Table des matières

Liste des tableaux

Remerciements

Je remercie Dieu le tout-puissant de m'avoir donné la volonté, la force et le courage pour bien mener et finir mon travail de mémoire

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement du docteur Meddi Fatima, à l'université Kasdi Merbeh Ouargla, a qui je voudrais exprimer ma profonde gratitude pour sa disponibilité, son aide et ses conseils pour la réalisation de ce travail.

J'ai de la chance parce que Melle. ARBIA Hanane ait acceptée d'être examinateur de ce travail ainsi que pour l'attention qu'il a porté.

Je tiens également à remercier Monsieur BOUSAAD Abdelmalek pour sa disponibilité et son interet qu il a porté à mon travail d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ainsi qu'à tous mes enseignants du département de mathématiques à l'université de Ouargla d'avoir contribué à ma formation depuis que j'ai commencé mes études de mathématiques

Je remercie vivement ma famille surtouts mes parents pour l'aide et le soutient moral.

Je tiens a remercie mes collègues de ma promotion 2016 de Mathématique de l'université Kasdi Merbeh Ouargla, d'avoir passé ensemble des moments de travail agréables.

Notations et abriviations

Π	La prime
RC	Responsabilité Civile
S	Risque
$F_S(t)$	Distribution de risque
α_0	Chargement de sécurité
U	fonction de structure
$(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$	espace probabilité
$\pi(\theta)$	la loi a priori
$\pi(\theta/x)$	la loi a posteriori
$m(x)$	la densité marginale
$L(\underline{x}, \theta)$	fonction de vraisemblance des observation
$\gamma(r, \alpha)$	loi Gamma
p_k	loi de probabilité
Bn	loi binomiale négative
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson
$\widetilde{u}_i$	résidu d'estimation

Introduction

L'assurance est une opération par laquelle l'assureur s'engage à payer une prestation en cas de réalisation d'un événement incertain prédéfini moyennant le paiement d'une prime par l'assuré. Le mécanisme de l'assurance est basé sur la compensation des risques qui peuvent menacer des biens ou des produits. Ainsi est-il est donc possible de répartir la charge des dommages qui surviendront grâce au versement par chacun des assurés d'une contribution modérée. En recourant à des techniques appropriées de prévision et de répartition des divers risques et en opérant sur un grand nombre de contrats, une compagnie d'assurance doit estimer d'avance les charges qu'elle devra supporter du fait des risques qu'elle garantit.

Un contrat d'assurance est une prise en charge d'un risque de l'assuré par un assureur. Il existe plusieurs types de contrats d'assurance, les principaux étant l'assurance sur la vie (la santé, le décès) et l'assurance dommage (incendie, vol, accident).

La théorie mathématique des assurance de dommages (ou non viagères, non vie) s'est développée beaucoup plus tardivement que la théorie des assurances viagères (vie, décès). Les problèmes qui s'y posent sont sensiblement plus compliqués, et ce, pour plusieurs raisons.

En assurance vie ou décès, la compagnie ne doit indemniser ses clients qu'une fois au maximum : l'assuré ne meurt qu'une fois, ne prend qu'une seule fois sa retraite (ce n'est que dans quelques cas particuliers "assurance maladie-invalidité" avec retour à l'activité après une période d'invalidité, par exemple, qu'un assuré peut éventuellement être indemnisé plusieurs fois). En assurance de dommages, au contraire, la règle générale est que les assurés peuvent avoir plusieurs sinistres (assurance automobile).

En assurances viagères, le montant à débourser par la compagnie est déterminé au moment de la signature du contrat. En assurance de dommages, le montant d'un sinistre est une variable aléatoire : coût d'un accident automobile (incendie total ou partiel d'un immeuble, etc).

Les problèmes statistiques d'estimations des paramètres sont plus compliqués en assurances non viagères. En assurance vie, une révision périodique des tables de mortalité et du taux d'intérêt technique permet de remettre le tarif à jour. En assurance de dommages, les modifications rapides des conditions économiques rendent l'établissement des tarifs beaucoup plus malaisé.

Si les contrats vie sont presque toujours d'assez longue durée (10 ans ou plus), les polices non viagères doivent en général être renouvlées beaucoup plus fréquemment. L'équilibre financier doit réalisé chaque année ; on ne peut tolérer, comme en assurance vie, un déficit au cours des premières années d'existence du contrat.

Si en assurance vie la prime peut se décomposer en une composante risque et une composante épargne, l'assurance non viagère est de pur risque. On ne peut donc espérer compenser une sous-tarification par d'éventuels bénéfices financiers (si ce n'est le bénéfice provenant du fait que la prime est perçue anticipativement et que les sinistres sont parfois payés après un délai assez long).

Enfin, en assurance viagère, il est facile de partitionner les assurés en classes homogènes devant le risque, il suffit de les répartir suivant le sexe, l'âge et d'appliquer éventuellement une surprime pour risques aggravés, par exemple, après visite médicale. En assurance non viagère, l'estimation a priori des risques est difficile, voire impossible ; il est évident que tous les assurés ne sont pas égaux devant le risque : il existe des mauvais conducteurs, mais comment les repérer a priori ? Les assureurs ont donc été amenés à introduire des systèmes de modification des primes a posteriori, ce que l'on a populairement appelé des systèmes bonus-malus.

Dans le chapitre un, il nous a apparu important de commencer par la définition de quelques termes d'assurance et les mécanismes fondamentaux utilisés dans ce domaine, puis on tentera de donner un bref aperçu sur l'historique de l'assurance.

Nous avons consacré le deuxième chapitre pour présenter les modèles d'assurance automobile concernant nous travaux, nous commençons par le modèle de Poisson simple qui présente un inconvénient concernant l'égalité de l'espérance et la variance considérée comme nombre moyen d'accidents de chaque assurée. En réalité, le portefeuille d'assurance automobile est hétérogène, cela nous mène à utiliser un modèle de Poisson mélange, par l'utilisation de la méthode de Bayes pour obtenir des système de Malus-Bonus. Dans ce texte nous avons présenté le modèle Poisson-Gamma et Poisson-Gamma à coefficients aléatoires.

Nous avons présentons au chapitre 3 des simulations et résultats empiriques des données fournies par la compagnie d'assurance algérienne SAA d'El Oued, pour l'année 2015, pour confirmer la validité des modèles basés sur le systèmes Bonus-malus.

Chapitre 1

Assurance Automobile

1.1 Introduction

L'assurance automobile est le produit d'assurance le plus familier chez le public, la principale raison est que le contrat de base dit responsabilité civile automobile est obligatoire pour tout véhicule en circulation.

1.2 Généralitées sur l'assurance

Définition : assurance, opération par laquelle une personne, l'assureur, s'engage à indemniser une autre personne, l'assuré, en cas de réalisation d'un risque déterminé, moyennant le paiement préalable d'une prime ou d'une cotisation.

Le terme « risque » désigne à la fois la cause du risque, l'objet du risque ou encore les conséquences du sinistre. Donc le risque est à la fois, la chose garantie (l'automobile) l'événement dommageable, contre la survenance duquel on veut se protéger (l'accident, incendie) et l'enjeu financier duquel est confronté l'assureur.

Techniquement, le rôle de l'assureur est d'évaluer le prix de ce risque à partir des garanties offertes et des paramètres statistiques. Il tiendra compte à la fois du montant moyen des sinistres, de ses valeurs extrêmes, de sa répartition, de sa probabilité de survenance,... .

La difficulté et le métier pourrait on dire pour l'assureur consiste à donner le juste prix à ce risque qui satisfasse les parties dans la durée.

1.3 Principe de l'assurance

Le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation des risques : si tous les assurés sont soumis à un risque, la probabilité de voir celui-ci se réaliser pour tous les assurés est faible. Les victimes sont dédommagées grâce aux contributions versées par la collectivité des cotisants. L'assureur doit donc être capable de prévoir les charges qu'il aura à supporter du fait des risques qu'il couvre lorsqu'il établit ses polices d'assurance. Ces évaluations sont effectuées grâce au calcul de probabilités réalisé par un actuaire. La loi des grands nombres permet, en effet, d'établir les lois de survenance des risques, ce qui permet, en fonction de la probabilité de leur survenance et de leur fréquence, de déterminer le montant des polices d'assurance, auquel s'ajoute les frais de gestion de l'assureur. La valeur de l'indemnisation varie selon la fréquence des sinistres et la valeur assurée.

1.4 Types de l'assurance

Il existe deux grands types d'assurance : les assurances de dommages et les assurances de personnes.

1.4.1 Les assurances de dommages

Couvrent la réparation d'un préjudice, qu'il soit direct, c'est-à-dire qu'il porte sur un bien appartenant à l'assuré (assurance de choses), ou indirect, c'est-à-dire qu'il soit subi par un tiers du fait de l'assuré (assurance de responsabilité). Les contrats d'assurance combinent souvent ces deux aspects, comme le fait, par exemple, l'assurance-automobile multirisques.

Le principe qui régit les assurances de dommages repose sur l'indemnisation, d'une part, de préjudice causé par l'assuré au tiers (responsabilité), et d'autre part, les pertes matérielles subies par l'assuré, à la suite d'un sinistre

1.4.2 Les assurances de personnes

Garantissent l'individu contre les événements qui touchent à son existence et à sa santé : il s'agit principalement des assurances sur la vie, ou encore de celles qui couvrent les risques liés à la maladie ou aux accidents. On trouve :

Les assurances de répartitions

Elles consistent à indemniser l'assuré en cas où il a subi un accident du travail, et de lui garantir un remboursement total ou partiel des frais de soin en cas d'une maladie.

Les assurances de capitalisations

Sont appelées aussi l'assurance vie qui est une opération d'assurance dans laquelle l'assureur s'engage à verser une somme d'argent déterminée, soit à l'intérêt de la famille de souscripteur en cas de décès de celui-ci, soit à son intérêt personnel en cas de sa survie. En faite, il existe plusieurs formules d'assurance vie : les assurances en cas de décès, les assurances en cas de vie et les assurances mixtes qui sont des combinaisons à la fois d'assurance en cas de décès et d'assurance en cas de vie.

1.5 Définitions et mécanismes de l'assurance

Dans cette section, nous allons présenter les définitions des mots clés qui sont nécessaires pour comprendre l'assurance, puis les mécanismes fondamentaux appliqués dans les calculs actuariels.

1.5.1 Définitions

L'assurance

Nous donnons ici deux définitions de l'assurance sous deux aspects différents : le premier est juridique, le second est technique.

1. Définition juridique Selon la formulation proposée par le professeur Hérmad : l'assurance est une opération par laquelle une partie, l'assuré, se fait promettre, moyennant une rémunération (la prime ou cotisation), pour lui ou pour un tiers en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie, l'assureur, qui prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique.

2. Définition technique L'assurance est l'opération par laquelle un assureur, organisant en mutualité une multitude d'assurés exposés à la réalisation de certains risques, indemnise ceux d'entre eux qui subissent un sinistre grâce à la masse commune des primes collectées.

Les deux définitions de l'assurance ont l'avantage de faire ressortir les éléments qui caractérisent l'opération d'assurance.

L'assureur

L'assureur est la société d'assurance ou la personne physique auprès de laquelle le contrat d'assurance est souscrit, et qui s'engage à fournir les prestations prévues en cas de réalisation du risque.

L'assuré

L'assuré se confond très souvent avec le souscripteur, redevable des primes, mais il peut être distinct. Il s'agit précisément, soit de celui qui est le propriétaire des biens assurés dans une assurance de biens, soit de celui dont la responsabilité est assurée dans une assurance de responsabilité, soit enfin de la personne dont le sort future engendre le risque. Il y a lieu de les distinguer du bénéficiaire qui recevra en cas de survenance d'un sinistre la prestation par l'assureur.

La mutualité

La mutualité est le principe de base de l'assurance selon lequel les cotisations modiques versées par chacun des membres d'un groupe de personnes (les assurés) sont utilisées et suffisent théoriquement à l'indemnisation de quelques-unes d'entre elles qui s'avèrent victime de l'événement assuré.

À cette effet, le rôle de l'assureur est de mutualiser les risques : les mettre en commun, les répartir et les compenser en s'appuyant sur des lois mathématiques appliquées sur les statistiques collectées.

Le contrat d'assurance

Le contrat d'assurance est une convention passée entre une entreprise d'assurance et un souscripteur (individu ou collectivité), fixant à l'avance, pour une période déterminée, des charges financières en fonction d'un ensemble bien défini d'évènements aléatoires.

Le risque

Le risque est l'éventualité de la survenue d'un fait dommageable tel que le vol, la perte, l'incendie, l'accident...etc. le risque a un caractère aléatoire puisqu'il dépend d'un événement hasardeux provoquant le sinistre. Mais en matière d'assurance le mot « risque » s'emploie également pour désigner l'objet de la garantie. Il en est l'élément constitutif, c'est pourquoi il doit être défini avec la plus grande précision possible.

Le sinistre

Le sinistre est la réalisation d'un risque entrant dans l'objet du contrat d'assurance. Le sinistre fait naître l'obligation pour une entreprise d'assurance d'exécuter la garantie prévue dans un contrat d'assurance.

La prime ou la cotisation

La prime est le prix de l'assurance, elle représente techniquement le coût de la garantie du risque ; juridiquement elle est la contrepartie de la sécurité vendue par l'assureur. C'est la somme payée par l'assuré à une entreprise d'assurance pour la garantie du risque.

La prime pure Elle correspond à la part des sinistres de l'assuré gérée au sein de la mutualité. En assurance dommage, la prime pure se calcule en multipliant la fréquence des sinistres par le coût moyen des sinistres.

$$\text{La prime pure} = \text{fréquence des sinistres x le coût moyen des sinistres}$$

La prime commerciale Elle résulte de l'addition de la prime pure et les chargements nécessaires pour l'acquisition et la gestion des contrats d'assurance ainsi que pour permettre à l'assureur de dégager un bénéfice.

Les chargements d'acquisition correspondent aux commissions versées par les assureurs à ses distributeurs intermédiaires (agents ou courtiers).

Les frais de gestion destinés à rémunérer le personnel chargé d'établir et de gérer les contrats, de régler les sinistres et lui donner les moyens en locaux et en matériels nécessaires pour cela.

La prime Totale La prime réellement payée par l'assuré (ou le souscripteur) est la prime totale, elle est égale à la prime commerciale augmentée des frais accessoires et des taxes.

Les frais accessoires sont une petite somme forfaitaire qui représente la participation de l'assuré dans le coût matériel de l'établissement du contrat (papier, rédaction, tirages informatiques...).

L'indemnisation

En cas de réalisation du risque assuré, l'assureur doit réparer le préjudice en versant une somme d'argent, mais il ne le fera que dans la limite de la garantie accordée à l'assuré. Cette somme d'argent est destinée :

1. Soit au souscripteur et assuré, par exemple en assurance incendie.
2. Soit au bénéficiaire, par exemple en assurance décès.
3. Soit à un autrui, par exemple en cas de responsabilité.

1.5.2 Les mécanismes fondamentaux de l'assurance

Les techniques du calcul actuariel ont pour objet d'apprécier, d'une part la prime équitable que chaque assuré doit payer pour la couverture des sinistres futurs, et d'autre part le montant des réserves que la mutualité doit conserver si elle veut limiter à un seuil fixé à l'avance le risque de ne pas pouvoir faire face à tous ses engagements. Ces calculs sont possibles grâce aux outils fondamentaux de statistique et de probabilité, il s'agit de la loi des grands nombres et le théorème central limite, les statistiques.

La loi des grands nombres et le théorème central limite

Afin d'illustrer ces deux mécanismes, il convient de prendre un exemple simple qui utilise deux résultats fondamentaux du calcul des probabilités : la loi des grand nombre et le théorème central limite.

Considérons une population composée de N individus($i = 1 \ldots N$) identiques, exposés à un risque d'une perte monétaire S, avec une probabilité P. Supposons qu'une compagnie assure ces individus en contre partie d'une prime unitaire. Désignons par X_i la variable aléatoire qui représente le remboursement à l'individu i par la compagnie. On a par définition :

$$\begin{cases} X_i = S & \text{si l'individu } i \text{ subit un sinistre (probabilité } P \text{)} \\ X_i = 0 & \text{dans le cas contraire (probabilité } 1 - P \text{)} \end{cases}$$

• **La loi des grands nombres** Si les X_i sont indépendants, alors :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \left(\frac{X_1 + ... + X_N}{N} \right) = PS \quad \text{avec probabilité } 1$$

Donc si les risques sont indépendants, et le nombre N est assez grand, le remboursement moyen tend presque sûrement vers l'espérance mathématique du risque que l'on appelle prime actuarielle :

$$\Pi = PS$$

• **Le théorème central limite** Si les X_i sont indépendants, alors :

$$\left[\frac{X_1 + ... + X_N - NPS}{\sqrt{P(1-P)}S\sqrt{N}} \right] \quad \text{suit asymptotiquement une loi Normale centrée réduite } \mathcal{N}(0,1)$$

Si la compagnie applique un tarif actuariel et possède des réserves de montant R, elle ne pourra faire face à ses engagements que si :

$$X_1 + X_2 + ... + X_N \leq NPS + R$$

Par le théorème central limite, on peut évaluer la probabilité de ruine pour N assez grand :

$$P\left[X_1 + ... + X_N - NPS - R > 0\right] \cong 1 - F\left[\frac{R}{\sqrt{P(1-P)}S\sqrt{N}}\right]$$

Où F est la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite. Si la compagnie veut que la probabilité de ruine ne dépasse pas un seuil ε fixé à l'avance, elle doit posséder un montant de réserves au moins égal à :

$$R_\varepsilon = \sqrt{P(1-P)}S\sqrt{N}F^{-1}(1-\varepsilon)$$

• **Les statistiques**

En pratique, rares sont les compagnies d'assurance qui peuvent rassembler un grand nombre d'assurés, suffisant pour rendre leurs prévisions fiables et c'est pour cela que les assureurs se regroupe pour augmenter le volume des statistiques et pour obtenir des fréquences communes, à partir des déclarations faites par toutes les entreprises adhérentes.

Les réassureurs ont la possibilité de contacter un grand nombre d'assureurs opérant dans différents marchés internationaux, ce qui leur permet de recueillir les informations de ces marchés, donc leur aide est indispensable en matière de statistiques utilisées pour la tarification, surtout en ce qui concerne le lancement de nouveaux produits d'assurances. Les statistiques doivent être établies soit :

1. par branches d'assurance (incendie, automobile, transport. . . etc).
2. par type de garantie (ainsi en automobile on isole les résultats des garanties responsabilité civile, dommage-collisions. . . etc).
3. par régions d'émission de contrats (certains risques sont plus lourds dans les grandes villes que dans les compagnes et vice versa).

4. par groupes d'assurés (age, sexe,...etc).
5. par caractéristiques physiques des biens assurés (types de construction, type de marchandises transportées ...etc).

Ces statistiques sont ensuite utilisées dans la segmentation tarifaire, mais avant, l'assureur doit connaître les résultats de sa clientèle, ceci dit : (sinistré ou non sinistré ; nombre de sinistres pour chaque sinistré ; coût du sinistre), et ce séparément pour chaque groupe qu'on a cité précédemment.

A partir de la segmentation, l'assureur peut, d'une part, repérer les groupes rémunérateurs pour lui et d'autre part affiner sa tarification afin que chaque assuré paie la prime qui correspond à sa part du risque (le juste prix).

1.6 Les risques dans l'assurance

1.6.1 Les caractéristiques des risques assurables

Les risques, pour qu'ils soient assurables, ils doivent présenter certaines caractéristiques qui sont :

Risques futurs

Un contrat d'assurance n'assure que les risques non encore survenus, ainsi l'assureur ne peut indemniser que les dommages survenus après la date d'entrée en vigueur des garanties.

Risques aléatoires

Un risque assurable doit être aléatoire, c'est-à-dire lié au hasard et dont la survenance ne peut pas être connue à l'avance, ceci dit que sa réalisation doit être incertaine et même sa date de survenance doit être inconnue.

Risques ne dépendent pas de la seule volonté de l'assuré

L'assurance ne couvre pas les conséquences de la malchance, de maladresse, ou simplement de la faute : il est certain qu'un assureur n'accepterait d'indemniser un assuré qui a mis le feu à sa maison. Donc, ce que l'assurance ne couvre pas c'est la faute intentionnelle.

Risques susceptibles de former une mutualité

Un risque qui est unique par ses caractéristiques ou existant en petit nombre, ne peut former une mutualité, car tout d'abord l'ensemble des cotisations ne suffirait être même pas à indemniser un seul sinistre et même la tarification du risque ne sera pas équitable à cause du manque de statistiques.

Risques dont l'assurance n'est pas interdite par la loi

Pour que le risque soit assurable, il faut que l'opération d'assurance du risque soit autorisée par les pouvoirs publics.

Risques considérés comme assurables par les assureurs

Enfin, un risque n'est assurable que si les assureurs veulent l'assurer. Pour permettre à l'assureur de répondre à ses engagements contractuels, il faut arriver à une bonne mutualisation des risques (règle qui vise à gérer au mieux la mutualité).

1.6.2 La mutualisation des risques

Pour arriver à une bonne mutualisation des risques, il faut respecter certains principes qui sont :

L'homogénéité des risques

En tenant compte de l'homogénéité, le groupe de risques ne doit inclure que les risques dont les caractéristiques sont comparables ou semblables, dans le cas contraire l'équilibre de la compagnie peut être menacé à cause de mélange des risques dont les caractéristiques sont incomparables et dissemblables : un portefeuille incendie de logements résidentiels serait complètement déséquilibré si on y incluait une grande usine, et même les logements résidentiels : les maisons construites en bois et celles construites en béton doivent être tarifiées séparément.

La sélection des risques

La sélection des risques consiste, pour l'assureur, à classifier les risques en analysant leur sinistralité afin de prendre l'une des trois décisions suivantes :

1. Assurer le risque.
2. Assurer le risque mais seulement après l'application de certains procédés.
3. Refuser d'assurer le risque.

Théoriquement, l'assureur ne devrait exclure aucun risque de la mutualité qu'il gère, mais le plus souvent il arrive à l'assureur de remarquer qu'un nombre anormalement élevé de sinistres est causé par certains individus, soit malchanceux, soit malades, soit malhonnêtes. Il est de devoir de l'assureur de protéger l'ensemble de la mutualité qu'il gère d'une fréquence anormale de sinistres dus à une petite minorité d'assurés.

Pour faire face à ce genre de sinistralité, les assureurs utilisent quelques procédés tels que l'application d'une surprime pour les automobilistes alcooliques. Mais ces procédés trouvent parfois leurs limites, et ce en cas de fraude ou malveillance de la part de l'assuré, ce qui va priver le risque de son caractère aléatoire, dans ce cas l'assureur peut refuser d'assurer.

Il est important de noter que s'il est facile d'appliquer la sélection des risques à chaque période de renouvellement des contrats pour les clients habitués de la compagnie, il est difficile de l'appliquer pour les nouveaux clients à cause du manque d'informations et des statistiques sur eux.

La division des risques

Le risque peut être partagé en utilisant deux techniques :

La coassurance : La coassurance consiste à partager la garantie d'un gros risque (maritime, aérien, industriel) par un même contrat entre plusieurs assureurs, chacun étant garant de la part du risque qu'il a accepté dans la limite de plein de souscription.

La réassurance : La réassurance est une opération par laquelle une entreprise d'assurance (cédante), se fait assurer tout ou partie des risques pris à l'égard de son assuré.

Le renouvellement des risques

L'assureur doit acquérir et conserver un nombre important d'assurés, car plus le nombre de ces derniers est élevé, plus la compensation au sein de la mutualité est aisée et plus les statistiques de l'assureur sont précises et par conséquent la tarification a de la chance d'être plus équitable et correspondre au plus juste à la réalité des risques assurés.

L'assureur ne peut donc se réjouir de la clientèle existante, mais il a le devoir de retrouver de nouveaux clients afin de maximiser le nombre d'assurés et remplacer ceux d'entre eux qui décideraient de quitter la mutualité, pour cela il lui faut : un service de production capable d'élaborer de nouveaux produits d'assurance, un service commercial capable de faire connaître ces produits et un réseau de distribution performant pour répondre à tous les besoins de la demande.

1.7 L'Assurance Automobile en Algérie

1.7.1 La Tarification en Assurance Automobile

Il existe trois formes de tarification en assurance automobile :

La tarification a priori :

La tarification a priori permet de déterminer le prix de la souscription au moment de la signature du contrat, en se basant sur l'observation de certaines variables relatives au véhicule (le mode d'usage, la zone de circulation, la puissance fiscale, l'âge de véhicule, le code genre du véhicule. . . etc) et au conducteur (l'âge, le sexe, l'ancienneté du permis de conduire, la catégorie socioprofessionnelle. . . etc).

La tarification a posteriori :

La tarification a posteriori se base sur l'historique de l'assuré, la variation de la prime dépend du nombre de sinistres survenus durant la période de souscription passée. C'est ce qu'on appelle le système Bonus-Malus.

1. Le système de Bonus :

   Le principe de ce système est de bonifier les assurés qui n'ont pas provoqué des accidents pendant la période de souscription précédente, en les gratifiant d'une réduction sur la prime payée.

2. Le système de Malus :

   Le principe de ce système est de pénaliser les assurés ayant provoqué des accidents durant la période précédente, en les contraignant à payer une augmentation sur la prime payée en fonction de leurs sinistralités.

La tarification spéciale :

Il s'agit d'une majoration appliquée sur certains assurés. Les conducteurs ayant un permis de conduire de moins d'un an sont obligés de payer une majoration de 25% sur la prime RC (Responsabilité Civile) quelque soit la durée du contrat. De même, les jeunes âgés de moins de 25 ans sont astreints à payer une majoration de 15% sur la prime RC.

Il est à noter tout de même que ce tarif spécial n'effectue pas une double majoration pour les âgés de moins de 25 ans qui possèdent un permis de conduire depuis moins d'un an (dans ce cas, la majoration est de 25% et non 40%).

1.8 Les composantes du marché de l'assurance automobile en Algérie

1.8.1 La Société Nationale d'Assurance (SAA)

La SAA est devenu une société par action dont le capital social est de $3,8$ milliards DA, de part l'importance de chiffre affaire $26,5$ milliards DA, la SAA détient la plus grande part du marché algérien, Les produits d'assurance de la SAA sont :

1. l'assurance crédit.
2. l'assurance automobile.
3. l'assurance avenir retraite.
4. l'assurance sécurité plus.
5. l'assurance associée.

1.8.2 La Compagnie Algérienne d'Assurance Transport (CAAT)

Elle a été créée en juin 1985 avec un capital social de 60 millions de dinars, ses activités touchent toutes les branches d'assurance et beaucoup plus l'assurance transport. Quand à sa part du marché, elle occupe la deuxième place après la SAA avec un chiffre d'affaires de $15,914$ milliards de dinars réalisé durant l'exercice 2015. Ses principaux produits d'assurance sont :

1. L'assurance automobile.
2. L'assurance transport terrestre, maritime, aérien de marchandises.
3. L'assurance perte d'exploitation de l'entreprise.
4. L'assurance crédit à l'exploitation.
5. L'assurance tous risques engins de chantier.

1.8.3 La Compagnie Algérienne de l'Assurance et de la Réassurance (CAAR)

C'est une compagnie publique, elle a été créée en juin 1963 pour permettre à l'état de contrôler le marché des assurances en obligeant les sociétés d'assurance de céder une part de leurs primes encaissées. Elle a été habilitée à pratiquer les différentes opérations d'assurance après qu'elle était spécialisée dans la gestion des gros risques, c'est pour cela que la majorité de ses agences sont implantées dans les zones à forte complexité industrielle. En terme du chiffre d'affaire, elle occupe la troisième place après la SAA et la CAAT avec un montant du $7,957$ milliards de dinars en 2015.

Les principaux produits d'assurance sont :

1. L'assurance des biens : automobile, habitation, risques industriels, petites et moyennes entreprises.
2. L'assurance des personnes : décès, prévoyance…etc.
3. La réassurance qui concerne les gros risques.

1.8.4 La Compagnie Internationale d'Assurance et de Réassurance (CIAR)

C'est une société à capitaux privés algériens, agréée le 5 août 1998 pour pratiquer toutes les opérations d'assurance et de réassurance. Son but est d'avoir des parts de marché importantes, c'est pour cela qu'elle a innové des nouveaux produits d'assurance tels que :

1. L'assurance caution fournisseurs.
2. L'assurance crédit vente de véhicule.

Quant à sa part du marché, la CIAR a réalisé durant l'année 2015 un chiffre d'affaires de $9,682$ milliards de dinars.

1.8.5 L'Algérienne des assurances (2A)

Société à capitaux privés algériens agréée en 1998 pour pratiquer toutes les opérations d'assurance et de réassurance. Son objectif est d'améliorer l'image de l'assurance au sein du grand public en plaçant le client au centre de son organisation, elle propose de lancer des produits et des services adaptés aux attentes du marché tels que : les assurances de santé. Concernant sa part du marché, elle a réalisé en 2015 un chiffre d'affaires de $10,424$ milliards de dinars.

1.8.6 La Trust Algeria

Compagnie mixte à capitaux de majorité privés étrangers agréée en 1997 pour pratiquer toutes les opérations d'assurance et de réassurance dont le capital social est de $1,8$ milliards de dinars. En 2015 son chiffre d'affaires est de $9,958$ milliards de dinars.

1.8.7 La CASH

Compagnie généraliste vouée spécialement au secteur des hydrocarbures. Elle a obtenu son agrément en 1999 pour commencer ses activités en 2000. Son chiffre d'affaires réalisé en 2015 est de $6,775$ milliards de dinars.

1.8.8 Al Baraka-Oua-Al-Aman

C'est une compagnie privée dont l'activité a démarré en 2000. Elle a réalisé durant l'année 2015 un chiffre d'affaires de $5,992$ milliards dinars.

1.8.9 La Générale Assurance Méditerranéenne (GAM)

C'est une compagnie privée dont l'activité a démarré en 2002. Elle a un chiffre d'affaires de $12,12$ milliards de dinars, réalisé durant l'exercice 2015.

1.8.10 L'ALLIANCE Assurances

C'est une compagnie à capitaux privés agréée le 30 juillet 2004 pour pratiquer toutes les opérations d'assurance et de réassurance dont le capital social est de 500 millions de dinars.

Il y a lieu de noter que les nouvelles compagnies d'assurance privées utilisent l'assurance automobile comme un produit d'appel en limitant le nombre de contrats d'assurance automobile à vendre pendant la journée.

Chapitre 2

Estimation de la prime bonus-malus

2.1 Introduction

Du point de vue technique, il peut être utile que la prime tienne compte du cours des sinistres d'un contrat. Exception faite, toutefois, si le portefeuille de la compagnie est parfaitement homogène, c'est-à-dire si tous les assurés sont également exposés. Le système du bonus-malus perd alors tout son sens et toute sa justification. Par contre, dans un portefeuille hétérogène dont les polices accusent des variations importantes dans la fréquences des sinistres, les contrats enregistrant plusieurs accidents en un laps de temps restreint doivent être jugés différemment que ces exempts de sinistre. Selon le cas, il sera dès lors possible, grâce au nombre ds sinistres annoncés, de tirer de précieuses conclusions sur le risque que représente tel ou tel contrat en particulier. Nous pourrons peut-être essayer, grâce à ces chiffres, de calculer la probabilité qu'un assuré est un bon ou un mauvais risque. A l'aide de cette probabilité, nous serons alors à même d'essayer d'obtenir la "prime équitable" basée sur un calcul technique tenant compte soit des années sans sinistres, soit de nombre de sinistres.

2.2 La prime

La prime d'assurance correspond au montant à payer par le souscripteur pour bénéficier des garanties prévues par le contrat. En cas de modification des garanties, les primes seront augmentées ou diminuées en conséquence. La prime peut être payée en une seule fois, on parle alors de "prime unique", ou en plusieurs fois, par des versements d'un montant défini, soit à échéances régulières, il s'agit alors de "primes périodiques", soit au gré du souscripteur, c'est le cas des versements libres.

2.2.1 Principe de calcul de prime

L'activité d'assurance repose sur le concept de transfert de risque : moyennant une prime, l'assuré, se protège d'un aléa financier. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les chargements de sécurité à ajouter à la prime pure et dans une approche de solvabilité pour déterminer le niveau des réserves et des fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable. Mesurer le risque pour les compagnies d'assurance c'est la détermination de ses besoin en fonds propre, d'où l'importance d'utiliser des mesures de risques efficaces et efficientes qui peuvent être adaptées dans le secteur d'assurance. Pour plus de détails sur le calcul des cotisations et la tarification de l'assurance, voir Goovaerts et Laeven (2007), Bühlman (1980), Kaas, van Heerwaarden et Goovaerts (1994) et Wang (1996).

Le principe de calcul de prime est une règle qui assigne un nombre non négatif Π (la prime) à n'importe quel risque donné S (une variable aléatoire positive) i.e. déterminer la prime comme un fonctionnel en assignant une valeur $\Pi(F_S) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ à la distribution de risque $F_S(t)$. Désormais on note $\Pi(S)$ à la place de $\Pi(F_S)$.

Typiquement la prime $\Pi(S)$ dépend de certains caractéristiques de F_S comme l'espérance $E(S)$ ou la variance $Var(S)$. La différence $\Pi(S) - E(S)$ est appelée le chargement de sécurité, et ce dernier doit être positif. Dans ce qui suit le risque est modèlisé comme une variable aléatoire positive.

2.2.2 Principes de prime de base

Parmi les principes de calcul de prime les plus simple :

Le principe de l'utilité nulle :

Soit $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable avec $u'(x) > 0$. Dans ce cas est $\Pi(S)$ est la solution de l'équation $E[u(\Pi(S) - S)] = u(0)$.

Le principe de la prime nette(prime pure) : $\Pi(S) = E(S)$

Le principe de la prime pure est bien sûr le cas particulier du principe de l'utilité nulle où le réassureur est supposé neutre au risque $(u(x) = x)$.

Le principe de l'espérance mathématique : $\Pi(S) = (1 + \alpha_0) E(S)$, $\alpha_0 \geq 0$

Ce principe paraît bon mais, il ne tiens pas compte de la variabilité du risque subordonné S, et cela peut être dangereux pour l'assureur. On présente des principes où le chargement de sécurité $\Pi(S) - E(S)$ dépend de la variabilité du risque S.

Le principe de la variance : $\Pi(S) = E(S) + \alpha_0 . Var(S)$, $\alpha_0 > 0$

Ici, la marge de sécurité ajoutée à la prime pure est proportionnelle à la variabilité du risque. Remarquez que si S est exprimé en Euro, alors α_0 est exprimé 1/Euro. Ce principe est additif pour les risques uncorrelated.

Le principe de l'écart-type : $\Pi(S) = E(S) + \alpha_0 \sqrt{Var(S)}$, $\alpha_0 > 0$

La marge de sécurité tient également compte de la variabilité du risque. Elle est toutefois proportionnelle à l'écart-type du risque et non à sa variance comme en 4. Remarquez que comme en 3. α_0 est ici sans dimension.

Le principe exponentiel : $\Pi(S) = \alpha_0^{-1} \log(E(e^{\alpha_0 S}))$**,** $\alpha_0 > 0$

Le paramètre $\alpha_0 > 0$ s'appelle l'aversion au risque. Une prime calculée selon le principe exponentiel croît avec α_0 et tend vers la prime pure quand $\alpha_0 \longrightarrow 0$. En effet, le principe exponentiel est le principe de l'utilité nulle avec une fonction d'utilité exponentielle, pour laquelle α_0 mesure l'indice d'aversion au risque absolu du réassureur.

Le principe suisse :

Soit f une fonction continue, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha_0 \in [0, 1]$. La prime est solution de l'équation $E(f(S - \alpha_0\Pi(S))) = f((1 - \alpha_0)\Pi(S))$. Si $\alpha_0 = 1$, on trouve le principe de l'utilité nulle en posant $u(x) = -f(-x)$

Le principe de la valeur moyenne :

Soit $u(x)\,(x \in \mathbb{R}^*)$ une fonction strictement croissante et continue. Donc on définit $\Pi(S) = u^{-1}E[u(S)]$, où u^{-1} note la fonction inverse de u. Il s'agit du principe suisse dans le cas où $\alpha_0 = 0$.

Le principe de la perte maximale :

1. pour $p \geq 0$, $q = 1 - p$ on a $\Pi(S) = pE(S) + q\max(S)$ où, $\max(S)$ note le point terminal à droite du rang de S.
2. Il s'agit du principe "radical", par lequel le réassureur s'assure un résultat positif ! $\Pi(S) = \max(S)$. C'est un principe d'utilité nulle avec un réassureur infiniment averse aux pertes.

Le principe d'Esscher : $\Pi(S) = \dfrac{E(Se^{\alpha_0 S})}{E(e^{\alpha_0 S})}$, $\alpha_0 \geq 0$

Il s'agit donc de recalculer l'espérance de S sous une nouvelle f.r. G, la "transformée d'Esscher" de F , telle que

$$dG(x) = \frac{e^{\alpha_0 x}dF(x)}{\displaystyle\int e^{\alpha_0 x}dF(x)}$$

Ainsi, les états de la nature les plus défavorables sont par rapport à la probabilité objective.

2.2.3 Propriétés des principes de calcul des primes

Un critère d'adoption natural d'un principe de calcul de primes est la vérification par ce principe d'un certain nombre de propriétés qui revêtent une importance pratique certaine. Les quatre propriétiés suivantes sont importantes en pratique. Nous les énonçons, puis étudions dans quelle mesure les principes de calcul des primes définis ci-dessus les satisfont.

"Au moins la prime pure" :

Le principe de calcul doit fournir un résultat au moins égal à celui obtenu par le principe de la prime pure pour que le réassureur fasse un bénéfice en espérance.

Invariance par translation :

L'ajout d'un flux non risqué α_0 au portefeuille est tel que si, pour tout $\alpha_0 \geq 0$, $\Pi(S+\alpha_0) = \Pi(S) + \alpha_0$. Cette propriété formalise l'intuition selon laquelle ajouter des transferts de flux non risqués entre l'assurance et l'assuré ne devrait pas modifier le prix du risque.

Additivité :

Pour deux portefeuilles S et S' indépendants $\Pi(S+S') = \Pi(S) + \Pi(S')$. Cette propriété est remise en cause par un certain nombre d'auteurs. Ils considèrent préférable que, pour des raison de diversification, la prime de la somme soit plus faible que la somme des primes, comme par exemple lorsque l'on applique le principe de l'écart-type.

Itérativité :

Pour tout S et S', $\Pi(S) = \Pi(\Pi(S/S'))$.

La conformité de chacun des principes de calcul des primes à ces quatre propriétés est résumée dans le tableau ci-dessous. Un "**+**" signifie que la propriété est vérifiée, un "**-**" qu'elle ne l'est pas. Un "**e**" signifie qu'elle l'est dans le seul cas exponentiel.

Principe	Prop.1.	Prop.2.	Prop.3.	Prop.4.
Utilité nulle	+	+	e	e
Prime pure	+	+	+	+
Esp. math	+	-	+	-
Variance	+	+	+	-
Ecart-type	+	+	-	-
Exp.	+	+	+	+
Val. moy.	+	e	e	+
Perte max.	+	+	+	+
Esscher	+	+	+	-

TAB. 2.1 – Propriétés des principe de calcul des primes

2.3 Modélisation de la fréquence des sinistres

Dans cette section, nous proposons plusieurs distributions généralement utilisées pour modéliser la survenance d'accidents. La plupart d'entre-elles sont de type "Poisson mélange" qui présentent l'avantage de mieux appréhender l'hétérogénéité naturellement présente dans un portefeuille d'assurés représentant ainsi de manière satisfaisante l'éventail des comportements au volant des différents types de conducteurs.

2.3.1 Portefeuille homogène (Distribution de Poisson simple)

La loi de Poisson convient à la description d'événements dont la probabilité de réalisation est faible mais constante. Partant de cette constatation, définissons ce qu'est un événement rare. Si l'on considère l'observation d'un assuré pendant une durée déterminée notée T, il est toujours possible de décomposer cette période en n sous-périodes de durée Δt $\left(\Delta t = \frac{T}{n}\right)$ suffisamment courtes de sorte qu'il soit impossible d'y observer plus d'un sinistre. Il suffit de choisir n de façon que la probabilité d'observer un accident soit aussi petite que souhaitée, de façon à réduire autant que souhaité la probabilité d'observer plusieurs accidents "simultanément". Mathématiquement, cette exigence se traduit comme suit. En notant λ le nombre moyen d'accidents par unité de temps et $N(t, t + \Delta t)$ le nombre d'accidents dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$. On définit un événement rare comme l'événement (au sens probabiliste) respectant les hypothèses :

H_1 $P[N(t,t+\Delta t)=1]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

H_2 $P[N(t,t+\Delta t)>1]=o(\Delta t)$

H_3 Soient τ et $\tau^{'}$ deux intervalles non empiétants. Alors

$$P\left[N(\tau)=k,N(\tau^{'})=m\right]=P[N(\tau)=k]P[N(\tau^{'})=m]$$

Proposition : Si les hypothèses H_1, H_2 et H_3 sont satisfaites. Alors la distribution du nombre de sinistres est poissonnienne.

Preuve : Posons $p_\lambda(k,t)=P[N(t)=k]$ et appliquons la technique du bilan des probabilités.

$$\begin{aligned} p_\lambda(k,t) &= p_\lambda(k,t).P[N(t,t+\Delta t)=0]+p_\lambda(k-1,t).P[N(t,t+\Delta t)=1] \\ &\quad +\sum_{i=2}^{k}p_\lambda(k-i,t).P[N(t,t+\Delta t)=i] \\ &= p_\lambda(k,t)\left[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+p_\lambda(k-1,t)\left[\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right]+\sum_{i=2}^{k}p_\lambda(k-i,t).o(\Delta t) \\ &= p_\lambda(k,t)\left[1-\lambda\Delta t\right]+\lambda p_\lambda(k-1,t)\Delta t+o(\Delta t) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{p_\lambda(k,t+\Delta t)-p_\lambda(k,t)}{\Delta t}=-\lambda p_\lambda(k,t)+\lambda p_\lambda(k-1,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

En prenant la limite pour $\Delta t\to 0$

$$\begin{aligned} p_\lambda^{'}(k,t) &= -\lambda p_\lambda(k,t)+\lambda p_\lambda(k-1,t) \quad \text{si } k=1,2... \\ p_\lambda^{'}(0,t) &= -\lambda p_\lambda(0,t) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } k=0 \end{aligned}$$

En résolvant par récurrence ce système d'équations différentielles, avec les conditions initiales $p_\lambda(0,0)=1$ et $p_\lambda(k,0)=0$ si $k>0$, nous obtenons :

$$p_\lambda(k,t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,2,...$$

Pour une période de temps unitaire :

$$p_\lambda(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,... \tag{3.1}$$

où k est la réalisation d'une variable aléatoire N sur une période donnée et λ est un paramètre inconnu à estimer. λ est le nombre moyen des accidents par période (la variance étant aussi égal à λ).

La formulation précédente (3.1) présente deux inconvénients. D'une part, le modèle répose sur une hypothèses d'indépendance entre les événements successifs, et d'autre part l'espérance et la variance de N sont égales, ce qui implique que chaque individu a le même risque moyen. Ces deux propriétés ne correspondant pas aux observations réalisées sur les accidents de la route.

2.3.2 Portefeuille hétérogène (Distribution de Poisson mélange)

Nous supposons ici que les assurés ne sont pas tous égaux devant le risque. Le comportement des assurés est hétérogène et justifie l'introduction d'un système bonus-malus. L'introduction de tel système en assurance RC auto se justifie principalement par le fait que le nombre $N(t)$ de sinistres déclarés par un assuré dans l'intervalle $(0, t)$ ne suit pas une loi de Poisson simple. Cela conduit naturellement à traduire la diversité des assurés en supposant que $N(t)$ suit une loi de Poisson mélange caractérisée par

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dU(\lambda) \quad , \ k \in \mathcal{N} \tag{3.2}$$

Généralement on fait choix de la fonction U (fonction de structure) pour trouver la loi de $N(t)$. Lemaire (1979), Dionne-Vanasse (1989, 1992) et Sarabia et al (2004) ont choisi la loi gamma pour U. Morillo et Bermudez (1999) ont choisi la loi inverse gaussienne pour U.

2.4 Méthode de Bayes

Soit $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires i.i.d de densité $f(x, \theta)$.On suppose que θ est une valeur d'une variable aléatoire sur Θ. Nous appelons loi de probabilité a priori toute loi de probabilité sur l'espace $(\Theta, \mathcal{B}_\Theta)$ qui ne dépend pas de $\underline{x}$. Nous la notons $\pi(\theta)$, que ce soit une probabilité (cas discret) ou une densité (cas continu). L'approche bayésienne peut être présentée comme une généralisation de l'approche classique : les paramètres ne sont plus des valeurs fixes inconnus mais des variables aléatoires dont il faut spécifier la distribution. La distribution donnée au moment de la modélisation est dite a priori. L'intégration de l'information apportée par les données se fait par le calcul de la distribution dite a posteriori et qui n'est autre que la distribution conditionnelle (calculée par la formule du théorèmes de Bayes) aux valeurs prises par les données. Le formalisme bayésien consiste à remplacer le principe du maximum de vraisemblance dans un cadre où les paramètres recherchés des lois de distribution (espérance, variance, etc..) ne sont plus des quantités déterministes mais des variables aléatoires, dont on conjecture des lois a priori (Droesbeke et al, 2002)

La loi a posteriori : c'est la loi conditionnelle de θ sachant x. Sa densité est notée $\pi\left(\theta/x\right)$. En vertu de la formule de Bayes, on a $\varphi\left(\theta,x\right)$ est la densité du couple $\left(\theta,X\right)$.

$$\varphi\left(\theta,x\right)=f(x,\theta)\pi\left(\theta\right)$$

et $m\left(x\right)$ est la densité marginale de X.

$$m\left(x\right)=\int_{\boldsymbol{\Theta}} f(x,\theta)\pi\left(\theta\right)d\theta$$

Où

$$\pi(\theta|x)=\frac{\varphi\left(\theta,x\right)}{m\left(x\right)}=\frac{f(x,\theta)\pi(\theta)}{\int_{\boldsymbol{\Theta}} f(x,\theta)\pi(\theta)d\theta},\quad \forall x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta$$

Soit la fonction de vraisemblance des observations $\underline{x}$:

$$L(\underline{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

La distribution a posteriori de θ notée $\pi(\theta/\underline{x})$ représente la distribution conditionnelle de θ sachant les observations $\underline{x}=(x_1,...,x_n)$. $\forall x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta$,

$$\pi(\theta/\underline{x})=\frac{L(\underline{x},\theta)\pi(\theta)}{\int_{\boldsymbol{\Theta}} L(\underline{x},\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

Finalement,

$$\pi(\theta/\underline{x})=\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\boldsymbol{\Theta}}\prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)\pi(\theta)d\theta},\quad \forall x\in\mathbb{R},\theta\in\Theta \tag{4.3}$$

2.4.1 Système de bonus-malus

Depuis leur introduction il y a quelques années, les clauses de bonus-malus constituent un élément important de la tarification en assurance automobile. Le principe de ces clauses est d'une part d'offrir une diminution de prime aux assurés n'ayant déclaré aucun accident responsable, et d'autre part de pénaliser les assurés accidentés en fonction du nombre de leurs accidents. Soit un risque dont la fréquence annuelle des accidents est distribuée selon une loi de Poisson-mélange. Si pour tout j entier on désigne par N_i^j cette fréquence pour la j^{eme} année de la i^{eme} individu, on dispose de la réalisation $(n_i^1, n_i^2, ..., n_i^t)$ du variable aléatoire $(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$ correspondant à l'observation de ce risque pendant t années. La régle optimal du système Bonus-Malus donnera, connaissant l'information sur les t années $(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$ le meilleur estimateur des nombres d'accidents moyen (nbm) à la période $(t+1)$. Notons cet estimateur par $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, ..., N_i^t)$. La quantité $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, ..., N_i^t)$ donnée par :

$$\lambda_i^{t+1}(N_i^1, ..., N_i^t) = \int_0^{+\infty} \lambda \pi_\theta(\lambda / N_i^1, ..., N_i^t) d\lambda \tag{4.4}$$

est l'estimateur de Bayes défine par l'espérance mathématique à postériori de λ.

Le principe de calcul des primes le plus simple pour une compagnie d'assurances consiste à demander à l'assuré la prime pure augmentée d'un chargement de sécurité proportionnel à celle-ci : c'est le principe de l'espérance mathématique.

2.4.2 Modèle de Poisson-Gamma

Si on suppose, pour l'ensemble des individus, que le paramètre de la loi de Poisson satisfait à une loi Gamma $\gamma(r, \alpha)$, de paramètre $\omega = (r, \alpha)$; $r, \alpha > 0$ de densité :

$$\pi_\omega(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}, \quad \lambda > 0, \tag{4.5}$$

avec

$$U(\lambda) = \int_0^{+\infty} \pi_\omega(\lambda) d\lambda$$

et

$$dU(\lambda) = \pi_\omega(\lambda) d\lambda \tag{4.6}$$

avec

$$E(X) = \frac{r}{\alpha}, \qquad Var(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

où $\Gamma(r)$ étant la fonction Gamma. On reprends la formule (3.2) dans le cas d'une période de temps unitaire en remplaçant $dU(\lambda)$ par (4.6)

$$\begin{aligned}
p_k &= P(N = k) \\
&= \int_0^{+\infty} p_\lambda(k)\pi_\omega(\lambda)d\lambda \qquad , \ k \in N \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}\ d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(1+\alpha)}\lambda^{k+r-1}\alpha^r}{k!\Gamma(\alpha)}d\lambda
\end{aligned}$$

Nous avons, $\Gamma(r) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha^{r-1}e^{-\alpha}dt$, $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$, alors

$$\begin{aligned}
p_k &= \frac{\alpha^r}{k!\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1+\alpha)}\lambda^{k+r-1}d\lambda \\
&= \frac{\alpha^r}{k!\Gamma(r)}\frac{\Gamma(k+r)}{(1+\alpha)^{k+r}} \\
&= \frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)}\frac{\alpha^r}{(1+\alpha)^{k+r}}
\end{aligned}$$

avec,

$$E(N) = \frac{r}{\alpha}$$

$$Var(N) = \frac{r}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Ou obtient finalement la loi de probabilité p_k qui modélise le nombre des accidents k pour une période de temps unitaire.

$$p_k = \frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)}\frac{\alpha^r}{(1+\alpha)^{k+r}} \tag{4.7}$$

Plus précisément, le nombre de sinistres est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre λ et ce paramètre est lui-même une variable aléatoire de distribution Gamma et est répartit selon une loi de Poisson appellée aussi loi binomiale négative $Bn\left(r, \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)$.

L'estimateur de Bayes $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, ..., N_i^t)$

Soit $\underline{N} = N_i^1, ..., N_i^t$ une suite de variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramétre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$ représentant le nombre d'accident pour chaque individu i de taille t tel que t désigne le nombre d'année. En appliquant la loi binomial négative, la distribution à postériori de λ a pour densité :

$$
\begin{aligned}
\pi_\omega(\lambda/N_i^1, ..., N_i^t) &= \frac{L(\underline{N}, \lambda)\pi_\omega(\lambda)}{\displaystyle\int_{\mathbf{\Theta}} L(\underline{N}, \lambda)\pi_\omega(\lambda)d\lambda} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{t} p_\lambda(N_i^j)\pi_\omega(\lambda)}{\displaystyle\int_{\mathbf{\Theta}} \prod_{j=1}^{t} p_\lambda(N_i^j)\pi_\omega(\lambda)d\lambda} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^{\overline{N_i}}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{t} N_i!}\dfrac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}\ d\lambda}{\displaystyle\int_{\mathbf{\Theta}} e^{-\lambda t}\dfrac{\lambda^{\overline{N_i}}}{\displaystyle\prod_{i=1}^{t} N_i!}\dfrac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}\ d\lambda} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}\lambda^{\overline{N_i}}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}\ d\lambda}{\dfrac{\Gamma(r+\overline{N_i})}{(t+\alpha)^{r+\overline{N_i}}}} \\
&= \frac{(\alpha+t)^{r+\overline{N_i}}e^{-\lambda(\alpha+t)}\lambda^{r+\overline{N_i}-1}}{\Gamma(r+\overline{N_i})}
\end{aligned}
$$

où $\overline{N_i} = \sum\limits_{j=1}^{t} N_i^j$, et (4.4) devient

$$\lambda_i^{t+1}(N^1, ..., N^t) = \int\limits_0^{+\infty} \lambda \pi_\theta(\lambda / N_i^1, ..., N_i^t) d\lambda$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \lambda \frac{(\alpha + t)^{r+\overline{N_i}} e^{-\lambda(\alpha+t)} \lambda^{r+\overline{N_i}-1}}{\Gamma(r + \overline{N_i})} d\lambda$$

Aprés calcul on obtient l'estimateur de Bayes de l'esperance matématique à postériori de λ. comme suit

$$\hat{\lambda}_i^{t+1}(N^1, ..., N^t) = \frac{r + \overline{N_i}}{\alpha + t} \tag{4.8}$$

Le système bonus-malus proposé est un cas particulier de la célèbre fomule de la crédibilité "bayesienne" , qui stipule que la prime modifée par l'expérience (ici $\lambda_i^{t+1}(N^1, ..., N^t)$) devrait s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de la prime a priori $\frac{r}{\alpha}$ et des observations $\frac{\overline{N_i}}{t}$

$$\hat{\lambda}_i^{t+1}(N^1, ..., N^t) = z \frac{\overline{N_i}}{t} + (1 - z) \frac{r}{\alpha} \ , \ 0 \leq z \leq 1 \tag{4.9}$$

En effet, il suffit de poser $z = \dfrac{t}{\alpha + t}$ pour constant que la formule (4.8) se ramène à (4.9). Le coefficient de crédibité z accordé à l'expérience induviduelle est une fonction croissante du temps, il tend asymptotiquement vers 1.

Estimation des paramètres (r, α)

L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) par la méthode des moments est donné par :

$$\widetilde{r} = \frac{\overline{x}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \overline{x}} \ , \qquad \widetilde{\alpha} = \frac{\overline{x}}{\hat{\sigma}_n^2 - \overline{x}}$$

pour $(\hat{\sigma}_n^2 > \overline{x})$. Voir (Lemaire, 1985). L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance de (m.m.v) (r, α) est $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ avec $\widetilde{\alpha} = \dfrac{\widetilde{r}}{\overline{x}}$ revient à résoudre l'equation

$$\sum_{k=0}^{m} n_k \left(\frac{1}{a} + ... + \frac{1}{a + k - 1} \right) = \sum_{k=0}^{m} n_k \log \left(1 + \frac{\overline{x}}{a} \right)$$

Voir (Simonsen, 1976 et 1979, Brons et Tolver Jensen, 1989)

Estimation de la prime $\Pi_{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t)$

Ce principe de prime conduit à exiger d'un assuré ayant subi l'historique $(N^1, ...N^t)$ une prime

$$\Pi_{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t) = (1 + \alpha_0)\lambda_i^{t+1}(N^1, ..., N^t) \tag{4.10}$$

En remlplaçant (4.8) dans (4.10), on obtient finalement l'estimateur de la prime du modéle Poisson-Gamma,

$$\hat{\Pi}_{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t) = (1 + \alpha_0)\frac{r + \overline{N_i}}{\alpha + t}, \tag{4.11}$$

où α_0 est le chargement de sécurité. Pour le modèle de Poisson-Gamma, ce principe définit un système bonus-malus optimal. En effet :

1. Le système est équitable : il fait payer à chacun, à tout moment, une prime proportionnel à l'estimation de sa fréquence des sinistres, étant donné l'information recueillie pendant t années.
2. Il est équilibré financièrement.

2.4.3 Modèle de Poisson-Gamma à coefficient aléatoire

La formulation précédente (3.1) présente l'inconvénient que, conditionnellement à x, la variance de l'observation N ne peut varier indépendamment de sa moyenne. Une solution à ce problème consiste à introduire un aléa supplémentaire dans le paramètre de la loi de Poisson

$$\lambda = \exp(x\beta + \varepsilon) = \exp(x\beta)u \ , \quad \text{avec } u = \exp(\varepsilon) \tag{4.12}$$

L'aléa ε traduit diverses erreurs dans la spécification du paramètre λ telle que l'oubli de variables exogènes inobservables (indépendantes des variables x). Le modèle finalement obtenu peut être considéré comme un modèle où le coefficient est aléatoire.

Modèle Poisson Gamma : Si on suppose que u suit la loi Gamma de paramètres 1 et $\frac{1}{a}(u \rightsquigarrow \gamma(1, \frac{1}{a}))$, $(E\ (u) = a, Var(u) = a^2)$ alors la loi de N conditionnellement aux valeurs de x s'obtient en intégrant l'expression de la densité de N selon x et u par la densité de u. Cette loi n'est que la loi de Poisson Gamma (appellées aussi binomiale négative ou loi de Pascal). Nous avons donc,

$$P(N=k)=\frac{\Gamma(k+a)}{k!\Gamma(a)}\left[\frac{\exp(x\beta)}{a}\right]^{k}\left[1+\frac{\exp(x\beta)}{a}\right]^{-(k+a)} \tag{4.13}$$

avec

$$E(N)=\exp(x\beta), \qquad Var(N)=\exp(x\beta)\left[1+\frac{\exp(x\beta)}{a}\right]$$

Dans cette partie, on s'intéresse à déterminer la quantité $\hat{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1,...,N_i^t;x_i^1,...,x_i^{t+1})$ qui est en fonction du nombre d'accidents et au caractéristique de l'individu i (l'âge, le sexe, expérience, ...etc).

L'estimateur de Bayes $\lambda_i^{t+1}(N_i^1,...,N_i^t;x_i^1,...,x_i^{t+1})$

Supposons que le nombre moyen des accidents de l'individu i à la période j, est $\lambda_i^j(u_i,x_i^j)$, est une fonction des caractéristiques x_i^j et du variable u_i. Le meilleur estimateur de nombre d'accidents moyen à la période $t+1$ est donné par :

$$\lambda_i^{t+1}(N_i^1,...,N_i^t;x_i^1,...,x_i^{t+1})=\int\limits_0^{+\infty}\lambda_i^{t+1}(u_i,x_i^{t+1})\pi_\theta(\lambda_i^{t+1}/N_i^1,...,N_i^t,x_i^1,...,x_i^t)d\lambda_i^{t+1} \tag{4.14}$$

En appliquant la loi binomiale négative, l'estimateur de Bayes de nombre d'accidents moyen pour l'individu i à la période $t+1$ est :

$$\hat{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1,...,N_i^t;x_i^1,...,x_i^{t+1})=\overline{\overline{\lambda}}_i^{t+1}\left[\frac{a+\overline{N_i}}{a+\overline{\lambda}_i}\right] \tag{4.15}$$

où

$$\lambda_i^j=\exp(x_i^j\beta)u_i\equiv\overline{\overline{\lambda}}_i^j u_i,$$

$$\overline{\lambda}_i=\sum_{j=1}^{t}\overline{\overline{\lambda}}_i^j$$

et

$$\overline{N_i}=\sum_{j=1}^{t}N_i^j$$

Estimation des paramètres a, β

La loi binomiale négative a pour paramètre a et $\exp(x_i\beta)$. Sa moyenne est

$$E(N_i) = \exp(x_i\beta)$$

et sa variance est

$$Var(N_i) = \exp(x_i\beta)\left[1 + \frac{\exp(x_i\beta)}{a}\right]$$

La variance est alors une transformation croissante convexe de la moyenne. La vraisemblance associée à cette loi est concave. La difficulté consiste à calculer les dérivées analytiques de logarithme népérien d'une fonction gamma. La méthode d'estimation utilisé dans ce paragraphe est l'une des méthodes proposé par C.Gouriéroux (1989) par la méthode des moindres carrés non linéaires, les estimateurs $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{a}$ sont obtenus en deux temps, $\widetilde{\beta}$ est défini comme solution du problème de minimisation :

$$\underset{\beta}{Min}\sum_{i=1}^{K}(n_i - \exp(x_i\beta))^2,$$

a est alors estimé en utilisant la forme particulière de

$$Var(N_i) = \exp(x_i\beta) + \frac{1}{a}\exp(2x_i\beta)$$

Notons $\widetilde{u}_i = n_i - \exp(x_i\widetilde{\beta})$ le résidu d'estimation, a est estimé par le coefficient de régresssion de $\widetilde{u}_i^2 - \exp(x_i\widetilde{\beta})$ sur $\exp(2x_i\widetilde{\beta})$, c-á-d,

$$\widetilde{a} = \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{K}(\widetilde{u}_i^2 - \exp(x_i\widetilde{\beta}))\exp(2x_i\widetilde{\beta})}{\sum\limits_{i=1}^{K}\exp(4x_i\widetilde{\beta})}\right]^{-1}$$

Estimation de la prime $\Pi^{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t; x_i^1, ..., x_i^{t+1})$

La prime est donnée dans Dionne, G., Vanasse, C. (1989, 1992) par :

$$\Pi^{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t; x_i^1, ..., x_i^{t+1}) = M\lambda_i^{t+1}(N_i^1, ..., N_i^t; x_i^1, ..., x_i^{t+1})$$

En remplaçant $\lambda_i^{t+1}(N_i^1, ..., N_i^t; x_i^1, ..., x_i^{t+1})$ par son estimateur donnée dans (4.14), on obtient

$$\hat{\Pi}^{t+1}(n_i^1, ..., n_i^t; x_i^1, ..., x_i^{t+1}) = M\hat{\hat{\overline{\lambda}}}^{t+1}\left[\frac{\widetilde{a} + \overline{N_i}}{\widetilde{a} + \hat{\overline{\lambda}}_i}\right] \tag{4.16}$$

appellée prime du modéle de Poisson-Gamma à coefficient aléatoire, tels que,

$$\widehat{\overline{\overline{\lambda}}}^{t+1} = \exp(x^{t+1}\widetilde{\beta}),$$

$$\widehat{\overline{\lambda}} = \sum_{j=1}^{t} \exp(x^{j}\widetilde{\beta})$$

avec,

$$\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\widehat{\overline{\overline{\lambda}}}_i^{t+1} M = 100$$

est le coefficient de normalisation qui rend la prime égale à 100. K est le nombre des assurés.

Chapitre 3

Analyse empirique

3.1 Description de l'échantillon

L'échantillon aléatoire contient de l'information sur 1000 assurés (données obtenues par la SAA wilaya d'El oued). Pour chaque assuré, nous connaissons, ses caractéristiques telles qu'apparaissant dans le contrat d'assurance (sauf le nom) et le nombre des accidents de l'individu durant l'année 2015.

- $p(N_i^t, x_i)$ désigne la probabilité (à estimer) qu'un assuré soit impliqué dans un accident durant la période t.
- N_i^t est le nombre des accidents de l'individu i à la période t (N_i^{2015})
- x_i sont les caractéristiques de l'individu i ; $x_i = (x_{i1}, ..., x_{ik})$, avec x_i comprend 9 variables. Toutes les variables du vecteur de x_i sont des variables dichotomiques.

3.1.1 L'âge

Le groupe "âge" comprend 9 variables $(0, 1)$, une seule de ces variables peut prendre la valeur 1 pour un assuré donné.

A45-50 : c'est le groupe témoin (constante)

$$\text{A20-25} = \begin{cases} 1 \text{ si l'assuré a entre 20 et 25 ans} \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

A25-30 : entre 25 et 30 ans

A30-35 : entre 30 et 35 ans

A35-40 : entre 35 et 40 ans

A40-45 : entre 40 et 45 ans

A45-50 : entre 45 et 50 ans

A50-55 : entre 50 et 55 ans

A55-60 : entre 55 et 60 ans

A60 : 60 ans et plus

3.1.2 Le sexe

Le groupe "sexe" comprend 2 variable $(0, 1)$ avec les femmes comme témoin

SEXF : groupe témoin (constante)

$$\text{SEXM} := \begin{cases} 1 \text{ si homme} \\ 0 \text{ si femme} \end{cases}$$

3.1.3 Date de délivrance du permis et expérience de conduite

Le groupe "expérience de conduite" comprend 5 variables. Une seule de ces variables peut prendre la valeur 1 pour un assuré donné.

EXP5-7 : groupe témoin

$$\text{EXP3-5} := \begin{cases} 1 \text{ expérience entre 3 et 5 ans} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

EXP5-7 : expérience entre 5 et 7 ans.

EXP7-9 : expérience entre 7 et 9 ans

EXP9-11 : expérience entre 9 et 11 ans.

EXP11 : expérience de plus de 11 ans.

3.1.4 Code usage concerne le tarif applique et l'utilisation du véhicule.

· affaire

· fonctionnaire

· commerce

· Auto-écoleTaxi Location

Le groupe "Code usage concerne le tarif appliqué et l'utilisation du véhicule" comprend 4 variables. Une seule de ces variables peut prendre la valeur 1 pour un assuré donné.

Cod4 : groupe témoin

$$\text{Cod1}=\begin{cases} 1 \text{ affaire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cod2 : fonctionnaire

Cod3 : commerce

Cod4 : auto-école taxi location

3.1.5 Code puissance :

· de 3 à 4 C.V

· de 5 à 6 C.V

· de 7 à 10 C.V

Le groupe "Code puissance" comprend 3 variables. Une seule variable peut prendre la vleur 1 pour un assuré donné.

Cod-P2 : groupe témoin

Cod-P1= $\begin{cases} \text{1 véhicule 3 à 4 CV} \\ \text{0 sinon} \end{cases}$

Cod-P2 : véhicule 5 à 6 CV

Cod P3 : véhicule 7 à 10 CV

3.1.6 Numéro d'immatriculation de la voiture (l'âge de la voiture).

Le groupe"âge du véhicule" comprend 9 variables. Une seule variable peut prendre la valeur 1 pour un assuré donné.

AGE-V7-8 : groupe témoin.

AGE-V3-4= $\begin{cases} \text{1si le véhicule a entre 3 et 4 ans} \\ \text{0 sinon} \end{cases}$

AGE-V4-5 : entre 4 et 5 ans

AGE-V5-6 : entre 5 et 6 ans

AGE-V6-7 : entre 6 et 7 ans.

AGE-V7-8 : entre 7 et 8 ans.

AGE-V8-9 : entre 8 et 9 ans.

AGE-V9-10 : entre 9 et 10 ans

AGE-V10-11 : entre 10 et 11 ans

AGE-V11 : 11 ans et plus.

3.1.7 Code catégorie professionnelle.

· fonctionnaire

· sansprofession+retraité

· employeur secteur privé ou employé

Le groupe "Code catégorie professionnelle" comprend 3 variables. Une seule variable peut prendre la valeur 1 pour un assuré donné.

$$\text{Cod-CP1}=\begin{cases} 1 \text{ fonctionnaire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cod-CP2 : sans profession + retraité

Cod-CP3 : employeur secteur privé.

3.1.8 Genre de voiture (commerciale ou touristique).

· touristique,

· commerciale

Le groupe "Genre de voiture" comprend 2 variables : touristique, commerciale

GEN-V=commerciale : groupe témoin.

$$\text{GEN-V}=\begin{cases} 1 \text{ commerciale} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3.2 Analyse des données

3.2.1 Estimation des paramètres

Nous présontons dans ce paragraphe les estimateurs des paramétres concernant chaque modéle, pour ensuite en servir pour effectuer des tests d'ajustement de khi-deux concernant nos trois modéles.

Modéle Poisson

La méthode des moments nous conduise à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée, en ajustant la distribution observée par une distribution de Poisson le paramètre λ est estimé par $\widetilde{\lambda} = 0.1011$.

Modèle Poisson-Gamma

L'estimateur $(\widetilde{r}, \widetilde{\alpha})$ de (r, α) donné par la méthode des moments est $\widetilde{r} = 1.6049$, $\widetilde{\alpha} = 15.8778$ dans le cas du modéle Poisson-Gamma.

Modèle Poisson-Gamma à coefficients aléatoires

Pour les valeurs du paramétre β, L'estimation de paramètre a est : $\widetilde{a} = 1.695$ et l'estimation de paramètre β est donnèe par le tableau suivant :

Variable	β	Variable	β	Variable	β
SEXM	0.6203	EXP3-5	0.8132	Cod-P2	0.8019
A20-25	0.3120	EXP7-9	-0.1312	AGE-V3-4	-0.0420
A25-30	0.4011	EXP9-11	-0.4201	AGE-V4-5	-0.1387
A30-35	-0.1260	EXP11	-0.3304	AGE-V5-6	0.0182
A35-40	-0.3700	Cod1	0.1067	AGE-V6-7	0.2704
A40-45	-0.5703	Cod2	-0.5091	AGE-V7-8	0.3097
A50-55	-0.6800	Cod3	0.2214		
A55	-0.7075	Cod-P1	1.4120472		

TAB. 2.1 – Estimation du Bita par la méthode des moindres carrées non linéaires dans le cas de poisson-gamma a coèfficients alèatoires

Notant que : SEXM (sexe masculin), A (age), EXP (expérience), Cod (code usage), Cod-P (puissance) et AGE-V (age de véhicule).

Après les tests effectuent sur les paramètres ci-dessus, les groupes des classes retenues sont : Sexe, Agé : A20-25 ; A25-40 ; A40, Expérience : EXP3-5 ; EXP5 (plus de 5 ans).

Variable	SEXM	A20-25	A25-40	EXP3-5
β	0.5302	0.215	-0.7075	0.8132

TAB. 2.2 – Ratio test-binomiale négative

3.2.2 Ajustement des fréquence obsevées par des fréquences thériques

Le tableau (2.3) contient des fréquences observées qui correspondent aux 1000 assurés deja en parlé et des fréquences théoriques calculées à partir du modéle Poisson, modéle Poisson-Gamma, et modéle Poisson-Gamma à coéfficients aléatoires.

Nombre d'accident	Fréq obs	Poisson Fréq thé	P-Gamma Fréq thé	P-G coef aléa Fréq thé
0	810	903.84	915.3	828
1	139	86.38	76.6	106.3
2	35	6.62	5.6	46.1
3	11	2.15	2	15.5
≥ 4	5	1.01	0.5	4.1
Total	1000	1000	1000	1000
		$\chi_c^2 = 133.64$	$\chi_c^2 = 2.21$	$\chi_c^2 = 1.42$
		$\chi_{2,0.95}^2 = 5.99$	$\chi_{1,0.95}^2 = 3.84$	$\chi_{1,0.95}^2 = 3.84$

TAB. 2.3 – Fréquences observées et théoriques de Poisson, Poisson-Gamma et Poisson-Gamma à coefficient aléatoire.

Nous obtenons des fréquences théoriques de Poisson très éloignés des fréquences observées. Le test d'ajustement de χ^2

$$\chi_c^2 = 133.64 > \chi_{2;0.95}^2 = 5.99$$

confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne resiste pas à l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi de Poisson-Gamma est excellent, car

$$\chi^2_c = 2.21 < \chi^2_{1,0.95} = 3.84,$$

Les fréquences théoriques sont très proche des fréquences observées. L'ajustement de la distribution observée par une distribution Poisson-Gamma à coefficient aléatoire est meilleur ca

$$\chi^2_c = 1.42 < \chi^2_{1,0.95} = 3.84.$$

3.3 Prime pure a posteriori de Bayes

3.3.1 Modèle de Poisson-Gamma

La prime pour l'année $t+1$ est proportionnelle à l'espérance de Bayes de λ :

$$\hat{\Pi}_i^{t+1}(n^1, ..., n^t) = 100 \left[\frac{\widetilde{r} + \overline{N}}{\widetilde{\alpha} + t} \right]$$

où la prime de base est égale à 100

$t \setminus \overline{N}$	0	1	2	3	4
0	100				
1	78.55	142.45	217.63	234.19	270.25
2	74.25	100.00	129.67	165.32	192.17
3	71.35	82.20	109.82	137.18	160.00
4	60.60	70.45	100.97	129.14	134.12

TAB. 3.4 – Calcul de la prime-modèle de Poisson-Gamma

3.3.2 Modèle de Poisson-Gamma à coefficient aléatoire

La prime donnée par (Dionne, G., Vanasse, C. (1989,1992) est :

$$\hat{\Pi}_i^{t+1}(n^1, ..., n^t; x^1, ..., x^{t+1}) = M\widehat{\overline{\overline{\lambda}}}^{t+1}\left[\frac{\widetilde{a} + \overline{N}}{\widetilde{a} + \widehat{\overline{\lambda}}}\right]$$

où,

$$\widehat{\overline{\overline{\lambda}}}^{t+1} = \exp(x^{t+1}\widetilde{\beta}),$$

$$\widehat{\overline{\lambda}} = \sum_{j=1}^{t} \exp(x^j \widetilde{\beta}),$$

et la valeur de

$$M = \frac{100.K}{\sum\limits_{i=1}^{K} \widehat{\overline{\overline{\lambda}}}_i^{t+1}}$$

$t \setminus \overline{N}$	0	1	2	3	4
0	100				
1	80.50	140.35	200.00	235.12	260.15
2	77.20	100.13	130.67	155.12	182.17
3	71.50	80.19	107.82	133.18	150.00
4	64.60	71.80	99.97	119.14	135.12

TAB. 3.5 – Calcul de la prime modèle de Poisson-Gamma à coefficient aléatoire

3.3.3 Comparaison des primes

$t \setminus \overline{N}$	0	1	2	3	4
0	129.14				
1	120.35	141.70	176.17	188.88	193.34
2	110.87	123.90	132.32	176.66	180.00
3	102.18	111.12	127.12	150.12	170.14
4	97.17	105.89	118.96	142.37	162.18

TAB. 3.6 – Modèle de Poisson à coefficient aléatoire(SEXM,A20-25,EXP3-5)

$t \setminus \overline{N}$	0	1	2	3	4
0	121.14				
1	119.17	130.00	167.12	175.34	184.18
2	110.12	120.80	129.00	140.00	160.00
3	97.30	100.00	117.14	131.81	147.12
4	88.17	93.31	100.02	115.12	131.00

TAB. 3.7 – Modèle de Poisson à coefficient aléatoire(SEXM, A25-40, EXP3-5)

Dans le tableau (3.6) la prime estimée, pour un homme entre 20 et 25 ans, ayant pour expérience de conduite entre 3 et 5,(pour $t = 1, n = 2$) est 176.17. Dans le tableau (3.7) la prime estimé, pour un homme entre 25 et 40 ans, ayant pour expérience de conduite entre 3 et 5, (pour $t = 1, n = 2$) est 167.12. Ceci explique l'effet de changement d'âge sur la prime dans le tableau (3.6).

Conclusion

Les principales conclusions qui se dégagent de notre analyse sont les suivantes :

1. Nos résultats montrent, pour le modèle de Poisson-Gamma, que la prime ne dépend que du nombre total d'accident sur les t années, et non de leur séquence.
2. Le nombre d'observations étant très important, le test du χ^2 rejette l'ajustement par la loi de Poisson.
3. L'adéquation est donc globalement meilleur pour la loi de Poisson-Gamma, car le système bonus-malus pour le modèle Binomial Négatif est optimal c'est-à-dire :
   (a) Il est équitable : il fait payer à chacun à tout moment une prime proportionnelle à sa fréquence propre estimée

   $$\frac{r+\overline{n}}{\alpha+t} = z\frac{\overline{n}}{t} + (1-z)\frac{r}{\alpha}, \qquad 0 \leq z = \frac{t}{\alpha+t} \leq 1,$$

   il se dégage que l'application du principe de crédibilité au calcul des primes d'assurances de responsabilité civile apporte les mêmes avantages que le bonus-malus (pour l'assuré comme l'assureur). En effet, cette tarification possèdes les critères de répondre au désir de justice des assurés, converger vers la prime individuelle et prévenir les accidents.

   (b) Financièrement équilibre : la moyenne des fréquences individuelles des sinistres est égale à la moyenne générale $\frac{\tilde{r}}{\tilde{\alpha}}$. En d'autres termes, le montant perçu par la compagnie est stationnaire.

Plusieurs extensions à cette étude sont possibles. Une première consisterait à généraliser le modèle Poisson-Gamma par le modèle Poisson-Gamma généralisé. Une deuxième extension serait l'étude de la tarification a posteriori dont les paramètres de la loi a priori sont en fonction du temps (c'est-à-dire l'estimation des paramètres pour chaque période).

Bibliographie

[1] LEHMANN, E. L. (1983). Theory of Point Estimation. Wiley, New York.

[2] LEMAIRE, J. (1995). Bonus-Malus Systems In Automobile Insurance. Kluwer Academic Publisher, Boston.

[3] LEMAIRE, J. (1979). How To Define A Bonus-Malus System With An Exponential Utility Function.

[4] LEMAIRE, J. (1985). Automobile Insurance : Actuarials Models. Kluwer Nijhoff Publishing.

[5] DENUIT, M., CHARPENTIER, A. (2004). Mathématiques de L'assurance Non-Vie. Tome1 : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque. Ed. Economica.

[6] DENUIT, M., CHARPENTIER, A. (2005). Mathématiques de L'assurance Non-Vie. Tome2 : Tarification et Provisionnement. Ed. Economica.

[7] PARTRAT, C., BESSON, J. C. (2005). Assurance Non-Vie : Modélisation, Simulation. Ed. Economica.

[8] BESSON, J.L, PARTRAT, C (1992). Trend et systèmes de bonus-malus.

[9] BÜHLMANN, H., GISLER, A. (2005). A Course in Credibility Theory and its Applications. Springer-Verlag, Berlin.

[10] DIONNE, G., VANASSE, C. (1989). A Generalization of Actuarial Automobile Insurance Rating Models : The Negative Binomial Distribution With a Regression component.

[11] GOMEZ-DENIZ, E., VAZQUEZ-POLO, F. O., PEREZ, J. M. (2006). A Note On Computing Bonus-Malus Insurance Premiums Using a Hierarchical Bayesian Framework, Sociedad de Estadistica e Investigacion Operativa Test.

[12] GOURIEROUX C. (1999) : Statistique de l'assurance. Economica.

[13] MORILLO, I., BERMUDEZ, L. (1999). An Optimal Bonus-Malus System. Papers presented at the third congress on Insurance : Mathematics and Economics.

[14] RICHAUDEAU, D (1997). Modélisation du risque d'accident automobile.

[15] ROHATGI, V. K. (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics ; John Wiley, New York.

[16] WALHIN, J. F., PARIS, J. (1999). Using Mixed Poisson Distributions in Connection with Bonus-Malus Systems. Astin Bulletin.

[17] WILLMONT, G. (1987). The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial. Scand. Actuarial J.

[18] WILLMONT, G. (1986). Mixed Compound Poisson Distributions. ASTIN Bulletin.

[19] Gouriéroux C.(1984) : Econométrie des variables qualitatives : ED. Economica, Paris

[20] Griselda DEELSTRA, Guillaume PLANTIN. (2006). Théorie du risque et réassurance.

[21] Daniel Justens, Laurence Hulin. (2003). Théories actuaruelles.

[22] PIERRE PETAUTON. (2000). Théorie de l'assurance dommages. Paris.

[23] Goovaert, M. J, De Vylder, F. A not on iterative premium calculation Principles.

[24] Wang, S. (1996). Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density, Astin Bulletin, 26, 71-92.