

**République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**

**Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière**

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

**Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du
DIPLOME DE MASTER**

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Présenté par:

REGHIS Kenza

Fiabilité des Systèmes Mécaniques

Soutenu publiquement le : mai 2016

Devant le jury composé de:

Mr. BOUSSAAD Abdelmalek	Université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Melle. ARBIA Hanane	Université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Melle. SAIDANE Hadda	Université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

*A mes très chers parents,
A tous ceux dont j'ai appris,
de près ou de loin,
un peu ou énormément,
humainement ou professionnellement.*

Remerciements

A l'issue de l'établissement du mon projet de fin d'étude je tiens à remercier :

Avant tout, à notre créateur ALLAH qui nous guidé vers le bon chemin afin d'arriver au terme de ce travail.

Ensuite, Je tiens à remercier infiniment mon encadreur Melle. SAIDANE Hadda, d'avoir accepté de m'encadrer, pour sa disponibilité, pour ses nombreux conseils, pour ses corrections, son soutien et de m'avoir mis très à l'aise lors de mon travail. Je profite de cette occasion pour lui présenter ma gratitude pour l'effort qu'elle a fourni pendant ces mois de travail, l'orientation, les conseils, ainsi être à l'écoute et avoir resté pendant toute la période de travail. Tous les mots qu'on va chercher pour lui remercier ne suffiront pas pour lui exprimer le respect, l'estime, l'appréciation et la gratitude qu'on a pour lui.

J'ai de la chance parce que Monsieur BOUSAAD Abdelmalek ait acceptée d'être président de ce travail ainsi que pour l'attention qu'il a porté à mon travail malgré son emploi du temps très chargé.

Je tiens également à remercier Melle. ARBIA Hanane pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble de mes camarades de master, mes amis, mes proches et ma famille (au sens large) qui m'ont soutenue durant ce travail, et spécialement à celles ou ceux, elles ou ils se reconnaîtront, qui m'ont encouragée à finir ce travail et qui m'ont accompagnée dans tous les moments de joie et de tristesse.

Enfin, je ne saurais terminer cette partie sans exprimer ma gratitude à mes parents et ma petite famille de m'avoir encouragé, soutenu et supporté mon stress durant mon travail. Merci !

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vi
Introduction	1
1 Caractéristiques de la fiabilité	3
1.1 Objectifs de la fiabilité en mécanique	4
1.2 Système	4
1.3 Caractéristiques de la fiabilité	5
1.3.1 Durée de vie	5
1.3.2 Fonction de défaillance et fonction de fiabilité	5
1.3.3 Taux de défaillance instantané	7
1.3.4 Disponibilité	9
1.3.5 Maintenabilité	10
1.4 Métriques de la Sûreté de Fonctionnement	10
1.5 Lois de probabilité usuelles en fiabilité	11
1.5.1 Loi exponentielle	12
1.5.2 La loi de Weibull	15

1.5.3	La loi Gamma	17
1.5.4	La loi normale	18
1.5.5	La loi Log-normale	19
1.5.6	Loi du khi-deux	20
1.6	Fiabilité des systèmes	20
1.6.1	Système en série	21
1.6.2	Système en parallèle	22
1.6.3	Système k/n	24
1.6.4	Systèmes mixtes	25
2	Estimation des indices de fiabilité	27
2.1	Statistique d'ordre	27
2.2	Cas des données complètes	30
2.2.1	Estimation non paramétrique	30
2.2.2	Estimation paramétrique par la méthode maximum de vraisemblance	31
2.3	Cas des données censurées	37
2.3.1	Type de données censurées	37
2.3.2	Estimation non paramétrique	39
2.3.3	Estimation paramétrique	42
2.4	Tests d'adéquations	45
2.4.1	Test de khi-deux(χ^2)	46
2.4.2	Test de kolmogorov Smirnov	47
3	Système avec renouvellement	49
3.1	Processus stochastiques	49
3.1.1	Définitions et propriété de base	50
3.1.2	Processus à accroissements stationnaires et indépendants	51
3.2	Processus de renouvellement	51
3.2.1	Processus de comptage	52

3.2.2	Fonction de renouvellement	55
3.2.3	Densité de renouvellement	57
3.3	Processus de Poisson et renouvellement	57
3.3.1	Processus de Poisson	57
3.3.2	Processus de poisson et loi exponentielle	58
	Conclusion	60
	Bibliographie	61
	Annexe A : Abréviations et Notations	65

Table des figures

1.1	Fonction de défaillance	6
1.2	Fonction de fiabilité	7
1.3	Taux de défaillance en forme de baignoire [39]	9
1.4	Evolution d'un système dans le temps	12
1.5	Propriété de sans mémoire de la loi exponentielle [9]	15
1.6	Principales propriétés de la distribution de Weibull [12]	17
1.7	Taux de défaillance de gamma [21]	18
1.8	Système en série [21]	21
1.9	Système en parallèle [21]	22
1.10	Diagramme de la fiabilité pour un système série-parallèle [21]	25
1.11	Diagramme de la fiabilité pour un système parallèle-série [21]	26
2.1	Estimateur de Kaplan-Meier	41
2.2	Résultats de calcul de l'estimateur de Kaplan-Meier sous R	41
3.1	Les inter-arrivées (inter-occurrences) S_i ($i = 1, \dots, n$) et les instants de pannes T_i ($i = 0, \dots, n$)	52

Introduction

La fiabilité concernait les systèmes à haute technologie a ...abilité concernait les systèmes à haute technologie. Elle est devenue un indicateur très important pour connaître la qualité et la décision, dans l'étude de des composants (composants électroniques, composants mécaniques,...)

Plusieurs industriels intéressent par la modilisation de la fiabilité de leurs produits au cours leur durée de vie a...n de développer et maîtriser les sources de défaillance (voir [1], [23] et [43]).

Les caractéristiques de la fiabilité des systèmes simple ou complexe sont essentielles et elles demandent la maintenance. L'usure et le renouvellement des systèmes entraînent à des pertes qu'ils faut gérer de manière optimale. C'est pour ces raisons qu'un nouveau champ d'investigation s'est développé a...n de réduire le coût. Celui-ci est basé principalement sur la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps et sur l'estimation statistique des paramètres des modèles à partir des résultats des essai.

Le sujet auquel on s'intéresse dans ce mémoire "Fiabilité des systèmes mécaniques" est structuré en trois chapitres :

Chapitre 1 : Caractéristiques de la fiabilité

Dans le premier chapitre nous nous limitons à un rappel bref sur des notions et définitions de base de la théorie de la fiabilité. Nous commençons par définir les différents types des systèmes, en suite on a présenté les principales loi de fiabilité et en particulier la loi "exponentielle", "loi gamma", "loi log-Normale" et la loi de "Weibull" et nous citerons les principales

propriétés de ces loi.

Chapitre 2 : Estimation des indices de fiabilité

On présente dans ce chapitre deux méthodes d'estimation (paramétrique et non paramétrique) des indices de la fiabilité, la première est relative à l'estimation des fiabilités d'un système et de ses composantes à partir des données complètes sur ceux-ci, la deuxième étant relative à l'estimation des paramètres des lois dans le cas de données censurées.

Chapitre 3 : Système avec renouvellement

Il s'agit donc, dans ce chapitre, d'étudier les processus de renouvellement qui interviennent dans la modélisation de phénomènes liés au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système. Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un exemple de référence pour une telle famille de processus où en ce qui concerne ce processus où les variables inter-occurrences sont de loi exponentielle de paramètre λ .

Chapitre 1

Caractéristiques de la fiabilité

Depuis longtemps, la fiabilité d'un système représente un enjeu économique important où des grandes entreprises ont montré un grand intérêt pour la fiabilité comme : Général motors, depuis 1940, Airbus, Airfore et laboratoires Bell téléphone, depuis 1960, Philips, Kodak, Citroën, ... depuis les années 1970 (voir [43]).

La recherche de la diminution du coût des défaillances en exploitation a entraîné une augmentation des exigences de fiabilité sur les systèmes. Donc, la mesure de cette quantité est un premier pas indispensable vers sa maîtrise.

Le terme "fiabilité" est un néologisme introduit dans les années soixante pour traduire le terme anglo-saxon "Reliability". La Commission Electronique Internationale donne à la fiabilité la définition suivante : "Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée" [36].

Dans ce chapitre, on a essayé de présenter les différents types des systèmes, les caractéristiques de la fiabilité, quelques lois de distributions, qui interviennent dans l'analyse des données de vie de produit, utilisées dans une étude de fiabilité et ces propriétés (densité, fonction de fiabilité, taux de défaillance et la durée de vie moyen) ainsi que leur application en fiabilité. En fin, on donne comment calculer la fiabilité des systèmes en série, en parallèle, etc...

1.1 Objectifs de la fiabilité en mécanique

L'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement ¹. Dans le domaine de la mécanique, cette analyse est un outil très important pour caractériser le comportement du produit dans les différentes phases de vie, mesurer l'impact des modifications de conception sur l'intégrité du produit, qualifier un nouveau produit et améliorer ses performances tout au long de sa mission [42].

L'analyse de la fiabilité, en mécanique, apporte des réponses à plusieurs questions comme :

Quels sont les composants qui provoquent la panne du système mécanique ?

Quelles sont les influences des incertitudes sur les données, en particulier sur la performance du produit ?

Quel niveau de contrôle de qualité doit-on satisfaire ?

Comment optimiser l'utilisation du matériel ?

1.2 Système

Un système est un ensemble de composants (éléments) en interaction destiné à accomplir une tâche donnée. C'est le cas par exemple des systèmes de production, systèmes de transport, systèmes informatiques, etc...

Ce système est mis en service à l'instant $t = 0$, il existe 2 types de systèmes :

1. *Système non réparable* : est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne. C'est le cas des petits systèmes, par exemple des ampoules, ou des systèmes qui coûtent plus cher à réparer qu'à remplacer.
2. *Système réparable* : est un système qui, après sa défaillance, peut être remis en état de marche par des actions de réparation ou maintenance. C'est le cas de tous les systèmes

¹La sûreté de fonctionnement (SdF, en anglais dependability) d'un système est la propriété qui permet à ses utilisateurs de placer une confiance justifiée dans le service qu'il leur délivre. On dit aussi que la SdF est la science des défaillances.

complexes tels les systèmes mécaniques et informatiques.

1.3 Caractéristiques de la fiabilité

Ce paragraphe est un recueil de principaux éléments probabilistes qui permettant de mesurer la fiabilité (voir [1], [9], [10], [39], [40], [43] et [24]).

1.3.1 Durée de vie

La notion de durée de vie est la période qui sépare sa mise en exploitation de l'apparition de sa défaillance. Donc, la durée de vie d'un système ou d'un composant est une v.a. T , représentant de temps écoulé depuis la mise en service jusqu'à l'instant de l'évènement de la panne.

Pour simplifier, on choisit $t = 0$ comme origine des temps lorsque le dispositif est mis en marche pour la première fois. Donc, T est un v.a. continue et positive prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ . On note par f la densité de probabilité de la variable T .

1.3.2 Fonction de défaillance et fonction de fiabilité

Fonction de défaillance

La fonction de défaillance (ou la fonction de répartition) est représentée la probabilité pour qu'il survienne au moins une panne jusqu'au temps t et qu'on appelle aussi probabilité cumulative de défaillance.

Définition 1.3.1 (*Fonction de défaillance*)

On appelle fonction de défaillance, notée par $F(t)$, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$F(t) = P(T \leq t).$$

La Figure 1.1 ci-dessous présente une allure de la fonction de répartition $F(t)$ en fonction du temps

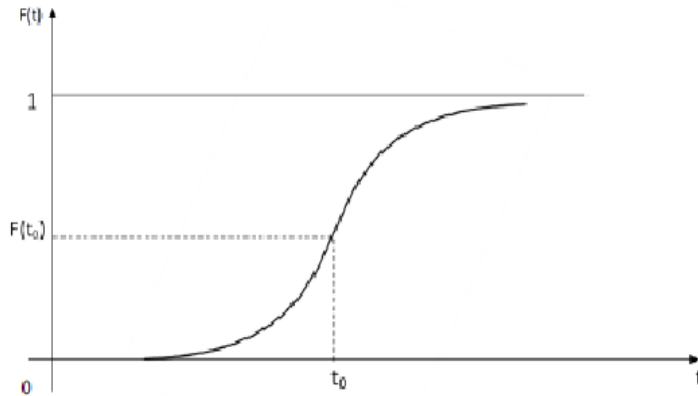


FIG. 1.1 – Fonction de défaillance

Fonction de fiabilité

La fonction de fiabilité, notée par $R(t)$, est définie comme étant la probabilité de fonctionnement sans défaillance du matériel pendant un temps t .

Définition 1.3.2 (*Fonction de fiabilité*)

On appelle fonction de fiabilité, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} R'(t) &= [1 - F(t)]' \\ &= -F'(t) \\ &= -f(t). \end{aligned}$$

Donc $R(t)$ est une fonction monotone décroissante du tell manière que si $t_1 < t_2$ $R(t_1) > R(t_2)$

et

$$\begin{cases} R(0) = 1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0. \end{cases}$$

Cela traduit le fait naturel que l'aptitude au bon fonctionnement d'un système diminue avec le temps.

La fonction de fiabilité a, en général, la forme suivante (voir la Figure 1.2)

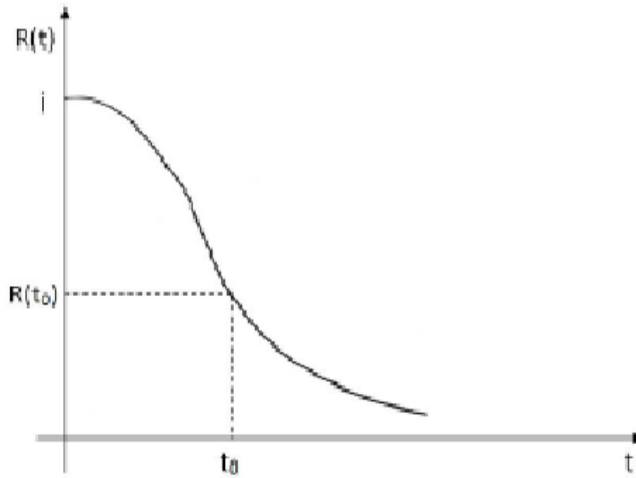


FIG. 1.2 – Fonction de fiabilité

Remarque 1.3.1 La fonction de défaillance $F(t)$ et la fonction de fiabilité $R(t)$ sont exprimées à partir de la fonction de densité $f(t)$ par les relations suivantes :

$$F(t) = \int_0^t f(u) du,$$

et

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u) du = \int_t^{\infty} f(u) du.$$

1.3.3 Taux de défaillance instantané

Le taux instantané de défaillance (appelé aussi taux de panne ou taux d'hasard), noté par $\lambda(t)$, est une des mesures caractéristiques de la fiabilité.

La valeur $\lambda(t)$ représente la probabilité conditionnelle d'avoir une défaillance dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Ainsi, en appliquant le théorème des probabilités conditionnelles, puis le théorème des probabilités totales, $\lambda(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} P(t < T < t + dt / T > t) \\
 &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \frac{P[(t < T < t + dt) \cap (T > t)]}{P(T > t)} \\
 &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \frac{P(t < T < t + dt)}{P(T > t)} \\
 &= \frac{1}{P(T > t)} \underbrace{\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} P(t < T < t + dt)}_{f(t)} \\
 &= \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} \\
 &= -\frac{d}{dt} \ln R(t) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 On en déduit que :

$$R(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda(u) du \right].$$

Il est fréquent de représenter l'évolution du taux de défaillance $\lambda(t)$ d'un produit au cours du temps t selon une courbe caractéristique "courbe en baignoire" (voir la Figure 1.3).

Le taux de défaillance est élevé au début de la vie du dispositif. Ensuite, il diminue assez rapidement avec le temps ($\lambda(t)$ décroissant), cette phase de vie est appelée *période de jeunesse*. Après, il se stabilise à une valeur qu'on souhaite aussi basse que possible pendant une période appelée *période de vie utile* ($\lambda(t)$ constant). A la fin, il remonte lorsque l'usure et le vieillissement font sentir leurs effets, c'est la *période de vieillissement* ($\lambda(t)$ croissant). En effet, $\lambda(t)$ se décompose dans ce cas en trois parties distinctes :

Phase 1 : (Période de jeunesse)

Quand un système est neuf, on observe souvent des défaillances précoces, dûes à des défauts intrinsèques ou des fautes de conception. Le risque de défaillance est donc assez fort au tout

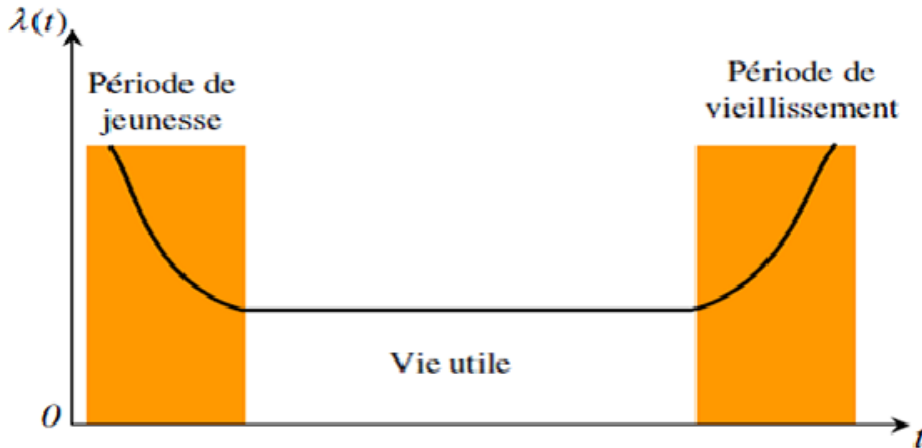


FIG. 1.3 – Taux de défaillance en forme de baignoire [39]

début de la vie du système. Ensuite, il diminue car s'il y a des défauts initiaux, ils vont se manifester tôt. λ est donc d'abord décroissant.

Phase 2 : (Période de la vie utile)

Pendant cette période, le taux de défaillance est approximativement constant. Les pannes sont dites aléatoires, leur apparition n'est pas liée à l'âge du composant mais à d'autres mécanismes d'endommagement (λ constant).

Phase 3 : (Période du vieillissement)

La dernière phase est la période de vieillissement, elle est caractérisée par une augmentation progressive du taux de défaillance avec l'âge du dispositif. Ceci est expliqué par des phénomènes de vieillissement tels que l'usure, l'érosion, etc.

1.3.4 Disponibilité

La disponibilité, notée par $D(t)$, est l'aptitude d'une entité E à être en état d'accomplir les fonctions requises dans les conditions données et à un instant donné. Elle est caractérisée par la probabilité qu'un entité soit en état d'accomplir les fonctions requises dans des conditions

données à l'instant t [12].

$$D(t) = P[E \text{ non défaillant à l'instant } t].$$

1.3.5 Maintenabilité

La maintenabilité, désignée par $M(t)$, est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits. Elle est caractérisée par la probabilité $M(t)$ que l'entité E soit en état, à l'instant t , d'accomplir ses fonctions, sachant que l'entité était en panne à l'instant 0.

$$M(t) = P[E \text{ est réparable sur } [0, t]].$$

1.4 Métriques de la Sûreté de Fonctionnement

Des grandeurs associées à la sûreté de fonctionnement peuvent être calculées à partir des mesures de probabilités. Ces grandeurs suivantes caractérisent des durées moyennes (voir [1],[6], [9], [10], [39], [40], [24], [17], [14], [33] et [43]).

1. MTTF (Mean Time To Failure) : durée moyenne de fonctionnement d'une entité avant la première défaillance.

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t)dt.$$

2. MTTR (Mean Time To Repair) : durée moyenne de réparation. Il est calculé en additionnant les temps actifs de maintenance ainsi que les temps annexes de maintenance, le tout divisé par le nombre d'interventions :

$$MTTR = \frac{\sum \text{Temps d'interventions pour } n \text{ pannes}}{\text{Nombre d'interventions } (n)} = \frac{\sum TTR}{n}$$

Et le *taux de réparation*, notée par μ est donné par :

$$\mu = \frac{1}{MTTR}.$$

3. MUT (Mean Up Time) : durée moyenne de fonctionnement après réparation (ou temps moyen jusqu'à défaillance). Donc, *MUT* est l'espérance mathématique de la durée de vie *T* :

$$MUT = \frac{\sum \text{Temps de bon fonctionnement}}{\text{Nombre d'intervalles de temps de bon fonctionnement}} = \frac{\sum UT}{n}.$$

4. *MTBF (Mean Time Between Failure)* : c'est le temps qui sépare deux défaillances consécutives. Le *MTBF* est la moyenne sur un ensemble d'entités "identiques" et sur leurs durées de vie considérées des *BTF* :

$$MTBF = \frac{\text{Temps de fonctionnement pour l'ensemble des produits}}{\text{Nombre total de défaillances}} = \frac{\sum TBF}{n}.$$

Le taux de défaillance λ est donné en fonction de *MTBF* comme suit :

$$\lambda = \frac{1}{MTBF}.$$

Où

TTR : est le temps de réparation.

UT : est le temps de bon fonctionnement.

TBF : est le temps entre défaillances.

La Figure 1.4 représente la relation entre *MUT*, *MTBF* et *MTTR* :

Remarque 1.4.1

1. *MTBF* est égal à :

$$MTBF = MUT + MTTR.$$

2. La disponibilité *D* peut réécrire par la relation :

$$D = \frac{MUT}{MUT + MTTR} = \frac{MUT}{MTBF}$$

1.5 Lois de probabilité usuelles en fiabilité

La fiabilité est une mesure quantitative nécessite la connaissance des distributions de la durée de vie a fin de l'estimer.

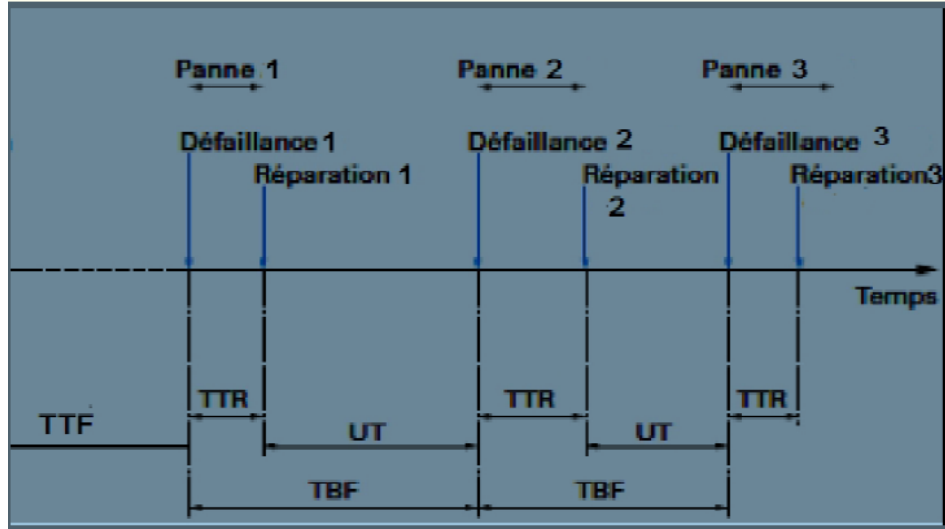


FIG. 1.4 – Evolution d'un système dans le temps

On présente dans cette section les lois et les modèles de fiabilité susceptibles, selon l'expérience, de représenter des distributions de durée de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse de la fiabilité telles la loi *exponentielle* et la loi de *Weibull* où on rappelle les principales propriétés de ces lois, les fonctions de fiabilité associées, les densités de probabilité ainsi que les taux de défaillance [31].

1.5.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales [46]. Cette loi est la plus couramment utilisée en fiabilité électroniques pour décrire la période durant laquelle le taux de défaillance des équipements est considéré comme constant (*défaillance aléatoire*). Elle décrit le temps écoulé jusqu'à une défaillance, ou l'intervalle de temps entre deux défaillances. Elle est définie par un seul paramètre (le taux de défaillance λ).

Une variable aléatoire T est de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\exp(\lambda)$, si et seulement si :

- Sa fonction de répartition est :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- Sa fiabilité est :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

- Sa densité est :

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- Sa durée de vie moyenne est :

$$\begin{aligned} MTTF &= E[T] \\ &= \int_0^{+\infty} R(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

- Son taux de défaillance est :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Le taux de défaillance est donc constant, ce qui signifie que la loi exponentielle modélise les durées de vie de systèmes qui ne s'usent pas et qui ne s'améliorent pas [10].

Proposition 1.5.1 (*Propriétés de sans mémoire de la loi exponentielle*)

La loi exponentielle est sans mémoire, ce qu'on exprime de la façon suivante : si le système n'est pas encore tombé en panne à l'instant t , c'est comme s'il était neuf à cet instant. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x), \quad \forall t \geq 0,$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} P(T > t + x | T > t) &= \frac{P(T > t + x \cap T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} \\ &= \frac{R(t + x)}{R(t)}. \end{aligned}$$

Si T est de loi $\exp(\lambda)$, alors :

$$\begin{aligned} P(T > t + x | T > t) &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x} \\ &= P(T > x) = R(x). \end{aligned}$$

■

Comme l'indique la Figure 1.5, ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui a fonctionné sans tomber en panne jusqu'à l'instant t est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant t , le dispositif est considéré comme neuf, de durée de vie exponentielle de paramètre λ .

Remarque 1.5.1

1. Dans la pratique, on dit souvent que l'on peut modéliser par une loi exponentielle la durée de vie de systèmes qui sont dans leur période de vie utile, c'est-à-dire qui, dans la courbe en baignoire, ont dépassé la période de jeunesse et ne sont pas encore entrés en période d'usure. Mais, c'est une erreur méthodologique car la loi de probabilité de T doit pouvoir modéliser l'ensemble de la durée de vie du système.
2. La loi exponentielle est de loin la loi de durée de vie la plus utilisée en raison de sa simplicité, mais elle ne permet de modéliser ni l'usure, ni le rajeunissement. Il est donc nécessaire de disposer de lois plus sophistiquées. En fiabilité, la loi de Weibull est la plus populaire d'entre elles (voir [38] et [31]).

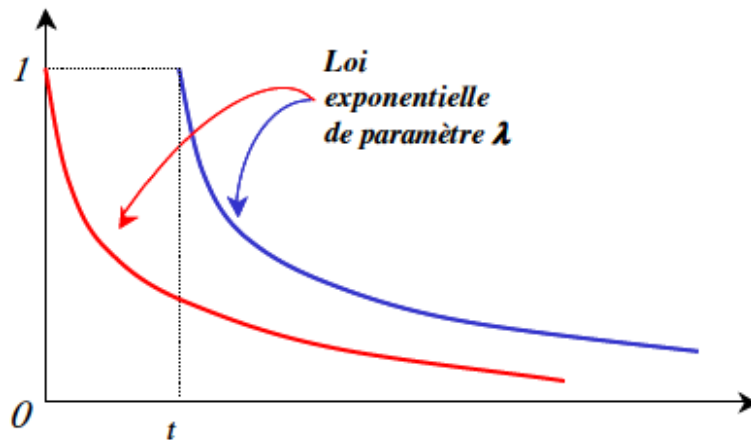


FIG. 1.5 – Propriété de sans mémoire de la loi exponentielle [9]

1.5.2 La loi de Weibull

La loi de Weibull, notée par $\mathcal{W}(\eta, \beta, \gamma)$, est souvent utilisée en mécanique. Cette loi a l'avantage d'être très souple et de pouvoir s'ajuster à différents résultats d'expérimentations [37], [23], [7].

La distribution de *Weibull* est décrite par trois paramètres :

1. Le paramètre de position (ou de localisation) γ est, comme son nom l'indique, un paramètre qui régit la position d'une distribution de probabilité.
2. Le paramètre d'échelle η est un paramètre qui régit l'aplatissement d'une loi de probabilités. Il renseigne sur l'étendue de la distribution.
3. Le paramètre de forme β est un paramètre la forme de la distribution.

Elle est caractérisée par :

- La fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta}.$$

- La fiabilité :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta}.$$

- La densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta}.$$

- Le taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}.$$

- La moyenne des temps de bon fonctionnement :

$$MTTF = \gamma + \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right),$$

où Γ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.1)$$

En particulier, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- La variance :

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right].$$

Remarque 1.5.2

1. Le paramètre de position γ étant souvent nul, on se ramène à :

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta}, \\ R(t) &= e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta}, \\ f(t) &= \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta}, \\ \lambda(t) &= \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

2. Si $\gamma = 0$, on obtient la distribution de Weibull à 2 paramètres dont les caractéristiques sont illustrées sur la Figure 1.6

3. La distribution de Weibull permet donc de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif (courbe de baignoire). Elle caractérise bien le comportement du système dans

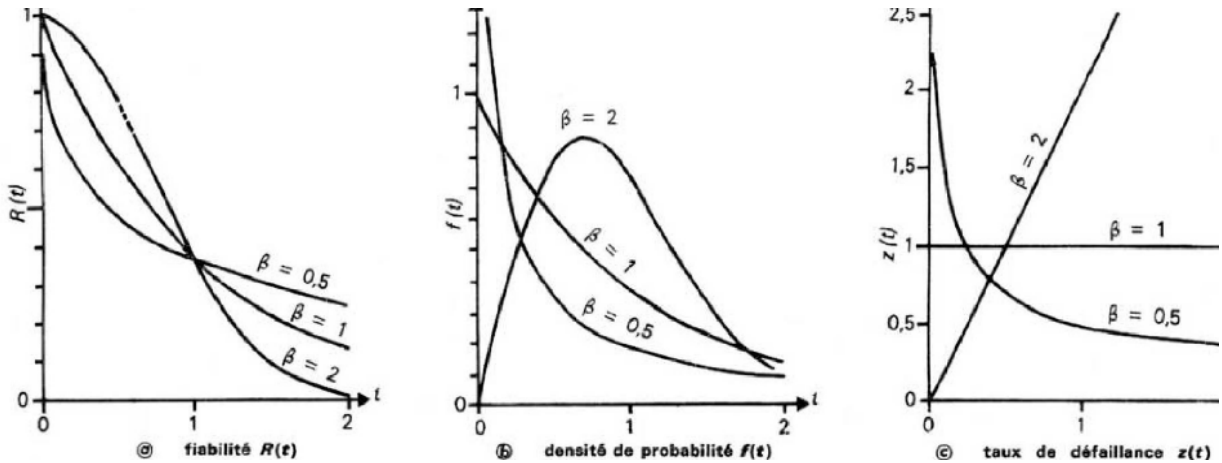


FIG. 1.6 – Principales propriétés de la distribution de Weibull [12]

les trois phases de vie selon la valeur du paramètre de forme β : période de jeunesse si $\beta < 1$ (le taux de défaillance est décroissant), période de vie utile si $\beta = 1$ (le taux de défaillance est constant) et période d'usure ou vieillissement si $\beta > 1$ (le taux de défaillance est croissant).

1.5.3 La loi Gamma

Une variable aléatoire T est de loi gamma de paramètre de forme $\alpha > 0$ et de paramètre d'échelle $\lambda > 0$ [21], notée par $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, si et seulement si :

- Sa densité est :

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

où Γ est donnée par l'Equation 1.1

- Sa fonction de répartition n'a pas d'expression explicite, donc la fiabilité et le taux de défaillance non plus.
- Sa durée de vie moyenne est :

$$MTTF = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Remarque 1.5.3 On peut montrer que :

1. Si $\alpha < 1$, le taux de défaillance est décroissant donc le système s'améliore.

2. Si $\alpha > 1$, le taux de défaillance est croissant donc le système s'use.
3. Si $\alpha = 1$, le taux de défaillance est constant et on retrouve la loi exponentielle.

Ces trois cas sont représentés dans la Figure 1.7

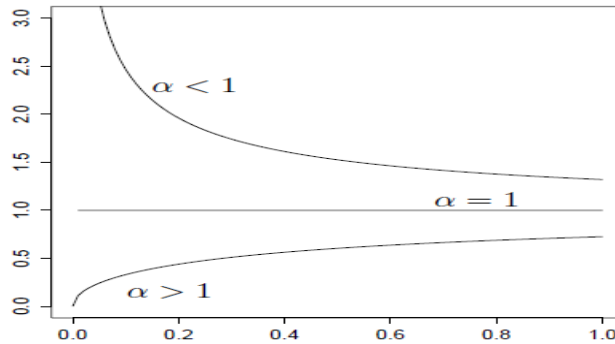


FIG. 1.7 – Taux de défaillance de gamma [21]

Proposition 1.5.2 Si T est de loi $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$ et a un réel strictement positif alors $a.T$ est de loi $\mathcal{G}(\alpha, \frac{\lambda}{a})$.

1.5.4 La loi normale

La loi normale (ou Laplace-Gauss), notée par $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes, notamment en physique et en économie (erreurs de mesure). C'est une loi continue et symétrique dépendant de deux paramètres (μ et σ) qui représente bien la fin de vie des dispositifs subissant un phénomène de vieillissement (usure ou fatigue) [21].

- Sa fonction de répartition s'écrit :

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

où μ est l'espérance (moyenne) et σ l'écart type de la loi normale.

- Sa fiabilité est donnée par :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

- La densité de probabilité de la loi normale s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

- Sa durée de vie moyenne est :

$$MTTF = \mu.$$

1.5.5 La loi Log-normale

La loi log-normale est une loi flexible étroitement liée à la loi normale. Une variable aléatoire continue, positive T est distribuée suivant une loi *log-normale* (ou loi de *Galton* ou loi de *Gibrat*), notée par $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$, si son logarithme est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est largement utilisée pour modéliser des données de vie, en particulier les défaillances par fatigue en mécanique [21].

- La fonction de répartition est :

$$F(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

- La fonction de fiabilité est :

$$R(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

- La densité de probabilité d'une loi log-normale de paramètres positifs μ et σ est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad t > 0.$$

- Sa durée de vie moyenne est :

$$MTTF = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

- Le taux de défaillance est :

$$\lambda(t) = \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right)}}{t \int_0^\infty \sigma \sqrt{2\pi} f(t) dt}.$$

1.5.6 Loi du khi-deux

La loi du *Khi-deux* (ou loi de *Pearson*), notée par \mathcal{X}_v^2 , est un cas particulier de la loi *Gamma*. Elle fait partie des principales lois élémentaires utilisées pour les tests statistiques (avec la loi de *Student* et la loi de *Fisher-Snedecor*) et pour définir l'intervalle de confiance. Donc, cette loi ne sert pas à modéliser directement la fiabilité, mais essentiellement au calcul des limites de confiance lors des estimations par intervalle de confiance. Elle est caractérisée par un paramètre positif v appelé degrés de liberté et définie que pour des valeurs positives. Sa densité de probabilité s'écrit comme suit :

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} t^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, \quad t \geq 0.$$

Remarque 1.5.4 *La loi du Khi-deux est décrite par une table statistique.*

1.6 Fiabilité des systèmes

Un système est constitué des composants élémentaires, sa fiabilité dépend à la fois de fiabilité de ces composants et de la façon dont le bon fonctionnement ou la panne de chaque composant influe sur le bon fonctionnement ou la panne du système. Donc, l'objet de cette section est la détermination de la fiabilité d'un système à partir de la fiabilité de ses composants (voir [43], [8] et [21]).

Pour un système on note par T sa durée de vie, $R(t)$ sa fiabilité, $\lambda(t)$ son taux de défaillance et $m = MTTF$ sa durée de vie moyenne.

1.6.1 Système en série

On dit que le système est en série si la défaillance d'un seul de sous ensemble entraîne la défaillance du système totale (c.à.d le système ne fonction que si tous ses composants fonctionnent) (voir la Figure 1.8)



FIG. 1.8 – Système en série [21]

On suppose que les n composants du système sont indépendants de durée de vie T_i ($i = 1 \dots n$) et de caractéristiques $r_i(t)$, $\lambda_i(t)$ et $m_i(t)$. Un système en série tombe en panne dès qu'un de ses composants tombe en panne, on a donc :

$$T = \min_{i=1}^n T_i$$

- La fiabilité du système est alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\min_{i=1}^n T_i > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t) \\ &= P(\bigcap_{i=1}^n (T_i > t)). \end{aligned}$$

Comme on a supposé les composants indépendants, la probabilité ci-dessus est la probabilité d'une intersection d'évènements indépendants. Elle est donc égale au produit

des probabilités de ces évènements :

$$\begin{aligned} R(t) &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^n r_i(t). \end{aligned}$$

- Le taux de panne d'un système en série :

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t),$$

c.à.d le taux de défaillance d'un système en série à composants indépendants est égal à la somme des taux de défaillance de ses composants.

1.6.2 Système en parallèle

Le fonctionnement de ce système est assuré si au moins un de ses composants est en bon état, le système sera en panne si et seulement si tous ses composants sont en panne simultanément (voir la Figure 1.9).

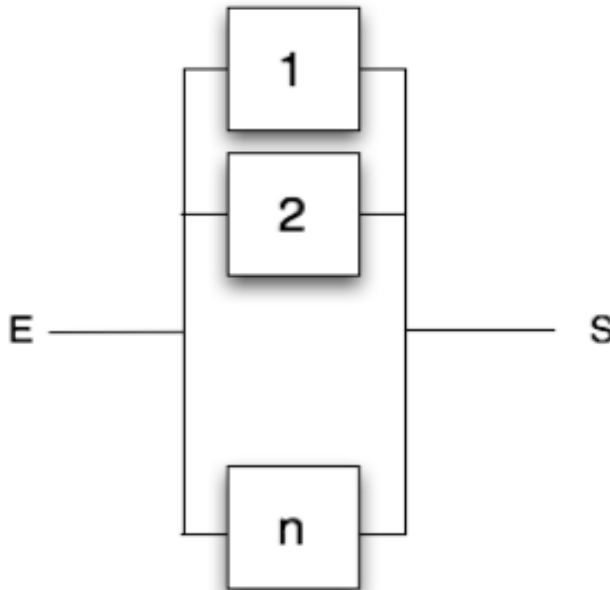


FIG. 1.9 – Système en parallèle [21]

Autrement dit, la défaillance du système en parallèle survient quand tous ses composants sont en panne, on a donc :

$$T = \max_{i=1}^n T_i.$$

- La fiabilité du système est alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) \\ &= P(\max_{i=1}^n T_i > t) \\ &= 1 - P(T_i \leq t), \quad \forall i, \\ &= 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^n (T_i \leq t)\right] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(T_i \leq t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(T_i > t)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - r_i(t)]. \end{aligned}$$

- Le taux de panne d'un système en parallèle :

$$\lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) e^{\left(-\int_0^t \lambda_i(u) du\right)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(1 - e^{\left(-\int_0^t \lambda_j(u) du\right)}\right)}{1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - e^{\left(-\int_0^t \lambda_i(u) du\right)}\right)}.$$

Donc, contrairement au cas d'un système série, le taux de défaillance d'un système en parallèle ne s'exprime pas facilement en fonction du taux de défaillance de ses composants.

1.6.3 Système k/n

Un système k/n est un système qui ne fonctionne que si au moins k composants parmi n fonctionnent comme par exemple le système de contrôle-commande de la température d'un réacteur chimique ou nucléaire est conçu selon une architecture 2/3.

- Si $k = 1$ correspond à un système parallèle.
- Si $k = n$ correspond à un système série.

La fiabilité $R(t)$ de ce système est la probabilité qu'au moins k composants parmi n fonctionnent encore à l'instant t . Si on note N_t le nombre de composants qui fonctionnent à l'instant t , on a alors :

$$R(t) = P(N_t \geq k).$$

Dans le cas général, on ne peut rien dire de plus. Mais si on suppose que tous les composants sont identiques et indépendants, de même fiabilité $r_i(t) = r(t)$, alors la variable aléatoire N_t est de loi binomiale $B(n, r(t))$, ce qui donne que :

$$R(t) = \sum_{j=k}^n C_n^j r(t)^j [1 - r(t)]^{n-j}.$$

où $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$: est appelé combinaison.

Remarque 1.6.1

- Si $k = n$, on obtient $R(t) = [r(t)]^n$. C'est la fiabilité d'un système en série.
- Si $k = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{j=1}^n C_n^j r(t)^j [1 - r(t)]^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j r(t)^j [1 - r(t)]^{n-j} - C_n^0 r(t)^0 [1 - r(t)]^{n-0} \\ &= [r(t) + 1 - r(t)]^n - [1 - r(t)]^n \\ &= 1 - [1 - r(t)]^n. \end{aligned}$$

C'est la fiabilité d'un système en parallèle.

1.6.4 Systèmes mixtes

Les systèmes mixtes sont obtenus en combinant les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

Systèmes série-parallèle

Il résulte de la mise en parallèle de sous-systèmes en série. Le diagramme de fiabilité est donné dans la Figure 1.10.

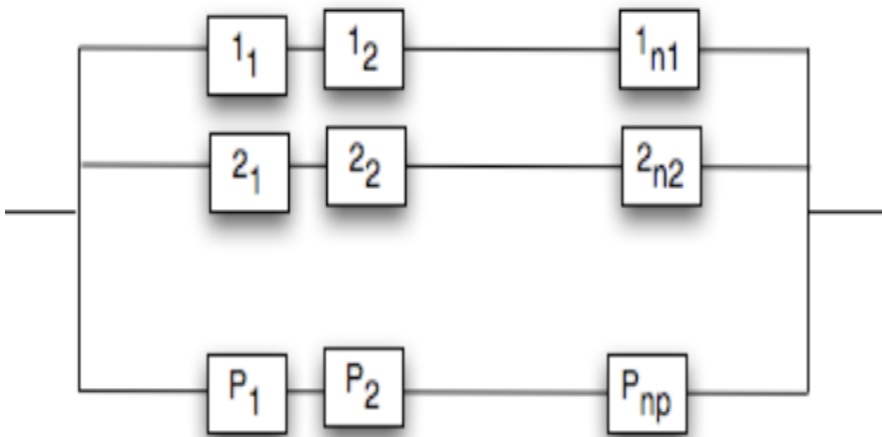


FIG. 1.10 – Diagramme de la fiabilité pour un système série-parallèle [21]

Si on note $r_{ij}(t)$ la fiabilité du $j^{\text{ème}}$ composant de la $i^{\text{ème}}$ branche, les résultats précédents montrent que la fiabilité est :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^p \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} r_{ij}(t) \right].$$

Systèmes parallèle-série

Il résulte de la mise en série de sous-systèmes en parallèle. Le diagramme de la fiabilité est donné, dans ce cas, par la Figure 1.11.

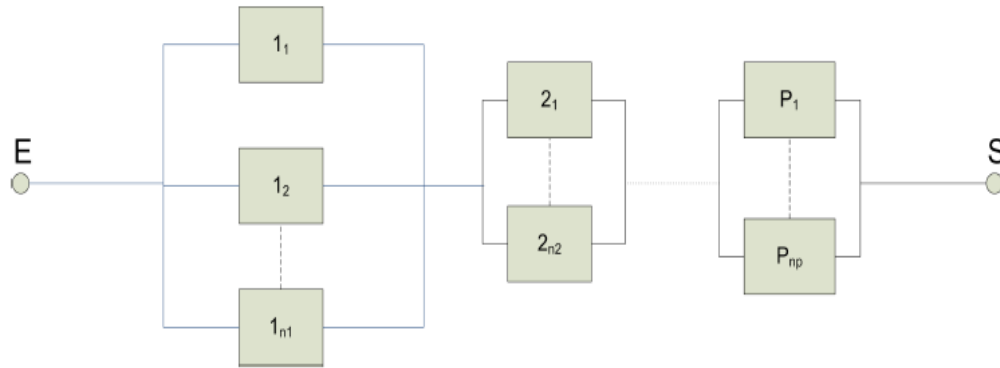


FIG. 1.11 – Diagramme de la fiabilité pour un système parallèle-série [21]

Avec les mêmes notations que précédemment, on obtient que la fiabilité est :

$$R(t) = \prod_{i=1}^p \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} [1 - r_{ij}(t)] \right].$$

Chapitre 2

Estimation des indices de fiabilité

La procédure d'utilisation des informations obtenues à partir de l'échantillon qui permet de déduire des résultats concernant l'ensemble de la population est appelée estimation, l'échantillonnage est le passage de la population à l'échantillon et l'estimation est le passage inverse de l'échantillon à la population¹.

La fiabilité, le taux de défaillance, le temps moyen de bon fonctionnement ne sont pas connus à priori, donc on cherche à estimer à travers d'un ensemble des observations. En générale, ce problème ne se trouve compliqué par le fait qu'on ne dispose pas toujours une observation complète. En effet, pratiquement, pour quelque système on ne peut pas attendre que toute les machines en test parvièment à l'état de panne, on parle alors au modèle censuré. Il existe plusieurs mécanismes de censures.

2.1 Statistique d'ordre

La statistique d'ordre fait partie des outils fondamentaux de la statistique non paramétrique et de l'inférence statistique. Deux cas importants de la statistique d'ordre sont les statistiques du minimum et du maximum.

¹Estimer un paramètre, c'est chercher une valeur approcher en se basent sur les résultats obtenus d'un échantillon.

Pour une étude complète des statistiques d'ordre on peut consulter le livre d'*Arnold, Balakrishnan et Nagaraja* [4].

Définition 2.1.1 (*Statistiques d'ordre*)

Les statistiques d'ordre associées à l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) sont le réarrangement croissant des éléments de cet échantillon. Elles sont dénotées par $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ et pour $k = 1, 2, \dots, n$, la v.a. $X_{k:n}$ est appelée la $k^{\text{ième}}$ statistique d'ordre (ou statistique d'ordre k).

La plus petite statistique d'ordre $X_{1:n}$ (ou statistique du minimum) et la plus grande statistique d'ordre $X_{n:n}$ (ou statistique du maximum) :

$$X_{1:n} := \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad X_{n:n} = M_n := \max(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.1)$$

Loi de $X_{k:n}$

La fonction de répartition de la $k^{\text{ème}}$ statistique d'ordre $X_{k:n}$ pour $1 \leq k \leq n$ est la suivante

$$F_{k:n}(x) = \sum_{i=k}^n C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

où

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Nous en déduisons que la fonction de densité est :

$$f_{k:n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x),$$

Loi de $X_{1:n}$

$$F_{1:n}(x) = P\{X_{1:n} \leq x\} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 F_{1:n}(x) &= P(X_{1:n} \leq x) \\
 &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\
 &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\
 &= 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right] \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x), \quad X_i \text{ sont indépendantes} \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(X_i \leq x)] \\
 &= 1 - [1 - F(x)]^n,
 \end{aligned}$$

d'où

$$f_{1:n}(x) = n f(x) (1 - F(x))^{n-1}.$$

Loi de $X_{n:n}$

$$F_{n:n}(x) = P\{X_{n:n} \leq x\} = (F(x))^n.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
 F_{n:n}(x) &= P(X_{n:n} \leq x) \\
 &= P[\max(X_1, \dots, X_n) \leq x] \\
 &= P\left\{\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}\right\} \\
 &= \prod_{i=1}^n P\{X_i \leq x\}, \quad X_i \text{ sont indépendantes} \\
 &= [F(x)]^n
 \end{aligned}$$

La densité de $X_{n:n}$, est donnée par :

$$f_{n:n}(x) = n f(x) (F(x))^{n-1}.$$

2.2 Cas des données complètes

2.2.1 Estimation non paramétrique

Pour estimer la fiabilité d'un système, on observe la durée de vie de n éléments identiques. Soient T_1, \dots, T_n n variables aléatoires correspondantes aux durées de vie observée de ses n éléments identiques. Ces v.a's sont supposées, alors indépendantes et identiquement distribuées de distribution F .

Soit $R(t)$ la fiabilité à la date t que l'on cherche à estimer à partir de ses observations. On note par n_i le nombre d'éléments défailants à l'instant t_i et n l'effectif total de l'échantillon.

On peut utiliser 3 méthodes pour estimer $F(t)$ et $R(t)$:

Méthode des rangs bruts : si $n \geq 50$

$$\begin{cases} \widehat{F}(t_i) = \frac{n_i}{n}, \\ \widehat{R}(t_i) = 1 - \frac{n_i}{n}. \end{cases}$$

Méthode des rangs moyens : si $20 \leq n \leq 50$

$$\begin{cases} \widehat{F}(t_i) = \frac{n_i}{n+1}, \\ \widehat{R}(t_i) = 1 - \frac{n_i}{n+1}. \end{cases}$$

Méthode des rangs médians : si $n \leq 20$

$$\begin{cases} \widehat{F}(t_i) = \frac{n_i - 0.3}{n + 0.4}, \\ \widehat{R}(t_i) = 1 - \frac{n_i - 0.3}{n + 0.4}. \end{cases}$$

Exemple 2.2.1 On a mesuré pour 20 micro-ondes du même type le temps en heures écoulé avant la première panne. On obtient :

Temps t	[0, 500]]500, 1000]]1000, 1500]]1500, 2000]
Nombre d'appareils (n_i)	7	4	3	2

]2000, 2500]]2500, 3000]]3000, 3500]
2	1	1

Dans cet exemple, on a $n = 20$. Donc, pour estimer $F(t_i)$ et $R(t_i)$, on peut utiliser la méthode des rangs moyens ou des rangs médians. On obtient le tableau suivant :

<i>Instant t_i</i>		500	1000	1500	2000	2500	3000	4000
<i>Rangs moyens</i>	$\widehat{F}(t_i)$	0,33	0,52	0,67	0,76	0,86	0,90	0,95
	$\widehat{R}(t_i)$	0,67	0,48	0,33	0,24	0,14	0,10	0,05
<i>Rangs médians</i>	$\widehat{F}(t_i)$	0,33	0,52	0,67	0,77	0,87	0,92	0,97
	$\widehat{R}(t_i)$	0,67	0,48	0,33	0,23	0,13	0,08	0,03

2.2.2 Estimation paramétrique par la méthode maximum de vraisemblance

Une fois que le type de distribution de durée de vie d'un composant d'un système mécanique (comme la loi exponentielle, loi Weibull, loi Normale, ...) et que les temps de défaillance pour ce composant sont connus, il est nécessaire d'estimer les paramètres associés à la distribution. La méthode du maximum de vraisemblance (MV)² est la plus utilisée pour effectuer le calcul des paramètres [34] [9].

D'autres méthodes d'estimation existent également. Ainsi la méthode des moindres carrés est une méthode fondamentalement géométrique, qui n'utilise aucune caractéristique probabiliste [44]. La méthode des moments, également utilisée, conduit généralement à des estimateurs ayant moins de propriétés statistiques (biais) que ceux de la méthode du maximum de vraisemblance [39].

On rappelle qu'il existe plusieurs critères qui aide à la comparaison des estimateurs, les plus souvent utilisés sont :

²La méthode de MV est généralement préférée aux autres méthodes car l'estimateur obtenu est sans biais, efficace, convergent et robuste. Cette méthode a été développée par Fisher depuis 1912 à 1922 [19], qu'il appelle à l'époque le "*critère absolu*" en 1912 qu'il donne le nom de "*maximum de vraisemblance*" à sa méthode.

- Le biais suppose que l'estimateur ne soit pas systématiquement décalée par rapport à la valeur vraie.
- L'efficacité ou la précision consiste à obtenir une estimation cohérente, avec une faible variation d'un échantillon à l'autre.
- La convergence montre que la valeur de l'estimateur obtenue doit être la valeur vraie du paramètre si l'on peut estimer la valeur du paramètre sur tout l'échantillon.
- La robustesse admet que l'estimateur ne soit pas sensible à la présence de perturbations (des valeurs extrêmes).

Si les données de survie sont non censurées, la méthode MV est avec échantillon complet et si les données de survie sont censurées, la MV est avec échantillon incomplet.

L'avantage de l'estimation paramétrique par rapport à l'estimation non-paramétrique est que l'on a une bien meilleure précision (un intervalle de confiance plus restreint). L'inconvénient est qu'il faut avoir à disposition une loi décrivant bien les données, ce qui n'est pas toujours le cas, ainsi que de moyens informatiques pour effectuer les calculs.

MV avec échantillon complet

On observe les durées successives de fonctionnement de n matériels identiques. Soient $t = (t_1, \dots, t_n)$ les temps des défaillances observés, dont la densité de probabilité est $f(t, \theta)$ et la fonction de vraisemblance $L(t, \theta)$ est [35] :

$$L(t, \theta) = L(t_1 \dots t_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta).$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ est le vecteur des paramètres recherchés.

Si $L(t, \theta)$ est dérivable et si le maximum de la fonction de vraisemblance existe en $\hat{\theta}$, alors il satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial L(t_1, \dots, t_n, \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r; \quad (2.2)$$

ou

$$\frac{\partial \ln(L(t_1, \dots, t_n, \theta_1, \dots, \theta_r))}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.3)$$

Pour calculer la variance de $\hat{\theta}$, notée par $\widehat{Var}(\hat{\theta})$, la fonction de vraisemblance L doit être dérivable d'ordre deux. Ensuite, on construit la matrice symétrique de Fisher, notée par \hat{I} :

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix}$$

La matrice inverse \hat{I}^{-1} de Fisher représente la matrice estimée de variance - covariance, notée par $\widehat{\Sigma}$.

$$\widehat{\Sigma} = \hat{I}^{-1},$$

où

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widehat{Var}(\hat{\theta}_1) & \widehat{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \cdots & \widehat{Cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) \\ \widehat{Cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) & \widehat{Var}(\hat{\theta}_2) & \cdots & \widehat{Cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{Cov}(\hat{\theta}_r, \hat{\theta}_1) & \widehat{Cov}(\hat{\theta}_r, \hat{\theta}_2) & \cdots & \widehat{Var}(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix}$$

Cette matrice sera utilisée pour estimer les intervalles de confiance de $\hat{\theta}$.

Application de la méthode MV

Exemple 2.2.2 (Cas de la loi exponentielle)

La fonction de vraisemblance pour la loi exponentielle et pour un échantillon complet, s'écrit [35] :

$$\begin{aligned} L(t_1, \dots, t_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum t_i}. \end{aligned}$$

La \ln -vraisemblance s'écrit :

$$\ln L(t_1, \dots, t_n, \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum t_i.$$

Donc,

$$\frac{\partial \ln L(t_1, \dots, t_n, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum t_i = 0. \quad (2.4)$$

L'estimateur $\hat{\lambda}$ du maximum de vraisemblance est donné par la solution de l'équation 2.4 :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum t_i} = \frac{1}{\bar{T}}.$$

Exemple 2.2.3 (Cas de la loi de Weibull à deux paramètres)

La fonction de vraisemblance pour la loi de Weibull à deux paramètres (η, β) et pour un échantillon complet s'écrit [35] :

$$\begin{aligned} L(t_1, \dots, t_n; \eta, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \eta, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\eta^\beta} t^{\beta-1} e^{-\frac{1}{\eta^\beta} t^\beta} \\ &= \left(\frac{\beta}{\eta^\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} e^{-\frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta} \end{aligned}$$

La log-vraisemblance s'obtient directement par :

$$\ln L(t_1, \dots, t_n; \eta, \beta) = n \ln \beta - n \beta \ln \eta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta.$$

Il faut déterminer : $\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = 0$ et $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0$, puis résoudre le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{n\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n\beta}{\eta^{\beta+1}} \left(-\eta^\beta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\eta^\beta + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0 \end{aligned}$$

On obtient, alors :

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.5)$$

Et on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\beta} - n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\eta} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\beta} - n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i - \ln \eta) = 0 \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\frac{n}{\beta} - n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i) + \frac{1}{\eta^\beta} \ln(\eta) \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0. \quad (2.6)$$

De l'Equation 2.5, on a

$$\ln \eta = \frac{1}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i^\beta - \ln n \right) \quad (2.7)$$

En compense l'Equation 2.5 et l'Equation 2.7 dans 2.6, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{n}{\beta} - \frac{n}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i^\beta - \ln n \right) + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{n \sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} \frac{1}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i^\beta - \ln n \right) \sum_{i=1}^n t_i^\beta = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i^\beta - \ln n \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} + \frac{1}{\beta} \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i^\beta - \ln n \right) = 0. \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{\beta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} = 0. \end{aligned}$$

On pose

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^\beta (\ln t_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^\beta} = 0. \quad (2.8)$$

On résoudre numériquement l'Equation 2.8 en utilisant les méthodes numérique comme la méthode de Newton ou point fixe, ... (voir [41]). Ensuite, on revient à la première équation en 2.5 pour obtenir une valeur approchée de η .

Exemple 2.2.4 (Cas de la loi Log-Normale)

La vraisemblance de μ et de σ au vu de l'échantillon (t_1, t_2, \dots, t_n) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 L(t_1, \dots, t_n; \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \mu, \sigma) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma t_i \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right)} \\
 &= \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n t_i} e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln t_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right)} \\
 &= \sigma^{-n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{-1} e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\ln t_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right)}
 \end{aligned}$$

La \ln -vraisemblance s'obtient directement par :

$$\ln L(t_1, \dots, t_n; \mu, \sigma) = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^n \ln t_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu)^2.$$

On calcule : $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0$ et $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu) = 0, \\
 \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} \left[-n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu)^2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

La résolution du système d'équations différentielles, montre alors que la \ln -vraisemblance est maximale en :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i, \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln t_i - \mu)^2}{n}.
 \end{aligned}$$

2.3 Cas des données censurées

La durée de vie n'est pas toujours complètement observée, parceque pour certains observations (composants), la date de début ou de fin n'est pas observable, on parle alors des données censurées.

Définition 2.3.1 (*Censure*)

Les données censurées sont des observations pour lesquelles la valeur exacte d'un événement n'est pas toujours connue [45].

2.3.1 Type de données censurées

Il existe trois catégories de censures qu'on nomme censure à droite, censure à gauche et censure par intervalle [45].

On s'intéresse ici au cas des données censurées à droite seulement où il existe 3 différents types, de cette catégorie, qui sont :

- Censure à droite de type I : fixée.
- Censure à droite de type II : attente.
- Censure à droite de type III : censure de type I aléatoire.

La durée de vie est dite censurée à droite si le composant n'a pas subi l'événement à sa dernière observation. En présence de censure à droite, les durées de vie ne sont pas toutes observées, pour certaines d'entre elles, on sait seulement qu'elles sont supérieures à une certaine valeur connue.

Censure à droite de type I

Etant donné un nombre positif fixé C , et T_1, T_2, \dots, T_n les durées de vie de n éléments. La durée n'est pas observable au de la d'une durée maximale C . Au lieu d'observer les variables

T_1, T_2, \dots, T_n qui nous intéressent, on n'observe (X_i, δ_i) :

$$\begin{cases} X_i = T_i \wedge C, \\ \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C\}}, \end{cases}$$

où $a \wedge b$: représente le minimum (a,b).

Le temps de censure C est fixé par le chercheur comme étant la fin de l'étude. Ce mécanisme de censure est fréquemment rencontré dans les applications industrielles. Par exemple, on peut tester la durée de vie de n objet identiques (ampoules) sur un intervalle d'observation fixé $[0, C]$.

Censure à droite de type II

Soit r un entier positif fixé et T_1, T_2, \dots, T_n un échantillon d'une durée de vie de n composants et $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}$ les statistiques d'ordres associées à cette échantillon.

On décide d'observer les durées de vie de n observation jusqu'à ce que r d'entre eux aient au l'événement d'intérêt et d'arrêter l'étude à ce moment là. Si l'on ordonne les durées de vie T_1, T_2, \dots, T_n par l'ordre croissant :

$$T_{1:n} \leq T_{2:n} \leq \dots \leq T_{n:n},$$

et on a la date de censure est $T_{r:n}$. Alors, on observe (X_i, δ_i) où :

$$\begin{cases} X_i = T_{i:n} \wedge T_{r:n}, \\ \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_{i:n} \leq T_{r:n}\}}, \end{cases}$$

c.à.d

$$\begin{aligned} X_1 &= T_{1:n}, \\ X_2 &= T_{2:n}, \\ &\vdots \\ X_r &= T_{r:n}, \\ X_{r+1} &= T_{r:n}, \\ &\vdots \\ X_n &= T_{r:n}. \end{aligned}$$

Censure à droite de type III

Soient C_1, C_2, \dots, C_n des variables aléatoires positives correspondant au censures et soient T_1, T_2, \dots, T_n un échantillon d'une durée de vie.

Dans ce cas, à chaque composant i , associons non seulement sa durée de vie T_i mais aussi son temps de censure C_i . On n'observera évidemment que le plus petit des deux, c.à.d :

$$\begin{cases} X_i = T_i \wedge C_i, \\ \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}. \end{cases}$$

2.3.2 Estimation non paramétrique

Dans la littérature plusieurs auteurs se sont intéressés pour l'estimation de la fonction de survie (qui est appelée fonction de fiabilité en mécanique) dans le cas où les données sont censurées dont la plus intéressante est celle de Kaplan-Meier (1958) [26] qui ont proposé un estimateur de la fonction de fiabilité R .

Estimateur de Kaplan-Meier

Soient T_1, T_2, \dots, T_n un échantillon d'une durée de vie. Soit $(X_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'échantillon réellement observé :

$$\begin{cases} X_i = T_i \wedge C_i, \\ \delta_i = \mathbb{I}_{\{T_i \leq C_i\}}, \end{cases}$$

où C_i désignent les instants de censures.

On a $X'_{1:n} < X'_{2:n} < \dots < X'_{k:n}$ la statistique d'ordre associée à les durées de vie observées non-censurées. Alors, l'estimateur de Kaplan-Meier est défini comme suit :

$$\widehat{R}_{KM}(t) = \prod_{j=1}^k \left[1 - \frac{d_j}{n_j} \right], \quad X'_{k:n} \leq t < X'_{k+1:n}, \quad (2.9)$$

où d_j : est le nombre de décès (défaillances) au temps t_j

n_j : est le nombre de survivants juste avant le temps t_j .

Exemple 2.3.1 (Estimateur de Kaplan-Meier)

On considère un essai de 21 pièces. Les instants de panne de ces pièces sont consignés dans le tableau suivant :

6 6 6 6⁺ 7 9⁺ 10
 10⁺ 11⁺ 13 16 17⁺ 19⁺ 20⁺
 22 23 25⁺ 32⁺ 32⁺ 34⁺ 35⁺

où les données marquées d'une (+) correspondant à des durées censurées

On calcule l'estimateur de Kaplan-Meier. En utilisant la formule 2.9, on obtient les résultats ci-dessous :

temps	n_j	d_j	$\widehat{R}_{KM}(t)$	Intervalle
0	21	0	1	[0, 6[
6	21	3	$1 \times \left(1 - \frac{3}{21}\right) = 0.857$	[6, 7[
7	17	1	$0.857 \times \left(1 - \frac{1}{17}\right) = 0.807$	[7, 10[
10	15	1	$0.807 \times \left(1 - \frac{1}{15}\right) = 0.753$	[10, 13[
13	12	1	$0.753 \times \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 0.690$	[13, 16[
16	11	1	$0.690 \times \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 0.627$	[16, 22[
22	7	1	$0.627 \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 0.538$	[22, 23[
23	6	1	$0.538 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0.448$	≥ 23

On peut faire cet exemple à l'aide du logiciel R, à partir les étapes suivantes :

```

> durees <- -c(6, 6, 6, 6, 7, 9, 10, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 32, 32, 34, 35)
> censure <- -c(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
> fit1 <- -survfit(Surv(durees, censure)~1)
> plot(fit1)
> summary(fit1)
    
```

On obtient les résultats ci-dessous (voir les Figures 2.1 et 2.2) :

Remarque 2.3.1

1. Une autre écriture de l'estimateur de Kaplan-Meier est la suivante :

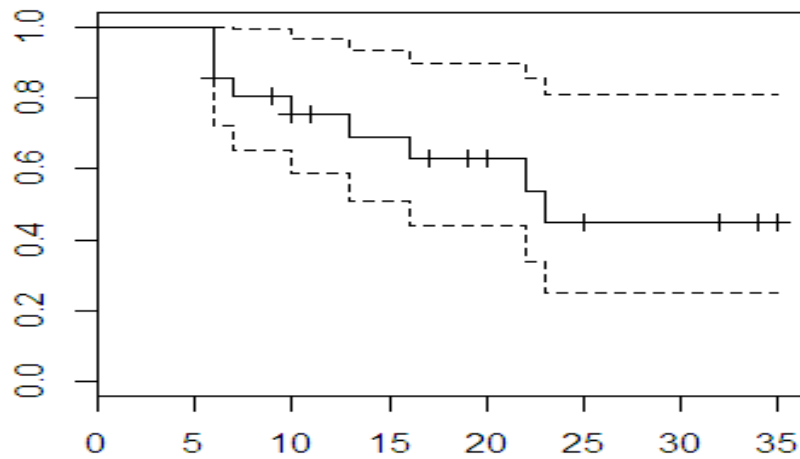


FIG. 2.1 – Estimateur de Kaplan-Meier

```
> summary(fit1)
Call: survfit(formula = Surv(durees, censure) ~ 1)

   time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
   ---- -
     6    21      3    0.857  0.0764    0.720    1.000
     7    17      1    0.807  0.0869    0.653    0.996
    10    15      1    0.753  0.0963    0.586    0.968
    13    12      1    0.690  0.1068    0.510    0.935
    16    11      1    0.627  0.1141    0.439    0.896
    22     7      1    0.538  0.1282    0.337    0.858
    23     6      1    0.448  0.1346    0.249    0.807
```

FIG. 2.2 – Résultats de calcul de l'estimateur de Kaplan-Meier sous R

Soit $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ la statistique d'ordre associée à X_1, X_2, \dots, X_n et $\delta_{1:n}, \delta_{2:n}, \dots, \delta_{n:n}$ les indicatrices correspondantes. L'estimateur de Kaplan-Meier est défini par :

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{KM}(t) &= 1 - \widehat{F}_n(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right)^{\delta_{i:n} \mathbb{I}\{X_{i:n} \leq t\}} \\ &= \prod_{i=1}^n \left[1 - \frac{\delta_{i:n} \mathbb{I}\{X_{i:n} \leq t\}}{n-i+1}\right].\end{aligned}$$

2. L'estimateur de Kaplan-Meier est une fonction étagée avec des sauts seulement aux observations non-censurées.
3. La hauteur des sauts de cet estimateur est aléatoire.
4. Quand toutes les observations sont non-censurées alors on obtient la fonction de fiabilité empirique.

2.3.3 Estimation paramétrique

L'approche paramétrique en analyse de survie consiste à modéliser par une distribution théorique connue la distribution étudiée (par exemple : modèle exponentiel ou modèle de Weibull) où la fonction de défaillance ou de fiabilité dépend d'un vecteur de paramètres inconnus, il faut les estimer.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'estimation paramétrique dans le cas des données censurées à droite où la méthode de maximum de vraisemblance (MV) est la méthode la plus académique, elle conduit à un estimateur efficace au sens de la statistique. Il faut tenir compte l'écriture des fonctions de vraisemblance pour estimer les paramètres des modèles proposés [34].

M.V d'un modèle censure de type I

Soit T_1, T_2, \dots, T_n un échantillon prélevé d'une population de densité $f(t, \theta)$ et de fonction de répartition F , et $C > 0$ (date de censure), la vraisemblance du modèle est donnée comme suit :

$$L(t, \theta) = [1 - F(c, \theta)]^{n-k} \prod_{i=1}^k f(t_i, \theta).$$

M.V d'un modèle censure de type II

D'après la statistique d'ordre, on obtient la vraisemblance de la censure de type II qui a une forme proche du cas de la censure de type I :

$$L(t, \theta) = \frac{n!}{(n-k)!} [R(t_{r:n}, \theta)]^{n-r} \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}, \theta).$$

M.V d'un modèle censure de type III

La censure de type III généralise la censure de type I au cas où la date de censure est une variable aléatoire, plus précisément, soient un échantillon de durées de vie (T_1, T_2, \dots, T_n) et un second échantillon indépendant composé de variables aléatoires positives (C_1, C_2, \dots, C_n) .

La vraisemblance de l'échantillon $(X_1, \delta_1), \dots, (X_n, \delta_n)$ s'écrit :

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)^{\delta_i} [1 - F(x_i, \theta)]^{1-\delta_i}.$$

Application de la méthode MV

Exemple 2.3.2 (Cas de la loi exponentielle avec des censures de type I)

Les essais étaient conduits au plan $[n = 100, C = 500]$, les instants de pannes sont $T_1 = 31$, $T_2 = 49$, $T_3 = 135$, $T_4 = 90$, $T_5 = 249$, $T_6 = 161$, $T_7 = 323$, $T_8 = 436$, $T_9 = 383$, $T_{10} = 353$, $T_{11} = 477$, $T_{12} = 500$.

On a $C = 500$, donc il y'a une censure de type I.

Si $T \sim \exp(\lambda)$

On calcule l'estimateur de λ par la méthode de $M.V$:

$$\begin{aligned} L(t, \lambda) &= \prod_{i=1}^k f(t_i, \lambda) [1 - R(c, \lambda)]^{n-k} \\ &= \prod_{i=1}^k \lambda \exp(-\lambda t_i) [\exp(-\lambda c)]^{n-k} \\ &= \lambda^k \exp(-\lambda \sum_{i=1}^k t_i) \exp(-\lambda c(n-k)). \end{aligned}$$

La ln-vraisemblance s'écrit :

$$\ln(L(t, \lambda)) = k \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^k t_i - \lambda(n - k)c.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(t, \lambda))}{\partial \lambda} &= \frac{k}{\lambda} - \sum_{i=1}^k t_i - (n - k)c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{k}{\lambda} = \sum_{i=1}^k t_i + (n - k)c.$$

L'estimateur $\hat{\lambda}$ du maximum de vraisemblance est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \frac{k}{\sum_{i=1}^k t_i + (n - k)c} \\ &= \frac{12}{(3187) + (100 - 12)500} \\ &= 2.543 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 (*Cas de la loi de Weibull avec des censures de type II*)

Les essais étaient conduits au plan $[n = 13, r = 10]$, les instants de pannes (en année) sont $T_{1:n} = 0.22, T_{2:n} = 0.5, T_{3:n} = 0.88, T_{4:n} = 1, T_{5:n} = 1.32, T_{6:n} = 1.33, T_{7:n} = 1.54, T_{8:n} = 1.76, T_{9:n} = 2.5, T_{10:n} = 10$.

Dans cet exemple, on a des données censurées de type II, où $t_{r:n} = t_{10:13} = 10$.

Si $T \sim \mathcal{W}(\eta, \beta)$ et pour $\hat{\beta} = 1.41$

On calcule l'estimateur de $\hat{\eta}$ par la méthode de *M.V* :

$$\begin{aligned} L(t, \eta, \beta) &= \prod_{i=1}^r f(t_{i:n}, \eta, \beta) [R(t_{r:n}, \eta, \beta)]^{n-r} \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i:n}}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left(-\frac{t_{i:n}}{\eta} \right)^{\beta} \left[\exp \left(-\frac{t_{r:n}}{\eta} \right)^{\beta} \right]^{n-r} \\ &= \left(\frac{\beta}{\eta} \right)^r \prod_{i=1}^r (t_{i:n})^{\beta-1} \exp \left(-\frac{\sum_{i=1}^r t_{i:n}}{\eta} \right)^{\beta} \exp \left[-(n - r) \left(\frac{t_{r:n}}{\eta} \right)^{\beta} \right]. \end{aligned}$$

La ln-vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned}\ln(L(t, \eta, \beta)) &= r \ln\left(\frac{\beta}{\eta^\beta}\right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \ln t_{i:n} - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta - \frac{(n-r)}{\eta^\beta} t_{r:n}^\beta \\ &= r \ln \beta - r\beta \ln \eta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^r \ln t_{i:n} - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta - \frac{(n-r)}{\eta^\beta} t_{r:n}^\beta.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(L(t, \eta, \beta))}{\partial \eta} &= \frac{-r\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta^{\beta+1}} \sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta + \frac{(n-r)\beta}{\eta^{\beta+1}} T_{r:n}^\beta \\ &= \frac{r\beta}{\eta^{\beta+1}} \left[\frac{\sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta}{r} + \frac{(n-r)}{r} t_{r:n}^\beta - \eta^\beta \right] \\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\eta^\beta = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta + (n-r)t_{r:n}^\beta \right].$$

Donc, l'estimateur $\hat{\eta}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\hat{\eta} &= \left[\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r t_{i:n}^\beta + (n-r)t_{r:n}^\beta \right) \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ \hat{\eta} &= 5.68.\end{aligned}$$

2.4 Tests d'adéquations

Les tests d'adéquations ont pour objectif d'apporter une aide pour décider de la validité d'un modèle théorique de représentation des données. Ils consistent à accepter ou refuser l'hypothèse que le modèle est bien représentatif (H_0). Une grande variété de tests existe, on renvoie le lecteur intéressé par le sujet à la littérature abondantes dans ce domaine. On ne présente ici que les procédures de deux tests classiques couvrant la majorité des cas rencontrés [34].

2.4.1 Test de khi-deux(χ^2)

Ce test nécessite d'avoir un échantillon d'au moins 50 données. Il s'appuie sur la construction d'une fonction indicatrice de l'écart entre les données réelles et les données théoriques définie par la modélisation. La fonction indicatrice "E" est obtenue à partir de l'écart du nombre de données théoriques calculée et du nombre de données réelles par classes. À partir de cette fonction une procédure de décision d'acceptation ou de rejet est définie [34].

On veut tester l'hypothèse H_0 : la variable aléatoire T durée de vie de la population suit une loi théorique $F_0(t)$.

Sous cette hypothèse et si n est grand, il a été démontré que la quantité E définie ci-après suivait une loi de χ^2 à v degrés de libertés (ddl).

$$E = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

avec

α : niveau de signification du test (probabilité de refuser H_0 alors que H_0 est vrai, c'est l'erreur de première espèce en statistique)

r : nombre de classes avec au moins 5 individus par classe.

n_i : nombre d'individus réels par classe i .

n : nombre total d'individus dans l'échantillon ($n > 50$).

p_i : probabilité théorique d'appartenir à la classe i , avec $p_i = F_0(t_{i+1}) - F_0(t_i)$

$n.p_i$: nombre d'individus théorique dans la classe i .

k : nombre des paramètres estimés du modèle.

v : nombre de degrés de libertés égale à $r - k - 1$.

Si $E > \chi_{v;(1-\alpha)}^2$, alors l'hypothèse H_0 est refusée, le modèle proposé ne convient pas.

Exemple 2.4.1 À partir d'un relevé de temps de bon fonctionnement *MTTF* sur un essai de fonctionnement d'un composant électronique, on fait l'hypothèse H_0 que le modèle suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 625 \times 10^{-6}$ déf./h. Avec $\alpha = 0.05$ dire si le modèle convient ?

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-après [34].

Classe i des MTTF	n_i
0 – 500	7
500 – 1000	8
1000 – 1500	9
1500 – 2000	10
2000 – 2500	12
2500 – 3000	8

On a $n = \sum_{i=1}^6 n_i = 54$ (effectif total), $r = 6$ (nombre des classes), $k = 1$ (nombre des paramètres du modèle).

$p_i = F_0(t_{i+1}) - F_0(t_i)$ avec :

$$F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-625 \times 10^{-6} \times t}.$$

Classe i des MTTF	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
0 – 500	7	0.2683	14.4882	-7.4882	3.8703
500 – 1000	8	0.1964	10.6056	-2.6056	0.6401
1000 – 1500	9	0.1437	7.7598	1.22	0.1918
1500 – 2000	10	0.1051	5.6754	4.3246	3.2953
2000 – 2500	12	0.0769	4.1526	7.8474	14.8297
2500 – 3000	8	0.0563	3.0402	4.9598	8.0914

Alors $E = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 30.9186 > \chi_{4;0.95}^2 = 9.4877$, conclusion on refuse le modèle exponentiel proposé au niveau $1 - \alpha = 95\%$.

2.4.2 Test de kolmogorov Smirnov

Ce test ne nécessite pas un nombre n de données minimum. Le principe est le même que pour le test précédent. La fonction indicatrice de l'écart entre le modèle réel et le modèle

théorique est construite à partir de la différence point par point de la valeur absolue de la quantité D_i , définie ci-après [34] :

$$D_i = \left| \widehat{F}_{n-empirique}(t_i) - F_{0-théorique}(t_i) \right|.$$

Où $\widehat{F}_{n-empirique}(t_i)$: Fonction empirique estimée par la méthode de rangs médians ou moyens.

$\widehat{F}_{0-théorique}(t_i)$: Fonction théorique évaluée avec le modèle à tester.

La quantité D_i maximum pour un échantillon de taille n suit une loi asymptotique qui permet de faire le test. Cette quantité est comparée au niveau de signification choisie à une valeur obtenue par la table de Kolmogorov-Smirnov. Une décision en est issue.

$$D_n = \max D_i.$$

Si $D_n > D_{n;\alpha}$, alors on refuse H_0 .

Il existe une grande quantité de tests qui viennent compléter ceux-ci. Ils sont souvent inclus dans les logiciels de statistiques.

Chapitre 3

Systeme avec renouvellement

On s'intéresse, dans ce chapitre, à la vie du composant réparable qui fonctionne puis tombe en panne puis réparé instantanément et se remet à fonctionner et retombe en panne et ainsi de suite. Concrètement, le composant est si bien réparé qu'il est considéré comme neuf à l'étape suivante. Il est naturel d'appeler processus de renouvellement un tel processus puisque tout se passe comme si l'on renouvelait régulièrement le composant en le remplaçant par un composant neuf identique où on suppose que le temps de réparation est négligeable et la réparation parfaite.

Il s'agit donc, dans ce chapitre, d'étudier les processus de renouvellement qui interviennent dans la modélisation de phénomènes liés au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système. Le processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un exemple de référence pour une telle famille de processus où en ce qui concerne ce processus, les variables inter-occurrences sont de loi exponentielle de paramètre λ .

3.1 Processus stochastiques

La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes évoluant dans le temps et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c.à.d non prévisible avec certitude. Parmi ces phénomènes, on a les phénomènes physiques (par exemple le ferroma-

gnétisme, les transitions de phases, ...), biologiques (évolution génétique des populations,...), médicaux (croissance de tumeurs, épidémie,...), économiques et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, des télécommunications. Donc, les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps [20].

3.1.1 Définitions et propriété de base

Un processus stochastique est un modèle permettant d'étudier un phénomène aléatoire évoluant au cours du temps. Pour le décrire, on considère :

1. Un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .
2. Un espace mesurable (E, \mathcal{B}) où E est appelé ensemble des états (du processus).
3. Une famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans E .

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$, de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , à valeurs dans un espace mesurable E (appelé espace d'états), et indicées par un paramètre t appartenant à un ensemble \mathbb{T} (appelé espace des temps):

$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

Les mots processus et stochastique signifient respectivement fonction et aléatoire [11].

Remarque 3.1.1 *On distingue plusieurs types de processus suivant que \mathbb{T} et E sont discrets ou continus :*

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on dit que X est appelé suite aléatoire ou processus en temps discret. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$, X est appelé fonction aléatoire ou processus en temps continu.*
2. *Suivant que E est fini, dénombrable ou continu, on dit que le processus a un nombre fini d'états, a un espace d'états dénombrable, a un espace d'états continu.*

3.1.2 Processus à accroissements stationnaires et indépendants

Définition 3.1.1 (*Processus à accroissements indépendants*)

Un processus croissant $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ est dit à accroissements indépendants (on écrit souvent **PAI**) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous t_1, t_2, \dots, t_n tels que $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes [11].

Définition 3.1.2 (*Processus stationnaire*)

Un processus est dit stationnaire si pour tout $h > 0, \{X_{t+h}\}_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} \{X_t\}_{t \geq 0}$ ne dépend pas de h .c.à.d pour tout $h > 0$ et tout t_1, \dots, t_n on a : [11]

$$\{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}\}_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} \{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}_{t \geq 0}.$$

Définition 3.1.3 (*Processus à accroissements stationnaires*)

Un processus X est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ dépend uniquement de h et non de $t > 0$ i.e :

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{\text{loi}}{=} X_h.$$

Remarque 3.1.2 Un processus à accroissements indépendants et stationnaires est noté par **PAIS**.

3.2 Processus de renouvellement

Un élément (composant) commence à l'instant $t = 0$ est tombe en panne après avoir fonctionné un temps aléatoire S_1 il est alors puis réparé instantanément et se remet à fonctionner ou remplacé par un nouvel élément, qui après avoir fonctionné pendant un temps S_2 tombe en panne et il est réparé instantanément et se remet à fonctionner ou remplacé par troisième élément,...

Ce processus se produise indéfiniment où les S_i sont appelées les inter-arrivées (inter-occurrences) ($i = 1, \dots, n$) et les T_i sont appelés les instants de pannes ou renouvellement (voir la [Figure 3.1](#)).

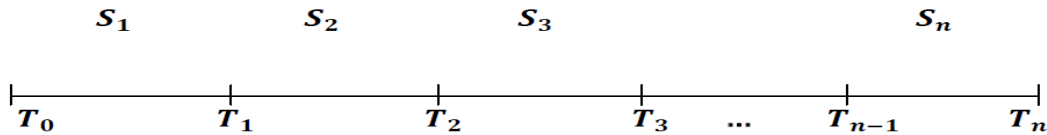


FIG. 3.1 – Les inter-arrivées (inter-occurrences) S_i ($i = 1, \dots, n$) et les instants de pannes T_i ($i = 0, \dots, n$)

Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Donc, T_n est la date où se produit la $n^{\text{ème}}$ panne (renouvellement). On considère la suite des v.a's définies par $S_n = T_n - T_{n-1}$, ce sont les temps d'inter-arrivées (inter-occurrences), c.à.d la suite des temps qui s'écoulent entre 2 événements successifs. Donc, S_n est le temps qui s'écoule entre le $(n-1)^{\text{ème}}$ et le $n^{\text{ème}}$ renouvellement. On a la relation :

$$T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Un processus de renouvellement, noté par $\{T_n\}_{n \geq 0}$, est un processus ponctuel sur \mathbb{R}^+ représentant les instants d'occurrence d'un événement tel que les durées inter-occurrences successives sont des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, de fonction de répartition F . Un tel processus peut être défini par :

$$\begin{cases} T_0 = 0, \\ T_n = T_{n-1} + S_n, \end{cases}$$

où S_n est la durée de vie de $n^{\text{ème}}$ élément.

3.2.1 Processus de comptage

On associe à ce processus de renouvellement $\{T_n\}_{n \geq 0}$ un processus de comptage qui, à chaque instant t , fait correspondre le nombre $N(t)$ de pannes (renouvellement) qui se sont produit dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

Définition 3.2.1 (*Processus de comptage*)

Un processus aléatoire $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ 'à valeurs entières est un processus de comptage si :

i/ $N(0) = 0$,

ii/ $\forall s < t, N(s) < N(t)$. [20]

Définition 3.2.2 (*Processus de comptage*)

Pour t fixé, on appelle le nombre entier $N(t)$ est le nombre de tops (renouvellement ou pannes) se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ où $N(0) = 0$. Le processus $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ est appelé processus de comptage et vérifie :

- $\forall t \geq 0, N(t) \in \mathbb{N}$.
- La fonction $t \rightarrow N(t)$ est croissante.
- $\forall 0 < s < t, N(t) - N(s)$ représente le nombre de pannes se produisant dans l'intervalle de temps $]s, t]$.

Définition 3.2.3 Un processus de comptage est dit à accroissements indépendants si les nombres de tops se produisant dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

Définition 3.2.4 Un processus de comptage est dit à accroissements stationnaires si la loi de probabilité du nombre de pannes se produisant dans un intervalle de temps donné ne dépend que de la longueur de celui-ci.

L'espace des états du processus $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ est $E = \mathbb{N}$ et l'espace des temps est $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$.

Un processus de comptage $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ peut être représenté par la suite de ses instants de renouvellement $\{T_n\}_{n \geq 0}$ qui vérifie $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$. On a alors, pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}},$$

où $N(t)$ représente le nombre d'occurrences dans l'intervalle $[0, t]$.

Remarque 3.2.1 On passe du processus de comptage aux instants de panne ou de renouvellement par la relation suivante : [20]

$$\forall n \geq 0, \quad \{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\}. \quad (3.1)$$

En premier lieu, on cherche à caractériser la loi de la variable T_n égale au $n^{\text{ème}}$ instant d'occurrence. Si on a

$$\begin{cases} F_1(t) = F, \\ \text{et} \\ T_n = T_{n-1} + S_n. \end{cases}$$

Proposition 3.2.1 Soient $n \geq 0$ et $x, y, t \in \mathbb{R}^+$ alors, F_n , la fonction de répartition de la variable T_n , est donnée par : [20]

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(x-y) dF(y). \quad (3.2)$$

Preuve Cette relation s'obtient par conditionnement, en remarquant que puisque $T_n = T_{n-1} + S_n$ et $T_{n-1} \perp S_n$, on a:

$$\begin{aligned} P(T_n \leq x \mid S_n = y) &= P(T_{n-1} \leq x - y) \\ &= \begin{cases} F_{n-1}(x - y), & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{si } y > x. \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F_n(t) &= E(P(T_n \leq t \mid S_n = y)) \\ &= \int_0^t F_{n-1}(x-y) dF(y), \end{aligned}$$

car S_n admet F pour fonction de répartition. ■

D'après l'équation 3.1, on obtient la loi de la variable $N(t)$ pour tout $t \geq 0$. En effet, on a

$$\forall n \geq 0, \quad P(N(t) \geq n) = F_n(t).$$

Proposition 3.2.2 Soient $n \geq 0$ et $x, t \in \mathbb{R}^+$. On a la relation :

$$P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Preuve On observe que

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq n) &= P(N(t) = n) + P(N(t) > n) \\ &= P(N(t) = n) + P(N(t) \geq n + 1), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) \\ &= P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t). \end{aligned}$$

■

3.2.2 Fonction de renouvellement

L'espérance de la variable $N(t)$, notée par $E[N(t)]$, est une grandeur particulièrement importante appelée fonction de renouvellement.[20]

Définition 3.2.5 Soit $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un processus de renouvellement. Alors, la fonction $M(t)$ définie par :

$$\forall t \geq 0, \quad M(t) = E[N(t)],$$

est dite fonction de renouvellement du processus.

Proposition 3.2.3

$$\forall t \geq 0, \quad M(t) = \sum_{n \geq 1} F_n(t).$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} M(t) &= E[N(t)] \\ &= \sum_{n \geq 1} n \cdot P[N(t) = n] \\ &= \sum_{n \geq 1} n \cdot [P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n + 1)] \\ &= \sum_{n \geq 1} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] \\ &= [F_1(t) - F_2(t)] + [2F_2(t) - 2F_3(t)] + [3F_3(t) - 3F_4(t)] + \dots \\ &= \sum_{n \geq 1} F_n(t). \end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.1 (de Wald)

Soit S_1, S_2, \dots une suite de variables aléatoires i.I.d à valeurs non négatives d'espérance $\mu = E(S_i) < \infty$. Si $N(t)$ une variable aléatoire à valeurs entière non négatives tel que la réalisation ou non de l'événement $\{N(t) \geq n\}$ est indépendnate de S_n , pour tout $n \geq 1$ alors pour tout $n \geq 1$ alors :

$$E [S_1 + S_2 + \dots + S_{N(t)+1}] = \mu E [N(t) + 1].$$

Théorème 3.2.1 Soit $\mu = E(S_i) < \infty$. Alors pour tout $t > 0$, on a :

$$M(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1$$

Preuve Soit $N(t)$ le nombre de pannes à l'instant t :

$$t \leq S_1 + S_2 + \dots + S_{N(t)+1},$$

et on a d'après "Lemme de Wald" :

$$E [S_1 + S_2 + \dots + S_{N(t)+1}] = \mu E [N(t) + 1],$$

et

$$E(t) \leq E(S_1 + S_2 + \dots + S_{N(t)+1}),$$

Alors,

$$t \leq E(S_1 + S_2 + \dots + S_{N(t)+1}),$$

Donc,

$$\begin{aligned} t &\leq \mu E(N(t) + 1), \\ \frac{t}{\mu} &\leq E(N(t) + 1), \\ \frac{t}{\mu} - 1 &\leq E(N(t)), \\ \frac{t}{\mu} - 1 &\leq M(t). \end{aligned}$$

d'où le résultat ■

3.2.3 Densité de renouvellement

Pour un processus de renouvellement la densité de renouvellement, noté par $r(t)$ est la dérivée de $M(t)$.

$$\begin{aligned} r(t) &= M'(t) \\ &= \left[\sum_{n \geq 1} F_n(t) \right]' \\ &= \sum_{n \geq 1} f_n(t). \end{aligned}$$

3.3 Processus de Poisson et renouvellement

Le processus de poisson compte le nombre de renouvellement qui surviennent au hasard et indépendamment les uns des autres au cours du temps.

3.3.1 Processus de Poisson

La définition classique du processus de Poisson est la suivante.

Définition 3.3.1 *Un processus de comptage $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ est appelé processus de poisson, de densité $\lambda \geq 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- i/** $N(0) = 0$.
- ii/** $N(t)$ est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires (**PAIS**).
- iii/** Le nombre de tops (pannes) se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit la loi de poisson de paramètre t , c.à.d, pour tout $s, t \geq 0$, on a :

$$P \{N(s+t) - N(s) = n\} = \frac{(-\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \geq 0.$$

Remarque 3.3.1

1. Le coefficient λ est appelé le taux du processus de Poisson.
2. $E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t$.

Définition 3.3.2 *Etant donnés deux processus de poisson indépendants $\{N_1(t)\}_{t \geq 0}$ et $\{N_2(t)\}_{t \geq 0}$ de densités respectives λ_1, λ_2 , on appelle somme de ces deux processus, le processus $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ défini par :*

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \text{ pour tout } t \geq 0$$

Le processus somme $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus de poisson de taux $\lambda_1 + \lambda_2$

3.3.2 Processus de poisson et loi exponentielle

On considère un processus de poisson $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Soit T_i ($i = 1, \dots, n$) les instants d'occurrence de pannes (c.à.d les instants d'occurrence de ce processus).

On pose :

$$\begin{cases} S_0 = T_0, \\ S_n = T_n - T_{n-1}. \quad n \geq 1, \end{cases}$$

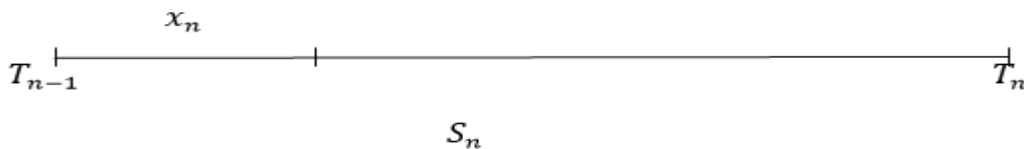
où S_n est la durée séparant la $n^{\text{ème}}$ occurrence de $(n - 1)$.

Le processus de poisson vérifié la proposition suivante.

Proposition 3.3.1 *Les variables aléatoires $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ sont i.i.d selon une loi exponentielle de paramètre λ*

$$S_n \stackrel{i.i.d}{\sim} \exp(\lambda), \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve 1/ Montre que $S_n \sim \exp(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$



$$\begin{aligned} G(x_n) &= P[S_n > x_n], \quad x_n \in S_n \\ &= P[N(x_n) = 0] \\ &= e^{-\lambda x_n}, \quad x_n > 0. \end{aligned}$$

car on a

$$P[N(t) = k] = \frac{(-\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

$$\begin{aligned} F(x_n) &= 1 - G(x_n) \\ &= P[S_n \leq x_n] \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Donc S_n suit la loi exponentielle de paramètre λ . De plus,

2/ Montre l'indépendance entre les S_i

Soient S_m et S_n ($m > n$)

$$\begin{aligned} G_{m,n}(x, y) &= P[S_m > x, S_n > y] \\ &= P[N(x) = 0, N(y) = 0] \\ &= P[N(x) = 0].P[N(y) = 0] \\ &= e^{-\lambda x}.e^{-\lambda y} \\ &= P[S_m > x].P[S_n > y] \\ &= G_m(x).G_n(y). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F_{m,n}(x, y) &= 1 - G_{m,n}(x, y) \\ &= P[S_m \leq x].P[S_n \leq y] \\ &= F_m(x).F_n(y). \end{aligned}$$

Les deux dernières équations découlent de la propriété d'accroissements indépendants et stationnaires du processus de Poisson. On conclut que S_n suit la loi exponentielle de paramètre λ . ■

Conclusion

Les calculs de fiabilité font désormais partie intégrante de la démarche de qualité dans la production industrielle. Calculer la fiabilité d'un système demande de savoir estimer les durées de fonctionnement de ses composants, de pouvoir analyser l'enchaînement logique des pannes du système selon les défaillances des composants, de proposer des modèles conduisant à une évaluation quantitative des différentes mesures de performance.

Pour cela dans ce mémoire on a traité les caractéristiques de la fiabilité (fonction de fiabilité, fonction et densité de défaillance, taux de défaillance et la durée de vie moyenne de bon fonctionnement), les principales lois utilisées et ses propriétés ainsi que leurs application en fiabilité. Puis, on a présenté les méthodes d'estimation de la fiabilité telles les méthodes non paramétriques et paramétriques à partir des données complètes et censurées. Ainsi que, on a étudié les processus de renouvellement qui interviennent dans la modélisation de phénomènes liés au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système.

Bibliographie

- [1] Afnor (1988). Recueil de normes françaises : Fiabilité, Maintenabilité et Disponibilité. Ed Afnor-Ute.
- [2] Andrieu, C., Rachad, A. Mitteau, J-C. and Lemaire, M. (2002). Evaluation de la fiabilité d'une structure au cours de sa dégradation dans le temps. *Fiabilité : conception, maintenance*, p 469 – 477.
- [3] Andrieu, C.R. (2002). Fiabilité mécanique des structures soumises à des phénomènes physiques dépendant du temps. PhD thesis, Université Blaise Pascal.
- [4] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. Wiley, New York.
- [5] Avram, F. (2014). Les Probabilités du Bonheur, et les Applications des Processus de Markov et de Levy dans les Mathématiques financières, Files d'attente et Fiabilité. <http://web.univ-pau.fr/~avram/proc/Proc/l3.pdf>.
- [6] Ben Ferroudj, H. (2010). Modélisation stochastique pour l'évaluation des indicateurs de la sûreté de fonctionnement d'un système de production. Thèse de magister, Université de Batna.
- [7] Benkhelifa, A. (2011). Fiabilité des équipements de D. T. M., Analyse fonctionnelle et implications organisationnelles de la fonction maintenance de transport. Mémoire de fin d'étude. Université Kasdi Merbah - Ouargla.
- [8] Benmounah, A. (2009). Optimization of Preventive Repair in a Dynamic System of Machines. *European Journal of Scientific Research*. ISSN 1450-216X Vol.25 No.3, p. 362-375

- [9] Birolini, A. (1997). Quality and reliability of technical systems. Ed Springer.
- [10] Bon, J.L. (1995). Fiabilité des systèmes, méthodes mathématiques. Masson, Paris.
- [11] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.
- [12] Chapouille, P. (1980). Fiabilité. Maintenabilité. Techniques de l'ingénieur6 : T4300-T4305.
- [13] Coccozza, T. C. (1997). Processus stochastiques et fiabilité des systèmes, Springer.
- [14] Chafai Mahfoud (2014). Management de la maintenance industrielle. Editions OPU 2.07.5559*ISBN*.
- [15] Demri, A. Charki, A. Guérin, F. and Christofol, H. (*mars*, 2007). Analyses fonctionnelle et dysfonctionnelle d'un système mécatronique. Qualita.
- [16] Desroches A. (*mai*, 1995). Concepts et méthodes probabilistes de base de la sécurité. Lavoisier.
- [17] Droesbeke, J.J., Fichet, B. and Tassi, P. (1989). Analyse statistique des durées de vie, association pour la statistique et ses utilisations. Economica.
- [18] Fermanian, J.D. (2001). Modèles de durées. Cours ENSAE 3^{ième} Année. France.
- [19] Fisher, R. (1912). On an absolute criterion for fitting frequency curves. Messenger of Mathematics, no⁰ 41, p.155 – 160.
- [20] François, Olivier (2004 – 2005). Notes de cours de Processus Aléatoires.
- [21] Gaudoin, O. (2011). Fiabilité des Systèmes et des Logiciels, Notes de cours. Ensimag-3^{ème} année. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [22] Hahnel, A., Lemaire, M. and Rieuneau, F. (2005). Une approche pour l'étude physique et probabiliste de la défaillance de systèmes mécaniques. CFM.
- [23] Heng, J. (2002). Pratique de la Maintenance préventive. édition Dunod, Paris.
- [24] Hoang, P. (2003). Handbook of reliability engineering. Ed Springer.
- [25] Huber, C. Analyse des durées de survies. http://www.biomedicale.paris-des-cartes.fr/survie/enseign/survie_sansi.pdf.

- [26] Kaplan, E. L. & Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Statist. Assn.* 53 : p 457 – 481.
- [27] Karatzas, L & Shreve, S.E. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*.
- [28] Khalfaoui, S., Guilhem, E., Demmou, H. and Valette, R. (2002). Une méthodologie pour obtenir des scénarios critiques dans les systèmes mécatroniques. *Lambda Mu*, 13.
- [29] Kouta, R. and Play, D. (2007). Durée de vie d'un système mécanique. Analyse de chargements aléatoires. *Technique de l'ingénieur, BM5030*.
- [30] Lannoy, A. & Procaccia, H. (1994). Méthodes avancées d'analyse des bases de données du retour d'expérience industriel. Eyrolles.
- [31] Leemis, M. L. (1994). Probabilistic models and statistical methods in reliability. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, Tutorial notes, USA*.
- [32] Loisel, S. (2005 – 2006). Cours de gestion des risques d'assurances et de théorie de la ruine. <http://isfaserveur.univ-lyon1.fr/~stephane.loisel/poly3a-temp.pdf>.
- [33] Lyonnet, P. (1992). *La maintenance mathématiques et méthodes*. Troisième édition, Paris.
- [34] Lyonnet, P. (*mars* 2006). *Ingénierie de la fiabilité*. Ed TEC & DOC, Lavoisier, Paris-France.
- [35] Mihalache A. G. (*mars* 2010). *Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques : application sur système embarqué*.
- [36] MOUY Mounia (*novembre* 2009). *Estimation de la fiabilité d'un système et de ces composants*. Mémoire de fin d'étude. Université Mentouri, Constantine.
- [37] Norme AFNOR (1988). *Terminologie relative à la Fiabilité - Maintenabilité - Disponibilité*. ed. association française de normalisation (afnor).
- [38] Nouari Abdessamed (2014). *Fiabilité des systèmes mécaniques*. Mémoire de fin d'étude. Université de Bechar.
- [39] Pages, A. and Gondran, M. (1980). *Fiabilité des systèmes*. Ed Eyrolles.

- [40] Procaccia, H., Piepszownik, L. and Clarotti, C. (1992). Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne. Ed Eyrolles.
- [41] Quarteroni, A. Sacco, R. & Saleri, F. (2000). Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Springer Paris.
- [42] Tebbi, O. (09 mars 2005). Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés. Thèse de Doctorat. Université d'Angers.
- [43] Villemeur, A. (1988). Sécurité de fonctionnement des systèmes industriels : Fiabilité, Facteurs humains et Informatisation. Lavoisier, tec&doc edition.
- [44] Whitman, C. S. (2003). Accelerated life test calculations using the method of maximum likelihood : an improvement over least squares. *Microelectronics Reliability*, 43 :859–864.
- [45] ZABOOT, N. (2013). Estimation du Point de Saut de la Fonction de Hasard pour des Données Censurées. mémoire de magister en mathématique. Université des sciences et technologie de Houari Boumedienne.
- [46] Zille, V. (2009). Modélisation et évaluation des stratégies de maintenance complexes sur des systèmes multi-composants. Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Troyes.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

Symbole	Description
β	paramètre de forme.
<i>c.à.d</i>	c'est à dire.
$D(t)$	disponibilité.
$\mathbb{E}[X]$	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X .
exp	exponentiel.
F	fonction de répartition ou de défaillance.
F_n	fonction de répartition empirique.
f	densité de probabilité.
<i>i.i.d</i>	Indépendantes et identiquement distribuées.
\hat{I}	matrice d'information de Fisher.
$\mathbb{I}_{\{A\}}$	fonction indicatrice de l'ensemble A .
\mathbb{R}	ensemble des valeurs réelles.
\mathbb{R}_+	ensemble des valeurs réelles positives.
$\lambda(t)$	taux de défaillance instantané.
$L(t, \theta)$	fonction de vraisemblance.
$\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$	loi log -normale des paramètres μ et σ .
$M(t)$	maintenabilité.
MUT	temps moyen de disponibilité.

$MTTF$	temps moyen de bon fonctionnement.
$MTTR$	temps moyen de répartition.
$MTBF$	temps moyen entre deux pannes.
MV	maximum de vraisemblance.
μ	taux de réparation.
N_t	nombre de composants qui fonctionnent à l'instant t .
$N(t)$	processus de comptage.
$\mathcal{N}(0, 1)$	loi normale centrée réduite.
$PAIS$	Processus à accroissements indépendants et stationnaires.
$p.s.$	prèsque sûre.
$R(t)$	fonction de fiabilité.
$r(t)$	densité de renouvellement.
$resp.$	respectivement.
$\widehat{\Sigma}$	matrice estimée de variance-covariance.
UT	temps de bon fonctionnement.
TBF	temps entre défaillances.
TTR	temps de réparation.
$v.a.'s$	variables aléatoires
X_t	Processus stochastique.
(X_1, X_2, \dots, X_n)	échantillon de taille n de X .
$X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$	statistiques d'ordre associées à (X_1, X_2, \dots, X_n) .
$X_{1:n}$	minimum de X_1, X_2, \dots, X_n .
$X_{n:n}$	maximum de X_1, X_2, \dots, X_n .
$x \wedge y$	$\min(x, y)$.
$x \vee y$	$\max(x, y)$.
(Ω, \mathcal{F}, P)	espace de probabilité.
$\stackrel{loi}{=}$	égalité en loi.
$\xrightarrow{p.s.}$	convergence prèsque sûre.
\xrightarrow{d}	converge en distribution.

ملخص

هذا العمل مكرس لدراسة نظرية لموثوقية الأنظمة الميكانيكية، لأن دراسة موثوقية معدات تمكن من معرفة فترة عملها وتحسين عملياتها لزيادة الإنتاج. لهذا سوف نستخدم طريقتين لتقدير موثوقية النظام ومكوناته، وتتعلق الطريقة الأولى بالتقدير انطلاقاً من بيانات كاملة، الثانية تتعلق بتقدير وسائط القوانين في حالة بيانات الرقابة ودراسة عمليات التجديد التي تشارك في نمذجة الظواهر المتعلقة بتجديد المعدات وموثوقية النظام.

الكلمات المفتاحية: الموثوقية، نسبة الفشل، بيانات الرقابة، الفشل، عمليات التجديد، مقدر كابلان-ماير.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude théorique de la fiabilité des systèmes mécaniques, car l'étude de la fiabilité d'un équipement permet de connaître sa période de fonctionnement et d'optimiser son exploitation afin d'augmenter la production.

Pour cela on va utiliser deux méthodes d'estimation des fiabilités d'un système et de ses composants, la première est relative à l'estimation à partir des données complètes, la deuxième étant relative à l'estimation des paramètres des lois dans le cas de données censurées et étudier les processus de renouvellement qui interviennent dans la modélisation de phénomènes liés au renouvellement d'un matériel, à la fiabilité d'un système.

Mots clés: Fiabilité, Taux de défaillance, Données censurées, Défaillance, processus de renouvellement, Estimateur de Kaplan-Meier.

Abstract

This work is dedicated to the study of the reliability of the mechanical systems, because the study of the reliability of equipment enables the know its period of operation and optimize its operations to increase production.

For this we will use two methods for estimating reliabilities of a system and its components, the first relates to the estimation from complete data, the second being on the estimated parameters of the laws in the case censored data and study the renewal process involved in modeling phenomena related to the renewal of equipment, reliability of a system.

Key words: Reliability, Failure Rate, censored data, failure, renewal process, Kaplan-Meier estimator.