |
|----------------|-----------------|-----------------------------|
| 100 | 0.00217278 | 0.002879 |
| 460 | 0.00195666 | 0.000539344 |
| 855 | 0.00188979 | 0.000191778 |
| 2100 | 0.00185917 | $1.46544e - 005$ |
| 3492 | 0.00181195 | $9.9898e - 007$ |

TABLE 4.3 – L'estimation d'erreur pour le problème d'obstacle

| α | $\ u - u_h\ _0$ |
|----------|-----------------|
| 0.9 | 0.00217278 |
| 1.2 | 0.00195666 |
| 1.5 | 0.00188979 |
| 1.7 | 0.00185917 |
| 1.9 | 0.00181195 |

TABLE 4.4 – La convergence de méthode d'Uzawa

CONCLUSION

Ils existent de nombreux problèmes importants liés à la physique, ces problèmes peuvent être formulés sous forme d'une inéquation variationnelle. La manière la plus efficace et robuste pour résoudre ce problème de frontière libre était la grande motivation de notre étude.

Dans ce mémoire, nous avons dérivé un simple modèle mathématique de minimisation sous contrainte sur un ensemble convexe fermé à partir d'un exemple physique de problème d'obstacle. En plus, nous avons montré que ce problème de minimisation est équivalent à un problème primal. Ensuite, par la méthode mixte de Raviart-Thomas, sous les hypothèses de régularité élevée de notre solution, nous avons dérivé encore une nouvelle formulation variationnelle primale et une formulation mixte équivalente aux deux inéquations variationnelles précédentes. L'existence et l'unicité de ces formulations ont été encore établies, D'ailleurs, afin de calculer effectivement la déformation de la membrane, nous avons discrétisé le problème mixte. Dans le cadre discret, nous avons montré qu'il existe une solution unique au problème discret puisque la

condition **inf-sup** est satisfaite, puis nous avons proposé l'algorithme Uzawa en montrant leur convergence linéaire, pour résoudre les inégalités variationnelles induites par le problème discret.

Dans le dernier chapitre, nous avons remarqué que la convergence est très lente, d'après l'implémentation numérique du problème d'obstacle sous Freefem++, car elle utilise des directions de plus grande pente, et la convergence dépend du paramètre de discrétisation de maillage Ω , par conséquent, nous avons été introduit à un nouvel algorithme de type Uzawa non-exacte. En plus, nous avons établi numériquement la validité de la théorie estimation d'erreurs qui est révélée être plus nette.

Comme perspective, nous présentons une suggestion possible pour l'extension de ce travail, en remplaçant l'exact inverse de A par une approximative évaluation de A^{-1} ou un préconditionneur pour sa partie symétrique. Nous espérons que cette approche peut produire une méthode numérique robuste pour le calcul de la solution numérique du problème d'obstacle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.Allaire ; Analyse numérique et optimisation, Paris.
- [2] Brezzi .H.R, G,Stampacchia ; Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, France : Bull.Soc.Math, 1968.
- [3] Brézis.H ; Analyse fonctionnelle théories et application, Dunod 1999.
- [4] Caffarlli.Luis.A ; The obstacle problem, Departement of Mthematics and TICAM,PISA-1998.
- [5] Ciarlet.P.G ; the finite element method for elliptic poblems.North-Holland, Amester-dam(1978).
- [6] Dold.A and B ; Eckmann. Lecture Notes in Mathematics. Springer verlag. Berlin Heidelberg NewY.
- [7] Falk.R.S ; Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities, Math.Comp,(Oct., 1974).
- [8] Howard C. Elman et Gene H. Golub ; Inexact and preconditioned uzawa algorithms for saddle point problems, SIAM J. Numer. Anal. 31 (1994).

- [9] Gatica.Gaberial N ; A simple introduction to the Mixed finite element Method, Springer.
- [10] Glowinski.R ; Numerical Methods For Non-Linear variational Problems, Bombay 1980.
- [11] Le Dret.H ; Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.Université Pierre et Marie Curie France.
- [12] Lions.J. L, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Paris, Dunod-Gauthier-Viltars 1969.
- [13] Raviart P.A, M.Thomas.J A mixed finite element method for second order elliptic problems. in Mathematical aspects of finite element methods, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
- [14] Rodrigues.J.F ; Obstacle problem in Mathematical physics,North-Holland.

ملخص:

في هذا البحث نقوم بدراسة مشكلة العقبة وحدودها الحرة. وباستعمال طريقة العناصر المنتهية لـ Raviart-Thomas ندرس الوجود والوحدانية للحل وتقديرات الخطأ. ثم نتعرض لخوارزمية Uzawa لحل مشكلة العقبة مع دراسة تقاربها وعرض النتائج التطبيقية التي توضح النتائج النظرية المدروسة.

الكلمات المفتاحية: الصيغة المختلطة, عنصر منتهي, خوارزمية Uzawa .

Résumé

Dans ce papier nous étudions le problème d'obstacle et le problème de frontière libre. Nous discrétisons le problème avec des éléments de Raviart-Thomas. L'existence et l'unicité de solutions des problèmes discrets sont étudiés et les évaluations d'erreur sont obtenues. Nous développons l'algorithme d'Uzawa, sa convergence a été analysée et nous présentons les résultats numériques qui sont d'accord avec des résultats théoriques.

Mots-clés : la formulation mixte, élément finit, algorithme d'Uzawa.

Abstract :

In this paper we study the obstacle problem and a free boundary problem. We discretize the problem with Raviart-Thomas elements. Existence and uniqueness of solutions to the discrete problems are studied and error estimates are obtained. We develop the Uzawa algorithm, her convergence was analyzed and we display numerical results that agree with theoretical results.

Keywords : the mixte formulation, finit element, Uzawa algorithm.