UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :Tebib Hawa

Thème

Modélisation du problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour les coques peu-profonde piézoélectriques

Soutenu publiquement le :

Devant le jury composé de :

Meflah Mabrouk	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Abdallah Bensayh	M.C.B. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Djamel Ahmed Chacha	Pr. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur
Med El-hadi-Mezabia	M.A.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Co- Rapporteur

Année universitaire :2015/2016

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mon cher père.

A ma chère mère.

A mes chères sœurs.

A ma tante Naima et mes oncles Samir et Messaoud.

A tous mes amies.

A tous les professeurs de l'univercité de Kasdi merbah Ouargla.

Remerciement

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu le tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon encadreur, **Pr CHACHA Djamel Ahmed**, pour son aide et sa diponiilité. Je suis ravie d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de ce mémoire. J' espère avoir été digne de la confiance qu'il m'avait accordée et que ce travail soit à la hauteur de ses espérances. Quoi qu'il soit, j' ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honoré de l' avoir eu comme encadreur. Je remercie également monsieur **MZABIA Mouhamed ElHadi** pour son encadrement . je remercie monsieur **Meflah Mabrouk Maitre de Conférences A** du Département de mathématiques / Université KasdiMerbah Ouargla d'avoir accepté de présider ce jury. Mes remerciements s'adressent également à mes sieur **Ghezal Abderrazek Maitre de Conférences B et Abdallah Bensayh Maitres de Conférences B** du Département de mathématiques / Université KasdiMerbah Ouargla d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université KASDI Merbah-Ouargla Pour ces efforts puissants.

Merci à tous ce qui contribué de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Liste des tableaux

Notations

On utilise les conventions de notations suivantes : les indices ou exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$ tandis que les indices grecs prennent, à l'exception de ε , leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2\}$. La convention des indices répétés (muets) est adoptée.

➤$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée par rapport à x_i.

➤ $\partial_i^\varepsilon = \dfrac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$ la dérivée par rapport à x_i^ε .

➤$\widehat{\partial}_i^\varepsilon = \dfrac{\partial}{\partial \widehat{x}_i^\varepsilon}$ la dérivée par rapport à $\widehat{x}_i^\varepsilon$.

➤ $\hat{n}^\varepsilon$: la normale unitaire extérieure.

➤ $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}_i^\varepsilon)$vecteur de composantes $\hat{u}_i^\varepsilon$.

➤ $\hat{u}_N^\varepsilon = \hat{u}^\varepsilon.\hat{n}^\varepsilon$: la composante normale du déplacement.

➤$\hat{u}^\varepsilon = (\hat{u}_T^\varepsilon, \hat{u}_N^\varepsilon), \hat{u}_T^\varepsilon$: la composante tangentielle du déplacement.

➤$u_{,i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

➤$u_{,ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

➤ $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

➤$\ddot{u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

➤$\hat{G}_N^\varepsilon$: la force de contact.

➤$\hat{G}_T^{\varepsilon}$: la force de frottement.

➤(v_α) : le vecteur normale unitaire extérieure le long de γ.

➤(τ_α) : le vecteur tangente unitaire le long de la frontière γ, relié par $\tau_1 = -v_2$ et $\tau_2 = v_1$.

➤ $\partial_v = v_\alpha \partial_\alpha$: l'opérateur de la dérivée de la normale extérieure.

➤ $\partial_\tau = \tau_\alpha \partial_\alpha$: l'opérateur de la dérivée tangentielle.

➤$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx.

➤$H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev d'ordre 1.

Introduction

Les matériaux piézoélectriques sont couramment utilisés aujourd'hui, par exemple : des pastilles piézoélectrique collées à des structures servent d'actionneurs (effet direct) détecte les déformations, ou captures (effet inverse) servent pour déformer le matériau. Parmi les applications de la piézoélectricité,

-le contrôle de vibration des structures élastiques(plaque,coque...)

-le contrôle de forme(ailes d'avion, miroirs de télescopes, ...)

-la conception d'organes artificiels en biomécanique .

Une première application de la piézoélectricité est due à Paul Langevin lors de la première guerre mondiale, Langevin eut l'idée d'utiliser des plaques de quartz piézoélectriques pour l'émission et la réception d'ondes sonares sous marines de haute fréquences.

Depuis lors, le quartz est largement utilisé dans le domaine de la télécommunication en tant que filtre, contrôleur ou générateur.

Notre mémoire est composé de deux chapitres .

Le premier chapitre présente un aperçu sur les équations de la piézoélectricité linéaire ainsi que la formulation mathématique.

Le deuxième chapitre concerne l'analyse asymptotique du problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour une coque mince piézoélectrique non homogène et anisotrope .

On commence d'abord par la mise en équation du problème ainsi sa formulation variationnelle. En suite, on procède à l'application du processus de l'analyse asymptotique comme suivant :

- Mise à l'échelle du domaine .
- Mise à l'échelle des inconnues et forces appliquées.
- Développements asymptotiques des inconnues.
- Identification des problèmes aux ordres successifs.
- Étude de ces problèmes.

Chapitre

La théorie linéaire de la piézoélectricité

1.1 Définitions et applications

1.1.1 Matériaux piézoélectriques

La piézoélectricité (du grec «piézein» presser, appuyer) est la propriété possédé par certains matériaux (naturels ou synthétique) qui se polarisent électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique, ou inversement, se déforment sous l'action d'un champ électrique.

La piézoélectricité est donc un phénomène électromécanique qui couple les champs élastique et électrique. Ce phénomène a été découvert et expliqué (par expérimentation sur le quartz et le sel de Rochelle) par les frères Jacques et Pierre Curie qui ont annoncé leur découverte le 2 aout 1880 à l'académie française des sciences.

Il existe beaucoup de matériaux naturels et synthétiques présentant les propriétés piézoélectriques, par exemple

- Cristaux naturels : quartz, sel de Rochelle, phosphate d'ammonium, ...
- Cristaux liquides
- Matériaux non cristallins : caoutchouc, paraffine, verre, ...
- Textures : bois, os, ...
- Matériaux piézoélectrique synthétiques : piézoceramics, cristallines, polymère piézoélectrique

1.1.2 Effet piézoélectrique

L'effet piézoélectrique se décompose en deux types :

Effet direct C'est la propriété de certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une force ou contrainte mécanique : des charges apparaissent sur les faces du matériau, c-à-d :

force $\Longrightarrow$ déformation $\Longrightarrow$ tension électrique.

Effet inverse Inversement le matériau se déforme lorsque on lui applique une tension électrique, c-à-d :

tension électrique $\Longrightarrow$ déformation.

1.1.3 Applications

L'effet piézo-électrique se trouve dans un très grand nombre d'applications dans la vie quotidienne et dans l'industrie :

- Le briquet : dans un briquet, la force exercée sur le cristal piézo-électrique produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles.
- Le Capteur de pression piézoélectrique : est une application industrielle : ils sont notamment utilisés pour l'automobile (mesure de la pression des pneus), l'aéronautique (mesure de la pression dans les tuyères), ainsi que pour les mesures de niveau.
- Les Moteurs et actionneurs piézo-électriques utilisent l'effet inverse : transformation de la tension appliquée en déplacement. On les trouve par exemple dans les autofocus d'appareil photo, dans les mécanismes de vitres électriques des voitures.
- La piézo-électricité est également en acoustique pour transformer des ondes acoustiques en signal électrique : microphones, haut-parleurs

1.2 la modélisation mathématique de la piézoélectricité

1.2.1 la conservation de l'énergie

Le principe de la conservation de l'énergie pour un milieu piézoélectrique, montre que pour tout domaine $\Omega \subset R^3$, borné, de frontière Γ, et de normale unitaire extérieure n, le taux d'accroissement de l'énergie (cinétique+interne) est égale au taux de travail de tractions surfacique agissant sur Γ moins le flux de l'énergie électrique sur Γ. L'équation suivante traduit ce principe :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(\frac{1}{2}\varrho\dot{u}_j\dot{u}_j + U)d\Omega = \int_{\Gamma}(t_j\dot{u}_j - n_j\varphi\dot{D}_j)d\Gamma \tag{1.1}$$

avec ϱ désigne la densité de masse, U l'énergie interne, t_j les tractions surfacique, φ le potentiel électrique et D le vecteur de déplacement électrique. Dans ce que suit on aura besoin des équations d'équilibre du milieu suivantes :
L'équation du mouvement, avec f_i est une force morte,

$$\Sigma_{ij,j} + f_i = \varrho\ddot{u}_i. \tag{1.2}$$

$\Sigma = (\Sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes, $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$.

L'équation de charge électrostatiques,

$$D_{i,i} = q. \tag{1.3}$$

q : la densité de charge libre du corps (souvent nulle).
La relation entre le potentiel électrique et le champ électrique,

$$E_k = -\varphi_{,k}. \tag{1.4}$$

Le tenseur des déformations linéarisées

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{1.5}$$

Appliquons le théorème de divergence à (1,1), on obtient (Ω arbitraire) :

$$\begin{aligned}\varrho\dot{u}_j\ddot{u}_j + \dot{U} &= \Sigma_{ij,j}\dot{u}_i + \Sigma_{ij}\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dot{D}_i - \varphi.\frac{\partial \dot{D}_i}{\partial x_i}\\ \Rightarrow \dot{U} &= (\Sigma_{ij,j} - \varrho\ddot{u}_i)\dot{u}_i + \Sigma_{ij}\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \varphi\frac{\partial \dot{D}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\dot{D}_i\\ &= f.\dot{u} + \Sigma_{ij}.\dot{e}_{ij}(u) - \varphi\dot{q} + E_i\dot{D}_i.\end{aligned}$$

Donc

$$\dot{U} = f.\dot{u} + \Sigma_{ij}.\dot{e}_{ij}(u) - \varphi\dot{q} + E_i\dot{D}_i. \tag{1.6}$$

L'équation (1,6) s'appelle la première loi thermodynamique du milieu piézoélectrique, où $\dot{e}_{ij}(u) = e_{ij}(\dot{u})$.

1.2.2 Les équations constitutives piézoélectrique

On suppose dans la suite que la charge électrique q = 0.
On définit l'enthalpie électrique par

$$H = U - E_iD_i. \tag{1.7}$$

Puis on dérive (1.7) par rapport au temps on obtient

$$\dot{H} = \dot{U} - E_i\dot{D}_i - \dot{E}_iD_i. \tag{1.8}$$

On remplace l'équation (1.6) dans (1.8) on obtient

$$\dot{H} = f\dot{u} + \Sigma_{ij}\dot{e}_{ij} - D_i\dot{E}_i, \tag{1.9}$$

ce qui implique

$$H = H(u, e, E). \tag{1.10}$$

On dérive (1.10) par rapport au temps, on trouve

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial e_{ij}}\dot{e}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial E_i}\dot{E}_i, \tag{1.11}$$

on substitue (1.9) dans (1.11) on obtient

$$(\Sigma_{ij} - \frac{\partial H}{\partial e_{ij}})\dot{e_{ij}} - (D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i})\dot{E}_i + (f - \frac{\partial H}{\partial u})\dot{u} = 0. \tag{1.12}$$

L'équation (1.12) est une identité qui doit être valide pour $\dot{u}$, $\dot{e}_{ij}$ et $\dot{E}_i$ arbitraires qui sont compatibles avec la condition $\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ji}$, on trouve que

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial H}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial e_{ij}}), \tag{1.13}$$

$$D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}. \tag{1.14}$$

$$f = \frac{\partial H}{\partial u}. \tag{1.15}$$

Si de plus on convient de construire H de telle sorte que

$$\frac{\partial H}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial H}{\partial e_{ji}},$$

on peut écrire l'équation (1.13) comme suit

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial e_{ij}}. \tag{1.16}$$

Comme on s'intéresse seulement à la théorie linéaire, on construit une forme quadratique homogène pour H

$$H = \frac{1}{2}A^{ijkl}e_{ij}e_{kl} - P_{ijk}E_ie_{jk} - \frac{1}{2}\in_{ij} E_iE_j, \tag{1.17}$$

avec A^{ijkl} le tenseur d'élasticité et P_{ijk} le coefficient piézoélectrique et $\in_{ij}$ le coefficient diélectrique, tel que

Le tenseur d'élasticité tridimensionnelle (A^{ijkl}) est symétrique et défini positif, il vérifie

$$\begin{cases} A^{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \\ A^{ijkl} = A^{jikl} = A^{klij} = A^{klji}, \\ \exists C > 0 \ \forall x \in \Omega : A^{ijkl}(x)X_{kl}X_{ij} \geqslant CX_{ij}X_{ij} \ , \forall X_{ij} = X_{ji}. \end{cases}$$

Le tenseur piézoélectrique (P_{ijk}) est symétrique et vérifie

$$\begin{cases} P_{ijk} = P_{ikj}, \\ P_{ijk} \in L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Le tenseur diélectrique $(\in_{ij})$ est symétrique, défini positif et vérifie

$$\begin{cases} \in_{ij}=\in_{ji}, \\ \in_{ij}\in L^\infty(\Omega), \\ \exists C' > 0 \ \forall x \in (\Omega) :\in_{ij} X_iX_j \geqslant C'X_iX_j. \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *: On a 21 constantes élastiques indépendants et 18 constantes piézo-électriques indépendants et 6 constantes diélectriques indépendants .*

De (1.14)-(1.16) on obtient les équations constitutives piézoélectrique

$$\Sigma_{ij} = A^{ijkl} e_{kl} - P_{kij} E_k, \tag{1.18}$$

$$D_i = P_{ikl} e_{kl} + \in_{ik} E_k. \tag{1.19}$$

1.2.3 Les équations différentielles de la piézoélectricité

On a maintenant déterminé un système d'équations, i.e., le nombre d'équations égale au nombre de variables inconnues, comme il est clair dans le tableau ci-dessous .

	Nombre d'equations	Les variables additionnelles
$\Sigma_{ij,i} = \varrho \ddot{u}_j - f_j$	3	9
$D_{i,i} = 0$	1	3
$\Sigma_{ij} = A_{ijkl} e_{kl} - P_{kij} E_k$	6	9
$D_i = P_{ikl} e_{kl} + \in_{ik} E_k$	3	0
$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$	6	0
$E_k = -\varphi_{,k}$	3	1
Total	22	22

Tableau 1

Ce système de 22 équations et 22 variables inconnues peut se réduire par des simples substitutions à un système de quatre équations et quatre variables inconnues u_j et φ les quatre équations sont :

$$A^{ijkl} u_{k,li} + P_{kij} \varphi_{,ki} = \varrho \ddot{u}_j - f_j, \tag{1.20}$$

$$P_{ikl} u_{k,li} - \in_{ik} \varphi_{,ki} = 0. \tag{1.21}$$

Remarque 1.2.2 *: On s'intérese dans la suite au cas statique* ($\dot{u}_j = 0$).

Afin que ce système d'équations soit bien posé il faut rajouter des conditions aux limites convenables.

Afin d'assurer la stabilité du système on doit imposer la condition que l'énergie interne U est une forme quadratique définie positive. Donc

$$U = \frac{1}{2}A^{ijkl}e_{kl}e_{ij} + \frac{1}{2} \in_{ij} E_i E_j.$$

Les équations régissant le comportement piézoélectrique sont :

$$\begin{cases} -div\Sigma(u,\varphi) = f \quad dans\ \Omega, \\ -divD(u,\varphi) = 0 \quad dans\ \Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u = 0\ sur\ \Gamma_D^m, \\ \Sigma_{ij}(u,\varphi).n_j = h_i\ sur\ \Gamma_N^m, \\ \varphi = \bar{\varphi}\ sur\ \Gamma_{eD}, \\ D(u,\varphi).n = 0\ sur\ \Gamma_{eN}. \end{cases} \tag{1.23}$$

Remarque 1.2.3 *Les conditions aux limites mécaniques indiquées par un exposant (m) et les conditions aux limites électriques indiquées par un exposant (e).*

1.3 Existence et unicité d'une solution

On présente maintenant, un bref rappel de quelques lemmes notamment celui du mouvement rigide, ainsi que les inégalités de Korn et de Poincaré.

1.3.1 Rappels des inégalités de Poincaré et de Korn

Définissons

$V_m(\Omega) = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \ sur \ \Gamma_D^m\}$, on le munit de la norme $\|v\|_{V_m}(\Omega) = \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^3}$

1. (Lemme du mouvement rigide)

   Si mes $\Gamma_D^m > 0$, $v \in V_m(\Omega)$ et $e_{ij}(v) = 0$, alors v = 0.

2. (Inégalité de Poincaré)

   Soit Ω un ouvert borné, alors pour chaque fonction u$\in$ $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, il existe une constante $C(\Omega)$ strictement positive telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. (La première inégalité de Korn)

   Soit Γ_D une partie de la frontière Γ de Ω telle que mes (Γ_D) non nulle, on définit l'espace

   $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$=$\{v \in H^1(\Omega), v = 0 \ sur \ \Gamma_D\}$

   Soit Ω un domaine borné de R^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ lipschitzienne, alors on a

$$\forall u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

4. (La seconde inégalité de Korn)

   Soit Ω un domaine borné lipschitzien de R^n, alors on a

$$\|u\|_{H^1_{\Gamma_D}(\Omega)} \leq C \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u_i u_i + \sum_{i,j=1}^n e_{ij}(u)e_{ij}(u) \right] dx,$$

   avec $u = (u_i)_{1\leq i\leq n}$.

5. (Ciarlet)

   Soit Ω un ouvert borné de R^n à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe C^2 et mes $(\Gamma_D^m) \geq 0$, alors il existe une constante C strictement positive telle que

$$\|v\|_{V_m(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^{n} \|e_{ij}(v)\|_{L^2(\Omega)}, \forall v \in V_m(\Omega)$$

1.3.2 Deux formulations variationnelles du problème

On présente dans la suite, deux formulations variationnelles équivalentes associées au problème aux limites (1.22)-(1.23).

Définissons les deux espaces suivants

$$W_{E_{\bar{\varphi}}}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = \bar{\varphi} \ sur \ \Gamma_{eD}\}, \forall \bar{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{eD}),$$
$$W_{E_0}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \ sur \ \Gamma_{eD}\}.$$

On munit l'espace $W_{E_0}(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|\psi\|_{W_{E_0}(\Omega)} = \|\nabla\psi\|_{(L^2(\Omega))^3}, \forall \psi \in W_{E_0}(\Omega).$$

Nous supposons que les données du problème sont suffisamment régulières, par exemple $f \in (L^2(\Omega))^3$ et $h \in (L^2(\Gamma_N^m))^3$. Soit $v \in V_m(\Omega)$, en multipliant la première équation du système (1.22) par les composantes de $v = (v_i)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \partial_j(A^{ijkl}e_{kl}(u) + P_{kij}\partial_k\varphi)v_i dx = \int_\Omega f_i v_i dx. \tag{1.24}$$

En appliquant la formule de Green sur l'équation (1.24) et en tenant compte des conditions aux limites (1.23), on aura :

$$\int_\Omega \left[A^{ijkl}e_{kl}(u) + P_{kij}\partial_k\varphi\right] e_{ij}(v) dx = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_m^N} h_i v_i d\Gamma. \tag{1.25}$$

De même, soit $\psi \in W_{E_0}(\Omega)$. En multipliant la deuxième équation du problème (1.22) par ψ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$-\int_\Omega \partial_i(-P_{ikl}e_{kl}(u) + \in_{ij} \partial_j\varphi)\psi dx = 0. \tag{1.26}$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte des conditions aux limites (1.23), on aboutit à

$$\int_\Omega \left[-P_{ikl}e_{kl}(u) + \in_{ij} \partial_j\varphi\right] \partial_i\psi dx = 0. \tag{1.27}$$

En additionnant les deux équations, (1.25)-(1.27) on obtient le problème variationnel suivant

$$\begin{cases} Trouver(u,\varphi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_{\bar{\varphi}}}(\Omega), tel\ que, \\ a_1((u,\varphi),(v,\psi)) = L(v,\psi), \forall (v,\psi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{cases} \tag{1.28}$$

avec

$$\begin{cases} a_1((u,\varphi),(v,\psi)) = \int_\Omega \{[A^{ijkl}e_{kl}(u) + P_{kij}\partial_k\varphi]e_{ij}(v) \\ \qquad +[-P_{ikl}e_{kl}(u) + \in_{ij}\partial_j\varphi]\partial_i\psi\}dx, \\ L(v,\psi) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_N^m} h_i v_i d\Gamma. \end{cases} \tag{1.29}$$

En soustrayant les deux équations,(1.25) et (1.27) on obtient un second problème variationnel

$$\begin{cases} Trouver(u,\varphi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_{\bar{\varphi}}}(\Omega), tel\ que, \\ a_2((u,\varphi),(v,\psi)) = L(v,\psi), \forall (v,\psi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{cases} \tag{1.30}$$

avec

$$\begin{cases} a_2((u,\varphi),(v,\psi)) = \displaystyle\int_\Omega \{[A^{ijkl}e_{kl}(u) + P_{kij}\partial_k\varphi]e_{ij}(v) \\ \qquad - [-P_{ikl}e_{kl}(u) + \in_{ij}\partial_j\varphi]\partial_i\psi\}dx, \\ L(v,\psi) = \displaystyle\int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_m^N} h_i v_i d\Gamma. \end{cases} \tag{1.31}$$

Proposition 1.3.1 *Les deux problèmes (1.28)-(1.29) et (1.30)-(1.31) sont équivalents.*

Preuve. Soit (u,φ) une solution de (1.28)-(1.29). Puisque pour tout $\psi \in W_{E_0}(\Omega)$ $-\psi \in W_{E_0}(\Omega)$, on a

$$a_1((u,\varphi),(v,-\psi)) = L(v,\psi), \forall (v,\psi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega),$$

or pour tout $(v,\psi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega)$, on a

$$a_1((u,\varphi),(v,-\psi)) = a_2((u,\varphi),(v,\psi)).$$

Donc (u,φ) est aussi une solution de (1.30)-(1.31). De même, on montre que toute solution de (1.30)-(1.31) est aussi solution de (1.28)-(1.29).

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel, il est intéressant de considérer le problème homogène correspondant au premier problème variationnel. ■

Lemme 1.3.2 *Si $\bar{\varphi}$ est un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{eD})$, il existe un relèvement $\hat{\varphi}$ de $\bar{\varphi}$ dans $H^1(\Omega)$, c-à-d une fonction $\hat{\varphi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\hat{\varphi}|_{\Gamma_{eD}} = \bar{\varphi}$.*

On pose alors

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \hat{\varphi},$$

donc $\tilde{\varphi} \in W_{E_0(\Omega)}$. Ce qui conduit à la proposition suivante :

Proposition 1.3.3 *La solution (u, φ) du problème variationnel (1.28)-(1.29) est donnée par*

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \hat{\varphi}$$

avec $(u, \tilde{\varphi})$ est solution du problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} Trouver(u, \tilde{\varphi}) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), tel\ que, \\ a_1((u, \varphi), (v, \psi)) = \bar{L}_1(v, \psi), \forall (v, \psi) \in V_m(\Omega) \times W_{E_0}(\Omega), \end{array} \right. \tag{1.32}$$

où $a_1((.,.),(.,.))$ est définie en (1.29) et $\bar{L}_1(.,.)$ est définie par

$$\bar{L}_1(v, \psi) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_m^N} h_i v_i d\Gamma + \int_\Omega \{-P_{kij} \partial_k \hat{\varphi} e_{ij}(v) + \in_{ik} \partial_k \hat{\varphi} \partial_i \psi\} \, dx \tag{1.33}$$

1.3.3 Théorème d'existence et d'unicité

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème aux limites (1.22)-(1.23), on énonce quelques propriétés des formes : linéaire $L(.)$ et bilinéaire $a_1(.,.)$ définies par le système (1.29) (Les démonstrations suivantes, se trouvent dans Haenel).

Lemme 1.3.4 *Si $f_i \in L^2(\Omega)$ et $h_i \in L^2(\Gamma_N^m)$, alors la forme linéaire $\bar{L_1}(.,.)$ est continue sur $V_m(\Omega) \times W_{E_0(\Omega)}$.*

Lemme 1.3.5 *Si mes $(\Gamma_D^m) > 0$ et mes $(\Gamma_{eD}) > 0$, alors la forme bilinéaire $a_1((.,.),(.,.))$ est continue et elliptique sur $V_m(\Omega) \times W_{E_0(\Omega)}$.*
Dans la proposition suivante, on énonce le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution du problème homogène (1.32). En utilisant le théorème de Lax-Milgram

Proposition 1.3.6 *Si mes $(\Gamma_D^m) > 0$ et mes $(\Gamma_{eD}) > 0$, si $f_i \in L^2(\Omega)$ et $h_i \in L^2(\Gamma_N^m)$, alors le problème variationnel(1.32) admet une solution unique.*

Corollaire 1.3.7 *Si $(\Gamma_D^m) > 0$ et mes $(\Gamma_{eD}) > 0$, si $f_i \in L^2(\Omega)$ et $h_i \in L^2(\Gamma_N^m)$ et $\bar{\varphi} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D^m)$, alors le problème variationnel (1.28)-(1.29) admet une solution unique.*

Remarque 1.3.8
1. *Si mes$(\Gamma_{eD}) > 0$, le problème (1.32) aurait une solution unique dans l'espace $V_m(\Omega) \times (W_{E_0}(\Omega)/R)$, c-à-d que le potentiel est défini à une constante additive prés.*
2. *Le problème de la piézoélectricé admet donc deux formulations variationnelles. Souvent on utilise la première, dont la forme bilinéaire est définie positive, mais non-symétrique puisque la matrice de la piézoélectricité globale est antisymétrique. Dans une autre situation il est envisageable d'utiliser la deuxième formulation variationnelle, dont la forme bilinéaire est symétrique mais non-elliptique.*
3. *Dans l'expression*
$$a_1((u,\varphi),(u,\varphi)) = \int_\Omega \{A_{ijkl}(u)e_{kl}(u) + \in_{ij} \partial_i\varphi\partial_j\varphi\}\, dx,$$
les termes liés aux tenseurs piézoélectriques ont disparu. Ceci est dû à la reversibilité du phénomène de la piézoélectricité.

Chapitre

Modélisation asymptotique du problème de Signorini avec frottement pour une coque peu-profonde piézoélectrique

2.1 Position du problème

Soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ occupé par un matériau piézoélectrique anisotrope et non homogène où ε $(0 < \varepsilon \leq 1)$ est un paramètre qui caractérise l'épaisseur de la coque, et ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$, la frontière $\partial\omega$ est divisée en 3 parties mesurables γ, γ_0, γ_e avec mes $(\gamma_0) > 0$. On note $\gamma_1 := \partial\omega - \gamma_0$, $\gamma_s := \partial\omega - \gamma_e$. La frontiére latérale de Ω^ε est partitionnée en $\Gamma_D^\varepsilon = \gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\Gamma_s^\varepsilon = \gamma_s \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\Gamma_e^\varepsilon = \gamma_e \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $\Gamma_1^\varepsilon = \gamma_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $\Gamma_N^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \bigcup \Gamma_+^\varepsilon$, la face supérieure $\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{\varepsilon\}$, et la face inférieure $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$ sachant que (mes $\Gamma_D^\varepsilon > 0$). Soit $\theta^\varepsilon : \overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction injective de classe C^3 tel que $\theta^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\theta(x_1, x_2)$. La configuration de référence de la coque est $\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}$, avec $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta(\Omega^\varepsilon)$, chaque point de $\{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}$ est donnée par $\widehat{x}^\varepsilon = \Theta(x^\varepsilon) = \theta(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a_3(x_1, x_2)$ pour tout $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ avec a_3 est la normale unitaire extérieure de la surface moyenne $\widehat{\omega} = \Theta^\varepsilon(\overline{\omega})$ de la coque peu profonde. Pour un ε suffisamment petit, l'application $\Theta : \overline{\Omega}^\varepsilon \longrightarrow \Theta(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ est un C^1-difféomorphisme .On suppose que Θ conserve l'orientation de l'espace (i.e, $det\nabla^\varepsilon\Theta(x^\varepsilon) > 0, \quad \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon$). On suppose que la coque peu profonde entre en contact unilatéral avec frottement avec une fondation rigide subit une force volumique $\widehat{f}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3$, et une force surfacique $\widehat{h}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon))^3$ sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$. On impose que le potentiel électrique $\widehat{\varphi}^\varepsilon = 0$ en $\widehat{\Gamma}_{eD}^\varepsilon = \Theta(\Gamma_{eD}^\varepsilon)$ où $\Gamma_{eD}^\varepsilon = \Gamma_\pm^\varepsilon \cup \Gamma_e^\varepsilon$ avec $\widehat{\Gamma}_D^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_D^\varepsilon)$ est encastrée de plus on exerce sur la coque peu profonde des charges électriques de densité surfaciques $\widehat{q}^\varepsilon$ en $\widehat{\Gamma}_{eN}^\varepsilon = \Theta(\Gamma_{eN}^\varepsilon)$ où $\Gamma_{eN}^\varepsilon = \Gamma_s^\varepsilon$

2.2 Le problème tridimensionnel linéaire sur $\overline{\hat{\Omega}^{\varepsilon}}$

2.2.1 Les équations d'équilibre avec les conditions au bord

$$\begin{cases} -\widehat{div}^{\varepsilon}\ \widehat{\Sigma}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon}) = \widehat{f}^{\varepsilon}\ (i.e.,\ -\widehat{\partial}_j^{\varepsilon}\widehat{\Sigma}_{ij}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon}) = \widehat{f}_i^{\varepsilon})\ sur\ \widehat{\Omega}^{\varepsilon} \\ \widehat{\Sigma}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon})\widehat{n}^{\varepsilon} = \widehat{h}^{\varepsilon}(x^{\varepsilon})\ (i.e.,\ \widehat{\Sigma}_{ij}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon})\widehat{n}_j^{\varepsilon} = \widehat{h}_i^{\varepsilon})\ \ sur\ \widehat{\Gamma}_N^{\varepsilon m}. \\ \widehat{u}^{\varepsilon} = 0 \quad sur\ \widehat{\Gamma}_D^{\varepsilon m} \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2.2 Les équations de Maxwell-Gauss et les conditions au bord électriques

$$\begin{cases} -\widehat{div}^{\varepsilon}\ \widehat{D}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon}) = 0\ (i.e.,\ -\widehat{\partial}_i^{\varepsilon}\widehat{D}_i^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon}) = 0)\ sur\ \widehat{\Omega}^{\varepsilon} \\ \widehat{D}^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon})\widehat{n}^{\varepsilon} = \widehat{q}^{\varepsilon}\ (i.e.,\ \widehat{D}_i^{\varepsilon}(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\varphi}^{\varepsilon})\widehat{n}_i^{\varepsilon} = \widehat{q}^{\varepsilon})\ \ sur\ \widehat{\Gamma}_{eN}^{\varepsilon}. \\ \widehat{\varphi}^{\varepsilon} = 0 \quad sur\ \ \widehat{\Gamma}_{eD}^{\varepsilon} \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2.3 Les conditions de Signorini

Soit d la fonction d'interstrice définie sur $\hat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon}$ est dans $H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon})$, cette fonction décrit la distance entre la fondation rigide et la face inférieure $(\hat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon})$, a raison que la coque peu profonde piézoélectrique ne peut pas pénétre la fondation, signifie que la composante normale $\hat{u}_N^{\varepsilon}$vérifie $\hat{u}_N^{\varepsilon} \leq d$ sur $(\hat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon})$. La force de contact $\hat{G}_N^{\varepsilon}$ est compressive d'oú $\hat{G}_N^{\varepsilon} \leq 0$ et il y en a contact si $\hat{u}_N^{\varepsilon} = d$ ou la surface est libre si $\hat{G}_N^{\varepsilon} = 0$ ce que signifie $\hat{G}_N^{\varepsilon}(\hat{u}_N^{\varepsilon} - d) = 0$, par conséquent les conditions de Signorini sont :

$$\hat{u}_N^{\varepsilon} \leq d, \hat{G}_N^{\varepsilon} \leq 0, \hat{G}_N^{\varepsilon}(\hat{u}_N^{\varepsilon} - d) = 0 \ \ sur \ \ \hat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon}.$$

2.2.4 Loi de frottement de Coulomb

Soit $\Lambda \geq 0$ le coefficient de frottement, la loi de frottement de Coulomb est :

$$\begin{cases} |\widehat{G}_T^{\varepsilon}| < \Lambda|\widehat{G}_N^{\varepsilon}| \Rightarrow \hat{u}_T^{\varepsilon} = 0 \ \ (\text{adhérence}) \quad sur \ \ \widehat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon}, \\ |\widehat{G}_T^{\varepsilon}| = \Lambda|\widehat{G}_N^{\varepsilon}| \Rightarrow \exists\delta > 0, \widehat{u}_T^{\varepsilon} = -\delta\widehat{G}_T^{\varepsilon} \ \ (glissement) \ \ sur \ \widehat{\Gamma}_{-}^{\varepsilon}. \end{cases}$$

où δ est le taux de glissement absolu .

2.2.5 Le problème variationnel dans les coordonnées cartésiennes

On pose :

$$\widehat{V}^\varepsilon = \{\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon); \widehat{v}^\varepsilon \in (H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3, \widehat{v}^\varepsilon = 0 \ sur \ \widehat{\Gamma}_D^\varepsilon\},$$

$$\widehat{K}^\varepsilon := \{\widehat{v}^\varepsilon \in \widehat{V}^\varepsilon : \widehat{v}_N^\varepsilon \leqslant \widehat{d}^\varepsilon \ sur \ \widehat{\Gamma}_-^\varepsilon\},$$

$$\widehat{\Psi}^\varepsilon = \{\widehat{\psi}^\varepsilon \in H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon) : \widehat{\psi}^\varepsilon = 0 \ sur \ \widehat{\Gamma}_{eD}^\varepsilon\}.$$

Théorème 2.2.1 *Si $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon)$ sont solutions de P.C mécanique et électrique alors $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon)$ vérifient le problème variationnel suivant*

$$(\hat{P}^\varepsilon)\begin{cases} \text{Trouver } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon) \in \widehat{K}^\varepsilon \times \widehat{\Psi}^\varepsilon \times (H^{-\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_-^\varepsilon))^3 \text{ tels que :} \\ \widehat{a}^\varepsilon\Big((\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon), (\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)\Big) = \widehat{l}^\varepsilon\Big((\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)\Big) + \langle \widehat{G}_i^\varepsilon, \widehat{v}_i^\varepsilon\rangle \ \forall (\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon) \in \widehat{V}^\varepsilon \times \widehat{\Psi}^\varepsilon \\ \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{u}_N^\varepsilon\rangle \geq 0 \ \forall \ \widehat{v}^\varepsilon \in \widehat{K^\varepsilon} \\ \langle \widehat{G}_T^\varepsilon, \widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon\rangle + \langle \Lambda|\widehat{G}_N^\varepsilon|, |\widehat{v}_T^\varepsilon| - |\widehat{u}_T^\varepsilon|\rangle \geq 0 \ \forall \ \widehat{v}_T^\varepsilon \in \widehat{V}^\varepsilon \end{cases}$$

où

$$\widehat{a}^\varepsilon\Big((\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon), (\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)\Big) = \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \{\Big[\widehat{A}^{ijkl,\varepsilon}\widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) + \widehat{P}_{kij}\widehat{\partial}_k^\varepsilon\widehat{\varphi}^\varepsilon\Big]\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \Big[(\widehat{P}_{ijk}\widehat{e}_{jk}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) - \widehat{\in}_{ij}\widehat{\partial}_j\widehat{\varphi}^\varepsilon)\widehat{\partial}_i\widehat{\psi}^\varepsilon\Big]\}d\widehat{x}^\varepsilon$$

et

$$\widehat{l}^\varepsilon((\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)) := \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}^\varepsilon.\widehat{v}^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_N^\varepsilon} \widehat{h}^\varepsilon.\widehat{v}^\varepsilon d\widehat{\Gamma}_N^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_{eN}^\varepsilon} \widehat{q}^\varepsilon\widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{\Gamma}_{eN}^\varepsilon$$

Preuve. La formulation faible de (2,1) donne :
soit $\hat{v}^\varepsilon \in \hat{K}^\varepsilon$ donne :

$$-\int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} d\hat{i}v^\varepsilon \hat{\Sigma}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}^\varepsilon)\hat{v}^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{f}^\varepsilon\hat{v}^\varepsilon$$

On utilise la formule de Green on obtient :

$$\int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{\Sigma}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}^\varepsilon).\nabla\hat{v}^\varepsilon - \int_{\partial\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{\Sigma}.\hat{n}^\varepsilon.\hat{v}^\varepsilon d\Gamma = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{f}^\varepsilon\hat{v}^\varepsilon$$

$$\int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} \hat{\Sigma}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}^\varepsilon).\nabla\hat{v}^\varepsilon d\hat{x}^\varepsilon = \int_{\hat{\Omega}^\varepsilon} [\hat{A}_{ijkl}\hat{e}_{kl}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) - \hat{P}_{kij}\hat{E}_k^\varepsilon(\hat{\varphi}^\varepsilon)]\hat{e}_{ij}^\varepsilon(\hat{v}^\varepsilon)d\hat{x}^\varepsilon$$

Remarque 2.2.2 *: ce résultat est obtenu par la symétrie de $\hat{\Sigma}^{\varepsilon}_{ij}$ et $\hat{P}_{kij}$.*

$$\int_{\partial\hat{\Omega}^{\varepsilon}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} d\Gamma = \int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{N}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} + \int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{D}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} + \int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{-}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon}$$

par conséquent d'après les conditions au bord on trouve :

$$\int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{N}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} = \int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{N}} \hat{h}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon}$$

et

$$\int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{D}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} = 0$$

Et comme :

$$\begin{cases} \hat{v}^{\varepsilon} = \vec{\hat{v}}^{\varepsilon}_{T} + \hat{v}^{\varepsilon}_{N}\,\hat{\vec{n}}^{\varepsilon} \\ \hat{\Sigma}^{\varepsilon}\hat{n}^{\varepsilon} = \hat{\Sigma}^{\varepsilon}_{T} + \hat{\Sigma}^{\varepsilon}_{N}\vec{\hat{n}} = \hat{G}^{\varepsilon}_{T} + \hat{G}^{\varepsilon}_{N}\vec{\hat{n}}^{\varepsilon} \end{cases}$$

D'où

$$\int_{\hat{\Gamma}^{\varepsilon m}_{-}} \hat{\Sigma}.\hat{n}^{\varepsilon}.\hat{v}^{\varepsilon} = \langle \hat{G}^{\varepsilon}_{T}, \hat{v}^{\varepsilon}_{T} \rangle + \langle \hat{G}^{\varepsilon}_{N}, \hat{v}^{\varepsilon}_{n} \rangle = \langle \hat{G}^{\varepsilon}_{i}, \hat{v}^{\varepsilon}_{i} \rangle.$$

Et ce qui concerne la formulation faible de l'équation (2,2) on fait la même chose.

La formulation faible de la condition de contact unilatéral et de frottement donne :

1. $$\begin{aligned} \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, \widehat{v}^{\varepsilon}_{N} - \widehat{u}^{\varepsilon}_{N} \rangle &= \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, (\widehat{v}^{\varepsilon}_{N} - d) + (d - \widehat{u}^{\varepsilon}_{N}) \rangle \\ &= \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, \widehat{v}^{\varepsilon}_{N} - d \rangle + \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, d - \widehat{u}^{\varepsilon}_{N} \rangle \\ &= \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{N}, \widehat{v}^{\varepsilon}_{N} - d \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

2. On pose $H = \langle \widehat{G}^{\varepsilon}_{T}, \widehat{v}^{\varepsilon}_{T} - \widehat{u}^{\varepsilon}_{T} \rangle + \langle \Lambda|\widehat{G}^{\varepsilon}_{N}|, |\widehat{v}^{\varepsilon}_{T}| - |\widehat{u}^{\varepsilon}_{T}| \rangle$

   Pour déterminer le signe de H on va analyser deux cas.

- Premier cas : $|\widehat{G}^\varepsilon_T| < \Lambda|\widehat{G}^\varepsilon_N| \Rightarrow \hat{u}^\varepsilon_T = 0$,

  donc $H = \langle \widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle + \langle \Lambda|\widehat{G}^\varepsilon_N|, |\widehat{v}^\varepsilon_T|\rangle > \langle \widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle + \langle |\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{v}^\varepsilon_T|\rangle$.

  Si
  $$\widehat{v}^\varepsilon_T < 0 \Longrightarrow |\widehat{v}^\varepsilon_T| = -\widehat{v}^\varepsilon_T$$
  et si
  $$\widehat{G}^\varepsilon_T < 0 \Longrightarrow |\widehat{G}^\varepsilon_T| = -\widehat{G}^\varepsilon_T.$$

  D'où $H > 0$

  Si
  $$\widehat{v}^\varepsilon_T > 0 \;\; et \;\; \widehat{G}^\varepsilon_T > 0 \;\; alors \;\; H > 0,$$
  si
  $$\widehat{v}^\varepsilon_T < 0 \;\; et \;\; \widehat{G}^\varepsilon_T > 0$$
  alors
  $$H = \langle \widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle - \langle \widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle = 0.$$

  Et le contraire donne le même résultat.

  Si
  $$\widehat{v}^\varepsilon_T > 0 \;\; et \;\; \widehat{G}^\varepsilon_T = 0 \Longrightarrow H = 0.$$

  Et le contraire aussi donne le même résultat.

  Par conséquent dans ce cas on a toujours $H \geq 0$.

- <u>Deuxième cas</u> : $|\widehat{G}^\varepsilon_T| = \Lambda|\widehat{G}^\varepsilon_N| \Rightarrow \exists\delta > 0, \widehat{u}^\varepsilon_T = -\delta\widehat{G}^\varepsilon_T.$

  Donc

$$|\widehat{u}^\varepsilon_T| = \delta|\widehat{G}^\varepsilon_T| = \delta.\Lambda|\widehat{G}^\varepsilon_N|.$$

  Alors

$$H = \langle\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T - \widehat{u}^\varepsilon_T\rangle + \langle|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{v}^\varepsilon_T| - \delta|\widehat{G}^\varepsilon_T|\rangle$$
$$= \langle\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle - \langle\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{u}^\varepsilon_T\rangle + \langle|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{v}^\varepsilon_T|\rangle - \delta\langle|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{G}^\varepsilon_T|\rangle,$$

  et puisque

$$\delta\langle|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{G}^\varepsilon_T|\rangle = \langle\delta|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{G}^\varepsilon_T|\rangle = \langle\delta\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{G}^\varepsilon_T\rangle = -\langle\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{u}^\varepsilon_T\rangle.$$

  D'où

$$H = \langle\widehat{G}^\varepsilon_T, \widehat{v}^\varepsilon_T\rangle + \langle|\widehat{G}^\varepsilon_T|, |\widehat{v}^\varepsilon_T|\rangle \geq 0.$$

■

2.3 Le problème tridimensionnel sur Ω^ε

2.3.1 Le problème variationnel dans les coordonnées curvilignes

Soit $\widehat{e}^i$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $(g_i^\varepsilon(x^\varepsilon))$ avec $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \partial_i^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ la base covariante et la base contravariante définie par $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon).g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \delta_i^j$ et les symboles de Christoffel définis par : $\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} = \partial_i^\varepsilon g_i^\varepsilon.g^{k,\varepsilon}, g_{ij}^\varepsilon = g_i^\varepsilon.g_j^\varepsilon, g^{ij,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon}.g^{j,\varepsilon}$.
Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes, c-à-d : de $\hat{\Omega}^\varepsilon$ à Ω^ε est donné par le tableau suivant :

	Dans les coordonnées cartésiennes	Dans les coordonnées curvilignes
le vecteur $\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon)$	$\widehat{v}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$	$v_i^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)$
le volume	$d\hat{x^\varepsilon}$	$\sqrt{g^\varepsilon}dx^\varepsilon$, où $g^\varepsilon = det(g_{ij}^\varepsilon)$
la surface	$d\hat{\Gamma^\varepsilon}$	$\sqrt{g^\varepsilon}\sqrt{g^{ij,\varepsilon}n_in_j}d\Gamma^\varepsilon(x^\varepsilon)$
la force volumique	$\widehat{f}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i$	$f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$
la force surfacique	$\widehat{h}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}_i$	$h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$ $\forall x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon$.

Tableaux 2 : Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes

Puisque $v^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_-^\varepsilon))^3$ à cause de $\delta^\varepsilon\beta^\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ qui provient de l'hypothèse $\theta \in C^3(\overline{\Omega})$ avec $\delta^\varepsilon = det(\nabla\Phi) = \sqrt{g^\varepsilon}$ et $\beta^\varepsilon = |\nabla\Phi^{-t}n|) = 1$ sur Γ_-^ε, la preuve de ce résultat est facilement obtenue en notant que :
$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$ sur $\Gamma_\mp^\varepsilon$ et que $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur Γ^ε.
On définit ϕ^ε dans l'espace $(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-^\varepsilon))^3$ pour tout $v^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon))^3$ par le produit de dualité suivant :

$$\langle \phi_i^\varepsilon, v_i^\varepsilon(x^\varepsilon)\rangle = \langle \hat{\phi}_i^\varepsilon, \hat{v}_i^\varepsilon\rangle \text{ pour tout } \hat{v}^\epsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_-^\varepsilon))^3.$$

Par conséquent, on a les transformations suivantes sur Γ_-^ε dans les termes $\phi^\varepsilon, v^\varepsilon$:

$$\langle \hat{\phi}_N^\varepsilon, \hat{v}_N^\varepsilon \rangle = \langle \phi^\varepsilon, v_N^\varepsilon n^\varepsilon \rangle, \langle \hat{\phi}_T^\varepsilon, \hat{v}_T^\varepsilon \rangle = \langle \phi^\varepsilon, (v^\varepsilon - v_N^\varepsilon n^\varepsilon) \rangle.$$

D'où le problème variationnel en coordonnées curvilignes est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *Le triplet $u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, G^\varepsilon$ es solution de*

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{c} Trouver\ (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, G^\varepsilon) \in K^\varepsilon \times \Psi^\varepsilon \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-^\varepsilon))^3 \ tels\ que : \\ a^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) = l^\varepsilon(v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) + \langle G_i^\varepsilon, v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \ pour\ tout\ (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in V^\varepsilon \times \Psi^\varepsilon, \\ \langle G^\varepsilon, (v_N^\varepsilon - u_N^\varepsilon) n^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \ \forall\ (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in K^\varepsilon \times \Psi^\varepsilon, \\ \langle G^\varepsilon, ((v^\varepsilon - u^\varepsilon) - (v_N^\varepsilon - u_N^\varepsilon) n^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle + \langle \Lambda |G^\varepsilon|, (|v_T^\varepsilon| - |u_T^\varepsilon|) n^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \ \forall\ (v^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in V^\varepsilon \times \Psi^\varepsilon. \end{array} \right.$$

où :

$$\begin{aligned} a^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) = \int_{\Omega^\varepsilon} &\{[A^{ijkl,\varepsilon} e_{k\|l}^\varepsilon(u^\varepsilon) + P_{ijk}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon \varphi^\varepsilon](e_{i\|j}^\varepsilon(v^\varepsilon)) \\ &+ [P_{ijk}^\varepsilon e_{j\|k}^\varepsilon(u^\varepsilon) - \in_{ij} \partial_j^\varepsilon \varphi^\varepsilon] \partial_i^\varepsilon \psi^\varepsilon\} \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \end{aligned}$$

et

$$l^\varepsilon((v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) := \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon . v^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_N^\varepsilon} h^\varepsilon . v^\varepsilon \sqrt{g^{ij,\varepsilon} n_i n_j} \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma_N^\varepsilon$$

On définit les espaces suivants

$$V^\varepsilon = \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon); v^\varepsilon \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3, v^\varepsilon = 0 \ sur\ \Gamma_D^\varepsilon\},$$

$$K^\varepsilon := \{v^\varepsilon \in V^\varepsilon : v_N^\varepsilon \leqslant d^\varepsilon \ sur\ \Gamma_-^\varepsilon\}$$

$$\Psi^\varepsilon = \{\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon) : \psi^\varepsilon = 0 \ sur\ \Gamma_{eD}^\varepsilon\},$$

2.4 Le problème variationnel sur le domaine fixe Ω

2.4.1 Mise à l'échelle

On note π^ε l'application : $\overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega^\varepsilon}$ telle que

$R^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2, \varepsilon x_3) = x^\varepsilon$. Dans cette section on se ramène à l'ouvert fixe $\Omega = \omega \times]-1, +1[$ par $\pi^\varepsilon(\Omega) = \Omega^\varepsilon$. On note $\Gamma_- = \omega \times \{-1\}$ et $\Gamma_+ = \omega \times \{+1\}$ les faces supérieure et inférieure de cet ouvert ainsi que $\Gamma_D = \gamma_0 \times]-1, +1[$ sa face latérale. En effectuant un changement d'échelle sur la solution et les données.

1. À la solution u^ε et à la fonction test v^ε on associe les fonctions $u(\varepsilon)$ *et* $v(\varepsilon)$ telle que pour tout $x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x)$:

$$\begin{cases} u^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon)(x), u^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x), \\ v^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\alpha(\varepsilon)(x), v^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon v_3(\varepsilon)(x). \end{cases}$$

2. Les forces surfacique et volumique mise à l'échelle sont définies par :

$$\begin{cases} f^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^2 f_\alpha, f^\varepsilon_3 = \varepsilon^3 f_3, \\ h^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^3 h_\alpha, h^\varepsilon_3 = \varepsilon^4 h_3 \ sur \ \Gamma_+, h^\varepsilon_\alpha \quad = \varepsilon^2 h_\alpha, h^\varepsilon_3 = \varepsilon^3 h_3 \ sur \ \Gamma^m_N. \end{cases}$$

3. On suppose que la force de frottement vérifie :

$$\begin{cases} \langle G^\varepsilon_\alpha, v^\varepsilon \rangle = \varepsilon^3 \langle G_\alpha(\varepsilon), v \rangle, \\ \langle G^\varepsilon_3, v^\varepsilon \rangle = \varepsilon^4 \langle G_3(\varepsilon), v \rangle. \end{cases}$$

4. Et pour ϕ, ψ on suppose les changements suivants :

$$\begin{cases} \varphi^\varepsilon = \varepsilon^3 \varphi(\varepsilon), \\ \psi^\varepsilon = \varepsilon^3 \psi(\varepsilon). \end{cases}$$

5. Les tenseurs $e^\varepsilon_{i\|j}(v^\varepsilon)$ se transforment en :

$$e_{i\|j}(\varepsilon)(v(\varepsilon)) = \begin{cases} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(v(\varepsilon)) = \varepsilon^2(e_{\alpha\beta}(v(\varepsilon)) - \Gamma^\eta_{\alpha\beta}(\varepsilon)v_\eta(\varepsilon)) - \varepsilon\Gamma^3_{\alpha\beta}(\varepsilon)v_3(\varepsilon), \\ e_{\alpha\|3}(\varepsilon)(v(\varepsilon)) = \varepsilon(e_{\alpha 3}(v(\varepsilon)) - \Gamma^3_{\alpha 3}(\varepsilon)v_3(\varepsilon)) - \varepsilon^2\Gamma^\eta_{\alpha 3}(\varepsilon)v_\eta(\varepsilon), \\ e_{3\|3}(\varepsilon)(v(\varepsilon)) = e_{33}(v(\varepsilon)) - \varepsilon\Gamma^3_{33}(\varepsilon)v_3(\varepsilon) - \varepsilon^2\Gamma^\eta_{33}(\varepsilon)v_\eta(\varepsilon). \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \partial^\varepsilon_\alpha = \partial_\alpha, \\ \partial^\varepsilon_3 = \dfrac{1}{3}\partial_3. \end{cases}$$

Donc le problème variationnel s'écrit sous la forme :

$$(P(\varepsilon))\begin{cases} Trouver\ (u(\varepsilon),\varphi(\varepsilon),G(\varepsilon)) \in K\times\Psi\times(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-))^3 \text{ tel que :} \\ a(\varepsilon)((u(\varepsilon),\varphi(\varepsilon)),(v(\varepsilon),\psi(\varepsilon)) = l(\varepsilon)(v(\varepsilon),\psi(\varepsilon)) + \varepsilon^5\langle G_i(\varepsilon), v_i(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)}\rangle \\ \text{pour tout}(v(\varepsilon),\psi(\varepsilon)) \in V\times\Psi, \\ \varepsilon^5\langle G(\varepsilon),(v_3-u_3(\varepsilon)n^\theta\sqrt{g(\varepsilon)})\rangle + \varepsilon^7 r_2 > 0\ \forall v\in K, \\ \varepsilon^5\langle G(\varepsilon),(v-u(\varepsilon))-(v_3-u_3(\varepsilon))n^\theta\rangle + \varepsilon^6\langle \Lambda G(\varepsilon),(|v_T(\varepsilon)|-|u_T(\varepsilon)|)n^\theta\rangle + \varepsilon^7 r_3 > 0\ \forall v\in K. \end{cases}$$

Où :

$$\begin{aligned} a(\varepsilon)((u(\varepsilon),\varphi(\varepsilon)),(v(\varepsilon),\psi(\varepsilon))) = \varepsilon\int_\Omega &\{[A^{ijkl}e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + \varepsilon^2 P_{ij3}\partial_3\varphi(\varepsilon) + \varepsilon^3 P_{ij\alpha}\partial_\alpha\varphi(\varepsilon)]e_{i\|j}(\varepsilon)(v(\varepsilon)) \\ &+ [\varepsilon^2 P_{3jk}e_{j\|k}(\varepsilon)(u(\varepsilon))\partial_3\psi(\varepsilon) + \varepsilon^3 P_{\alpha jk}e_{j\|k}(\varepsilon)(u(\varepsilon))\partial_\alpha\psi(\varepsilon) \\ &- \varepsilon^4\in_{33}\partial_3\varphi(\varepsilon)\partial_3\psi(\varepsilon) \\ &- \varepsilon^5(\in_{\alpha3}\partial_3\varphi(\varepsilon)\partial_\alpha\psi(\varepsilon) + \in_{3\beta}\partial_\beta\varphi(\varepsilon)\partial_3\psi(\varepsilon)) \\ &+ \varepsilon^6\in_{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi(\varepsilon)\partial_\alpha\psi(\varepsilon)]\}\sqrt{g(\varepsilon)}dx. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} l(\varepsilon)((v(\varepsilon),\psi(\varepsilon))) = \varepsilon^5\int_\Omega f.v\sqrt{g(\varepsilon)}dx + \varepsilon^5\int_{\Gamma_+} h.v\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma_+ \\ +\varepsilon^4\int_{\Gamma_1} h.v\sqrt{g^{ij}(\varepsilon)n_in_j}\sqrt{g(\varepsilon)}d\Gamma_1. \end{aligned}$$

On définit les espaces suivants

$$V = \{v(\varepsilon) = (v_i(\varepsilon); v(\varepsilon)\in(H^1(\Omega))^3, v(\varepsilon) = 0\ sur\ \Gamma_D\},$$

$$K := \{v(\varepsilon)\in V : v_N(\varepsilon) < d(\varepsilon)\ sur\ \Gamma_-\},$$

$$\Psi = \{\psi(\varepsilon)\in H^1(\Omega) : \psi(\varepsilon) = 0\ sur\ \Gamma_{eD}\}.$$

2.4.2 L'analyse asymptotique

On suppose dans toute la suite que notre matériau est monoclinique : $A^{\alpha 333} = A^{\alpha\beta\gamma 3} = 0$. Dans cette sous section on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *(Ciarlet[1]) : Soit ω un domaine de R^2 de frontière γ, soit $\Omega = \omega \times]-1,1[$ et $\varphi \in L^p(\Omega)(p>1)$, tel que $\int_\Omega \varphi \partial_3 v dx = 0$ $\forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ avec v=0 sur $\omega \times]-1,1[$ alors v=0.*

On va utiliser les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned}
u(\varepsilon) &= u^0 + \varepsilon u^1 + ... \\
\langle G(\varepsilon), v\rangle &= ..... + \frac{1}{\varepsilon}\langle G^{-1}, v\rangle + \langle G^0, v\rangle + \varepsilon^1\langle G^1, v\rangle + \varepsilon^2\langle G^2, v\rangle + ... \\
\varphi(\varepsilon) &= \varphi^0 + \varepsilon\varphi^1.... \\
\sqrt{g(\varepsilon)} &= \sqrt{a} + \varepsilon(\sqrt{a})^1 + \varepsilon^2(\sqrt{a})^2 + o(\varepsilon^2). \\
A^{ijkl}(\varepsilon)\sqrt{g(\varepsilon)} &= A^{ijkl,0}\sqrt{A} + \varepsilon B^{ijkl,1} + \varepsilon^2 B^{ijkl,2} + ...
\end{aligned}$$

et pour les tenseurs $e^\varepsilon_{i\|j}(v^\varepsilon)$ on suppose le développement suivant :

$$e_{i\|j}(\varepsilon)u(\varepsilon)) = e^0_{i\|j} + \varepsilon e^1_{i\|j} + ...$$

avec

$$e^0_{i\|j} = \begin{cases} e^0_{\alpha\|\beta} = e^0_{\alpha\|3} = e^0_{3\|\alpha} = 0, \\ e^0_{3\|3} = e^0_{33} = e_{33}(u^0). \end{cases}$$

Et

$$e^1_{i\|j} = \begin{cases} e^1_{\alpha\|\beta} = \Gamma^{3,0}_{\alpha\beta} u^0_3. \\ e^1_{\alpha\|3} = e_{\alpha 3}(u^0). \\ e^1_{3\|3} = e_{33}(u^1). \end{cases}$$

En suite, nous substituons ces développements asymptotiques dans $(P(\varepsilon))$ on obtient (après simplification par ε^5) :

<u>**À l'order ε^{-4}**</u>

$$p^{-4}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl,0} e^0_{k\|l}(u(\varepsilon)) e^0_{i\|j}(v(\varepsilon))\sqrt{a}dx = 0. \right.$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega A^{3333} e_{33}(u^0) e_{33}(v^0)\sqrt{a}dx = 0 \ \forall v^0 \in V.$$

$$Si \quad v^0 = u^0 \Longrightarrow 0 = \int_\Omega A^{3333} e_{33}(u^0) e_{33}(u^0)\sqrt{a}dx \geq C\|e_{33}(u^0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$$\Longrightarrow e_{33}(u^0) = 0.$$

$$\Longrightarrow u_3^0(x) = u_3^0(x_1, x_2).$$

À l'order ε^{-3}

$$p^{-3}\left\{ \int_\Omega A^{ijkl,0} e^1_{k\|l}(u) e^0_{i\|j}(v)\sqrt{a}\ dx = 0. \right.$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega A^{33kl,0} e^1_{k\|l}(u) e_{33}(v^0)\sqrt{a}\ dx = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega A^{33kl,0} e^1_{k\|l}(u)\partial_3 v_3^0\sqrt{a}\ dx = 0.$$

Et d'après le théorème 2.4.1 $\Longrightarrow A^{33kl,0} e^1_{k\|l}(u) = 0.$

$$\Longrightarrow A^{33\alpha\beta,0} e^1_{\alpha\|\beta}(u) + A^{3333,0} e^1_{3\|3}(u) + 2A^{33\alpha3} e^1_{\alpha\|3}(u) = 0.$$

$$\Longrightarrow e^1_{3\|3}(u) = -\frac{A^{33\alpha\beta,0}}{A^{3333,0}} e^1_{\alpha\|\beta}(u).$$

Àl'order ε^{-2}

$$p^{-2}\left\{ \begin{aligned} & \int_\Omega (A^{ijkl,0} e^2_{k\|l}(u) e^0_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}(u) e^1_{i\|j}(v))\sqrt{a}\ dx \\ & + \int_\Omega B^{ijkl,1} e^1_{k\|l}(u) e^0_{i\|j}(v)\ dx + \int_\Omega P_{ij3}\partial_3\varphi^0 e^0_{i\|j}(v) dx = 0. \end{aligned} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega [A^{ijkl,0} e^2_{k\|l}(u)\sqrt{a}dx + B^{ijkl,1} e^1_{k\|l}(u) + P_{ij3}\partial_3\varphi^0] e^0_{i\|j}(v) dx + \int_\Omega A^{ijkl,0} e^1_{k\|l}(u) e^1_{i\|j}(v)\sqrt{a}dx = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \int_\Omega [A^{33kl,0} e^2_{k\|l}(u)\sqrt{a} + B^{33kl,1} e^1_{k\|l}(u) + P_{333}\partial_3\varphi^0]\partial_3 v_3^0\ dx + \int_\Omega A^{ijkl,0} e^1_{k\|l}(u) e^1_{i\|j}(v)\sqrt{a}\ dx = 0.$$

Si $v^1 = 0$ et $v^0 = (v_1^0, v_2^0, 0)$, on aura deux résultats :

1. $e^1_{3\|3}(u) = 0 \Longrightarrow u_3^0(x_1, x_2) = \xi_3(x_1, x_2).$

2. $$2\int_\Omega A^{\alpha3kl} e^1_{k\|l}(u) e^1_{\alpha3}(v)\sqrt{a}dx = 0 \Longrightarrow 2\int_\Omega A^{\alpha3kl} e^1_{k\|l}(u)\partial_3 v^0_\alpha\sqrt{a}dx = 0.$$

$$\Longrightarrow A^{\alpha3kl} e^1_{k\|l}(u) = 0.$$

$$\Longrightarrow A^{\alpha3\gamma\delta} e^1_{\gamma\|\delta}(u) + 2A^{\alpha3\gamma3} e^1_{\gamma\|3}(u) = 0.$$

$$\Longrightarrow A^{\alpha3\gamma3} e^1_{\gamma\|3}(u) = 0.$$

$$\Longrightarrow A^{\alpha3\gamma3}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial x_3}\right) = 0.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Pour\ \alpha = 1\ on\ a: & A^{1313}(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3}) + A^{1323}(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3}) = 0. \\ Pour\ \alpha = 2\ on\ a\ : & A^{2313}(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3}) + A^{2323}(\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3}) = 0. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\frac{\partial u_3^0}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial x_3}) = 0.$$
$$\Longrightarrow e_{\alpha 3}(u^0) = 0.$$
$$\Longrightarrow u_\alpha^0 = \xi_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial x_\alpha}.$$

On déduit que u^0 est un déplacement de Kirchoff-Love.

Si $v^0 = (0, 0, v_3^0)$ et $v^1 = 0$.

On aboutit à

$$\int_\Omega [A^{33kl,0} e^2_{k\|l}(u)\sqrt{a} + B^{33kl,1} e^1_{k\|l}(u) + P_{333}\partial_3\varphi^0]\partial_3 v_3^0 + [-\frac{A^{\alpha\beta 33}.A^{33\gamma\delta}}{A^{3333}} + A^{\alpha\beta\gamma\delta}] e^1_{\gamma\|\delta}(u) e^1_{\alpha\|\beta}(v) = 0.$$

À l'order ε^{-1}

$$p^{-1} \begin{cases} \int_\Omega P_{ij\alpha}\partial_\alpha\varphi^0 e^0_{i\|j}(v)\sqrt{a}\ dx + \int_\Omega A^{ijkl,0}(e^2_{k\|l}(u)e^1_{i\|j}(v) + e^1_{k\|l}(u)e^2_{i\|j}(v))\sqrt{a}\ dx \\ \quad + \int_\Omega P_{ij3}\partial_3\varphi^0 e^1_{i\|j}(v)\sqrt{a}\ dx + \int_\Omega P_{3jk} e^1_{j\|k}(v)\partial_3\psi^0\sqrt{a}\ dx \\ \quad + \int_\Omega B^{ijkl,1}[e^1_{k\|l}(u)e^1_{i\|j}(v) + e^2_{k\|l}(u)e^0_{i\|j}(v)]dx = 0. \end{cases}$$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail de mémoire présente une étude asymptotique d'un problème de Signorini avec frottement de Coulomb pour une coque peu-profonde piézoélectrique.

Vu le temps limité (3 mois et demi), le travail n'a pas été achevé.

Le processus asymptotique a été utilisés avec succès, on aboutit à l' identification des problèmes aux ordres successifs et l' étude de ces problèmes. Reste l'aboutissement du problème limite 2D, qui nécessite plus de temps.

Comme perspective je souhaite terminé ce travail et obtenir le problème limite.

En suite, justifier les résultats obtenus par l'analyse asymptotique formel par une méthode de convergence .

Annexe

Théorème 2.4.2 *(Formule de Green, cas H^1) Soit Ω un ouvert born convexe et Γ assez rgulire(C^1parmorceaux), alors $\forall\ u,\ v \in H^1(\Omega)$ et $\forall i \in 1, ..., N$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma uvn_i;$$

Théorème 2.4.3 *(Relèvement) Soit Ω un ouvert borné convexe et régulier de R^3. Soit Γ une partie de $\partial\Gamma$ de mesure non nulle. Alors il existe une constante $C_R(\Omega)$ tel que :*
$\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \exists u_g \in H^1(\Omega), \gamma_0(u_g) = g$
et on a :
$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C_R(\Omega)\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$

Théorème 2.4.4 *(trace) L'application $\gamma_0 : v \longrightarrow \gamma_0 v = v|_\Gamma \in C^\infty(\gamma)$ est une application linéaire continue de $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dans $C^\infty(\Gamma)et\gamma_0$ se prolonge en une application linéaire continue, notée γ_0 et normé trace de v, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et on a :*
pour tout $v \in H^1(\Omega)$:
$\|\gamma_0 v\|_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$

Bibliographie

[1] M.Berando and C.Haenel, Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shell 192,37-38(2003).

[2] D.A Chacha and A.Bensayah and A.Ghezal, Asymptotic modeling of Signorini problem with Coulomb friction for a linearly elastostatic shallow shell, Math.meth.Appl.Sci.2015.

[3] A.Bensayah, Modélisation asymptotique du problème de Signorini avec frottement pour les plaques minces, Magister, université de Ouargla.

[4] A. Léger and B.Miara, The obstacle problem for shallow shells in curvilinear coordinates, received 18 August 2010, accepted 14 September 2010

[5] J.C Paumier, Contact unilatéral des structures minces pages 177-187.

[6] Isabel N.F and Georg.S, Frictional contact of anisotropic piezoelectic plate, POCTI/MAT/59502/2004.

[7] P.G.Ciarlet. Mathematical elasticity volume III : Theory of shells, printed in the Netherlands, 1992.

[8] P.G.Ciarlet. An introduction to differential geometry with applicaition to elaticity, reprinted from journal of elasticity, vol. 78-79 (2005) .

[9] H.F.Tiersten. Elements of the linear theory of piezoelectricity and the vibrations of piezoelectric plates, Linear Piezoelectric plate vibrations, Springer science+ business media, LLC 1969.