UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par :FORTAS Nour El Houda

Thème

Méthode de pénalisation pour le problème d'obstacle

Soutenu publiquement le : 26/05/2016

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Ghezal Abderrazek	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes encadreur MERABET Ismail de qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à M^r ***MERABET ISMAIL***, docteur à l'université de Kasdi Merbah Ouargla, pour avoir accepté de diriger ce travaille. Je le remercie infiniment pour avoir toujours été présent par ses conseils, ses encouragements et sa gentillesse. Je voudrai aussi le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail.

Table des matières

Dédication **i**

Remerciement **ii**

Notations et Prémilinaires **1**

1 Modélisation **4**

1.1 Concepts de base 4

1.2 Position du problème 9

1.2.1 Problème de minimisation 10

1.3 L'existence et l'unicité de la solution de l' inéquation variationnelle 11

1.4 Le problème classique 15

2 L'analyse d'erreur **17**

2.1 Rappel 17

2.2 Interpolation 19

2.3 Approximation 20

2.4 Estimation a priori 21

2.5 Estimation a posteriori 24

3 Méthode de pénalisation pour le problème d'obstacle **29**
3.1 Théorèmes généraux 29
3.2 Le problème pénalisé 33
3.3 Existence et unicité 36
3.4 Problème Discret 41
3.4.1 Existence et l'unicité de problème discret 41
3.5 Analyse d'erreur 44

4 Tests numériques sous Freefem++ **47**
4.1 Exemples 47
4.1.1 Premier exemple : 48
4.1.2 Localisation de la frontière libre 49
4.1.3 La convergence pour le premier exemple 49
4.1.4 Deuxième exemple : 50
4.1.5 Localisation de la frontière libre 51
4.1.6 La convergence par deuxième exemple 51

NOTATIONS

➤ $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$:Domaine étudie.

➤ V : espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)$et la norme associée $\|.\|$.

➤ $H^{-1}(\Omega)$ = espace dualité de $H_0^1(\Omega)$.

➤ $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v.

➤ $\Delta u \quad = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: Laplacien d'un vecteur u.

➤ P la projection sur le convexe K

➤ $\beta(u)$:$u - Pu$.

➤ $\left[\!\left[\dfrac{\partial v}{\partial n} \right]\!\right] \quad = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n.$

Introduction

Le problème d'obstacle consiste à étudier la déflexion d'une membrane élastique, soumise à des forces sachant que le déplacement est limité par un obstacle. Mathématiquement, ce problème peut être vu comme un problème de minimisation ou une inéquation variationnelle. Les formulations mathématiques de ce problème apparaissent dans des plusieurs applications par exemple, filtration des fluides dans des milieux poreux, l'élasto-plasticité et l'élasticité. Les formulations du problème d'obstacle et de l'existence de la solution ont été étudiées dans certains travaux par ex G. Stampacchia, L.A. Caffarelli, A. Friedman. Bien qu'il y ait des résultats sur l'existence de la solution, il est difficile de trouver la solution analytique dans le cas général. C'est pour cela que les méthodes numériques prennent leurs importances dans les applications.

Dans ce travail, nous avons étudié la méthode de pénalisation pour le problème d'obstacle. Ce mémoire se compose de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons posé le problème physique, nous donnons l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle, et on donne le problème classique d'obstacle. Ce chapitre est principalement basé sur les références [1],[2],[3].

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une estimation d'erreur a priori et a posteriori pour le problème d'obstacle. Ce chapitre est basé sur les références [5] et [6].

Dans le troisième chapitre, on utilise la méthode de pénalisation proposée par Scholz [9]. Est analysée par J-L Lions [8] et Le Dret [10]. Nous donnons la démonstration de l'existence et l'unicité de solution du problème pénalisé en utilisant la théorème de point fixe de Schauder. Nous justifions notre problème pénalisé par une estimation d'erreur entre la solution du problème originale et le problème pénalisé. En suite nous proposons une approximation du problème pénalisé par éléments finis conformes en donnant une estimation d'erreur concrète entre $u - u_h$.

Dans le dernier chapitre, nous présentons quelques tests numériques programmés sous le logiciel Freefem++.

Chapitre 1

Modélisation mathématique du problème d'obstacle

1.1 Concepts de base

Soit Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$$

un multi-indice et on notera

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Définition 1.1.1 *On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments qui satisfont :*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2 *Pour $m \in \mathbb{N}$*

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\}. \tag{1.2}$$

Les dérivées étant prises au sens des distributions. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx. \tag{1.3}$$

La norme associé à ce produit scalaire

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^2 \right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Par convention, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Enfin, pour $m \geqslant 1$, nous introduisons la semi-norme

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.5}$$

de sort que

$$\|u\|_{m,\Omega} = (\|u\|^2_{m-1,\Omega} + |u|^2_{m,\Omega})^{1/2}. \tag{1.6}$$

On définit l'espace $H^1_0(\Omega)$ comme le noyau de γ_0, i.e.,

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u_{/\partial\Omega} = 0\}$$

Définition 1.1.3 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est V-elliptique $V \times V$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que, $\forall v \in V$*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_V$$

Définition 1.1.4 *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $c > 0$, elle vérifie*
$\forall u, v \in V$

$$a(u,v) \leq c\|u\|_V \|v\|_V$$

Définition 1.1.5 *Soit K une convexe ferme non vide d'un espace de Hilbert V, on dit que y est la projection de x sur K si*

$$\|u - y\|_V = \min_{z \in K} \|u - z\|_V, \quad \forall u \in V$$

.

Théorème 1.1.6 *(Stampacchia) Soit V un espace de Hilbert et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Soit K un sous ensemble fermé et convexe de V. Ensuite, étant donnée $f \in V'$ il existe un unique $u \in K$ telle-que*

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K$$

Preuve. voir [1] ■

Théorème 1.1.7 *(représentation de Riez)*
Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que :

$$f(u) = (u, v) \forall u \in V$$

Et en plus :

$$\|F\|'_V = \|v\|_V$$

Preuve. voir[2] ■

Théorème 1.1.8 *(Projection) Soit $K \subset V$ une convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in V$, il existe $y \in K$ unique tel que :*

$$\|u - y\| = \min_{v \in K} \|u - v\| \tag{1.7}$$

De plus y est caractérise propriété
$\forall v, y \in K$

$$(u - y, v - y) \leq 0$$

On note $y = P_K u$.

Preuve. :

Tout d'abord nous démontions que

- Existence :

  On pose

$$d = \min_{v \in K} \|u - v\|$$

$$d_n = \|u - v_n\|$$

  Soit d_n une suit minimisation c'est a dire $d_n \longrightarrow d \ \ qd \ \ n \longrightarrow 0$. On montre que la suite (v_n) est convergent il suffit démontrer qu'elle est de Cauchy. Soient $v_n, v_m \in K$ l'identité de parallélogramme :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\| + 2\|b\|^2$$

  On prend $a = u - v_n$ $b = u - v_m$

$$\|2u - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u + v_m\|$$

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\|u - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2$$

  On utilisons (1.7)

$$\|2u - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 \leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2$$

  En effet

$$\frac{v_n + v_m}{2} \in K \Longrightarrow \|u - \frac{v_n + v_m}{2}\| \geq d \ \ (k \ \ convexe)$$

  Donc (v_n) suit de Cauchy par conséquent elle est convergent vers $y \in V$ et puisque K est fermé alors $y \in K$

$$d = \lim_{n \longrightarrow 0} d_n = \lim_{n \longrightarrow 0} \|u - v_n\| = \|u - y\|$$

- Unicité :

  Nous supposons que $y, z \in K$ tel que : $\|x - y\| = d \ \ et \ \ \|x - z\| = d$

Et on montre que $y = z$, par l'égalité de parallélogramme

$$
\begin{aligned}
\|y - z\|^2 &= \|(y - x) - (z - x)\|^2 \\
&= 2\|y - x\|^2 + 2\|x - z\|^2 - \|(y + z) - 2x\|^2 \\
&= 2\|y - x\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\|\frac{(y + z)}{2} - x\|^2
\end{aligned}
$$

À droit $\frac{(y+z)}{2} \in K$ pour que

$$\|\frac{(y + z)}{2} - x\| \geq d$$

Cela implique que la partie droit est inférieur au égal à $2d^2 + 2d^2 - 4d^2$. Nous avons l'inégalité de $\|y - z\| \leq 0$. Et clairement $\|y - z\| \geq 0$ de sort que nous devons avoir l'égalité $y = z$

■

Théorème 1.1.9 ***Formule de Green***
$\forall u \in H^1(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega)$,

$$-\int_{\Omega} \Delta uv\ d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

1.2 Position du problème

On définit le problème d'obstacle. La solution $u(x, y)$ représente un petit déplacement transversal d'une membrane élastique $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ fixée le long de sa frontière $\partial\Omega$, soumise à une force $f \in H^{-1}$ et se pose sur un obstacle rigide $\varphi(x, y) \leq 0 \ \forall (x, y) \in \partial\Omega$.

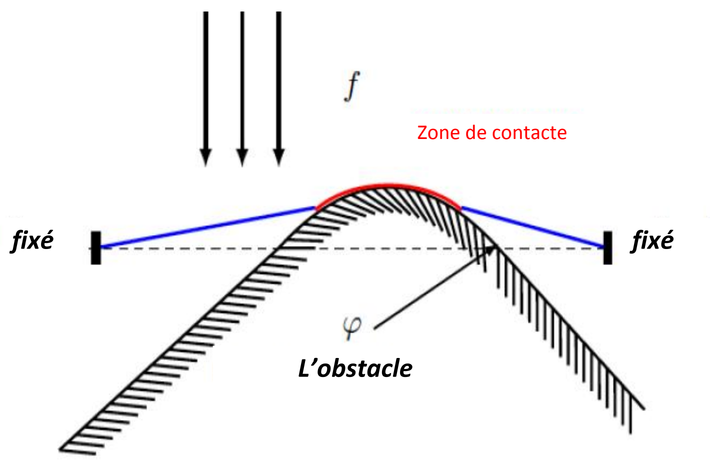


Figure 1.1 – Problème d'obstacle

L'énergie totale de la membrane est donné :

$$J(v) = P(v) - E(v)$$

Où $P(v)$ est l'energie potentielle et $E(v)$ est l'energie en raison des forces extérieurs.
On obtient :

$$P(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

$$E(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

1.2.1 Problème de minimisation

Soit $a(.,.)$ est symétrique, on définit une formulation à ce problème :

$$\begin{cases} trouve \quad u \in K \\ J(u) \leq J(v) \;\; \forall v \in K \end{cases} \tag{1.8}$$

Avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v \rangle$$

Et

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v \geq \varphi \right\}$$

Théorème 1.2.1 *K est un ensemble convexe fermé, $a(.,.)$ forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive donc le problème(1.8) admet une solution unique.*

Proposition 1.2.2 *: K convexe fermé non vide.*

Preuve. **<u>Convexe :</u>**

On considère $t \in [0,1]$, et $u, v \in K$ c'est à dire :$u \geq \varphi$ *et* $v \geq \varphi$

Alors $tu + (1-t)v \geq t\varphi + (1-t)\varphi = \varphi$. donc $tu + (1-t)v \in K$

$\Longrightarrow K$ est convexe.

<u>Fermé :</u>

Soit $v_n \in K$,un suit convergence $v_n \to v$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ On va démontrée que $v \in K$

$$v_n \geq \varphi \Longrightarrow v_n - v + v \geq \varphi$$

On a

$$(v_n - v) + v \geq \varphi$$

Et

$$|v_n - v| \geq v_n - v \geq \varphi - v$$

Donc

$$0 \geq \varphi - v \Longrightarrow v \geq \varphi$$

$\Longrightarrow$ K fermé. ■

1.3 L'existence et l'unicité de la solution de l' inéquation variationnelle

Définition 1.3.1 *On appelle inéquation variationnelle elliptique de* 1^{re} *espace tout inéquation de la forme :*

$$\begin{cases} trouver \quad u \in K \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{cases} \tag{1.9}$$

Dans ce section présente l'existence et l'unicité pour la solution des inéquations variationnelles elliptique de première espèce.

Théorème 1.3.2 *[1] Si* $a(.,.) : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ *forme bilinéaire continue et coercive sur un espace vectoriel* V *,* $L(.) :\longmapsto \mathbb{R}$ *forme linaire sur* V *est* K *sous ensemble convexe non vide de* V *alors l'inéquation variationnelle (1.9) admet une solution unique.*

Preuve. :

On commence par l'unicité :

Supposons qu'il y a deux solutions u_1 et u_2 de (1.9). On écrit l'inégalité associée à u_1 en prenant $v = u_2$ et l'inégalité associée à u_2 en prenant $v = u_1$

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1)$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2)$$

On additionne les deux inéquations, on obtient :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

Pour la coercitive sur $a(.,.)$

$$\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq 0$$

Ce qui implique que :

$$u_1 = u_2$$

Pour prouver l'existence de la solution, on écrit (1.9) comme un problème de point fixe. Le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert implique l'existence d'un opérateur continu $A : V \longrightarrow V$ tel que :

$$(Au, v) = a(u, v) \text{ pour tout } u, v \in V$$

Alors (1.9)

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u) \text{ pour tout } u, v \in K \tag{1.10}$$

Par $\rho > 0$, on obtient l'inégalité équivalente :

$$(u - [u - \rho(Au - f)], v - u) \geq 0 \text{ pour tout } u, v \in K \tag{1.11}$$

Trouver u tel que :

$$u = P_K(u - \rho(Au - f)) \ \ \forall\rho > 0 \tag{1.12}$$

On introduit l'opérateur $T : V \longrightarrow K$ par $T = P_K(u - \rho(Au - f))$
On pose $u = T(u)$.

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_V^2 \leq \|u_1 - u_2\|_V^2 + \rho^2\|A(u_1 - u_2)\|_V^2 - 2\rho\alpha(u_1 - u_2, u_1 - u_2)$$

Alors on obtient :

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_V^2 \leq \left(1 - 2\rho\alpha + 2\rho\|A\|_V^2\right)\|u_2 - u_1\|_V^2$$

Ce qui implique que T est une contraction à condition que : $0 < \rho < \dfrac{2}{\|A\|_V^2}$
En prenant ρ dans cet intervalle, on obtient une solution unique du problème de point fixe, ce qui prouve l'existence de la solution de (1.9). ■

Proposition 1.3.3 *Le problème de minimisation (1.8) est équivalent à l'inéquation variationnelle (1.9).*

Preuve. :

Dans la première étape nous monterons le problème minimisation implique l'inéquation variationnelle : $\forall v \in K;\quad J(u) \leq J(v)$

alors

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fudx \leq \frac{1}{2}a(v,v) - \int_\Omega fvdx$$

On pose $v = (1-\lambda)u + \lambda v$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fudx &\leq \frac{1}{2}a(\lambda v + (1-\lambda)u, \lambda v + (1-\lambda)u) - \int_\Omega f(\lambda v + (1-\lambda)u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}[(1-\lambda)^2 a(u,u) + \lambda^2 a(v,v) + 2\lambda(1-\lambda)a(u,v)] \\
&- \int_\Omega f(\lambda v + (1-\lambda)u)dx \\
\frac{1}{2}a(u,u) - \int_\Omega fudx &\leq \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}\lambda^2 a(u,u) - \lambda a(u,u) \\
&+ \lambda^2 a(v,v) + \lambda a(u,v) + \lambda^2 a(u,v) \\
&- \lambda \int_\Omega fvdx + (1-\lambda)\int_\Omega fudx
\end{aligned}$$

Simplification

$$0 \leq \frac{\lambda^2}{2}a(v-u,v-u) - \lambda(f,v-u) + \lambda a(u,v-u)$$

On divise par λ

$$0 \leq a(u,v-u) - (f,v-u) + \frac{\lambda}{2}a(v-u,v-u)$$

On tends $\lambda \longrightarrow 0$

$$a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad v \in K$$

la deuxième étape nous montrons que l'inéquation variationnelle implique le problème minimisation. Soit $v \in K$ et $u \neq v$.

Soit la fonction $F(\lambda) = J(u + \lambda(v-u))\ \ \forall 0 < \lambda < 1$

Note $F(0) = J(u), F(1) = J(v)$ et F continue.

On calcule $F'(\lambda)$:

$$F'(\lambda) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{J(u + (\lambda + h)(v - u) - J(u + \lambda(v - u)}{h}$$

On prend $w = u + \lambda(v - u)$

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{J(w + h(v - u) - J(w)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{ha(w, (v - u)) + \frac{h^2}{2} a(v - u, v - u) - h(f, v - u)}{h} \\ &= a(w, v - u) - (f, v - u) \\ &= a(u, v - u) - (f, v - u) + \lambda a(v - u, v - u) \end{aligned}$$

$$F(1) \geq F(0)$$

$$J(u) \leq J(v)$$

Cette formulation quelque fois appelé la formulation originelle du problème d'obstacle. Ayant établi l'équivalence de la minimisation et de la formulation variationnelle. ∎

1.4 Le problème classique

Soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution de problème obstacle et comme u résoudre le problème de inéquation variationnelle :

$$a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall u \in K$$
$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) dx \geq \int_\Omega f(v-u) dx \ \ \forall u \in K$$

tell que

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v \geq \varphi \right\}$$

Et utilise formule Green :

$\forall\ v\ dans\ \ K$

$$\int_\Omega -\Delta u(v-u)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)ds \geq \int_\Omega (f, v-u)dx$$

Soit $\phi \in D(\Omega)$ tell que :$v = u + t\phi \in K$ pour tout $0 \leq t \leq 1$ et comme $v - u = 0\ \ dans\ \ \partial\Omega$

$$t \int_\Omega -\Delta u \phi dx \geq t \int_\Omega f \phi dx$$

Et pour tout $\phi \in D(\Omega)$

$$-\Delta u \geq f \ \ p.p\ dans\ \Omega$$

On peut diviser le domaine Ω comme sa

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+$$

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega, u(x) = \varphi(x)\}$$

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega, u(x) > \varphi(x)\}$$

Et si on pose $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ désigne Ω_+ est ouvert, depuis $u \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega_+)$. Nous considérons un point $x \in \Omega_+$, pour lesquels nous pouvons choisir un voisinage $V_+(x)$, nous pouvons trouver un $\phi \in V_+(x)$ et $t > 0$ si $v = u \pm t\phi$ on obtient

$$\pm t \int_\Omega \Delta u \phi dx \geq \pm t \int_\Omega f \phi dx$$

Et pour tout ϕ la même méthode $-\phi$

$$-\Delta u = f \;\; p.p \; dans \; V_+(x)$$

Le fonction $u - \phi \in H^2(\Omega)$ alors $u \in K$ est solution le problème d'obstacle. On résume tous les relations on obtient :

$$-\Delta u \geq f \;\; dans \;\; \Omega.$$

$$u > \varphi \quad sur \; \Omega$$

Si $u(x) > \varphi(x)$ déduire $-\Delta u(x) = f(x)$

Finalement on obtient le problème obstacle classique :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq & f \text{ p.p dans } \Omega. \\ u \geq & \varphi \text{ p.p dans } \Omega. \\ (-\Delta u - f)(u - \varphi) = & 0 \text{ p.p dans } \Omega. \\ u = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.13}$$

Chapitre 2

L'analyse d'erreur

Dans ce chapitre notre but est l'étude l'estimation d'erreur qui concerne le problème d'obstacle donc, nous présentons outils nous aidons à cela. Ce travail a divisé en deux parties : Analyse a priori , Analyse a posteriori du problème d'obstacle.

2.1 Rappel

Considérons un problème modèle de la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver } \; u \in V \; \text{ tel que} \\ a(u,v) = (f,v), \forall v \in V \end{cases} \tag{2.1}$$

Où V sont des espace de Hilbert, $f \in V'$ et $a(V,V)$. Nous supposons que la forme a satisfait les hypothèses du théorème de Lax-Milgram si bien que ce problème est bien posé. Un espace d'approximation $V_h \subset V$, nous considérons le problème approché

$$\begin{cases} \text{trouver } \; u_h \in V_h \; \text{ tel que} \\ a(u_h,v_h) = (f,v_h), \; \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{2.2}$$

que nous supposons bien posé.

Lemme 2.1.1 *(lemme de Céa)*
Le lemme de Céa montre que la différence entre u et u_h est contrôlée par la distance de u au sous-espace vectoriel V_h de V.
Si u et u_h est une solution du problème variationnel (2.1)(2.2) respective, alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

Où M est la constante de continuité de a et α la constante de coercivité.

Définition 2.1.2 *Une fonction $e(h, u_h, f)$ est appelée erreur a posteriori si*

$$\|u - u_h\|_V \leq e(h, u_h, f)$$

Si $e(h, u_h, f)$ se met sous la forme

$$e(h, u_h, f) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(u_h, f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous dirons que $e_T(u_h, f)$ est un indicateur d'erreur.

2.2 Interpolation

Lemme 2.2.1 *(Interpolé de Lagrange)*

Soit $u \in H^2(\Omega)$ *il existe* $w_h \in V_h$

$$\|u - w_h\|_k \leq Ch^{2-k}\|u\|_2 \quad k = 0, 1 \tag{2.3}$$

C *indépendant de* u *et* h.

Preuve. [4] ■

Lemme 2.2.2 *(Quasi-interpolé de Clémemt)*

$\exists c > 0$ *et un quasi-interpolé* ,$C_h : H^1 \longrightarrow V_h^k$ *tel que*

$$\|C_h v - v\|_{L^2(T)} \leq cte \;\; h\|v\|_{H^1(V(T))}$$

$$\|C_h v - v\|_{L^2(T)} \leq cte \;\; |e^{\frac{1}{2}}|\|v\|_{H^1(W(e))}$$

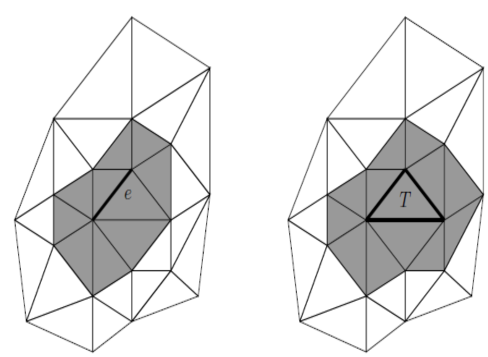


Figure 2.1 – L'ensemble $V(T)$ et L'ensemble $W(e)$

Preuve. [4] ■

2.3 Approximation par éléments finis

Un maillage ou triangulation est un recouvrement du polygone Ω par des triangles. En notant $\{T_1, ..., T_N\}$ ces triangles, on a donc

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i.$$

De plus nous supposons l'existence d'un élément de référence T définit par :

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}. \tag{2.4}$$

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω. Alors il est claire que $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. On définit l'espace des éléments finis :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h/T} \in \mathbb{P}^1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

l'espace V_h est de dimension finie. L'approximation K_h de K est donnée par :

$$K_h = \{v_h \in V_h, v_h \geq \varphi_h\}$$

Proposition 2.3.1 *K_h est convexe fermé non vide.*

Et on définit le problème discret :

$$\begin{cases} Trouver \quad u_h \in K_h \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \ \ \forall v_h \in K_h \end{cases} \tag{2.5}$$

On φ_h est l'interpole de φ dans V_h.

Théorème 2.3.2 *Le problème(2.5) admet une solution unique.*

Preuve. voir[7] ■

Remarque 2.3.3 *La première difficulté pour l'analyse d'erreur d'une inéquation variationnelle réside dans le fait même si : $V_h \subset V$ on a pas forcement $K_h \notin K$.*
Ceci est au fait φ_h peut être $< \varphi$ et donc $v_h \geq \varphi_h$ ne garanti pas que $v_h \geq \varphi$

2.4 Estimation a priori

L'analyse développée dans que cette partie est basée essentielement sur la référence [5].

Lemme 2.4.1 *Soit u et u_h les solution du problème continue et problème discret. Alors si $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$et $\varphi \in H^2(\Omega)$*
on a

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cte\ h(\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)})$$

Preuve. Tout d'abord nous démontions l'inégalité suivant :

$$a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - u_h, u - v_h) + (\Delta u + f, u - u_h) + (\Delta u + f, \varphi_h - \varphi)$$

$\forall v_h \in V_h$ on a

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&\leqslant a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u, v_h - u_h) - (f, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u_h) \\
a(u - u_h, u - u_h) &\leqslant a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h + \varphi_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h) - (\Delta u + f, \varphi_h - u_h)
\end{aligned}$$

Donc le problème d'obstacle

$$(\Delta u + f, \varphi_h - u_h) \geq 0$$

Puisque $\Delta u + f \leqslant 0$ et $\varphi_h - u_h \leqslant 0$ On obtient

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) &\leqslant a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - \varphi_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h) - (\Delta u + f, v_h - u + u - \varphi + \varphi - \varphi_h)
\end{aligned}$$

$$-(\Delta u + f, v_h - u + u - \varphi + \varphi - \varphi_h) = -(\Delta u + f, v_h - u) - (\Delta u + f, u - \varphi) - (\Delta u + f, \varphi - \varphi_h)$$

Puisque $-(\Delta u + f, u - \varphi) = 0$ pour le problème d'obstacle

$$a(u-u_h, u-u_h) \leqslant a(u-u_h, u-v_h) - (\Delta u + f, v_h - u) - (\Delta u + f, \varphi - \varphi_h)$$

On utilise la continue et l'inégalité Couchy Schwarz

$$a(u-u_h, u-u_h) \leqslant M\|u-u_h\|_{H_0^1}\|u-v_h\|_{H_0^1} + \|\Delta u + f\|_{L^2}(\|v_h - u\|_{L^2} + \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2})$$

On utilise l'inégalité

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}b^2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{M}{\alpha}$; $a = M\|u-u_h\|_{H_0^1}$; $b = \|u-v_h\|_{H_0^1}$

$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H_0^1} \leqslant \frac{\alpha}{2}\|u-u_h\|^2_{H_0^1} + \frac{M}{2\alpha}\|u-v_h\|^2_{H_0^1} + \|\Delta u + f\|_{L^2}(\|v_h - u\|_{L^2} + \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2})$$

On applique interpole de Lagrange, on trouve

$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H_0^1} \leqslant Cte(h^2\|u\|^2_{H^2} + (\|u\|^2_{H^2} + \|f\|^2_{L^2})h^2(\|u\|_{H^2} + \|\varphi\|_{H^2}))$$

Donc

$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H_0^1} \leqslant Cte\ h^2(\|u\|^2_{H^2} + (\|u\|_{H^2} + \|f\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^2})(\|u\|_{H^2} + \|\varphi\|_{H^2} + \|f\|_{L^2}))$$

$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H^1} \leqslant Cte\ h^2(\|u\|^2_{H^2} + (\|u\|_{H^2} + \|f\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^2})^2)$$

Alors on utilise l'inégalité $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$

$$\alpha\|u-u_h\|^2_{H_0^1} \leqslant Cte\ h^2(2\|u\|_{H^2} + \|f\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^2})^2$$

$$\|u-u_h\|_{H_0^1} \leqslant Cte\ h(\|u\|_{H^2} + \|f\|_{L^2} + \|\varphi\|_{H^2})$$

■

Remarque 2.4.2 *Pour détermine u_h on peut, utiliser le problème de minimisation. pour $v_h \in K_h$,*

$$v_h = \sum_{j=1}^{M} \beta j \phi j(x)$$

$$\begin{aligned} J(v_h) &= \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - (f, v_h) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\beta_j\beta_i a(\phi_j\phi_i) - \sum_{j=1}^{M}\beta_i(f, \phi_i) \\ &= (A\beta, \beta) - (F, \beta) \end{aligned}$$

Le fait que $v_h - \varphi_h$ *est linéaire sur chaque* T*. Donc le problème est un problème de minimisation d'une forme quadratique sous contrainte* $(v_h - \varphi_h)(a_i) \geqslant 0$. $\forall a_i$ *dans l'ensemble des sommets, mais en chaque sommet* a_i $v_h = \beta_k$ *par conséquent la construction de* k_h *est équivalente à l' ensemble des conditions* $B_k \geqslant \varphi_h(a_k)$ $\;k = 1, 2.....M$ *ce qui est un nombre fini de contraintes sur* β.

2.5 Estimation a posteriori pour le problème d' obstacle

Comme dans le cas des équations variationnelles l'analyse a priori nécessite régularité additionnelle sur la solution, ainsi que pour d'obstacle pour que la convergence soit assurée.
On Définit l'ensemble $\Lambda = \{\mu \in L^2 \quad \mu \geq 0\}$
On introduit le Lagrangien pour le problème d'obstacle

$$\pounds(u, \lambda) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u) - (\lambda, u - \varphi)$$

L'écriture du problème d'obstacle sur la forme d'une problème de type point-selle On pose $\lambda = -\Delta u - f$, c'est a dire $\lambda \geq 0$;
$\forall \lambda \in \Lambda$ et $\forall v \in V$

$$\begin{aligned}
a(u, v) - (\lambda, v) &= (f, v) \\
(u, \mu) &\geq (\varphi, \mu) \\
(u, \mu) - (u, \lambda) &\geq (\varphi, \mu) - (u, \lambda) \\
(u, \mu) - (u, \lambda) &= (u, \mu) - (u - \varphi, \lambda) + (\varphi, \lambda) \\
&= (\varphi, u - \lambda)
\end{aligned}$$

Le nouveau problème de type point-selle suivante :
Trouver $(u, \lambda) \in V \times V$

$$\begin{cases} a(u, v) - (\lambda, v) = (f, v) \ \ \forall v \in V. \\ (u, \mu - \lambda) \geq (\varphi, \mu - \lambda) \ \ \forall \mu \in \Lambda \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors la version discrète du problème :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) - (\lambda_h, v_h) = (f, v_h) \ \ \forall v_h \in V_h \\ (u_h, \mu_h - \lambda_h) \geq (\varphi_h, \mu_h - \lambda_h) \ \ \forall \mu_h \in \Lambda \end{cases} \tag{2.7}$$

Lemme 2.5.1 *Soit u solution de (2.6) et u_h solution (2.7) Alors on a*

$$\int_\Omega \nabla e \nabla e_h \leq \int_\Omega \nabla u \nabla (e_h - e) dx - \int_\Omega f, e_h - e dx$$

On note $e = u - u_h \quad , e_h = C_h(e)$ interpolé de Clément.

Preuve. Soit $v_h \in V_h \subset V$ et la formulation variationnelle de (2.6)et (2.7) respective suivante :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v_h dx - \int_\Omega \lambda v_h dx = \int_\Omega f v_h dx$$
$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h dx - \int_\Omega \lambda_h v_h dx = \int_\Omega f v_h dx$$

Par soustraction on obtient

$$\int_\Omega \nabla (u - u_h) \nabla v_h dx = \int_\Omega (\lambda - \lambda_h) v_h dx$$

Alors

$$\int_\Omega \nabla e \nabla v_h dx = \int_\Omega (\lambda - \lambda_h) v_h dx$$

On pose $v_h = e_h$

$$\int_\Omega \nabla e \nabla e_h dx = (\lambda, e_h) - (\lambda_h, e_h) \tag{2.8}$$
$$= (\lambda, e_h - e) + (\lambda, e) - (\lambda_h, e_h) \tag{2.9}$$

Nous provenons $(\lambda, e) \leq 0$

$$(\lambda, e) = (-\Delta u - f, u - u_h)$$

On pose $u_h = v_h$

$$-a(u, v_h - u) + (f, v_h - u) \leq 0$$

Maintenant Nous démontrons $-(\lambda_h, e_h) \leq 0$, admettant que $C_h(u_h) \in K$ et $C_h(u_h) = u_h$
Pour $e_h = C_h u - u_h$ alors

$$-a(u, v_h - u) + (f, v_h - u) \leq 0$$

En utilise la majoration l'inégalité(2.9) et donnée résulta suivante :

$$\int_\Omega \nabla e \nabla e_h dx \leq \int_\Omega \nabla u \nabla (e_h - e) dx - \int_\Omega f(e_h - e) dx$$

■

Lemme 2.5.2 *On a l'estimation*

$$\int_\Omega |\nabla e|^2 dx \leq \int_\Omega f(e - e_h) dx - \int_\Omega \nabla u_h \nabla (e - e_h) dx$$

Preuve. On remarque

$$(\nabla e, \nabla e) = (\nabla e, \nabla (e - e_h)) + (\nabla e, \nabla e_h)$$

Donc

$$(\nabla e, \nabla e) = (\nabla e, \nabla (e - e_h)) + (\nabla e, \nabla e_h)$$

D'après le lemme(2.5.1)

$$\int_\Omega |\nabla e|^2 dx \leq \int_\Omega f(e - e_h) dx - \int_\Omega \nabla u_h \nabla (e - e_h) dx$$

■

Théorème 2.5.3 *Soit u la solution de (2.1) et u_h la solution de (2.2) alors*

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} \leq Cte \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} e_T(f, u_h, h) \right)^{\frac{1}{2}}$$

nous avons introduit l'inducteur d'erreur

$$e_T(f, u_h, h) = h \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \partial \mathcal{T}_h} |e|^{\frac{1}{2}} \| [\![\frac{\partial u}{\partial n}]\!] \|_{L^2(e)}$$

$|e|$ le diamètre de e et $[\![\frac{\partial u}{\partial n}]\!]$ le saut de la dérivée normale de u_h a travers e.

Preuve. On utilise le lemme (3.1.11)

$$\int_\Omega |\nabla e|^2 dx \leq -\int_\Omega \nabla u_h \nabla(e-e_h) + \int_\Omega f(e-e_h)$$

On utilise la formule de Green

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla e|^2 dx &\leq \int_\Omega \Delta u_h(e-e_h)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_h)ds + \int_\Omega f(e-e_h)dx \\ &= \int_\Omega (\Delta u_h + f)(e-e_h)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_h)ds \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (\Delta u_h + f)(e-e_h)dx + \sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h} \int_e \frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_h)ds\end{aligned}$$

Si e une arête intérieure commune de $T^\pm$ (voir la figure 2.2).

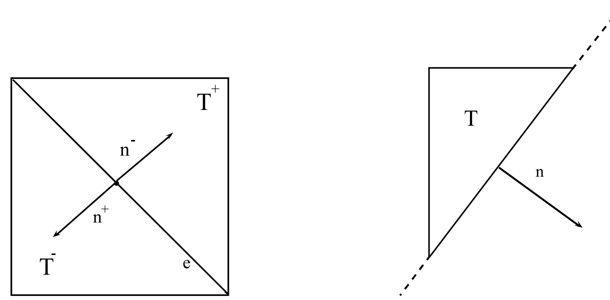


FIGURE 2.2 – deux triangles adjacents et un triangle du bord

Maintenant nous travaillons avec le parti

$$\sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h} \frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_h) = \int_e \frac{\partial u_h^+}{\partial n}(e-e_h)^+ ds - \int_e \frac{\partial u_h^-}{\partial n}(e-e_h)^- ds$$

On utilise l'égalité

$$ab - cd = (a-c)(\frac{b+d}{2}) + (\frac{a+c}{2})(b-d)$$

On remarque la résulta

$$\sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h} \frac{\partial u_h}{\partial n}(e-e_h) = \frac{1}{2}\sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h} \int_e [\![\frac{\partial u_h}{\partial n}]\!](e-e_h)ds$$

On pose

$$\int_T (\Delta u_h + f)(e-e_h)dx = \int_T h(\Delta u_h + f)h^{-1}(e-e_h)dx$$

On utilise l'inégalité Couchy Schwarz

$$\int_T (\Delta u_h + f)(e - e_h)dx \leq h\|\Delta u_h + f)\|_{L^2(T)} h^{-1}\|e - e_h\|_{L^2(T)}$$

Le même l'idée

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h}\int_e [\![\frac{\partial u_h}{\partial n}]\!](e - e_h)ds \leq \frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2}\|[\![\frac{\partial u_h}{\partial n}]\!]\|_{L^2(e)} e^{\frac{1}{2}}\|e - e_h\|_{L^2(e)}$$

Nous choisissons maintenant $e = C_h(e)$ est l'opérateur de Clément

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^2_{H^1_0} &\leq \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h\|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}\|e\|_{H^1(V(T))} + \sum_{e\in\partial\mathcal{T}_h}\frac{1}{2}\|[\![\frac{\partial u_h}{\partial n}]\!]\|_{L^2(e)}\|e\|_{H^1(W(e))}\\ &\leq \sum_{T\in\mathcal{T}_h} e(u_h, f)\max(h^{-1}\|e - e_h\|_{L^2(V(T))}, e^{\frac{-1}{2}}\|e - e_h\|_{L^2(W(e))})\end{aligned}$$

$$\|u - u_h\|^2_{H^1_0} \leq \|u - u_h\|_{H^1_0}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h^2\|f + \Delta u_h\|^2_{L^2(V(T))} + \sum_{e\in\mathcal{T}_h}|e|\frac{1}{4}\|[\![\frac{\partial u_h}{\partial n}]\!]\|^2_{L^2(W(e))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\|u - u_h\|_{H^1_0} \leq Cte\left(e(u_h, f)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

■

Chapitre 3

Méthode de pénalisation pour le problème d'obstacle

Dans ce chapitre on s'occupe à l'étude du la méthode de pénalisation, qui a pour but de trouver une solution approchée de problème d'obstacle. En couplant le paramètre de pénalité ε et les évaluations d'erreur quasi-optimales du paramètre h de discrétisation dans la norme de l'espace d'énergie . Cette partie est basée sur la référence [9].

3.1 Théorèmes généraux

Définition 3.1.1 *Un opérateur T de V dans H est dit monotone si $\forall u, v \in V$*

$$(Tu - Tv, u - v) \geq 0$$

Lemme 3.1.2 *Soit V espace de Hilbert, L' opérateur β défini par*

$$\beta(v) = v - Pv, \quad \text{avec } P \text{ l'opérateur de projection sur } K \subset V.$$

est monotone.

Preuve. On a propriété de projection

$$(v - Pv, w - Pv) \leq 0 \ \ \forall w \in K$$

Donc

$$(v - Pv, Pv - w_1) \geq 0 \ \ \forall w_1 \in K \tag{3.1}$$

Et

$$(u - Pu, Pu - w_2) \geq 0 \ \ \forall w_2 \in K \tag{3.2}$$

On pose $w_1 = Pu$ et $w_2 = Pv$ et par addition (3.1) et (3.2)
On trouve

$$(\beta v - \beta u, Pu - Pv) \geq 0$$

Alors

$$(\beta u - \beta v, \beta u - \beta v) \geq 0$$

$$(\beta u - \beta v, (u - Pu) - (v - Pv)) \geq 0$$

$$(\beta u - \beta v, u - v) \geq (\beta u - \beta v, Pu - Pv)$$

Donc

$$(\beta u - \beta v, u - v) \geq 0 \ \ \forall u, v \in V$$

■

Théorème 3.1.3 *(Schauder)[10] Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe compact de E et T une application continue de C dans C. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. voir [10] ■

Théorème 3.1.4 *[10] Soit Ω un ouvert borné de R^d et$f \in (C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Il existe au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème $-\Delta u = F(u)$ au sens de $D'(\Omega)$.*

Théorème 3.1.5 *[10] On suppose qu'en outre des hypothèses précédentes, F est décroissante. Alors la solution u du problème modèle est unique.*

Corollaire 3.1.6 *[10] L'application $(-\Delta)$ est continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est isomorphisme.*

Lemme 3.1.7 *Soit v et $v_0 \in H_0^1(\Omega)$*

$$\lim_{\|v\| \longmapsto \infty} \frac{(-\Delta v, v - v_0)}{\|v\|} = +\infty$$

Preuve. On a

$$(-\Delta v, v - v_0) = \int_\Omega \nabla v \nabla (v - v_0) dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega \nabla v \nabla v_0 dx$$

Ou

$$\frac{(-\Delta v, v - v_0)}{\|v\|_V} = \|v\|_V - \frac{\int_\Omega \nabla v \nabla (v_0) dx}{\|v\|_V}$$

Alors

$$\frac{\int_\Omega \nabla v \nabla (v_0) dx}{\|v\|_V} \leq \|\nabla v_0\|_{L^2} = \|v_0\|_V$$

Donc

$$\lim_{\|v\| \longmapsto \infty} \frac{(-\Delta v, v - v_0)}{\|v\|_V} \geq +\infty$$

On a

$$\lim_{\|v\| \longmapsto \infty} \frac{(-\Delta v, v - v_0)}{\|v\|} = +\infty$$

■

Remarque 3.1.8 *Il existe une sous-suite* $u_0 \in K$ *et* $\chi \in V'$ *tels que* $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ *dans* V *faible et* $Au_\varepsilon \rightharpoonup \chi$ *dans* V' *faible*

Lemme 3.1.9 *[10] On a l'inégalité*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \langle Au^\varepsilon, u^\varepsilon \rangle \geq \langle \chi, u^0 \rangle.$$

Lemme 3.1.10 *[10] On a l'inégalité*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \leq \langle \chi, u_0 \rangle.$$

Lemme 3.1.11 *[10] On a* $\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \longrightarrow \langle \chi, u_0 \rangle$, $Au_0 = \chi$ *et* u_0 *est solution de problème inéquation variationnelle.*

Définition 3.1.12 *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach, on dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 et on note $B_1 \hookrightarrow B_2$ si :*

- $B_1 \subset B_2$.
- $\exists C > 0 \quad \|u\|_{B_2} \leq C\|u\|_{B_1}$

  On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2,$B_1 \hookrightarrow_c B_2$ si :
- *L'image de tout borné de B_1 est relativement compact dans B_2.*

Théorème 3.1.13 *(Rellich-Kondrochov) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ a frontière Lipschitzienne m ; l entiers $0 \leq l < m$, $1 \leq p < +\infty$, les injections suivantes sont compactes :*

1. $W_p^m \hookrightarrow C_B^l(\Omega) = \left\{u \in C^l(\Omega)/D^\alpha \text{ est bornn sur } \forall\ |\alpha| > l \text{ si}(m-p)p < n\right\}$
2. $W_p^m \hookrightarrow C^l(\bar{\Omega})$ *si* $(m-p)p > 0$.
3. $W_p^m \hookrightarrow W_q^l(\Omega)$ *si* $(m-p)p < p \quad ; 1 < q < \dfrac{np}{n-(m-l)p}$ *ou si* $(m-l)p = n$ *et* $1 \leq q < 1$.
4. *Si* $(m-l)p > n \geq (m-l-1)p$ *et*$0 < \lambda < m - l - \dfrac{n}{p}$ *alors* : $W_p^m(\Omega \hookrightarrow C^{l\lambda}(\bar{\Omega}) = \left\{u \in C^{l\lambda}(\bar{\Omega});\ \ \exists k > 0; \forall|\alpha| > l; \forall x, y \in \Omega : |D^\alpha u(x) - D^\alpha(y)| \leq k|x-y|^\lambda\right\}$

Preuve. *voir [1].* ■

3.2 Le problème pénalisé

Soient $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, et $(.,.)$ le produit scalaire. Et $f \in L^2$, ε est un paramètre de pénalisation positif, consider le problème suivante :

$$P_\varepsilon \begin{cases} trouver \;\; u_\varepsilon \in V \\ a(u_\varepsilon, v) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v) = L(v) \;\; \forall v \in V \end{cases} \tag{3.3}$$

On définit

$$a(u_\varepsilon, v) = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v dx$$

$$\beta(u_\varepsilon) = u_\varepsilon - P u_\varepsilon$$

avec : P la projection sur K, la partie non linéaire $(\beta(u_\varepsilon), v)$

$$(\beta(u_\varepsilon), v) = \int_\Omega (u_\varepsilon - P u_\varepsilon) v dx$$

$$L(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Remarque 3.2.1 *Si $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on peut ramener le problème à un problème avec $\varphi = 0$. En effet $\tilde{u} = u - \varphi$, alors le nouveau problème s'écrit*

$$\begin{cases} trouver \; \tilde{u} \in \tilde{K} tel \; que \\ a(\tilde{u}, v - \tilde{u}) \geq (\tilde{f}, v - \tilde{u}) \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec

$$\tilde{f} = f - \Delta\varphi$$

$$\tilde{K} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \;\; v \geq 0 \right\}$$

Quelque soit fonction v subdivision le parti : $v^+ = max(v, 0)$ et $v^- = min(v, 0)$ réception $P(v) = v - (v - \varphi)^-$, tel que $\beta(v) = (v - \varphi)^-$.

Hypothse :la condition de régularité, $\varphi \in H^2(\Omega)$

$$A\varphi \leq 0 \tag{3.5}$$

Lemme 3.2.2 *Soit $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ la solution du problème pénalisé.Alors on a l' estimation a priori*

$$\|\beta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.6}$$

$$\|\beta(u_\varepsilon)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.7}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

C indépendant de ε.

Preuve. Soit $V = H_0^1(\Omega)$ et $K\,\{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \varphi\}$ alors on remarque $\varphi \leq 0, v = 0$ on frontière $\partial\Omega$. On utilise

$$\begin{aligned} a(\beta(v), \beta(v)) &= a(v - P(v), \beta(v)) \\ &= a((v-\varphi)^-, \beta(v)) \\ &= a(\varphi, (v-\varphi)^-) \\ &= (A\varphi, (v-\varphi)^-) \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ On démontre l'inégalité (3.6) :

$$\begin{aligned} a(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) &= a(u_\varepsilon, \beta(u_\varepsilon)) - a(P(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) \\ &\leq a(u_\varepsilon, \beta(u_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) \\ &= (f, \beta(u_\varepsilon)) \end{aligned}$$

On a $a(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon))$ positive alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) &\leq (f, \beta(u_\varepsilon)) \\ \|\beta(u_\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon\|f\|_{L^2}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\beta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon\|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Nous démontrons maintenant la deuxième inégalité (3.7) :

on utilise $a(.,.)$ coercivté et le dernière conséquence

$$\begin{aligned} a(\beta(u_\varepsilon),\beta(u_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon),\beta(u_\varepsilon)) &= (f,\beta(u_\varepsilon)) \\ a(\beta(u_\varepsilon),\beta(u_\varepsilon)) &\leq (f,\beta(u_\varepsilon)) \\ \|\beta(u_\varepsilon)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq C\|f\|_{L^2}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\beta(u_\varepsilon)\|_{H^1_0(\Omega)} &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ On démontrée la troisième inégalité(3.8) :

Dans ce prouve basée par la shift théorème de opérateur elliptique

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}$$

Alors un applique l'inégalité (3.6) se trouve

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

■

3.3 Existence et unicité de la solution du problème pénalisé

Dans ce section nous donnerons l'existence et l'unicité de solution la méthode de pénalisation.

Théorème 3.3.1 *:[9]*

1. *le problème (3.3) admet une solution unique.*
2. *u_ε est uniformement bornée. C'est dire $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dans V et $u_\varepsilon \longrightarrow u_0$ dans L^2.*
3. *u_0 solution de problème (1.9).*

Preuve.

1. • **<u>L'existence</u>**

   Maintenant en utilisant le théorème (3.1.4) pour prouver l'existence d'une solution à ce problème

   $\forall u_\varepsilon \in V$

   $$-\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon = f$$
   $$-\Delta u_\varepsilon = F(u_\varepsilon) \tag{3.9}$$

   On pose le $F(u_\varepsilon) = f - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)$ et $(F(u_\varepsilon) - F(w), u_\varepsilon - w) \leq 0 \ \ \forall u_\varepsilon, w \in V$ avec F décroissant.

   Soit $T : V \longrightarrow V$ application continu, on pose encore $T(v) = (-\Delta)^{-1}(f(v))$

   Donc $v \in H_0^1(\Omega)$ puisque $F(v) \in L^2(\Omega)$ et L'application $(-\Delta)^{-1}$ est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, tel que

   $$-\Delta(Tv) = F(v)$$

   Notons que par le théorème de Rellich, l'injection est compacte et que par conséquent, T transforme les bornés de V en ensembles relativement compacts de V, puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact. Pour appliquer le théorème de Schauder, L'ensemble C est un convexe fermé de V. Nous prenons ici

$$C = \left\{ v \in H_0^1(\Omega); \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \right\}$$

Où M est une constante à choisir. De plus, c'est un fermé de V. En effet, si $v_n \in C$ converge vers v, alors v_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et contient donc une sous-suite v_{nk} qui converge faiblement vers un élément de $H_0^1(\Omega)$. De plus, la semi-continuité inférieure séquentielle faible de la norme implique que

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \lim_{nk \longrightarrow +\infty} \inf \|v_{n_k}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$$

C'est-à-dire $v \in C$. Par conséquent, C est compact dans V.

Nous allons choisir la constante M, nous provenons $T(C) \subset C$.

Tel que $\forall w \in V$

$$\int_\Omega \nabla(Tv) \nabla w dx = \int_\Omega F(v) w dx$$

Pour $w = Tv$ dans l'équation précédente, il vient :

$$\int_\Omega |\nabla Tv|^2 dx = \int_\Omega F(v) Tv dx$$

On utilise l'inégalité de Poincaré $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$

$$\|\nabla Tv\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega F(v) Tv dx \leq \|F(v)\|_{L^2(\Omega)} \|Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donc

$$\|\nabla Tv\|_{L^2(\Omega)} \leq M$$

$$\|Tv\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, alors application le théorème point fixe de Schauder

$$Tv = v \ \ \forall v \in C$$

Alors on a l'existence d'une solution.

- **L'unicité :**

  En utilisant la théorème(3.1.5) de prouver l'unicité d'une solution à ce problème $\forall u_\varepsilon \in V$

$$-\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon = f$$
$$-\Delta u_\varepsilon = F(u_\varepsilon) \tag{3.10}$$

  Soit u_{ε_1} et u_{ε_2} les deux solutions (3.10). Nous utilisons la formule de Green

$$\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon_1} \nabla v_1 dx = \int_\Omega F(u_{\varepsilon_1}) v_1 dx \quad \forall v_1 \in V$$
$$\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon_2} \nabla v_2 dx = \int_\Omega F(u_{\varepsilon_2}) v_2 dx \quad \forall v_2 \in V$$

  On pose $v_1 = u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}$, $v_2 = u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}$ additionnons les deux équations. On trouve :

$$\int_\Omega (\nabla(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}))^2 dx = \int_\Omega F(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) dx \leq 0$$

  On l'inégalité de Poincaré $\|u_{\varepsilon 1} - u_{\varepsilon_2}\|_V \leq 0 \Longrightarrow u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2} = 0$
  d'on l'unicité.

2. Nous montrons que u_ε est uniformément bornée, si u_ε n'est pas bornée dans V alors $\|u_\varepsilon\|_V \longrightarrow \infty, \varepsilon \longrightarrow 0$ donc

$$\frac{(-\Delta u^\varepsilon, u^\varepsilon - v_0)}{\|u_\varepsilon\|_V} \longrightarrow +\infty$$

   On choisir $v_0 = u$ on a

$$(-\Delta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) = (f, u_\varepsilon - u)$$

   On remarque

$$(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) = (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - Pu_\varepsilon + Pu_\varepsilon - u) \tag{3.11}$$
$$= (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - Pu_\varepsilon) + (\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u) \tag{3.12}$$
$$= (\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + (\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u) \tag{3.13}$$

On a

$$(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u) = ((u_\varepsilon - \varphi)^-, \varphi - u) \geq 0$$

Par conséquent

$$(-\Delta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u) \leq (f, u_\varepsilon - u)$$

Donc

$$\frac{(-\Delta u_\varepsilon, u_\varepsilon - u)}{\|u_\varepsilon\|_V} \leq \|f\|_{L^2}(1 + \frac{\|u\|_V}{\|u_\varepsilon\|_V})$$

Supposons qu'il existe une suite $u_\varepsilon \longrightarrow +\infty$ telle que $\|u_\varepsilon\|_V \longrightarrow +\infty$,$\dfrac{\|u\|_V}{\|u_\varepsilon\|_V} \longrightarrow 0$ et l'inégalité ci-dessus contredit la coercivité de $a(.,.)$. Il existe donc une constante M telle que $\|u_\varepsilon\|_V \leq M$ pour tout ε. Soit u_ε uniformément bornée dans V est de Hilbert. L'existe $u_0 \in V$ tel que le suite u_ε converge faiblement vers u_0 dans V, et u_ε converge fortement vers u_0 dans $L^2(\Omega)$.

3. Nous trouvons le lemme (3.1.9), utilisons la monotonie de A . Il vient

$$\langle Au_\varepsilon - Au_0, u_\varepsilon - u_0 \rangle \geq 0$$

Soit en développant le crochet

$$\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle - \langle Au_\varepsilon, u_0 \rangle - \langle Au_0, u_\varepsilon \rangle + \langle Au_0, u_0 \rangle \geq 0 \tag{3.14}$$

Convergences faibles respectives de Au_ε et de u_ε, on a que $\langle Au_\varepsilon, u_0 \rangle \longrightarrow \langle \chi, u_0 \rangle$ et $\langle Au_0, u_\varepsilon \rangle \longrightarrow \langle Au_0, u_0 \rangle$. Par conséquent, en passant à la limite inférieure dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle - \langle \chi, u_0 \rangle - \langle Au_0, u_0 \rangle + \langle Au_0, u_0 \rangle \geq 0$$

D'où le résultat

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \inf \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \geq \langle \chi, u_0 \rangle.$$

On trouvons le lemme (3.1.10). On utilise cette fois l'inéquation variationnelle $\forall u_\varepsilon, v \in K$

$$\langle Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon \rangle \geq 0$$

Soit en développant le crochet

$$\langle Au_\varepsilon, v\rangle - \langle f, v\rangle - \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle + \langle f, u_\varepsilon\rangle \geq 0 \tag{3.15}$$

Passant à la limite inférieure dans cette inégalité, on obtient

$$-\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle + \langle \chi, v\rangle - \langle f, v\rangle + \langle f, u_0\rangle \geq 0$$

On choisir $v = u_0$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sup\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \leq \langle \chi, u_0\rangle.$$

La convergence provient immédiatement des lemmes (3.1.10) et (3.1.11) ,alors l'inégalité de monotonie, il vient

$$\langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle - \langle Au_\varepsilon, v\rangle - \langle Av, u_\varepsilon\rangle + \langle Av, v\rangle \geq 0$$

Passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\langle \chi, u_0\rangle - \langle \chi, v\rangle - \langle Av, u_0\rangle + \langle Av, v\rangle \geq 0$$

Dans

$$\langle \chi - Av, u_0 - v\rangle \geq 0$$

On déduirons que $\chi = Au_0$ reprenant l'inégalité (3.15) et passant à la limite en ε

$$-\langle Au_0, u_0\rangle + \langle Au_0, v\rangle - \langle f, v\rangle + \langle f, u_0\rangle \geq 0$$

Alors

$$\langle Au_0 - f, v - u_0\rangle \geq 0$$

D'où le résultat u_0 solution sur l'inéquation variationnelle(1.9).

■

3.4 Problème Discret de pénalisation

Nous considérons le problème :

$$P_h^\varepsilon \begin{cases} trouver \;\; u_\varepsilon^h \in V_h \\ a(u_\varepsilon^h, v_h) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h), v_h) = (f, v_h) \;\; \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{3.16}$$

3.4.1 Existence et l'unicité de problème discret

Dans ce section nous donnerons l'existence et l'unicité de solution approché de méthode.

Lemme 3.4.1 *[8] Soit $\xi \in V_h$, $\Pi_\varepsilon^h(\xi) : V_h \longrightarrow V_h$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ tel que $r > 0$ convenable, on ait :*

$$(\Pi_\varepsilon^h(\xi), \xi) > 0 \;\; \forall \xi \;\; tel\ que \;\; \|\xi\|_1 = r \tag{3.17}$$

Si $\xi = \{\xi_i\}$ et $\eta = \{\eta_i\} \in \mathbb{R}^2$:

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{2} \xi_i \eta_i, \|\xi\| = (\xi, \xi)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

Alors il existe ξ ,$\|\xi\|_1 \leq r$ tel que $\Pi_\varepsilon^h(\xi) = 0$

Lemme 3.4.2 *Problème (P_ε^h) admet une solution unique.*

Preuve.

L'existence :

Soit $A_h : V_h \longrightarrow V_h$ l'opérateur discret elliptique défini par

$$(A_h\psi, v_h) = a(\psi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Soit $P_h : L^2 \longrightarrow V_h$ le L^2- projection est défini on $\Pi_\varepsilon^h : V_h \longrightarrow V_h$

$$\Pi_\varepsilon^h(\psi) = A_h\psi + \frac{1}{\varepsilon} P_h \beta(\psi) - P_h f$$

composée d'applications continues.

u_ε^h solution (P_ε^h) si seulement si $\Pi_h^\varepsilon(u_\varepsilon^h) = 0$

Si $\Pi_h^\varepsilon(u_\varepsilon^h) \neq 0$, On choisir L'ensemble C est un convexe fermé de V_h. Nous prenons ici

$$C = \{\xi \in V_h; \|\xi\| \leq r\}$$

L'on pose encore $T : C \longrightarrow C$ $\forall \xi \in C$ tel que

$$T(\xi) = -\frac{\Pi_h^\varepsilon(\xi)\xi}{|\Pi_h^\varepsilon(\xi)|}$$

Pour assurer que $T(C) \subset C$, alors application le théorème point fixe de Schauder.

$$T(\xi) = \xi$$

ou a

$$0 < (\xi, \xi) = (T(\xi), \xi) = (-\frac{\Pi_h^\varepsilon(\xi)\xi}{|\Pi_h^\varepsilon(\xi)|}, \xi)$$

Alors $0 < (-\Pi_h^\varepsilon(\xi), \xi)$, donc $0 > (\Pi_h^\varepsilon(\xi), \xi)$

Ce contraste avec la lemme (3.4.1)qui on pose $\xi = u_\varepsilon^h$.

Il existe u_ε^h solution,tel que $\Pi_\varepsilon^h(u_\varepsilon^h) = 0$

Maintenaient nous démonstration respectivement

Si $\Pi_h^\varepsilon(u_\varepsilon^h) = 0 \implies \Pi_\varepsilon^h(u_\varepsilon^h) = A_h u_\varepsilon^h + \frac{1}{\varepsilon} P_h \beta(u_\varepsilon^h) - P_h f \ \forall v_h \in V_h$

$$(A_h u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(P_h \beta(u_\varepsilon^h), v_h) - (P_h f, v_h) = 0$$

$$(A_h u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(P_h \beta(u_\varepsilon^h) - \beta(u_\varepsilon^h) + \beta(u_\varepsilon^h), v_h) - (P_h f - f + f, v_h) = 0$$

$$(A_h u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(P_h \beta(u_\varepsilon^h) - \beta(u_\varepsilon^h), v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h), v_h) - (P_h f - f, v_h) = (f, v_h)$$

On remarque $(P_h \beta(u_\varepsilon^h) - \beta(u_\varepsilon^h), v_h) = 0$ et $(P_h f - f, v_h) = 0$ pour la propriété de projection

$$(A_h u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h), v_h) = (f, v_h)$$

On a

$$a(u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h), v_h) = (f, v_h)$$

u_ε^h solution de (P_ε^h)

l'unicité :

Soit $\tilde{u}_h^\varepsilon$ et u_h^ε deux solution (P_h^ε)

$\forall v_h \in V_h$

$$a(\tilde{u}_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(\tilde{u}_\varepsilon^h), v_h) = (f, v_h) \tag{3.19}$$

$$a(u_\varepsilon^h, v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h), v_h) = (f, v_h) \tag{3.20}$$

Dans soustraction du (3.19) et (3.20), alors

$$a(u_\varepsilon^h - \tilde{u}_\varepsilon^h, v_h) = -\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon^h) - \beta(\tilde{u}_\varepsilon^h), v_h)$$

On pose $v_h = u_\varepsilon^h - \tilde{u}_\varepsilon^h$, on utilise la monotone de l'autre côté de l'équation

$$a(u_\varepsilon^h - \tilde{u}_\varepsilon^h, u_\varepsilon^h - \tilde{u}_\varepsilon^h) \leq 0$$

La coercitivté sur $a(.,.)$

$$\|u_\varepsilon^h - \tilde{u}_\varepsilon^h\|_V^2 \leq 0$$

Ce qui implique que : $u_\varepsilon^h = \tilde{u}_\varepsilon^h$ d'où l'unicité ■

3.5 Analyse d'erreur de méthode pénalisation

Dans ce section nous donnerons la méthode de l'analyse de l'erreur. Soit u est la solution exacte de problème obstacle, et u_ε est la solution de méthode.

Théorème 3.5.1 *Soit $u_0 \in K$ et $u_\varepsilon \in V$ solution de problème (1.9)et (3.3)respectivement, $\varepsilon > 0$ on a estimation*

$$\|u_0 - u_\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}$$

C indépendant de ε et f.

Preuve. On premier étape démontrons l'inégalité suivant :

$$\|u_0 - Pu_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Alors

$$\begin{aligned}
a(Pu_\varepsilon - u_0, Pu_\varepsilon - u_0) &= a(Pu_\varepsilon, Pu_\varepsilon - u_0) - a(u_0, Pu_\varepsilon - u_0) \\
&= a(u_\varepsilon, Pu_\varepsilon - u_0) - a(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) - a(u_0, Pu_\varepsilon - u_0) \\
&\leq (f, Pu_\varepsilon - u_0) - \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0)) - a(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) - a(u_0, Pu_\varepsilon - u_0) \\
&\leq (f, Pu_\varepsilon - u_0) - \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) - a(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) - (f, Pu_\varepsilon - u_0) \\
&\leq (f, Pu_\varepsilon - u_0) - a(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) - (f, Pu_\varepsilon - u_0)
\end{aligned}$$

Puisque $(\beta(u_\varepsilon), Pu_\varepsilon - u_0) = ((u_\varepsilon - \varphi)^-, \varphi - u_0) \geq 0$

$$a(u_0 - Pu_\varepsilon, (u_0 - Pu_\varepsilon) \leq a(\beta(u_\varepsilon), u_0 - Pu_\varepsilon)$$

On utilise pour la coercive de $a(,)$ et l'inégalité Couchy Schwarz

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_0 - Pu_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|\beta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|u_0 - Pu_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\beta u_\varepsilon\|_{H_0^1}\|u_0 - Pu_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\
\|u_0 - Pu_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\alpha}\|\beta u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u_0 - u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|u_0 - Pu_\varepsilon - \beta u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_0 - Pu_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\beta u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

■

Théorème 3.5.2 *[9] Soit $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $u_\varepsilon^h \in V_h$ les solutions de (P_ε) et (P_ε^h) respective, on estimation*

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2} \leq C(h + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}h^2)\|f\|_{L^2} \tag{3.21}$$

C indépendant de ε, h et f.

Corollaire 3.5.3 *Soit $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\varphi \leq u_0$ et $u_\varepsilon^h \in V_h$ le solution un problème d'obstacle (P_0) et discrétion de problème pénalisation (P_ε^h), toujours $\varepsilon = h^2$, on estimation*

$$\|u_0 - u_\varepsilon^h\|_{H^1} \leq Ch\|f\|_{L^2} \tag{3.22}$$

Preuve.

Soit $\forall u, v \in V$, alors $\beta u = u - Pu$

$$\begin{aligned}\|\beta(u) - \beta(v)\|_0^2 &= (\beta(u) - \beta(v), u - Pu - v + Pv) \\ &\leq (\beta(u) - \beta(v), u - v) + (\beta(u) - \beta(v), Pu - Pv) \\ &\leq (\beta(u) - \beta(v), u - v)\end{aligned}$$

La coercivté et la continuité de $a(.,.)$ définition la relation u_ε et u_ε^h

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}^2 &\leq C\left\{a(u_\varepsilon - u_\varepsilon^h, u_\varepsilon - u_\varepsilon^h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h), u_\varepsilon - u_\varepsilon^h)\right\} \\ &= C\left\{a(u_\varepsilon - u_\varepsilon^h, u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h), u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h)\right\} \\ &\leq C\left\{\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1}\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{H^1} + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{L^2}\right\}\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ alors :

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2}\left\{\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}^2\right\} \\ &+ C\left\{\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{L^2}^2\right\} \\ &\leq C\left\{\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|u_\varepsilon - \psi_\varepsilon^h\|_{L^2}^2\right\}\end{aligned}$$

On pose ψ_ε^h interpolé de u_ε^h

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}^2 \leq C(h^2 + \varepsilon^{-1}h^4)\|u_\varepsilon\|_{H^2}$$

On utilise le théorème shift de l'inégalité dernière

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2}^2 \leq C(h^2 + \varepsilon^{-1}h^4)\|f\|_{L^2}$$

Alors

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^h\|_{H^1} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_\varepsilon^h)\|_{L^2} \leq C(h + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}h^2)\|f\|_{L^2}$$

■

Chapitre 4

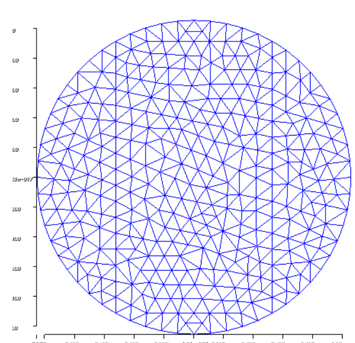
Tests numériques sous Freefem++

Dans ce chapitre nous faisons quelques tests numériques, basés sur la méthode de pénalisation sous le logiciel Freefem++.

4.1 Exemples

Nous discrétisons le maillage Ω par triangulation on utilise le maillage suivante :

$$\Omega = \left\{(x, y) \ \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$$



(a) Ω

Figure 4.1 – Maillage du domaine

4.1.1 Premier exemple :

Nous considérons de problème d'obstacle suivante :

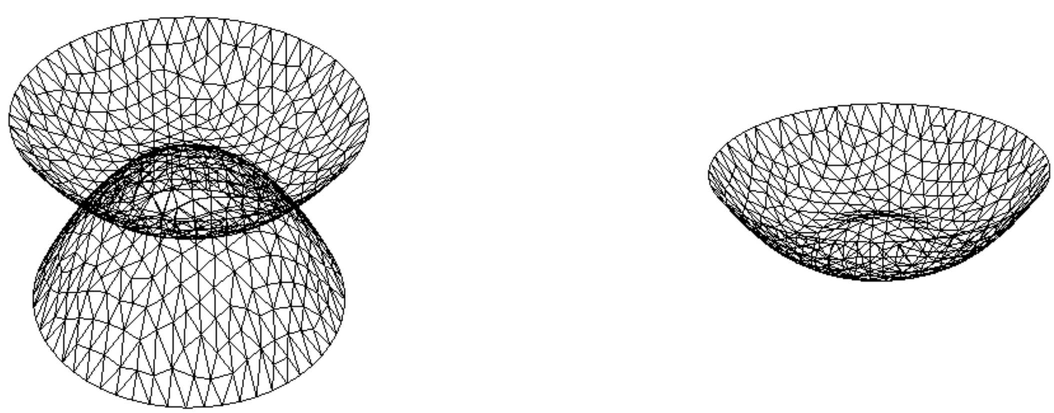
$$\begin{cases} -\Delta u \geq -4 & \text{dans } \Omega \\ u \geq -x^2 + y^2 - 0.3 & \text{dans } \Omega \\ (-\Delta u + 4)(u + x^2 - y^2 + 0.3) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0.7 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors l'obstacle $\varphi = -x^2 + y^2 - 0.3$ et la force $f = -4$

La solution exacte du problème d'obstacle est donnée :

$$u = \begin{cases} -x^2 - y^2 + 0.3 & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 0.2953 \\ x^2 + y^2 - 0.3 - 0.3489 \log \sqrt{x^2 + y^2} & 0.2953 < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

la membrane est placée sous-dessus d'un obstacle et on a appliqué des forces extérieure f on remarque une déformation de la membrane, comme dans la figure(4.2)



(a) Contact membrane et l'obstacle (b) Déformation de membrane

FIGURE 4.2 – Le problème d'obstacle

4.1.2 Localisation de la frontière libre

Nous dessinons la frontière liber sur logiciel Matlab, on remarque par la intervalle $]-0.3, 0.3[$ ce vérifie $\varphi = v$, et intervalle $]-1, -0.3[\times]0.3, 1[$ il analyse de $v > \varphi$

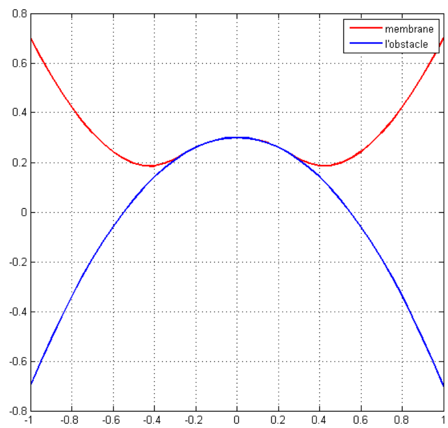


FIGURE 4.3 – Frontière libre pour le premier exemple

4.1.3 La convergence pour le premier exemple

Pour le paramètre de pénalisation $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\beta u = min((u-\varphi), 0)$, $\lambda_0 = 0$ valeur initiale. La solution approché u_h de cette méthode

itération	$\|\beta u - \lambda_0\|_0$	$\|u - u_h\|_1$
71	0.00763859	0.0033359
79	0.007626276	0.00322915
204	0.00617871	0.00267672
300	0.0053046	0.00228524
412	0.00444974	0.00190247
550	0.00359557	0.00152257
607	0.0032970	0.00138771
752	0.0265542	0.0010991
877	0.00221709	0.00090025
999	0.00186899	0.000744932

TABLE 4.1 – La convergence de la solution approchée

4.1.4 Deuxième exemple :

Nous considérons de problème d'obstacle suivante :

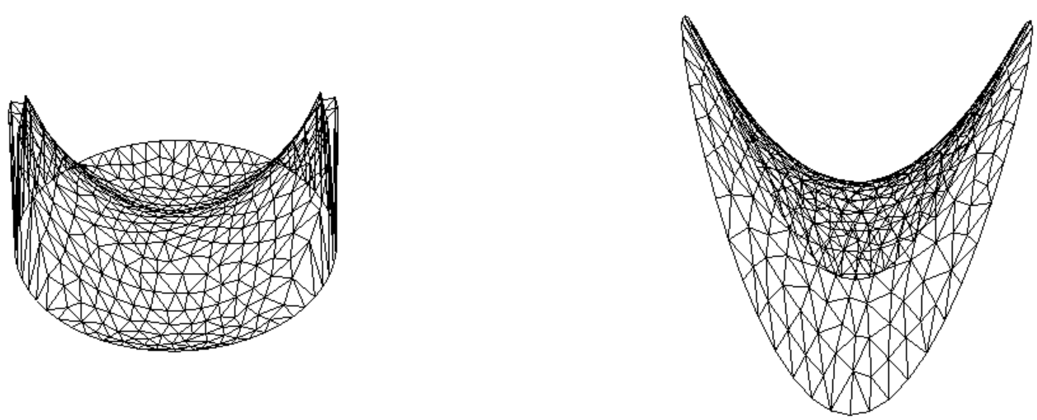
$$\begin{cases} -\Delta u \geq -32 & \text{dans } \Omega \\ u \geq -x^2 + y^2 - 0.5 & \text{dans } \Omega \\ (-\Delta u + 32)(u + x^2 - y^2 + 0.5) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

Alors l'obstacle $\varphi = -x^2 + y^2 - 0.5$, et la force extérieure $f = -32$

La solution exacte pour problème d'obstacle est donnée :

$$u = \begin{cases} -1 & x < 0.7374 \\ 8x^2 - 8.699 \log x - 8 & 0.7374 \leq x \end{cases} \tag{4.4}$$

Dans cet exemple on étudie déflextion de la membrane est soumis en bas à une force agissant ,comme cette figure



(a) Membrane (b) L'obstacle

Figure 4.4 – Déformation de membrane

4.1.5 Localisation de la frontière libre

Nous dessinons la frontière liber sur logiciel Matlab, on remarque par la intervalle $]-0.2, 0.2[$ ce vérifie $\varphi = v$, et intervalle $]-1, -0.2[\times]0.2, 1[$ il analyse de $v > \varphi$

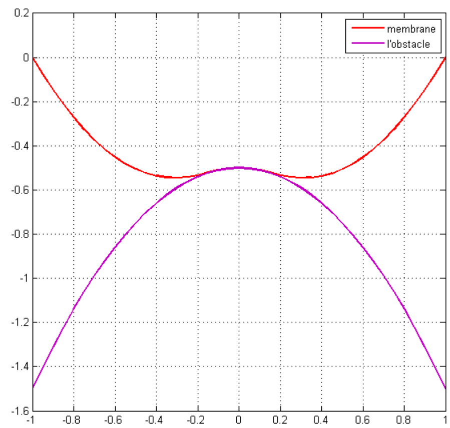


FIGURE 4.5 – Frontière liber par le premier exemple

4.1.6 La convergence par deuxième exemple

Pour le paramétre de pénalisation $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\beta u = min((u-\varphi), 0)$, $\lambda_0 = 0$ valeur initiale alors u solution approché de cette méthode

itération	$\|\beta u - \lambda_0\|_0$	$\|u - u_h\|_1$
01	0.002662	1.88295
11	0.001018	0.052111
25	0.00078	0.027479
40	0.00228524	0.02387
65	0.00444974	0.00190247
80	0.00359557	0.00152257
80	0.0032970	0.00138771
90	0.0265542	0.0010991
99	0.00221709	0.00090025

TABLE 4.2 – la convergence de solution approchée du du Lagrangien IP_1

Dans cet exemple, on observe que si on augmente le nombre des triangles du le bordure, on remarque chaque fois une diminution de estimée d'erreur $\|u - u_h\|_1$

Nombre de triangles	10	100	150	200
$\|u - u_h\|_1$	0.0177968	0.00954246	0.00940251	0.00937687

Table 4.3 – Comparaison des résultats

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la méthode de pénalisation pour la problème d'obstacle, cette méthode conduit à la recherche d'une solution approchée à partir d'un problème sans contraintes ce qui simplifie la procédure de recherche de la solution numérique du problème.

Théoriquement, la méthode de pénalisation est simple, mais son implémentation sur ordinateur est difficile à cause du choix optimal du paramètre de pénalisation qui n'est pas facile. Comme la référence Scholz [9] on suggère de prendre $\varepsilon = h^2$ ce qui peut être très couteux si ε est très petit. Pour éviter cette difficulté il est préférable de considérer une formulation mixte.

Bibliographie

[1] H.Brézis :Analyse fonctionnelle théories et application.Dunod 1999.

[2] R.Glowinski :Lectures on Numerical Methods For Non-Linear variational Problems. Bombay 1980.

[3] H,Brézis ; G,Stampacchia :Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, France : Bull.Soc.Math., 1968.

[4] Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond. Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre. Springer, 2002.

[5] R.S, Falk : Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities Math.Comp,128.p963-971.(Oct., 1974).

[6] D,Biermann ; I, Iovkov : Stabilization techniques and a posteriori error estimates for the obstacle problem, Applied Mathematical sciences. Vol.7.2013.

[7] R,Glowinski :Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems.Springer-Verlag.New York.(1984).

[8] J. L,Lions . : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris : Dunod-Gauthier-Viltars 1969.

[9] R, Scholz. : Numerical Solution of the Obstacle Problem by Penalty Method. Math.Comp 32.p294-306.(1984).

[10] H,Le Dret. :Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires.Université Pierre et Marie Curie France, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

Résumé

Dans ce travail on utilise la méthode de pénalisation pour résoudre des problèmes avec contraintes de type inégalité formulés par des inéquations variationnelles de première espèce. Plus précisément on étudie le problème d'obstacle pour le Laplacien.

***Mots Clés**: méthode pénalisation, inéquation variationnelle, problème d'obstacle, éléments fins.*

ملخص

في هذا العمل تم إستخدام طريقة المعاقبة في حل مشاكل ذات قيود من نوع متراجحة تغايرية من الصنف الاول. وعلى وجه التحديد مشكلة الحواجزبالنسبة لمؤثر لاباس.

***الكلمات المفتاحية:** طريقة المعاقبة, متراجحة تغايرية, مشكلة الحاجز, عناصر المنتهية.*

Abstract

In this work the penalty method is used to solve problems with inequality type constraints formulated by variational inequalities of first kind. Specifically we study the obstacle problem for the Laplacian.

***Keywords** : penalty method, variational inequality, the obstacle problem, finites elements.*