



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

**Facult des mathématiques et sciences de la
matière**

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Master

Spécialité: Mathématiques

Option: Analyse

Par: Rimi Khazzani

Thème

**Résolution analytique du problème d'écoulement sans l'effet
de gravité**

Version de: 25 mai 2016

Devant le jury composé de:

Mr. Acila Mustapha	MCB UKMO universit - Ouargla	Prsident
Mr. Badidja Salim	MAA UKMO universit - Ouargla	Examineur
Mr. Amara abdelKadar	MAA UKMO universit - Ouargla	Rapporteur

Dedicace

Je tiens à dédier cet effort scientifique à :

ma chère mère **Rimi Saida**.

et mon cher père **Abdelouahab**

A mes frères **Okba, Arafat, Mohamed Ridha, Hacene**

et mes soeurs **Rim, Ouarda, Hania**.

A mes oncles **Ali, Abdelhamid**.

La famille : **Rimi**.

Tous mes amis en particulier : **Aziz, Ahmed, Djamel, Hacene, Chouaib, Djalal**.

A tous mes amis de la promotion,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

Remerciements

Le remerciement infini avant tous est à Dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **Amara Abdelkader**, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **Acila Mustapha** d'avoir accepté la présidence du jury de cette mémoire, sa présence m'honore grandement. Je le prie d'accepter mes remerciements.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs **Badidja Salim et Guerfi Amara** pour avoir accepté d'examiner mon travail, qu'ils trouvent ici mes profonds respects.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations et Conventions

► $\nabla \cdot v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v .

► $\vec{\text{rot}}(v) = \nabla \wedge v$.

► $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

► $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

► $\vec{V} = \vec{V}(x, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

► $\text{div}(\text{gradu}) = \Delta u$.

► $\vec{\text{rot}}(\nabla u) = 0$.

► $\text{div}(\text{rot}\vec{u}) = 0$.

Colinéarité : deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E sont colinéaires s'il existe un scalaire k tel que $u = kv$ ou $v = ku$

Table des matières

Dedicace	i
Remerciements	ii
Notations et Conventions	iii
Introduction	vi
1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	2
1.1 Résumé	2
1.2 Notion de base de l'écoulement	2
1.2.1 Equation de continuité	2
1.2.2 Fluide incompressible	3
1.2.3 Fluide irrotationnel	3
1.2.4 Lignes de courant :	3
1.2.5 Trajectoire	5
1.3 Potentiel de vitesse	6
1.4 Fonction de courant	7
1.5 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe	7
1.6 Equation de Bernoulli	8
2 Les transformations conformes	10
2.1 Résumé	10
2.2 Les définitions	10
2.3 Quelques transformations conformes	12

2.3.1	Transformation de Schwarz-Christoffel	12
2.3.2	Transformation d'hodograph	13
3	Problème d'un écoulement d'un jet devant une plaque verticale sans tension de surface et sans effet de gravité	15
3.1	Résumé	15
3.2	Introduction	15
3.3	Formulation de problème	16
3.3.1	Résolution de problème	18
	Conclusion	30

Introduction

Les écoulements à surface libre de type jet sont présents dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages. Compte tenu de son importance pratique, ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre en raison d'un jet devant une plaque verticale. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables (x, y) de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$. En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel. L'idée essentielle de la méthode de Kirchhoff est la suivante : on caractérise chacun des champs dans son espace

- le champ cinématique dans un espace f voir figure 3.2
- le champ potentiel dans un espace Γ voir figure 3.

On utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler Γ . Il reste donc à déterminer les changements de variable $\beta(\Gamma)$ et $\beta(f)$ à effectuer. Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre $\beta(\Gamma)$ et $\beta(f)$. on s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre

Ce mémoire de fin d'études comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons abordé les notions fondamentales de mécanique des fluides donc nous avons besoin dans notre étude.

Concernant le deuxième chapitre, on a étudié les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode de la ligne de courant libre.

Dans le dernier chapitre, on a traité les écoulements plans incompressibles et irrotationnels afin de trouver la solution exacte du problème d'écoulement traité, où on a en négligé les tensions de surface et les forces de gravité.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Résumé

Dans ce chapitre, on présente les concepts de base de la mécanique des fluides : propriétés des fluides, équations fondamentales du mouvement des fluides pour un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux.

1.2 Notion de base de l'écoulement

1.2.1 Equation de continuité

En mécanique des fluides, le principe de conservation de la masse peut être décrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{q}) = 0 \quad (1.1)$$

En utilisant la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \times \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \times \operatorname{grad}(\rho) \quad (1.2)$$

l'équation(1.1) devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \times \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \times \operatorname{grad}(\rho) = 0 \quad (1.3)$$

1.2.2 Fluide incompressible

Le fluide incompressible, i.e $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'équation de continuité devient :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1.4)$$

on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \rho = \text{const}$$

alors :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \times \operatorname{div} \vec{V}$$

donc :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1.5)$$

1.2.3 Fluide irrotationnel

Le fluide irrotationnel, i.e

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0$$

1.2.4 Lignes de courant :

Pour un instant fixe, lorsqu'une ligne est tracée de façon à ce que le vecteur vitesse soit tangente à cette ligne, en chacun de ses points, alors cette courbe est appelée ligne de courant.

Soit \vec{ds} un segment de courbe infinitésimal, le vecteur vitesse \vec{V} est porté par ce segment (voir figure 1.1).

Ces deux vecteurs sont colinéaires, ce qui permet d'écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} \wedge \vec{ds} = \vec{0}$$

on a :

$$\vec{V} \wedge \vec{ds} = \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_y dz - V_z dy \\ V_z dx - V_x dz \\ V_x dy - V_y dx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{cases} V_y dz - V_z dy = 0 \\ V_z dx - V_x dz = 0 \\ V_x dy - V_y dx = 0 \end{cases}$$

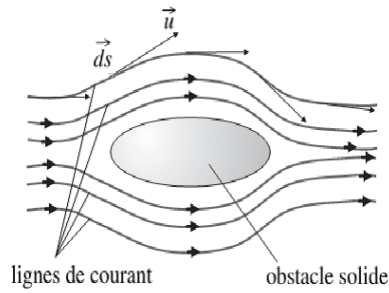


figure 1.1

Et par conséquent :

$$\frac{dx}{V_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{V_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{V_z(x, y, z, t)} \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) constitue l'équation des lignes de courant et où le temps « t » est fixé. On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant au même instant sur un contour fermé quelconque. Un tube de courant est défini de telle sorte qu'il n'y ait pas d'intersection entre les lignes de courant (voir figure 1.2)

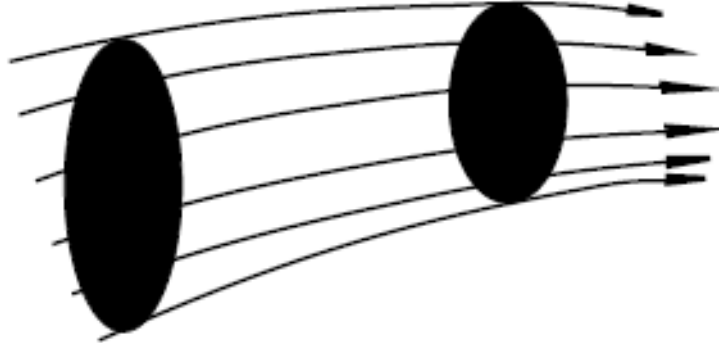


figure 1.2 Tube de courant.

1.2.5 Trajectoire

On appelle trajectoire la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champ de l'écoulement.

En comparant avec les lignes de courant, comme l'illustre la figure 1.3, il apparaît que la ligne de courant est relative à un même instant mais regroupe des particules différentes alors que la trajectoire, qui réfère à une même particule, est une courbe paramétrée en temps. Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t) \end{array} \right. \quad (1.7)$$

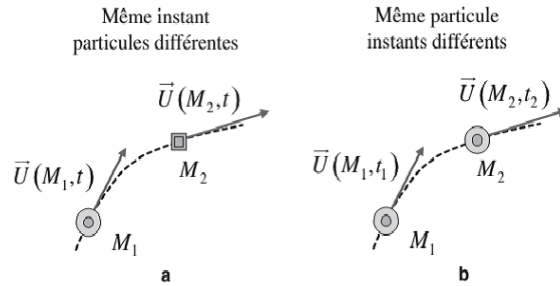


figure :1.3 Comparaisons des (a) lignes de courant et (b) trajectoires.

1.3 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{V} est irrotationnel, on peut définir une fonction φ scalaire telle que

$$\vec{V} = \text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien, en considérant un écoulement plan ($\vec{V} = (u, v)$), on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \implies \Delta\varphi = 0$$

où φ vérifie l'équation de Laplace.

1.4 Fonction de courant

Si l'écoulement est dans un domaine plan alors le vecteur vitesse est vérifié pour tout point de ce domaine, à l'instant t on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Cela implique que la forme différentielle $udx + vdy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d\psi = udx + vdy$$

Implique

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

où ψ s'appelle la fonction de courant.

. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u = \partial\psi/\partial y \\ v = -\partial\psi/\partial x \end{vmatrix} = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2 = 0 \implies \Delta\psi = 0$$

, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.5 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ou $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (φ et ψ représentent respectivement les fonctions potentiel et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes :

- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f

- $f(z)$ est une fonction analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \implies \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v \end{cases}$$

Ce système d'équation constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

conclusion :

Pour que $f(z)$ analytique, il faut que φ et ψ vérifiant les relations de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe des vitesses.

Propriétés :

On constate pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel des vitesses φ , il faut que ces deux fonctions vérifient l'équation de Laplace ($\Delta\varphi = 0$ et $\Delta\psi = 0$)

Définition :

On appelle écoulement uniforme si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace on note la vitesse par U .

1.6 Equation de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement. Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique.

Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivante :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g Z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g Z_2$$

où p_i est la pression aux points A_i où $i = 1, 2$.

Si le fluide non visqueux dans ce cas $\Delta p_i = 0$. L'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g Z = \text{const}$$

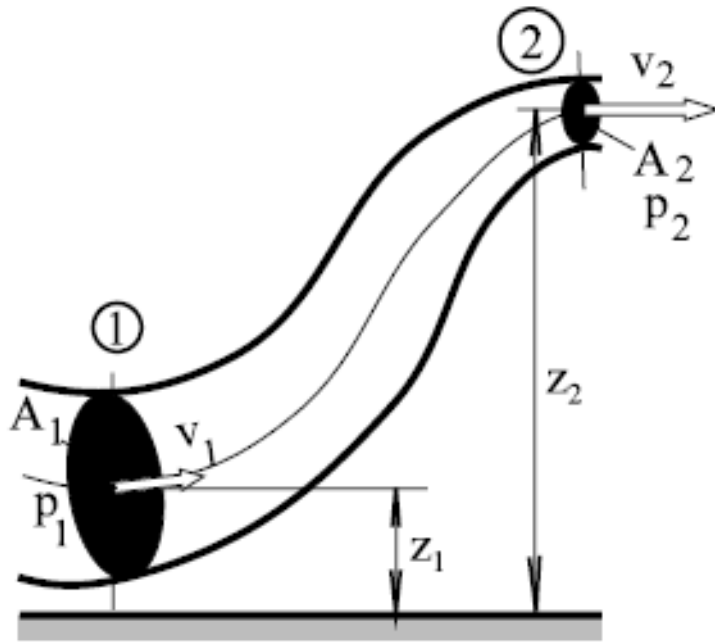


figure :1.4

Chapitre 2

Les transformations conformes

2.1 Résumé

Dans ce chapitre, on va présenter les transformations conformes générales, aussi on va parler sur quelques particules de transformations conformes, telles que la transformation schwarz-christoffel et transformation d'hodographe.

2.2 Les définitions

Définition 1 Soit $f : R^2 \rightarrow R^2$ une fonction différentiable au sens des fonctions de deux variables réelles, et non constantes au voisinage d'un point (x_0, y_0) . On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0) , les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même angle orienté que les vecteurs tangentes aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$ (voir figure 2.1)

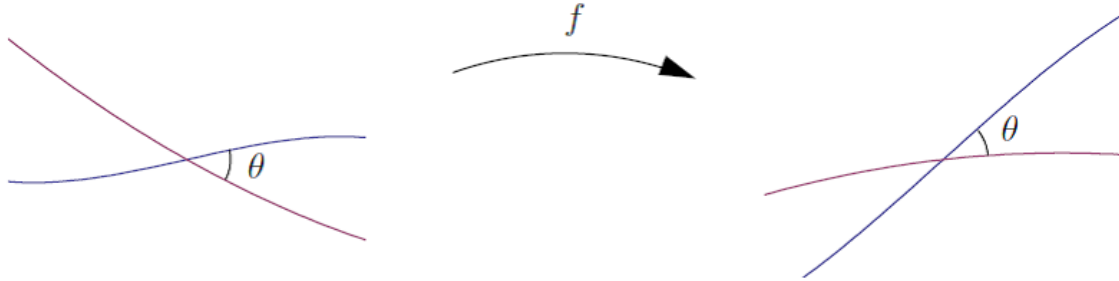


figure2.1 :transformation conforme

Proposition 2.2.1 *soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point $z_0 \in C$ et telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors f préserve les angles au point z_0 .*

Définition 2 *Une fonction $f : \Omega \subset R^2 \longrightarrow R^2$ différentiable et qui préserve les angles et tout point de l'ouvert, supposé connexe, Ω est appelée transformation conforme. L'ensemble image $f(\omega)$ est appelé représentation conforme de l'ouvert ω*

Corollaire 2.2.2 *Toute transformation f holomorphe sur Ω dont la dérivée ne s'annule pas est une transformation conforme.*

Théorème 2.2.3 *Une fonction polygène définie dans une région Ω est conforme sur cette région si et seulement si elle y est analytique. Une fonction polygène sur cette même région est anticonforme si et seulement si elle y est analytique en z (c-'a-d anti-analytique ou anti-holomorphe).*

2.3 Quelques transformations conformes

2.3.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

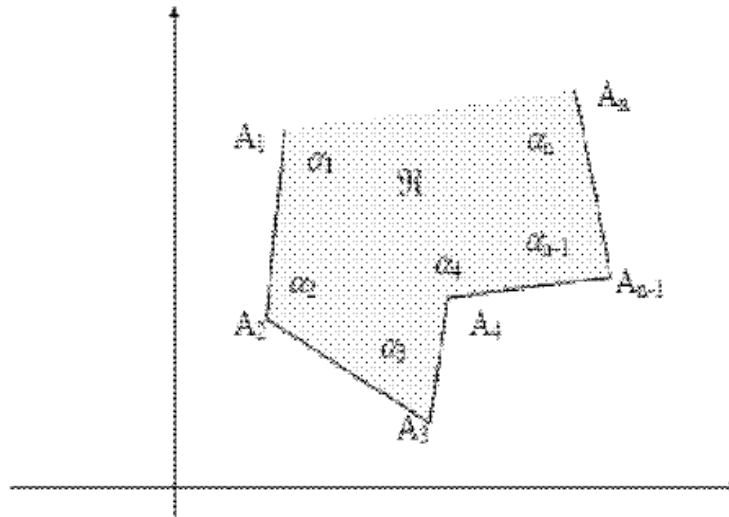


figure2.2 : plan de la variable Ω

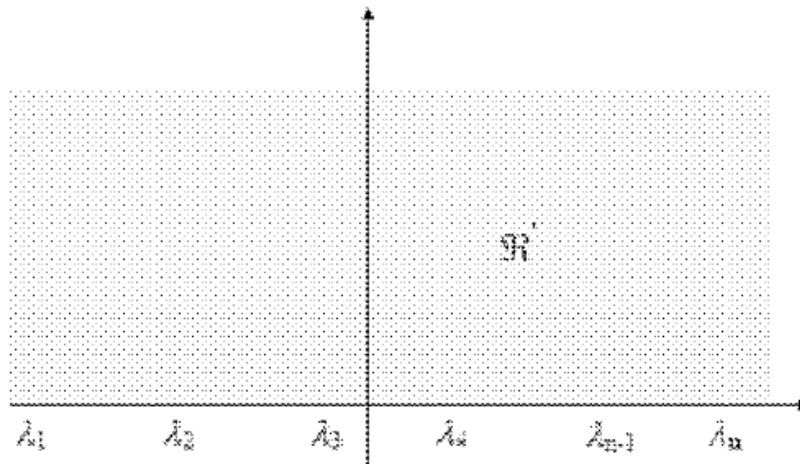


figure2.3 : plan de la variable λ

La transformation de Schwarz-Christoffel $z = f(\Omega)$, transforme l'intérieur d'un polygone du plan complexe Ω dans demi-plan supérieur (resp. inférieur) de la variable complexe z . Considérons un polygone P dans le plan Ω des sommets A_1, A_2, \dots, A_n et des angles intérieurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivement (voir figure2.2). Supposons que les points A_1, A_2, \dots, A_n transférés aux points x_1, x_2, \dots, x_n respectivement dans le plan réel z (voir figure 2.3). La

transformation de Schwarz-Christoffel $z = f(\Omega)$ qui transfère l'intérieur du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan z avec la correspondance des sommets A_1, A_2, \dots, A_n aux points x_1, x_2, \dots, x_n . Cette transformation est définie par :

$$\frac{d\Omega}{dz} = M(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (z - x_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \quad (2.1)$$

par intégration

$$\Omega = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (z - x_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B \quad (2.2)$$

avec A et B sont des constantes complexes qui déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone. L'application Ω est dite transformation de Schwarz-Christoffel.

Remarque :

1. On peut choisir trois points arbitraires parmi les n points x_1, x_2, \dots, x_n
2. Il commode de choisir parmi les x_1, x_2, \dots, x_n un point à l'infini, par exemple x_n , cas dans lequel la dernier facteur de (2.1) et (2.2) n'existe pas.

2.3.2 Transformation d'hodograph

Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte de problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur les quelles la pression est supposée constante. L'idée de base de cette transformation est l'introduction de la variable complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta$$

ou $z = x + iy, f = \varphi + i\psi, \frac{df}{dz} = u - iv$ et $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ avec (u, v) sont les composantes du vecteur vitesse V , θ est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

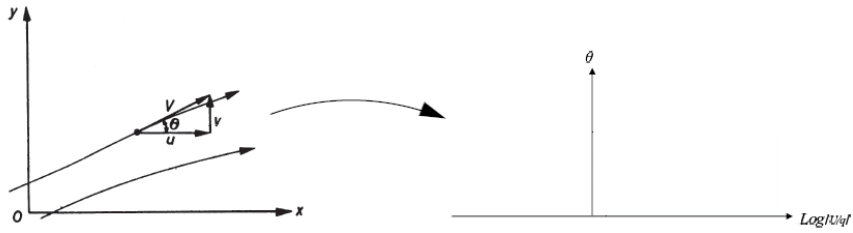


figure2.4 :transformation d'hodographe

On remarque que La fonction Ω possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de Ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log\left(\frac{U}{q}\right) = const$
- La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = const$

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan Ω vers la moitié supérieure (resp. inférieure) d'un autre plan d'une certaine variable complexe λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

Chapitre 3

Problème d'un écoulement d'un jet devant une plaque verticale sans tension de surface et sans effet de gravité

3.1 Résumé

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, le plan des variables (x, y) de l'écoulement peut être identifié au plan de la variable complexe $z = x + iy$. En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, on peut trouver la solution exacte en utilisant la transformation conforme d'hodographe due à Kirchhoff (1869) et la transformation de Schwarz-Christoffel.

3.2 Introduction

Le problème de la détermination de la surface libre en raison d'un jet devant une plaque verticale est considéré. comme problème classique de la libre circulation aérodynamique d'un fluide parfait et a été étudié par de nombreux auteurs. Les premiers travaux dans ce type de problème se caractérisent par l'utilisation de la formule Schwarz-Christoffel. Celle-ci peut étudier les écoulements sur la frontière, qui combine parois rectilignes et surface libre. Un écoulement bidimensionnel d'un jet d'un fluide empiétant sur un mur en négligeant les forces de gravité étudiée par W. Peng et D. F. Parker en utilisant la méthode des équations intégrales.

3.3 Formulation de problème

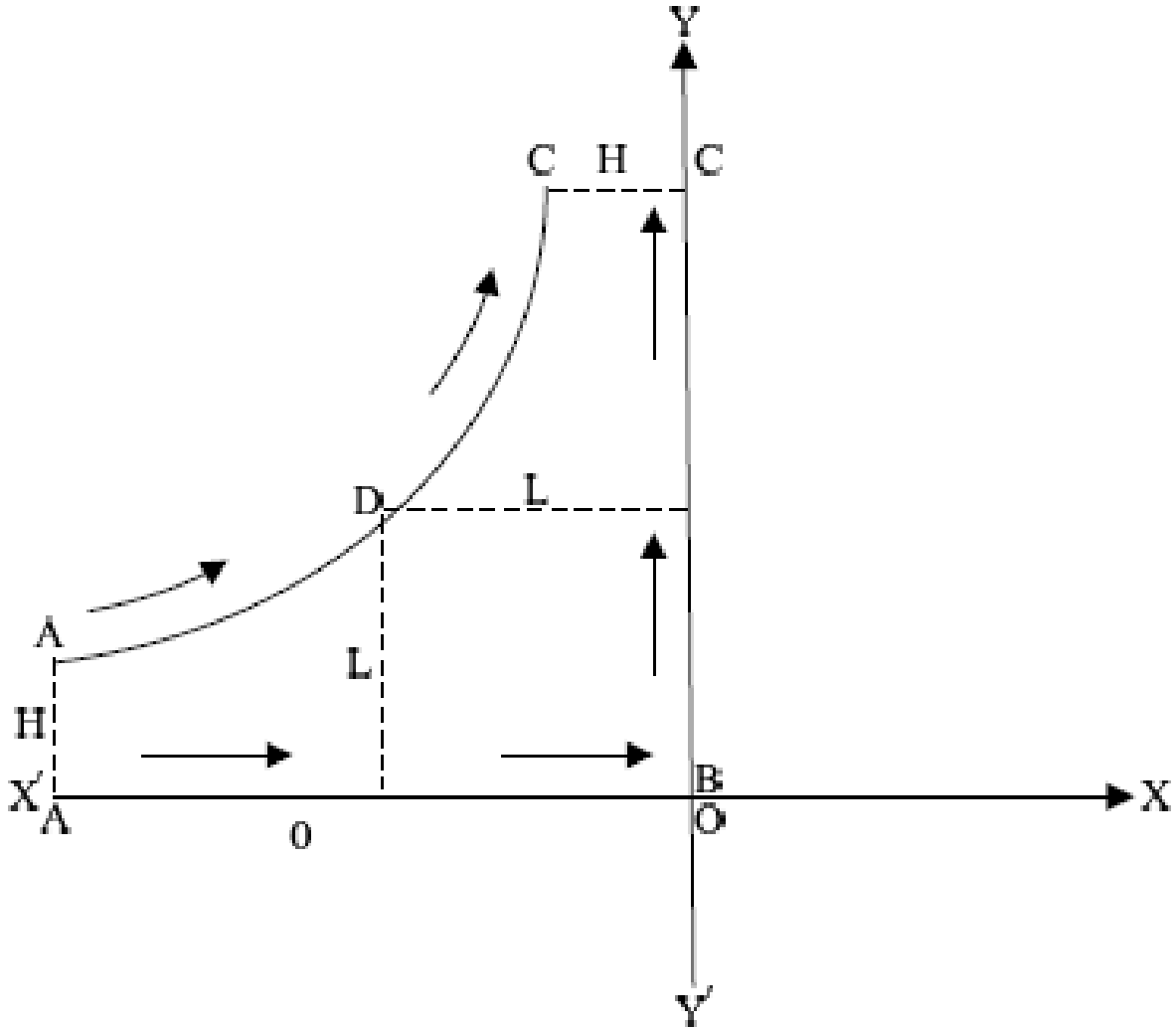


figure3.1 :Schéma de l'écoulement et des coordonnées($z - plan$).

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel pour trouver la solution exacte du problème défini comme suit. Considérons un écoulement bi-dimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux, On suppose que l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse U et la pression est constante sur la ligne de

courant libre. On choisit AB sur l'axe XOX' BC sur l'axe YOY' (figure 3.1).

On suppose que l'écoulement est uniforme, de vitesse U et d'amplitude H , ou $x \rightarrow -\infty$ et $y \rightarrow +\infty$. Le débit est limité supérieurement par le linge du courant AC , pour x négatif. On désigne par $\xi = u - iv$ la vitesse complexe tel que u et v sont les composantes de la vitesse, et par $f = \varphi + i\psi$ la fonction de potentiel complexe être respectivement φ et ψ la fonction potentiel et la fonction de courant. La fonction f transforme z -plan en une bande infinie. (voir Figure 3.2)

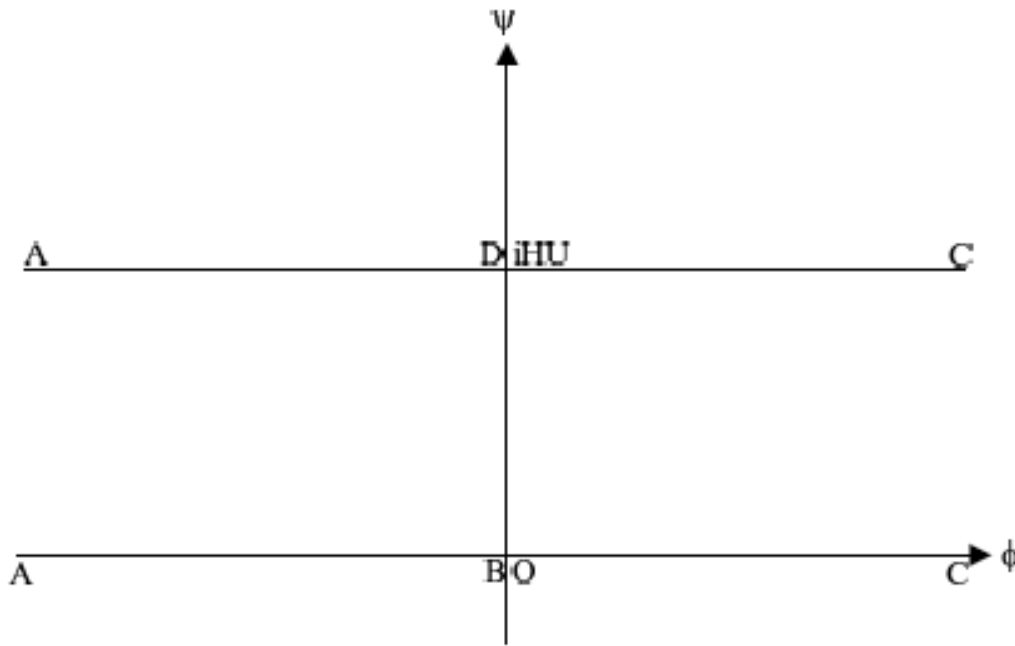


figure 3.2 : f -plan

Le problème mathématique consiste à déterminer la fonction potentielle φ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ dans le domaine d'écoulement} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{sur AB} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur BC} \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) = C^{st} \text{ sur AC} \end{array} \right.$$

3.3.1 Résolution de problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème. Pour résoudre ce problème, nous utilisons d'abord la méthode de la théorie courant libre introduit par Kirchhoff, basée sur la transformation d'hodographe. la transformation complexe est définie par :

$$\Gamma = \log\left(\frac{Udz}{df}\right) = \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.$$

Ou $z = x + iy$, q et θ sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe horizontale, respectivement. Par cette dernière transformation, le champ occupé par le fluide dans le $z - plan$ est transformé en bande semi-infinie dans le $\Gamma - plan$ (voir figure 3.3).

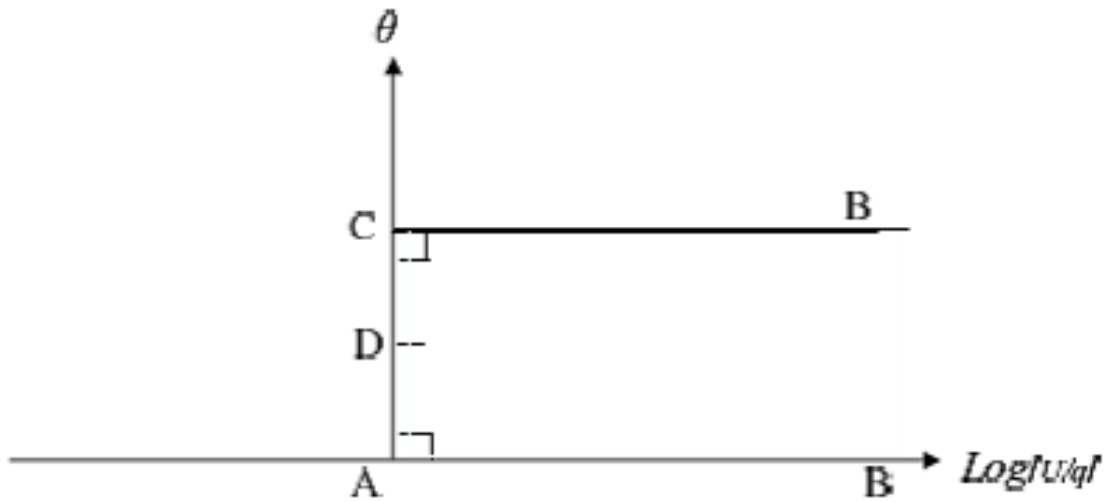


figure 3.3 : $\Gamma - plan$

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans (figure3.3) à en demi-plan($\beta - plan$), est donnée par le théorème de Schwarz-Christoffel, en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement (voir Figure 3.4).

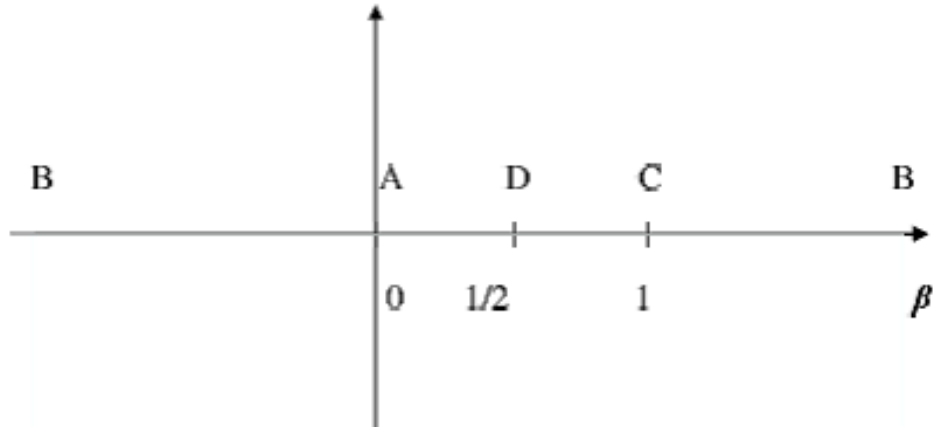


figure 3.4 : $\beta - plan$

- On va chercher une relation entre β et Γ :

On applique la transformation Schwarz-christoffel :

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = k(\beta - \beta_1)^{p_1}(\beta - \beta_2)^{p_2} + \dots(\beta - \beta_n)^{p_n} \quad \text{et} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \quad (3.1)$$

on utilise les points $(A(0,0), C(1,0))$ dans $\beta - plan$ et $(A(0,0), C(0, i\pi/2))$ dans $\Gamma - plan$.

$$p_A = \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -1/2 \quad \text{alors} : p_A = -1/2$$

$$p_C = \frac{\pi/2}{\pi} - 1 = -1/2 \quad \text{alors} : p_C = -1/2.$$

on substitue ces données dans l'équation(3.1)on trouve :

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = k(\beta - 0)^{\frac{-1}{2}} (\beta - 1)^{\frac{-1}{2}}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\beta} &= \frac{k}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta-1}} & (3.2) \\ \Rightarrow \int d\Gamma &= k \int \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta-1}} \\ \Rightarrow \Gamma - \Gamma_0 &= 2k \ln(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1}) \end{aligned}$$

alors :

$$\Gamma = \Gamma_0 + 2k \ln(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta - 1}) \quad (3.3)$$

Ensuite on va déterminer le valeur Γ_0, k :

On remplace le point $C(\beta = 1, \Gamma = i\frac{\pi}{2})$ dans l'équation(3.3) trouve :

$$\begin{aligned} i\frac{\pi}{2} &= \Gamma_0 + 2k \ln(\sqrt{1} + \sqrt{1 - 1}) \\ &\implies \Gamma_0 = i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La détermination de valeur k :

en substitue le point $A(\beta = 0, \Gamma = 0)$ dans l'équation(3.3)on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= i\frac{\pi}{2} + 2k \ln(\sqrt{0} + \sqrt{0 - 1}) \\ \implies -i\frac{\pi}{2} &= 2k \ln(\sqrt{-1}) = 2k\sqrt{i^2} = 2k \ln i \\ \implies k &= -i\frac{\pi}{2} \frac{1}{2 \ln i} \\ \implies k &= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ln i}{i} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \implies e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\ \implies \ln(e^{i\frac{\pi}{2}}) &= \ln i \\ \implies i\frac{\pi}{2} &= \ln i \\ \implies k &= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \\ \implies k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{d\Gamma}{d\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{\beta}\sqrt{\beta-1}} \quad (3.4)$$

L'équation(3.4) :

$$\Leftrightarrow \frac{d\Gamma}{d\beta} = \frac{-1}{2\sqrt{\beta}\sqrt{\beta-1}}$$

donc :

$$\Gamma = i\frac{\pi}{2} - \ln(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta-1}) \quad (3.5)$$

L'équation(3.5)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^\Gamma &= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{\ln(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta-1})} \\ \Rightarrow e^\Gamma &= i \frac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta-1}} \\ \Rightarrow e^\Gamma &= i \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1}}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta-1})(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1})} \\ \Rightarrow e^\Gamma &= i(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1}) \\ \Rightarrow \frac{e^\Gamma}{i} &= \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1} \\ \Rightarrow \frac{e^\Gamma}{i} - \sqrt{\beta} &= -\sqrt{\beta-1} \\ \Rightarrow \sqrt{\beta} - \frac{e^\Gamma}{i} &= \sqrt{\beta-1} \\ \Rightarrow (\sqrt{\beta} - \frac{e^\Gamma}{i})^2 &= (\sqrt{\beta-1})^2 \\ \Rightarrow (\beta - e^{2\Gamma} - \frac{2}{i}\sqrt{\beta}e^\Gamma) &= \beta - 1 \\ \Rightarrow 1 - e^{2\Gamma} &= \frac{2\sqrt{\beta}e^\Gamma}{i} \\ \Rightarrow (\frac{1 - e^{2\Gamma}}{2e^\Gamma})i &= \sqrt{\beta} \\ \Rightarrow \sqrt{\beta} &= -i \sinh(\Gamma) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\beta = -\sinh^2 \Gamma} \quad (3.6)$$

- On va chercher la dépendance entre f et β :

On utilise la transformation christoffel-schwarz :

$$\frac{df}{d\beta} = M(\beta - \beta_3)^{p_3}(\beta - \beta_4)^{p_4} \dots (\beta - \beta_n)^{p_n} \quad \text{et} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$$

et les points :

$A(\infty, iHU), C(\infty, iHU), D(0, iHu), B(0, 0)$ dans le f - plan

$A(0, 0), D(1/2, 0), C(1, 0)$, dans le β - plan

$$\frac{df}{d\beta} = M(\beta)^{-1}(\beta - 1)^{-1} = \frac{M}{\beta(\beta - 1)} \quad (3.7)$$

En intégre cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \int df &= M \int \frac{d\beta}{\beta(\beta - 1)} \\ \implies f - f_0 &= M \int \frac{d\beta}{\beta(\beta - 1)} \\ \implies f - f_0 &= M \left(\int \frac{d\beta}{\beta - 1} - \int \frac{d\beta}{\beta} \right) \\ \implies f - f_0 &= M \left(\int \frac{d\beta}{\beta - 1} - \int \frac{d\beta}{\beta} \right) \\ \implies f &= M[(\ln(\beta - 1) - \ln \beta)] + f_0 \\ f &= M \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) + f_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

On va déterminer les valeurs f_0 et M :

on choisit le point $B(\beta = \infty, f = 0)$ on trouve :

$$0 = M \ln\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + f_0$$

On a : $\lim \ln(1 - \frac{1}{\beta}) = 0$ quand $\beta \mapsto \infty$

$$\implies f_0 = 0$$

alors l'équation (3.8) devient :

$$f = M \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right)$$

Pour déterminer M, on choisit le point $D(\beta = 1/2, f = iHU)$:

$$\begin{aligned} iHU &= M \ln\left(\frac{1/2 - 1}{1/2}\right) \\ \implies iHU &= M \ln(-1) \\ \implies iHU &= M \ln(i^2) = 2M \ln(i) \\ \implies M &= \frac{iHU}{2 \ln i} \end{aligned}$$

on utilise :

$$\frac{\ln i}{i} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$M = \frac{2HU}{2\pi} = \frac{HU}{\pi}$$

L'équation (3.8) devient :

$$\begin{aligned} f &= \frac{HU}{\pi} \ln\left(\frac{\beta - 1}{\beta}\right) \\ \implies \frac{f\pi}{HU} &= \ln\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \\ \implies e^{f\pi/HU} &= 1 - \frac{1}{\beta} \implies \frac{1}{\beta} = 1 - e^{f\pi/HU} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{1 - e^{f\pi/HU}}} \quad (3.9)$$

• La recherche de la relation entre z et β :

On utilise la fonction de kirchoff :

$$\Gamma = \log\left(U \cdot \frac{dz}{df}\right) \quad (3.10)$$

$$\implies e^\Gamma = U \cdot \frac{dz}{df}$$

Alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^\Gamma \quad (3.11)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\beta} &= \frac{HU}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \frac{dz}{d\beta} &= \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\beta} \\ \frac{dz}{d\beta} &= \frac{1}{U} \cdot e^\Gamma \cdot \frac{HU}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(\beta-1)} \\ \frac{dz}{d\beta} &= \frac{e^\Gamma H}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(\beta-1)} \end{aligned}$$

On utilise la relation précédente :

$$e^\Gamma = i(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1})$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\beta} &= \frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(\beta-1)} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta-1}) \\ \implies \frac{dz}{d\beta} &= -\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)} (\sqrt{\beta} - \sqrt{-(1-\beta)}) \\ \implies \frac{dz}{d\beta} &= -\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)} (\sqrt{\beta} - \sqrt{i^2(1-\beta)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{dz}{d\beta} &= -\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)} \cdot (\sqrt{\beta} - i\sqrt{(1-\beta)}) \\
\implies \frac{dz}{d\beta} &= -\frac{Hi}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta(1-\beta)}} - \frac{H}{\pi} \frac{1-\beta}{\beta\sqrt{1-\beta}} \\
\implies \frac{dz}{d\beta} &= -\frac{H}{\pi} \left[\frac{1}{\beta\sqrt{1-\beta}} + i \frac{1}{\sqrt{\beta(1-\beta)}} \right]
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{dz = -\frac{H}{\pi} \left[\frac{d\beta}{\beta\sqrt{1-\beta}} + i \frac{d\beta}{\sqrt{\beta(1-\beta)}} \right]} \quad (3.12)$$

l'équation (3.12) \implies

$$\int dz = -\frac{H}{\pi} \left[\int \frac{d\beta}{\beta\sqrt{1-\beta}} + i \int \frac{d\beta}{\sqrt{\beta(1-\beta)}} \right] \quad (3.13)$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{d\beta}{\beta(\sqrt{1-\beta})}$$

On utilise le changement de variable :

$$1 - \beta = t^2$$

$$\implies -d\beta = 2tdt$$

alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{-2t}{(1-t^2)t} dt \\
I_1 &= \int \frac{-2}{(1-t^2)} dt = -\int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} \\
I_1 &= \ln(1-t) - \ln(1+t) = \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)
\end{aligned}$$

alors :

$$I_1 = -\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

donc :

$$I_1 = -\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}}\right)$$

On calcule $I_2 : I_2 = \int \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}(1-\beta)}$

On pose :

$$\beta = t^2 \implies d\beta = 2tdt \text{ et, } \sqrt{\beta} = t$$

alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2t}{t(1-t^2)} dt \\ \implies I_2 &= \int \frac{2}{(1-t^2)} dt \\ \implies I_2 &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\ \implies I_2 &= \ln\left(\frac{1+\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\beta}}\right) \end{aligned}$$

donc l'équation (3.14) devient :

$$\begin{aligned} z - z' &= -\frac{H}{\pi} \left[-\ln \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} + i \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right) \right] \\ \implies x + iy - x' - iy' &= -\frac{H}{\pi} \left[-\ln \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} + i \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}}\right) \right] \\ \implies x - x' + i(y - y') &= \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} - i \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \\ \implies \begin{cases} x = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} + x' \\ y = \frac{-H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + y' \end{cases} \end{aligned}$$

puisque l'écoulement est : $y > 0$ et $x < 0$ alors :

$$\begin{cases} x = \frac{-H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} + x' \\ y = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + y' \end{cases} \quad (3.14)$$

on choisit le point D ; $z_0 = -L + iL$ et le point D ; $\beta = 1/2$, on trouve :

$$\begin{cases} -L = \frac{-H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-1/2}}{1 - \sqrt{1-1/2}} + x' \\ L = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1/2}}{1 - \sqrt{1/2}} + y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -L = \frac{-H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})^2 + x' \\ L = \frac{H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})^2 + y' \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} x' = -L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\ y' = L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} - L + \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\ y = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + L - \frac{2H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \quad (3.15)$$

L'amplitude du jet de l'origine est :

$$H = \lim_{\beta \rightarrow 0} y(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + L - 2\frac{H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})$$

donc :

$$H = L - 2\frac{H}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \quad (3.16)$$

On représente C comme le degré de l'écoulement de contraction :

$$C = \frac{H}{L} = \frac{L - 2H/\pi \log(1 + \sqrt{2})}{L}$$

$$C = 1 - \frac{2H}{\pi L} \log(1 + \sqrt{2}) = 1$$

$$\begin{aligned}
C &= 1 - \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) \\
C + \frac{2C}{\pi} \log(1 + \sqrt{2}) &= 1 \\
C(1 + \frac{2}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})) &= 1 \\
C &= \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})} \\
C &= 0.64
\end{aligned} \tag{3.17}$$

On substitue l'équation (3.16) dans l'équation (3.15) on trouve :

$$\begin{cases}
x = -\frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} - H & , 0 \leq \beta \leq 1 \\
y = \frac{H}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + H
\end{cases} \tag{3.18}$$

On écrit : $\bar{x} = \frac{x}{H}, \bar{y} = \frac{y}{H}$, l'équation (3.18) devient :

$$\boxed{
\begin{cases}
\bar{x} = \frac{x}{H} = -\frac{1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-\beta}}{1 - \sqrt{1-\beta}} - 1 & , 0 \leq \beta \leq 1 \\
\bar{y} = \frac{y}{H} = \frac{1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} + 1
\end{cases}
} \tag{3.19}$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre.

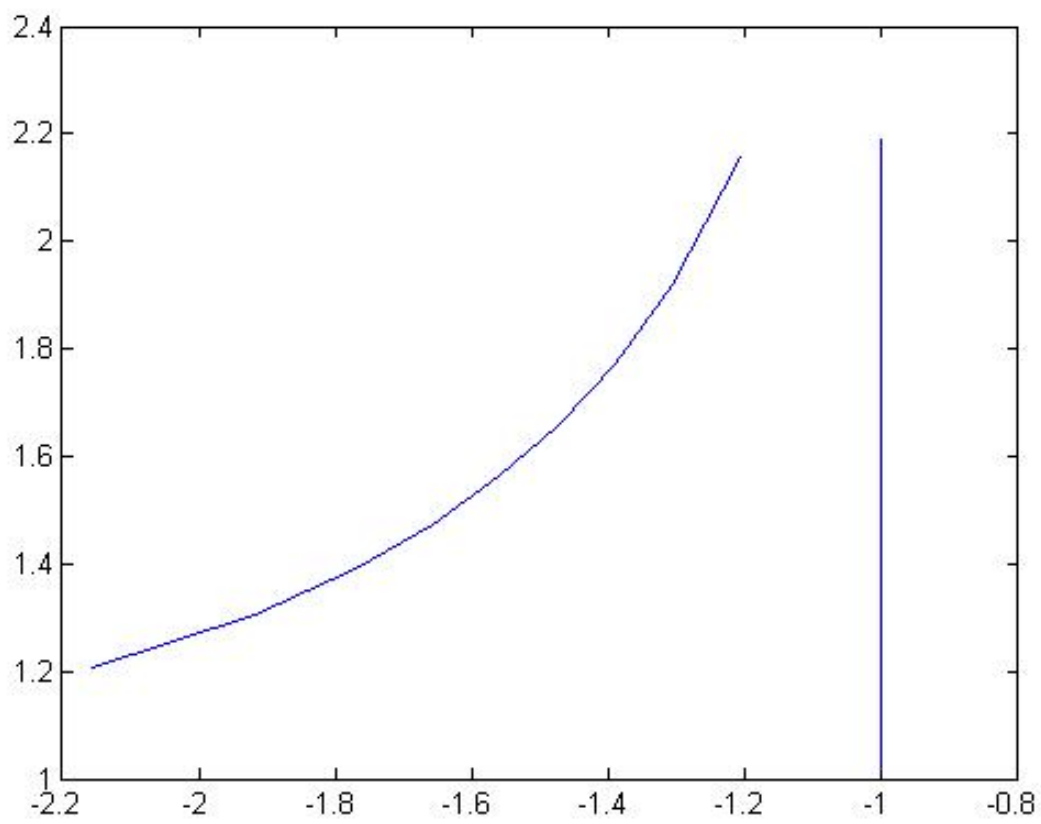


figure3.5 : forme de la surface libre

Conclusion

On étudie un problème d'écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux. Traitement analytique de ce problème dans cas où les effets de gravité et de la tension de surface sont négligés en utilisant la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel pour trouver la forme de surface libre

Bibliographie

- [1] B.Bouderah,A.Gasmi and H.serguine , *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*,International Mathematical Forum,2,2007,no.66,3273-3277.
- [2] W.Peng and D.F.Parker, *An ideal fluid jet impinging on an uneven wall*,J.Fluid Mech.N° 333(1997),231-255.
- [3] Bloor, *Large amplitude surface waves* ,J.Fluid Mech.N° 84(1978),167-179).
- [4] King,A.C., *A note on the impact of a jet on a porous wall.* ,IMA J.Appl.Maths.,N°45,(2002),139-146.
- [5] H.Serguine, *Numerical resolution of a non-linear problem in a field at free border due to a jet against a infinite plate.*,Thesis of Magister University of M'sila,(2004).
- [6] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, *Mécanique des fluides*,Dunod,Paris,2011 ISBN 978-2-10-056922-9.
- [7] E. Abdelkader Gasmi, H. Mekias, *A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects*, *Applied Math Sciences*,vol.1, 2007, no. 54, 2687 - 2698.
- [8] G. Birkhoff et E. H. Zarantonello, *Jets, Wakes, And Cavities* ,New-York (1957).
- [9] M. i. Gurevich , *The Theory of Jets in an ideal fluid*, *International Series of Monographs in Pure and Applied Math*,vol. 93, Oxford-London (1966).

- [10] S. N. hanna, *Free surface flow over a polygonal and smooth topography*, *Acta Mechanica*, Springer-Verlag, 1993, 241 - 251
- [11] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi , *Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall*, *Applied Math Sciences* , vol.1,2007, no. 47, 2313 - 2326.
- [12] Jean-Marc Vanden-Broeck, *The infuence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle*, *J. Fluid. Mech.* (1983), vol.133, pp 255 - 264
- [13] Y. f. Li, J. M. chuang et C. C. Hsiung, *Computation Nonlinear 2-D free surface flow using the Hilbert method*, *Univesity of Nova Scotia Halifax*, Canada