Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Kasdi Merbah Ouargla

Faculté Des Mathématiques Et Des Sciences De La Matiére

Département des Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités & Statistique

Présenté par :

Abdelmalik KEDDI

Thème

Existence de solutions globales pour l'équation d'onde stochastique non linéaire

Soutenu publiquement le : 01/06/2016

Devant le jury composé de :

Mr. Abdellah BENSAYEH	**M.C.B. UKMO**	**Président**
Mlle. Fatima MEDDI	**M.C.B. UKMO**	**Examinateur**
Mr. Said ZIBAR	**M.A.A. UKMO**	**Rapporteur**

Dédicace

Ce travail modeste est dédié :

Á ma chère mère ;

Á la mémoire de mon père ;

Á mes frères et mes soeurs tout à son nom ;

Á tous mes proches de la famille Keddi ;

Á tous mes chers amis et mes collègues.

Abdelmalik

Notations

$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathcal{D}$	Ouvert borné de $\mathbb{R}^d$
$\partial\mathcal{D}$	Frontière de $\mathcal{D}$
x	$= (x_1, x_2, ..., x_d)$ Elément de $\mathcal{D}$
Ω	L'espace fondamental
ω	Réalisation de Ω
$\mathbb{P}$	Mesure de probabilité
$\mathcal{F}$	Tribu sur Ω
$\mathcal{F}_t$	Sous tribu croissante de $\mathcal{F}$
$\mathcal{B}(A)$	La tribu borélienne de l'ensemble X
$\mathbb{E}$	Espérence mathématique
$\{B_i(t)\}$	Suite des mouvement brownien standard indépendant
W	Mouvement brownien de dimension infinie
$\partial_t W$	Bruit blanc
$M(t,x)$	Martingale définie par $M(t,x) = \int_0^t \sigma(x,s)dW(s,x)$
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace probabilisé
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$	Espace probabilisé filtré
Ω_1, Ω_2	sous ensembles de Ω
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$
Δu	Laplacien de u défini par $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
Q	Opérateur de covariance
TrQ	trace de Q
λ_k	Valeurs propres de Q
$\mathcal{N}_{(t-s)Q}$	Loi normale centré de variance $(t-s)Q$
$\mathcal{L}(X(t))$	Loi de $X(t)$

$\tau, \tau_N, \tau_\infty$	Temps d'arrêt
$\underline{\lim}$	limit inférieure
$\mathcal{P}_m\varphi$	La projection orthogonal dans $L^2(\mathcal{D})$ sur le sous epace engendré par $\{e_1, ..., e_m\}$ définie par $\mathcal{P}_m\varphi = \sum_{j=1}^{m}(\varphi, e_j)e_j$
$\mathbf{B}_r(z)$	La boule férmé de centre z et de rayon r
$L_1^+(U)$	L'ensemble des opérateurs nucléaire
L_2^0	L'ensemble des opérateurs de Hilbert-Shmidt
$L^p(\mathcal{D})$	Espaces de Lebesgue standards sur $\mathcal{D}$ d'exposant p
$L^\infty(\mathcal{D})$	Espaces de Lebesgue standards sur $\mathcal{D}$ d'exposant ∞
$H^1(\mathcal{D})$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 .
$H_0^1(\mathcal{D})$	Adhérence de $\mathfrak{D}(\mathcal{D})$ dans $H^1(\mathcal{D})$
$H^{-1}(\mathcal{D})$	Dual topologique de $H_0^1(\mathcal{D})$
$H^2(\mathcal{D})$	L'espace de Sobolev d'ordre 2 .
$C([0,T], \mathcal{X})$	Ensemble des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathcal{X}$
$L^p(0,T,\mathcal{X})$	Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles
$L^\infty(0,T,\mathcal{X})$	Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles
$L^2(\Omega, \mathcal{X})$	$= \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} \text{ mesurable; } \mathbb{E}\left(\|u\|_{\mathcal{X}}^2\right) < \infty\right\}$
$g_\lambda(u_t), f_N(u)$	Approximations des fonctions $g(u_t), f(u)$ respectivement
$\mathcal{E}(u(t))$	Fonction d'énergie
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice de l'ensemble A
C, C_N	Constantes génériques strictement positives,
p.p	presque partout
p.s	presque sur

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on étudie le problème des conditions aux limites et initiales pour l'équation des ondes stochastique avec les termes d'amortissement et de source non linéaires. Pour le cas déterministe sur l'équation d'onde, de nombreux auteurs ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a\,|u_t|^{q-2}\,u_t = b\,|u|^{p-2}\,u & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{1}$$

Où $a, b \geq 0$ et $\mathcal{D}$ est une ouvert bornée de $\mathbb{R}^d$. Si $a, b > 0$ **Levine et al** ont étudié l'amortissement linéaire (**i.e.**, q=2) et ont prouvé que la solution explose en temps fini ; **Georgiev and Todorova** [15] ont examiné l'éxistence et l'unicité dans le cas les termes d'amortissement et de source non linéaires ; ils ont montré que la solution explose en un temps fini si $p > q > 2$ et la solution est globale si $q > p > 2$.

En effet, la force motrice peut être affectée par l'environnement de façon aléatoire. Compte tenu de cela, nous considérons les équations d'ondes stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q-2}\,u_t = |u|^{p-2}\,u + \varepsilon\sigma(u, \nabla u, x, t)\partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2}$$

où $q \geq 2$, $p > 2$, ε constante positive mesure l'intensité du bruit blanc $\partial_t W(t,x)$, et $W(t,x)$ est processus de Wiener Hilbertien, qui sera définie précisément dans chapitre 1, et les conditions initiales $u_0(x)$, $u_1(x)$ sont des fonctions données.

L'étude des équations d'ondes non linéaires stochastiques avec des termes d'amortissement non linéaire a été initié par **Pardoux** [13] en **1975** . Il y a aussi des résultats récents par **Kim** [1], **Barbu et al** [14], et **Gao, H et al**[3].

Pour établir l'existence locale et l'unicité de solution pour (2), nous allons utiliser la méthode d'approximation de **Faedo-Galerkin**, qui consiste à construire des approximations de la solution. On obtient ensuite des estimations à priori nécessaires pour garantir la convergence de ces approximations. Pour le terme stochastique, lorsque σ dépendent de u et ∇u, nous avons besoin d'obtenir les estimations d'énergie moyennes, mais ce technique est très difficile. Ceci est également difficile pour trouver l'unicité. Donc, pour facilité le travail nous considérons $\sigma(u, \nabla u, x, t) = \sigma(x, t, \omega)$ de sorte que l'intégrale stochastique peut être bien définie comme une martingale continue.

Donnons maintenant un bref résumé du contenu de ce document.

- **Dans le premier chapitre** : est consacré aux définitions et aux rappels de quelque notions de base d'analyse fonctionnelle et calcul stochastique.
- **Dans le deuxième chapitre** : on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème (2) par la méthode d'approximation de **Faedo-Galerkin** sous certaines conditions, sur les données initiales, les exposantes des termes d'amortissement et de source p, q et le terme stochastique $\sigma(x,t)\partial_t W(t,x)$.
- **Dans le troisième chapitre** : nous allons alors montrer l'existence globale de la solution de problème (2), sous condition $q \geq p$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Sommaire

1.1 Quelques éléments d'analyse stochastique

1.1.1 Processus stochastique

Un **processus stochastique** est un phénomène qui évolue dans le temps d'une manière aléatoire. La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénomène, où en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon. La météo ; la population d'une ville ; le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de **processus stochastiques**. Ce dernier fut étudié pour la première fois par le botaniste **Robert Brown** en **1827** et reçu le nom de **mouvement brownien**. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des probabilités. En **1920**, **N. Wiener** donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables (à aucun moment la vitesse ne peut être définie car les changements de direction sont trop rapides). Dans les années quarantes, **K. Itô** développa un calcul différentiel spécifique au **mouvement brownien** : le calcul stochastique.

Processus stochastique

Définition 1.1 (Processus stochastique). Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.

Remarques 1.1.

- Un processus dépend de deux paramétres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.
- Pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une **variable aléatoire** sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée **trajectoire du processus**

Définitions 1.1. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus stochastique.

1. Pour $0 \leq s \leq t$, les variables aléatoires $X_t - X_s$ sont appelées des **accroissements du processus** $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
2. Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est à **accroissements indépendants** si pour toute suite $0 \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
3. Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est à **accroissements stationnaires** si la distribution de la variable $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t. En d'autre termes pour tout $t \geq 0, h \geq 0$ la loi de $X_{t+h} - X_t$ est égale à la loi de $X_h - X_0$.

Définition 1.2 (Processus continue). On dit que le processus X est **continue** si $\forall \omega \in \Omega$ l'application : $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue. i.e : les trajectoires de X sont continues.

Définition 1.3. Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques.

1. On dit que Y est une **modification** de X si :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \text{ p.s.}$$

2. On dit que les processus X et Y sont **indistinguables** si :

$$\mathbb{P}(\forall t \geq 0, X_t = Y_t) = 1 \text{ p.s.}$$

Proposition 1.1. *Soient $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques,*

1. *X et Y sont indistinguables $\Longrightarrow$ X est une modification de Y.*
2. *Si X et Y sont continues alors :*

$$X \text{ et } Y \text{ sont indistinguables} \Longleftrightarrow X \text{ est une modification de } Y.$$

Filtration

Définition 1.4 (Filtration). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est un famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. C'est-à-dire que, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$.

Remarques 1.2.

1. Le tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t.
2. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.
3. L'exemple canonique de filtration est le suivant : si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de est $(X_t)_{t\geq 0}$ est :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), t \geq 0,$$

le plus petits tribu par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Processus progressivement mesurable

Définition 1.5 (Processus progressivement mesurable). Un processus X est progressivement mesurable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathcal{X}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Processus adapté

Définition 1.6 (Processus adapté). On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Remarque 1.1. Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Temps d'arrêt

Définition 1.7 (Temps d'arrêt). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ espace probabilisé filtré. une application $\mathcal{T} : \Omega \longrightarrow \mathbb{T}$; $\Big(\mathbb{T} = [0, T], ou\mathbb{T} = \mathbb{R}^+\Big)$ est appelé temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{T}; \{\mathcal{T} \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \mathcal{T}(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{1.1}$$

Martingales à temps continu

Définition 1.8 (Martingale). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrables, (c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{E}(|M_t|) < +\infty$ pour tout t) est martingale si, pour tout $s \leq t, \mathbf{E}(M_t \backslash \mathcal{F}_s) = M_s$.

Remarque 1.2. Une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ vérifie $\forall t \geq 0, \mathbf{E}(M_t) = \mathbf{E}(M_0)$.

1.1.2 Mouvement Brownien standard

Définition 1.9. Un processus aléatoire $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles est un processus de Wiener ou mouvement Brownien standard réel si :

i) $B_0 = 0$ p.s,

ii) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus à valeurs réelles à accroissements indépendants et stationnaires.

iii) la variable B_t suit la loi normale de moyenne nulle et de variance t, **i.e :** $B_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t \geq 0$,

iv) (B_t) est à trajectoire continues p.s.

Proposition 1.2. *Un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne $m(t) = 0$ et covariance*

$$K(t, s) = t \wedge s = \min(t, s). \tag{1.2}$$

1.1.3 Processus de Wiener sur un espace de Hilbert

Définition 1.10. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, et U un espace de Hilbert séparable. Soit $Q \in L_1^+(U)$ symétrique, le processus aléatoire $W(t), t \geq 0$, est dit processus de Wiener de covariance Q, si et seulement si

1. $W(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-p.s. et W est à trajectoire continues $\mathbb{P}$-p.s ;
2. pour $0 \leq s < t$, $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathcal{N}_{(t-s)Q}$;
3. pour $0 \leq s < t$, les accroissements indépendants avec la filtration $\mathcal{F}_s$.

et

$$\mathbb{E}\,(W(t),a)_U\,(W(s),b)_U = (t\wedge s)\,(Qa,b)_U \;\; a,b\in U.$$

Proposition 1.3. *Soit U un espace de Hilbert séparable et soit $Q \in L_1^+(U)$ symetrique tel que $TrQ < \infty$. Alors, il existe un système orthonormé complet e_k dans U et une suite bornée de nombres réels non négatifs λ_k tels que*

$$Qe_k = \lambda_k e_k \qquad k = 1, 2, ... \tag{1.3}$$

Proposition 1.4. *Soit W un processus de Wiener de covariance Q tele que $TrQ < \infty$, alors*

$$W(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k(t) e_k \tag{1.4}$$

oú

$$B_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle W(t), e_k\rangle_U, \qquad k = 1, 2, ...$$

sont des mouvements browniens indépendants à valeurs réelles et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k(t) e_k$ est convergente dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Preuve (Voir [5]p82)

1.1.4 L'intégrale stochastique par rapport à processus de Wiener Hilbertienne

Soit $\{W(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener de Wiener de covariance Q dans U. Posons $U_0 = Q^{1/2}(U)$, U_0 est un espace de Hilbert séparable muni de produit scalaire $\langle u,v\rangle_{U_0} = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v\rangle_U$. Nous voulons introduire l'intégrale stochastique

$$\int_0^t \Psi(s) dW(s), \qquad t \in [0,T]$$

où $\Psi(s)$ est un processus à valeurs dans $L_2(U_0, H)$, l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de U_0 dans l'espace de Hilbert H. Si $\Psi \in L_2^0 = L_2(U_0, H)$, alors

$$\begin{aligned} \|\Psi\|^2_{L_2(U_0,H)} &= \sum_{h,k=1}^{\infty} |(\Psi g_h, f_k)|^2 = \sum_{h,k=1}^{\infty} \lambda_h \, |(\Psi e_h, f_K)|^2 \\ &= \|\Psi Q^{1/2}\|^2_{L_2(U,H)} = Tr\,(\Psi Q \Psi^*) \end{aligned}$$

où $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, avec $g_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$, $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, et $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, sont des bases orthonormale complete dans U_0, U et H respectivement.

Corollaire 1.5. *Si l'espace $U = H$, alors*

$$\|\Psi\|^2_{L_2(U_0,H)} = Tr\left(\Psi Q \Psi^*\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\Psi Q e_j, \Psi e_j\right) \tag{1.5}$$

Définition 1.11. Soit $\{t_k\}_{k=1}^{n}$ un partition sur $[0,T]$ tel que $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Si

$$\left(\mathbb{E}\int_0^t \|\Psi(s)\|_{L_2^0} ds\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E}\int_0^t Tr\left(\Psi(s)Q\Psi^*(s)\right) ds\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

On définit l'intégrale stochastique par rapport à le processus de Wiener de covariance Q comme

$$\int_0^t \Psi(s)dW(s) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Psi(t_k)\left(W(t_{k+1}\wedge t) - W(t_k \wedge t)\right),$$

Où la suite $\Psi(t_k)$ est converge dans L_2^0, et le processus de variation quadratique est donnée par :

$$\left\langle\left\langle \int_0^t \Psi(s)dW(s)\right\rangle\right\rangle = \int_0^t Tr\left(\Psi(s)Q\Psi(s)^*\right)$$

1.1.5 Formule d'Ito

L'égalité dite formule d'Ito est un des outils les plus fréquemment utilisés pour l'étude des équations stochastiques et nous allons nous aussi l'utiliser à plusieurs reprises dans la suite. Pour cette raison il nous semble utile de la citer ici. Nous la citons dans la forme formulée pour un processus stochastique ayant la forme

$$Z(t) = Z_0 + \int_0^t \psi(s)ds + \int_0^t \Psi(s)dW(s), \quad t \in [0,T], \tag{1.6}$$

Ou sous forme différenteille :

$$dZ(t) = \psi(t)dt + \Psi(t)dW(t),\ t \in [0,T] \quad \text{et } Z(0) = Z_0. \tag{1.7}$$

On dit que la processus $Z(t)$ est bien définie si :

1. $\{W(t), t \geq 0\}$ est un processus de Wiener de covariance Q à valeurs dans U,
2. $\{\Psi(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ est un processus à valeurs dans $L_2(U_0,H)$ satisfaisant

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \|\Psi(s)\|^2_{L_2(U_0,H)} ds < \infty\right) = 1,$$

3. $\{\Psi(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans H,
4. Z_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans H.

Théorème 1.6. *Soit $F : [0,T] \times H \to \mathbb{R}$ est un fonction uniformément continue sur sous ensemble bornée de $[0,T] \times H$ ainsi que ses dérivées partielles F_t, F_x, F_{xx}.. La formule d'Ito pour le processus $F(t, Z(t)), 0 \leq t \leq T$ vérifie :*

$$\begin{aligned} F\left(t, Z(t)\right) \quad &= F\left(0, Z(0)\right) + \int_0^t \langle F_x(s, Z(s)), \Psi(s) dW(s) \rangle_H \\ &+ \int_0^t \{F_t(s, Z(s)) + \langle F_x(s, Z(s)), \psi(s) \rangle_H \\ &+ \frac{1}{2} Tr \left[\left(\Psi(s) Q^{1/2} \right)^* F_{xx}(s, Z(s)) \left(\Psi(s) Q^{1/2} \right) \right] \Big\} ds. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour la démonstration du théorème, voir par exemple réf [5]

1.1.6 Inégalité de Burkholder Davis Gundy

Théorème 1.7. *Soit $\{\Psi(t), 0 \leq t \leq T\}$ un processus à valeurs dans $L_2(U_0, H)$ satisfaisant*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t \|\Psi(s)\|^2_{L_2(U_0,H)} ds < \infty \right) = 1,$$

Alors pour tout $p > 0$, il existe $c_p > 0$ telle que $\forall\, T > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \Psi(u) dW(u) \right|^p \right) \leq c_p \mathbb{E}\left[\int_0^T \|\Psi(u)\|^2_{L_2^0} du \right]^{p/2}. \tag{1.9}$$

Preuve (Voir [5] p114)

1.1.7 L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{X})$

Définition 1.12. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ espace probabilisé filtré, et $\mathcal{X}$ un espace de Banach. On définit l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{X})$ $1 \leq p < \infty$ par

$$L^p(\Omega, \mathcal{X}) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} \text{ mesurable; } \int_\Omega \|u\|^p_{\mathcal{X}} d\mathbb{P} < \infty \right\}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

On peut écrire aussi

$$L^p(\Omega, \mathcal{X}) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} \text{ mesurable; } \mathbb{E}\left(\|u\|^p_{\mathcal{X}}\right) < \infty\}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{X})$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega,\mathcal{X})} = \left(\int_\Omega \|u\|^p_{\mathcal{X}} d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mathbb{E}\left(\|u\|^p_{\mathcal{X}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

1.1.8 Le lemme de Borel-Cantelli

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements on note

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

Lemme 1.8. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements.*

1. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors*

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$$

ou de manière équivalente,

$$\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} \text{ est fini } \mathbb{P}\text{-p.s}$$

2. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, et si les événements A_n sont indépendants alors*

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim} A_n\right) = 1$$

ou de manière équivalente,

$$\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} \text{ est infini } \mathbb{P}\text{-p.s}$$

1.1.9 Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Théorème 1.9. *Soit X variable aléatoire réel positive intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Alors*

$$\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(X). \tag{1.11}$$

Preuve Pour tout $\omega, X(\omega) \geq \varepsilon \mathbf{1}_{X(\omega)\geq\varepsilon}$ donc, par par la propriété de croissance de l'espérance on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &\geq \mathbb{E}(\varepsilon \mathbf{1}_{X\geq\varepsilon}) \\ &= \varepsilon\mathbb{P}(X \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

□

1.2 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Topologie faible et la topologie faible*

Topologie faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique , et soit $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f\in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.13. La topologie faible sur E qui notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$.

Définition 1.14. La Suite (x_n) tend vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si : $\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$ pour toute $f \in E'$.

Topologie faible*

On va définir maintenant une autre topologie sur E' : la topologie faible* que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$ on considère l'application :

$$\begin{array}{lcl} \varphi_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \end{array}$$

Définition 1.15. La topologie faible* désignée aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.

Proposition 1.10. *Soit E un espace de Banach séparable et soit $\{f_n\}$ une suite bornée dans $E^{'}$. Alors, il existe une sous-suite extraite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$. C'est à dire :*

$$\langle f_{n_k}, x\rangle \to \langle f, x\rangle$$

Proposition 1.11. *Soit $\{f_n\}$ suite de $E^{'}$. Ona si $\{f_n\}$ converge faiblement vers f pour $\sigma(E^{'}, E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \underline{\lim} \|f_n\|$*

Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique de E dans E'' définie par :

$$J_x(f) = f(x), \text{ pour tout } x \in E, f \in E'.$$

Définition 1.16. L'espace E est dit réflexif, si $J(E) = E''$.

Théorème 1.12. *Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Preuve (Voir H. Brezis, p50.)

Espaces séparables

Définition 1.17. Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.

Théorème 1.13. *Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite faiblement* convergente.*

Preuve (Voir H. Brezis, p50.)

Lemme 1.14. *Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs, et $\{x_n\}$ une suite de nombres réels tels que $\lambda_n \to 0$ et $x_n \to x$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} g_{\lambda_n}(x_n) = g(x).$$

Preuve (Voir [1])

Lemme 1.15. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ $\{\varphi_k\}$, $\varphi \in L^q(\mathcal{D})$, $1 < q < \infty$. Si*

$$\|\varphi_k\|_{L^q(\mathcal{D})} \leq C \quad \text{et} \quad \varphi_k \to \varphi \quad p.p \;\; x \in \mathcal{D},$$

Où C est une constante, alors $\varphi_k \to \varphi$ faiblement dans $L^q(\mathcal{D})$.

Preuve (Voir le lemme 1.3 dans[4])

1.2.2 Espaces de Sobolev

Avant de parler sur les espaces de Sobolev on va définir l'espaces de lebesgue $L^p\,(\mathcal{D})$.

L'espaces $L^p\,(\mathcal{D})$.

Définition 1.18. Soit p un nombre réel positive tel que $1 \leq p \leq \infty$.

1. $1 \leq p < \infty$.

$$L^p(\mathcal{D}) = \left\{ u : \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R},\; u\,\text{mesurable et} \int_{\mathcal{D}} \mid u(x) \mid^p dx < +\infty \right\}. \tag{1.12}$$

Est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{D})} = \left(\int_{\mathcal{D}} \mid u(x) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. $p = 2$

$$L^2(\mathcal{D}) = \left\{u : \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R},\ u \, \text{mesurable et} \int_{\mathcal{D}} \mid u(x) \mid^2 dx < +\infty\right\}. \tag{1.13}$$

Est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\mathcal{D})} = \int_{\mathcal{D}} u(x)v(x)dx.$$

3. $p = +\infty$

$$L^{\infty}(\mathcal{D}) = \left\{ \begin{array}{c} u : \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R},\ u \, \text{mesurable et il existe une} \\ \text{constante C tell que } |u(x)| < C \end{array} \right\}. \tag{1.14}$$

Est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf \{c \geq 0, \mid u(x) \mid \leq c,\ \text{p.p sur}\, \mathcal{D}\}$$

L'espace de Sopolev $W^{1,p}$

Définition 1.19. l'espace de Sopolev $W^{1,p}$ est définie par

$$W^{1,p}(\mathcal{D}) = \{u \in L^p(\mathcal{D}); \quad \nabla u \in L^p(\mathcal{D})\} \tag{1.15}$$

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p},$$

ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}} \quad (\text{si } 1 \leq p < \infty)$$

.

L'espace de Sopolev $H^1(\mathcal{D})$

Définition 1.20. Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^d$. On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathcal{D}) = \left\{u \in L^2(\mathcal{D}),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{D}),\ \forall i = 1, ..., d\right\}.$$

Remarque 1.3. $H^1(\mathcal{D})$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\mathcal{D})} = (u, v)_{L^2(\mathcal{D})} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathcal{D})},$$

et est un espace de Banach pour la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{D})} = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathcal{D})} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathcal{D})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace de Sopolev $H_0^1(\mathcal{D})$

l'espace $H_0^1(\mathcal{D})$ est un sous-espace de $H^1(\mathcal{D})$ des fonctions nulles sur $\partial\mathcal{D}$ i.e.

$$H_0^1(\mathcal{D}) = \left\{ u \in H^1(\mathcal{D}),\ u = 0 \,\text{sur}\ \partial\mathcal{D} \right\}.$$

Proposition 1.16. *l'espace $H_0^1(\mathcal{D})$ est un espace de Hilbert muni de le produit scalaire*

$$(u,v)_{H_0^1(\mathcal{D})} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathcal{D})}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\mathcal{D})} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{D})}$$

Lemme 1.17. *L'espace $H_0^1(\mathcal{D})$ est séparable (i.e. admet un sous ensemble dénombrable dense).*

Inégalité de Poincaré

Proposition 1.18. *On suppose que $\mathcal{D}$ est bornée. Alors il existe une constante positive C telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{D})}; \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{D})$$

Autrement dit, sur $H_0^1(\mathcal{D})$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{D})}$ est une norme équivalente à la norme de $L^2(\mathcal{D})$

L'espace de Sopolev $H^2(\mathcal{D})$

Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^d$. On définit l'espace de Sobolev

$$H^2(\mathcal{D}) = \left\{ u \in H^1(\mathcal{D}),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\mathcal{D}),\ \forall i,j = 1,...,d \right\}.$$

Remarque 1.4. $H^1(\mathcal{D})$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^2(\mathcal{D})} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq 2} \int_{\mathcal{D}} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

Inégalité de Gagliardo–Nirenberg

Lemme 1.19. *Soit $2 \leq q \leq \dfrac{2d}{d-2}$ et $1 \leq r < q$. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathcal{D})$,*

$$\|u\|_{L^q} \leq K\|\nabla u\|_{L^2}^{\theta} \|u\|_{L^r}^{1-\theta},$$

Ou

$$\theta = \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right] \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{d} - \frac{1}{2}\right] \in (0,1].$$

Proposition 1.20. *Pour tout $u, v \in H_0^1(\mathcal{D})$ et $0 < \rho \leq \dfrac{2}{d-2}$ alors il existe une constante $c_1 = c_1(d, \rho) >$ telle que*

$$\|u\|_{L^{2(\rho+1)}} \leq c_1 \|u\|_{H_0^1}, \tag{1.16}$$

et

$$\|u^\rho v\|_{L^2} \leq c_1^{\rho+1} \|u\|_{H_0^1}^{\rho} \|v\|_{H_0^1}. \tag{1.17}$$

Preuve (Voir [11])

Formule de Green

Théorème 1.21 (Formule de Green). *Soit $\mathcal{D}$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour toutes fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ on a :*

$$\int_{\mathcal{D}} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) d\gamma - \int_{\mathcal{D}} \nabla u(x).\nabla v(x) dx. \tag{1.18}$$

Lemme de Gronwall

Théorème 1.22. *soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vériviant l'inégalité*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_1}^{t} \psi(s) y(s) ds \tag{1.19}$$

Alors

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_1}^{t} \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \psi(s) du\right) ds \tag{1.20}$$

Corollaire 1.23. *soient $u, v : [t_0, t_1] \longmapsto \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues telle que, pour quelque $C \geq 0$, ona*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t_1} u(s)v(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{1.21}$$

Alors

$$u(t) \leq C \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} v(s) ds\right], \quad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{1.22}$$

1.2.3 Espace de Lebesgue à valeurs vectorielles

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Ici et dans toute la suite $\mathcal{X}$ désigne un espace de Banach et $T > 0$. On définit les espaces suivants

$$C([0, T]; \mathcal{X}) = \{u : [0, T] \to \mathcal{X} \ \textit{continue}\},$$

$$L^p(0, T, \mathcal{X}) = \left\{ u : (0, T) \longrightarrow \mathcal{X} \text{ mesurable; } \int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt < \infty \right\}, \qquad 1 \leq p < \infty$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T,\mathcal{X})}= \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$L^\infty(0,T,\mathcal{X}) = \{u : (0,T) \longrightarrow \mathcal{X} \text{ mesurable; } \exists C > 0, \ \|u(t)\|_{\mathcal{X}} \leq C \ \text{ p.p}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{X})}= \inf\{C > 0, \|u(t)\|_{\mathcal{X}} < C \quad \text{p.p}\}$$

Naturellement, ona

$$L^p(0,T;L^p(\mathcal{D})) = L^p((0,T)\times\mathcal{D})$$

Propriétés 1.24.

1. *Pour* $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T;\mathcal{X})$ *est un espace de Banach*
2. *Pour* $1 < p < \infty$ *et si* $\mathcal{X}$ *est réflexif, alors* $L^p(0,T;\mathcal{X})$ *est un espace réflexif.*
3. *Pour* $1 \leq p < \infty$ *et si* $\mathcal{X}$ *séparable, alors* $L^p(0,T;\mathcal{X})$ *est aussi séparable.*

Lemme 1.25. *Si*

$$f \in L^p(0,T;\mathcal{X}) \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0,T;\mathcal{X}) \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

alors f *est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$, *continue de* $[0,T] \longrightarrow \mathcal{X}$.

1.2.4 Inégalités usuells

Inégalité de Hölder

Soient p et q deux exposants conjugues $\left(\textbf{i.e. } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ et $f \in L^p(\mathcal{D}), g \in L^q(\mathcal{D})$ alors

$$f.g \in L^1(\mathcal{D}) \text{ et } \int_{\mathcal{D}} |fg| \leq \|f\|_p.\|g\|_q. \tag{1.23}$$

Inégalité de Hölder généralisée

Soit $f_1, f_2, ..., f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\mathcal{D}), 1 \leq i \leq k$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\mathcal{D})$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} ... \|f_k\|_{p_k}$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour $p = q = 2$ l'inégalité devient

$$\int_{\mathcal{D}} |fg|dx \leq \left(\int_{\mathcal{D}} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{D}} |g|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.24}$$

Inégalité de Young

Théorème 1.26. *Soit $p;q$ deux réels exposants conjugues. Alors*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2; \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.25}$$

on a aussi

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \beta > 0; \quad ab \leq \beta a^p + C_\beta b^q$$

Remarque 1.5. Un cas simple de l'inégalité de Young est l'inégalité pour $p = q = 2$,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2; \quad ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

qui donne également l'inégalité de Young pour tout $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Inégalité d'interpolation

Si $f \in L^p(\mathcal{D}) \cap L^p(\mathcal{D})$, alors $f \in L^r(\mathcal{D})$, quel que soit $r \in [p,q]$ et

$$\|f\|_{L^r(\mathcal{D})} \leq \|f\|_{L^p(\mathcal{D})}^{\alpha} \|f\|_{L^q(\mathcal{D})}^{1-\alpha}$$

avec

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Chapitre 2

L'existence locale et l'unicité de solution

Sommaire

2.1 Position du problème

On désigne par $\mathcal{D}$ un ouvert bornée de $\mathbb{R}^d$, $\partial\mathcal{D}$ sa frontière, $W(t,x)$ est un processus de Wiener (Mouvement Brownien) Hilbertien. Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q-2} u_t = |u|^{p-2} u + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $q \geq 2$, $p > 2$, $\varepsilon > 0$, et les conditions initiales $u_0(x)$, $u_1(x)$ sont des fonctions données. Soit $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ espace probabilisé complet filtré, on pose p, q satisfait

$$\begin{cases} q \geq 2, \;\; p > 2, \;\; \max\{p,q\} \leq \dfrac{2(d-1)}{d-2}, & \text{si } d \geq 3, \\ q \geq 2, \;\; p > 2, & \text{si } \; d = 1, 2, \end{cases} \tag{2.2}$$

et l'opérateur de covariance Q vérifie

$$TrQ < \infty, \tag{2.3}$$

Remarque 2.1. Supposons que l'opérateur de covariance Q et $-\Delta$ avec condition de Dirichlet admets même ensemble de fonctions propres, c'est-à-dire

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{2.4}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \mu_k e_k, & x \in \mathcal{D}, \\ e_k = 0, & x \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Solution forte

On suppose que :

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}), \tag{2.6}$$

et $\sigma(x,t)$ est un processus à valeurs dans $L^2(\mathcal{D})$ progressivement mesurable telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma(t)\|_2^2 dt < \infty, \tag{2.7}$$

Définition 2.1. Sous les hypothèses (2.6), (2.7), on dit que u est un solution de (2.1) sur l'intervalle $[0,T]$ si

$$(u, u_t) \text{ est à valeurs dans } H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}) \text{ progressivement mesurable} \tag{2.8}$$

$$(u, u_t) \in L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))),\ u_t \in L^q((0,T) \times \mathcal{D}),\ \mathbb{P} - \text{p.s} \tag{2.9}$$

$$u(0) = u_0 \ \ u_t(0) = u_1, \tag{2.10}$$

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q-2}\, u_t = |u|^{p-2}\, u + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x) \qquad \mathbb{P} - \text{p.s} \tag{2.11}$$

vérifié en sens de distribution sur $(0,T) \times \mathcal{D}$

2.3 Etude l'existence et l'unicité

Dans cette section, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution de problème (2.1)

2.3.1 L'existence

Pour démontrer l'existence de (2.1), on étudie d'abord le problème approchée suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g_\lambda(u_t) = f_N(u) + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.12}$$

Où les fonctions g_λ et f_N sont des approximations régularisés des fonctions g et f (resp). Les fonctions g_λ et f_N définie comme suit :

i) Soit $f(u) = |u|^{p-2}u$. Pour tout $N \geq 1$ on définie fonction de classe C^1 par

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \leqslant N, \\ \in (0,1) & si\ N < x < N+1, \\ 0 & si\ x \geq N+1, \end{cases}$$

et on suppose que $\|\chi_N^{'}\|_\infty \leqslant 2$. On pose

$$f_N(u) = \chi_N(\|\nabla u\|_2) f(u), \quad u \in H_0^1(\mathcal{D}).$$

Proposition 2.1. *De (1.16) il résulte*

$$\|f_N(u)-f_N(v)\|_2\leq C_N\|\nabla u-\nabla v\|_2,\quad u,\, v\in H_0^1, \tag{2.13}$$

où C_N est constante dépend de N.

Preuve (Voir réf [11] page 175.)

ii) Soit $g(r)=|r|^{q-2}r$. Pour tout $\lambda>0$, ona

$$g_\lambda(r)=g(I+\lambda g)^{-1}(r),\ r\in\mathbb{R},$$

où g_λ est l'approximation de Yosida de l'application g. $g(x)$ est maximal monotone et vérifie que

$$g'(r)=(q-1)|x|^{q-2}\geq 0$$

$$0\leq g'_\lambda\leq\frac{1}{\lambda},\qquad |g_\lambda(r)|\leq|g(r)|,\qquad |g_\lambda(r)|\leq\frac{1}{\lambda}|r|,\ \forall r\in\mathbb{R}. \tag{2.14}$$

On suppose que

$$(u_0,u_1)\in(H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))\times H_0^1(\mathcal{D}) \tag{2.15}$$

et que $\sigma(x,t)$ est un processus à valeurs dans $H_0^1(\mathcal{D})\cap L^\infty(\mathcal{D})$ progressivement mesurable telle que

$$\mathbb{E}\int_0^T\left(\|\nabla\sigma(t)\|_2^2+\|\sigma(t)\|_\infty^2\right)dt<\infty. \tag{2.16}$$

Lemme 2.2. *Supposons que (2.2), (2.15), et (2.16) sont vérifiés. Alors il existe un unique solution trajectorielle de (2.12) telle que*

$$u\in L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D})))\cap L^2(\Omega;C([0,T];H_0^1(\mathcal{D})))$$

et

$$u_t\in L^2(\Omega;L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})))\cap L^2(\Omega;C([0,T];L^2(\mathcal{D})))$$

De plus

$$\mathbb{E}\left(\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))}+\int_0^T\int_{\mathcal{D}}g_\lambda(u_t)u_t dxdt\right)\leqslant C_N,$$

où C_N est constante positive indépendante de λ

Preuve

1. **Solution approchées**

Comme l'espace $H_0^1(\mathcal{D})$ étant séparable, alors on utilise un base orthonormale compléte $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ satsfaint (2.4), et (2.5). On définit $u_m(t,x)$ une solution approchée par

$$u_m(t,x) = \sum_{j=1}^{m} a_{m,j}(t)e_j(x),$$

où $a_{m,j}$ solution du systéme d'equations différentielles stochastique de Ito suivante :

$$\begin{cases} u_m^{''} - \Delta u_m + g_\lambda(u_m^{'}) = f_N(u_m) + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), \\ u_m(x,0) = u_{0,m}(x), u_m^{'}(x,0) = u_{1,m}(x) \end{cases} \tag{2.17}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_{m,k}^{''} = -\mu_k a_{m,k} - \left(g_\lambda\left(\sum_{j=1}^{m} a_{m,j}^{'}(t)e_j\right), e_k\right)_{L^2} \\ - \left(f_N\left(\sum_{j=1}^{m} a_{m,j}(t)e_j\right), e_k\right)_{L^2} + (e_k, \varepsilon\sigma(x,t)dW(t,x))_{L^2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Avec les conditions initiales

$$a_{m,k}(0) = (u_0, e_k)_{L^2}, \quad a_{m,k}^{'}(0) = (u_1, e_k)_{L^2} \tag{2.19}$$

Comme $\{e_j\}$ est un base donc $\det(e_j, e_k) \neq 0$ c'est à dire que le système composé de (2.18) et (2.19) admet une solution pour tout $t \in [0, t_m]$. On va obtenir des estimations à priori pour impliquer que $t_m = T$.

2. **Estimations a priori (i)**

En appliquant la formule d'Ito, on obtient (voir l'annexe A.1)

$$\begin{aligned} \|u_m^{'}(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \leq \|u_m^{'}(0)\|_2^2 + \|\nabla u_m(0)\|_2^2 - 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds \\ +2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))u_m^{'}(s)dxds + 2\int_0^t (u_m^{'}(s), \varepsilon\sigma)dW_s + c_0^2 TrQ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma)|^2 ds \end{aligned} \tag{2.20}$$

D'aprés (1.16), et les inégalités de Hölder et Young on a

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m)u_m^{'}dx &= 2\int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m^{'}dx \\ &\leq 2\int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-1}|u_m^{'}|dx \\ &\leq 2C_N\|u_m\|_{2(p-1)}\|u_m^{'}\|_2 \\ &\leq 2C_N\|\nabla u_m\|_2\|u_m^{'}\|_2 \\ &\leq C_N\left(\|\nabla u_m\|_2^2+\|u_m^{'}\|_2^2\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Donc,

$$2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))u_m^{'}(s)dxds \leq C_N\int_0^t\left(\|\nabla u_m\|_2^2+\|u_m^{'}\|_2^2\right)ds \tag{2.22}$$

et d'aprés les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Young on obtiant

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|2\int_0^t\left(u_m^{'}(s),\varepsilon\sigma\right)dW_s\right|\right) \\ &\qquad = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=1}^{\infty}2\int_0^t\left(u_m^{'}(s),\varepsilon\sigma\sqrt{\lambda_i}e_i\right)dB_i(s)\right|\right) \\ &\qquad \leq C\mathbb{E}\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T\left|\left(u_m^{'}(s),\varepsilon\sigma e_i\right)\right|^2dt\right)^{1/2} \\ &\qquad \leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u_m^{'}\|_2\left(2\varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T\|\sigma(x,t)e_i\|_2^2dt\right)^{1/2}\right) \\ &\qquad \leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u_m^{'}\|_2\left(2\varepsilon^2\sup_{i\geq1}\|e_i\|_\infty^2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T\|\sigma(x,t)\|_2^2dt\right)^{1/2}\right) \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u_m^{'}\|_2^2\right)+C\varepsilon^2c_0^2TrQ\mathbb{E}\left(\int_0^T\|\sigma(t)\|_2^2dt\right), \end{aligned}$$

Donc d'aprés les hypothéses (2.7) et (2.3), on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t(u_m^{'}(s),\varepsilon\sigma)dW_s\right|\right) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u_m^{'}\|_2^2\right)+C \tag{2.23}$$

D'aprés (2.20), (2.22) et (2.23) ona

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) &\leq \|u_m^{'}(0)\|_2^2+\|\nabla u_m(0)\|_2^2 \\ -2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds &+ C_N\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^T\left(\|\nabla u_m\|_2^2+\|u_m^{'}\|_2^2\right)ds \\ +2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t(u_m^{'}(s),\varepsilon\sigma)dW_s\right| &+ c_0^2TrQ\sum_{j=1}^{m}\int_0^t|(e_j,\varepsilon\sigma)|^2ds \end{aligned} \tag{2.24}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) \;&\le\; \|u_m^{'}(0)\|_2^2+\|\nabla u_m(0)\|_2^2\\ -2\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds\right) &+ C_N\int_0^T \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m\|_2^2+\|u_m^{'}\|_2^2\right)ds\\ &+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|u_m^{'}\|_2^2\right)+C\end{aligned} \tag{2.25}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2\right) \;&\le\; C-4\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds\right)\\ &+C_N\int_0^T \mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m\|_2^2+\|u_m^{'}\|_2^2\right)ds\end{aligned} \tag{2.26}$$

En appliquent le lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}(\|u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\nabla u_m(t)\|_2^2)+\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds\right)\;\le\; C \tag{2.27}$$

3. **Estimations à priori (ii)**

Daprés (2.17) ona

$$\begin{aligned}\nabla u_m^{''}-\nabla(\Delta u_m)+\nabla g_\lambda(u_m^{'}) = \nabla f_N(u_m)+\nabla\left(\varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x)\right),\\ (x,t)\in\mathcal{D}\times(0,T).\end{aligned} \tag{2.28}$$

En appliquant la formule de Ito, on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2 =\; &\|\nabla u_m^{'}(0)\|_2^2+\|\Delta u_m(0)\|_2^2\\ &+2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds-2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds\\ &+2\int_0^t(\nabla u_m^{'}(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))+\int_0^t(\varepsilon\nabla(\sigma dW_s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))\end{aligned} \tag{2.29}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2 \le\; &\|\nabla u_m^{'}(0)\|_2^2+\|\Delta u_m(0)\|_2^2\\ &+2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds-2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds\\ &+2\int_0^t(\nabla u_m^{'}(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))+2c_0^2 TrQ\sum_{j=1}^m\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds\\ &+2\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^\infty\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{2.30}$$

(Pour la démonstration de (2.30) voir l'annexe A.2)
En utilisant (1.16), (1.17) et les inégalités de Hölder et Young on obtient

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))\Delta u_m^{'}(s)dx &= \int_{\mathcal{D}} \nabla f_N(u_m(s))\nabla u_m^{'}(s)dx \\
&= (p-1)\int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}\nabla u_m.\nabla u_m^{'}dx \\
&\leq C(p-1)\chi(\|\nabla u_m\|_2)\||u_m|^{p-2}\nabla u_m\|_2\|\nabla u_m^{'}\|_2 \\
&\leq C(p-1)\chi(\|\nabla u_m\|_2)\|u_m\|_{H_0^1}^{p-2}\|\nabla u_m\|_{H_0^1}\|\nabla u_m^{'}\|_2 \\
&\leq C(p-1)\chi(\|\nabla u_m\|_2)\|\nabla u_m\|_2^{p-2}\|\Delta u_m\|_2\|\nabla u_m^{'}\|_2 \\
&\leq C(p-1)(N+1)^{p-2}\|\Delta u_m\|_2\|\nabla u_m^{'}\|_2 \\
&\leq C_N\left(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m^{'}\|_2^2\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$-\int_0^t\int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds \leq C_N\int_0^t\left(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m^{'}\|_2^2\right)ds \tag{2.31}$$

En utilisant la formule de Green et (2.14), on trouve :

$$\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))\Delta u_m^{'}(s)dx = -\int_{\mathcal{D}} g_\lambda^{'}(u_m^{'}(s))|\nabla u_m^{'}(s)|^2dx \leq 0. \tag{2.32}$$

d'aprés (1.4) ona

$$W(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}B_i(t)e_i$$

et par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Young on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|2\int_0^t(\nabla u_m^{'}(s),\nabla(\varepsilon\sigma dW_s)\right|\right) \\
&\quad= \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{i=1}^{\infty}2\int_0^t\left(\nabla u_m^{'}(s),\sqrt{\lambda_i}\varepsilon\nabla(\sigma e_i)\right)dB_i(s)\right|\right) \\
&\quad\leq C\mathbb{E}\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T|(\nabla u_m^{'},\nabla(\sigma e_i))|^2dt\right)^{1/2} \\
&\quad\leq C\mathbb{E}\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T\|\nabla u_m^{'}\|_2^2\|\nabla(\sigma e_i)\|_2^2dt\right)^{1/2} \\
&\quad\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m^{'}\|_2\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T\|\nabla(\sigma e_i)\|_2^2dt\right)^{1/2}\right) \\
&\quad\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m^{'}\|_2\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^T(\sup_{i\geq1}\|e_i\|_\infty^2\|\nabla\sigma\|_2^2+\|\sigma\|_\infty^2\|\nabla e_i\|_2^2)dt\right)^{1/2}\right) \\
&\quad\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m^{'}\|_2\left(2c_0^2TrQ\int_0^T(\|\nabla\sigma\|_2^2+\|\sigma\|_\infty^2)dt\right)^{1/2}\right) \\
&\quad\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m^{'}\|_2^2\right)+C\varepsilon^2c_0^2TrQ\mathbb{E}\left(\int_0^T(\|\nabla\sigma(t)\|_2^2+\|\sigma(t)\|_\infty^2)dt\right),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\left(\nabla u_m'(s),\nabla(\varepsilon\sigma dW_s)\right)\right|\right)\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m'\|_2^2\right)+C \tag{2.34}$$

Par substitution de (2.31), (2.32) dans (2.30) on obient

$$\begin{aligned}&\|\nabla u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\leq\|\nabla u_m'(0)\|_2^2+\|\Delta u_m(0)\|_2^2\\&+C_N\int_0^t\left(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m'\|_2^2\right)ds+2\int_0^t(\nabla u_m'(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))\\&+2c_0^2TrQ\sum_{j=1}^m\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds+2\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^\infty\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{2.35}$$

On prendre l'espérence mathématique on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\right)\leq\|\nabla u_m'(0)\|_2^2+\|\Delta u_m(0)\|_2^2\\&+C_N\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\left(\|\Delta u_m\|_2^2+\|\nabla u_m'\|_2^2\right)ds+2\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(\nabla u_m'(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))\\&+2c_0^2TrQ\sum_{j=1}^m\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds+2\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^\infty\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{2.36}$$

En remplaçant l'estimation (2.34) dans (2.36), on arrive à

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\right)\leq\|\nabla u_m'(0)\|_2^2+\|\Delta u_m(0)\|_2^2\\&\qquad+C_N\int_0^t\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\Delta u_m\|_2^2ds+\|\nabla u_m'\|_2^2\right)ds+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m'\|_2^2\right)\\&\qquad+2c_0^2TrQ\sum_{j=1}^m\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds+2\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^\infty\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{2.37}$$

Par la suite on conclut que

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\right)\leq C+C_N\int_0^t\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\Delta u_m\|_2^2ds+\|\nabla u_m'\|_2^2\right)ds \tag{2.38}$$

En appliquent le lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\right)\leq C_N \tag{2.39}$$

Une combinaison de (2.27) et (2.39) donne

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}y(t)+\int_0^t\int_{\mathcal{D}}g_\lambda(u_m'(s))u_m'(s)dxds\right)\leq C_N \tag{2.40}$$

où
$$y(t) = \|u_m^{'}(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m^{'}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_m(t)\|_2^2$$
et C, C_N sont des constantes positve indépendant de m et λ.
Finalement, de (2.40) on obtient

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_m^{'}\|_2^2 + \sup_{t\in[0,T]}\|u_m\|_{H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D})}^2 + \int_0^T\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m^{'}(s))u_m^{'}(s)dxds\right) \leq C_N \tag{2.41}$$

De (2.41), on déduire

$$u_m \text{ reste dans un borné de } L^2\left(\Omega; L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))\right) \tag{2.42}$$

$$u_m^{'} \text{ reste dans un borné de } L^2\left(\Omega; L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))\right) \tag{2.43}$$

On définie

$$\mathcal{A}_\lambda(v) = \|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))}^2 + \|v^{'}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))}^2 + \int_0^T\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(v^{'}(s))v^{'}(s)dxds \tag{2.44}$$

L'idée est donner une estimation probabiliste de l'événement $\{\mathcal{A}_\lambda(u_m)\leq L\}$. Comme $\mathcal{A}_\lambda(u_m)$ est un variable aléatoire réel positive, donc on peut utilisé l'inégalité de **Bienaymé-Tchebichev** (1.11), avec $X = \mathcal{A}_\lambda(u_m)$ et $\varepsilon = L$, alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_\lambda(u_m)\geq L) \leq \frac{1}{L}\mathbb{E}(\mathcal{A}_\lambda(u_m)) \leq \frac{C_N}{L}$$

alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{L=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{m=j}^{\infty}\{\mathcal{A}_\lambda(u_m)\leq L\}\right) = 1 \tag{2.45}$$

Donc,
$$\mathcal{A}_\lambda(u_m) \leq L \quad \mathbb{P}-\text{p.s} \tag{2.46}$$

4. **Passage à la limite**

Soit $\mathcal{P}_m$ est un projection orthnormale de $L^2(\mathcal{D})$ sur le sous espace engendré par $\{e_1,...,e_m\}$, i.e.,
$$\mathcal{P}_m\varphi = \sum_{j=1}^{m}(\varphi, e_j)e_j. \tag{2.47}$$

d'aprés (2.18) et (2.47) on obtient

$$\partial_t(u_m^{'} - \varepsilon\mathcal{P}_m M(t)) = \Delta u_m - \mathcal{P}_m g_\lambda(u_m^{'}) + \mathcal{P}_m f_N(u_m) \tag{2.48}$$

en sens de distribution sur $(0,T)\times\mathcal{D}$ $\mathbb{P}$-p.s, et

$$M(t)=\int_0^t \varepsilon\sigma(x,s)dW_s.$$

Comme $\sigma(x,t)$ est à valeurs dans $H_0^1(\mathcal{D})\cap L^\infty(\mathcal{D})$ progressivement mesurable, et on a $(W(t,x))_{t\geq 0}$ est un processus de Wiener à valeur dans $H_0^1(\mathcal{D})$, et par la définition de processus de Wiener (1.10) $W(t,x)$ est continue $\mathbb{P}$-p-s. i.e.

$$W(t,x)\in C([0,T];H_0^1(\mathcal{D}))\quad \mathbb{P}-\text{p-s}$$

Alors, il existe un sous-ensemble $\Omega_1\subset\Omega$ vérifie $\mathbb{P}(\Omega\setminus\Omega_1)=0$ telle que pour tout $\omega\in\Omega_1$,

$$M\in C([0,T];H_0^1(\mathcal{D})) \tag{2.49}$$

et l'équation (2.48) vérifie pour tout $m\geq 1$.
De (2.41), pour tout $\omega\in\Omega_1$ il existe sous suite $\{u_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ telle que

$$\mathcal{A}_\lambda(u_{m_k})\leq L_\omega,\ \forall k\geq 1 \text{ et un constante positive } L_\omega \tag{2.50}$$

$$u_{m_k}\to u \ \text{ faible étoile dans } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))) \tag{2.51}$$

$$u'_{m_k}\to u' \ \text{ faible étoile dans } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})) \tag{2.52}$$

en utilisant le lemme 1.25, (2.51), (2.52) et l'inclusion

$$H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D})\subset H_0^1(\mathcal{D}),$$

on obtient

$$u_{m_k}\to u \ \text{ forte dans } \ C([0,T];H_0^1(\mathcal{D})) \tag{2.53}$$

d'après (2.14) ona

$$|g_\lambda(x)|^{\frac{q}{q-1}}\leq Cg_\lambda(x)x,\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ et } \lambda\geq 0$$

Donc,

$$|g_\lambda(u'_{m_k})|^{\frac{q}{q-1}}\leq Cg_\lambda(u'_{m_k})u'_{m_k},\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ et } \lambda\geq 0 \tag{2.54}$$

d'après l'hypothèse (2.2) on a $H_0^1(\mathcal{D})\subset L^q(\mathcal{D})$, alors on obtient l'injection

$$L^{\frac{q}{q-1}}(\mathcal{D})\subset H^{-1}(\mathcal{D})$$

et en prenant l'intégrale double dans (2.54) sur $(0,T)$ et $\mathcal{D}$, il résulte

$$\left\|g_\lambda(u'_{m_k})\right\|^{\frac{q}{q-1}}_{L^{\frac{q}{q-1}}(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))}\leq C\int_0^T\int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u'_m(s))u'_m(s)dxds, \tag{2.55}$$

Ainsi, par (2.44), (2.50) et (2.55) on obtient

$$\left\| g_\lambda(u'_{m_k}) \right\|^{\frac{q}{q-1}}_{L^{\frac{q}{q-1}}(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))} \leq CL_\omega, \tag{2.56}$$

et ona

$$\| f_N(u_{m_k}) \|_{\frac{q}{q-1}} \leq \| f(u_{m_k}) \|_{\frac{q}{q-1}} = \| u_{m_k} \|_{(p-1)\frac{q}{q-1}} \tag{2.57}$$

Comme $q \geq 2$, alors $L^q(\mathcal{D}) \subset L^2(\mathcal{D}) \subset L^{\frac{q}{q-1}}(\mathcal{D})$, on en déduit que

$$\| u_{m_k} \|_{(p-1)\frac{q}{q-1}} \leq \| u_{m_k} \|_{2(p-1)} \tag{2.58}$$

D'après (1.16) et (2.27) nous obtenons

$$\| u_{m_k} \|_{2(p-1)} \leq \| \nabla u_{m_k} \|_2 \leq C_N \tag{2.59}$$

De (2.57), (2.58), et (2.59) il résult

$$\| f_N(u_{m_k}) \|^{\frac{q}{q-1}}_{\frac{q}{q-1}} \leq C_N \tag{2.60}$$

D'où

$$\| f_N(u_{m_k}) \|^{\frac{q}{q-1}}_{L^{\frac{q}{q-1}}(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))} \leq C_N \tag{2.61}$$

et d'après (2.48), (2.56) et (2.61) ona

$$\left\| u'_{m_k} - \mathcal{P}_{m_k} M \right\|_{W^{1,\frac{q}{q-1}}(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))} \leq CL_\omega, \tag{2.62}$$

pour tout $k \geq 1$ par (2.52) et (2.62) ona

$$u'_{m_k} - \varepsilon \mathcal{P}_{m_k} M \longrightarrow u' - \varepsilon M \ \text{ forte dans } \ C([0,T]; L^2(\mathcal{D})). \tag{2.63}$$

Ceci implique qu'il existe toujours une suite notée par u_{m_k} de telle que

$$u'_{m_k}(t,x) \longrightarrow u'(t,x), \ \text{ p.p } \ (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{D}. \tag{2.64}$$

Il résulte de (2.56), (2.64) et le lemme 1.15 que

$$g_\lambda(u'_{m_k}) \longrightarrow g_\lambda(u') \ \text{ faible dans } \ L^{\frac{q}{q-1}}((0,T) \times \mathcal{D}). \tag{2.65}$$

Donc, $u = u(\omega)$ satisfies l'équation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g_\lambda(u_t) = f_N(u) + \varepsilon \sigma(x,t) \partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.66}$$

dans le sens des distributions sur $(0,T) \times \mathcal{D}$. Ici, le choix de la sous suite u_{m_k} dépendre $\omega \in \Omega_1$.

2.3.2 L'unicité

On suppose qu'il existe une autre suite qui converge vers $\tilde{u} = \tilde{u}(\omega)$, alors on pose $w = u - \tilde{u}$ satisfaint

$$w'' - \Delta w + g_\lambda(u'(\omega)) - g_\lambda(\tilde{u}'(\omega)) = f_N(u(\omega)) - f_N(\tilde{u}(\omega)), \tag{2.67}$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

$$w \in L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \cap C([0, T]; H_0^1(\mathcal{D}))$$

$$w' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\mathcal{D})) \cap C([0, T]; L^2(\mathcal{D}))$$

En multiplient (2.67) par w' et intégrant sur $\mathcal{D}$, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}} w'' w' dx + \int_{\mathcal{D}} \Delta w w' dx + \int_{\mathcal{D}} (g_\lambda(u') - g_\lambda(\tilde{u}'))w' dx = \int_{\mathcal{D}} (f_N(u) - f_N(\tilde{u}))w' dx. \tag{2.68}$$

Comme

$$\int_{\mathcal{D}} w'' w' dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_2^2 \tag{2.69}$$

et par formule de Green

$$\int_{\mathcal{D}} \Delta w w' dx = -\int_{\mathcal{D}} \nabla w \nabla w' dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w(t)\|_2^2 \tag{2.70}$$

alors d'aprés (2.68), (2.69) et (2.70) on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^2\right) + \int_{\mathcal{D}} (g_\lambda(u') - g_\lambda(\tilde{u}'))w' dx = \int_{\mathcal{D}} (f_N(u) - f_N(\tilde{u}))w' dx. \tag{2.71}$$

et de (2.14) ona

$$\int_{\mathcal{D}} (g_\lambda(u') - g_\lambda(\tilde{u}'))w' dx \geq 0 \tag{2.72}$$

et par les inégalités de Hölder et Young il résulte de (2.13)

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{D}} (f_N(u) - f_N(\tilde{u}))w' dx\right| &\leq \|f_N(u) - f_N(\tilde{u})\|_2 \|w'\|_2 \\ &\leq C_N \|\nabla u - \nabla v\|_2 \|w'\|_2 \\ &\leq C_N \|\nabla w\|_2 \|w'\|_2 \\ &\leq C_N \left(\|\nabla w\|_2^2 + \|w'\|_2^2\right) \end{aligned} \tag{2.73}$$

En regroupant (2.71), (2.72), (2.73) et intégrant sur $(0, t)$, on obtient

$$\|\nabla w(t)\|_2^2 + \|w'(t)\|_2^2 \leq 2C_N \int_0^t \left(\|\nabla w(s)\|_2^2 + \|w'(s)\|_2^2\right) ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall alors

$$\|\nabla w(t)\|_2^2 + \|w'(t)\|_2^2 = 0$$

qui implique $w = 0$ i.e. $u(\omega) = \tilde{u}(\omega)$.

2.3.3 Progressive mesurablilité de la solution

Nous allons également montrer que (u, u_t) est $(H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))\times H_0^1(\mathcal{D})$-progressivement mesurable pour tout $0 \leq t \leq T$. Soit $\mathbf{B}_r(z)$ une boule fermée dans $C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))$ de rayon $r > 0$ et de centre z. Ensuite, en raison de la façon dont u a été obtenue, on vérifie que

$$\{(u, u_t) \in \mathbf{B}_r(z)\}\cap\Omega_1 = \Omega_1\cap\bigcup_{L=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{m=j}^{\infty}\left\{\left((u_m, u_m^{'}) \in \mathbf{B}_{r+1/\nu}(z)\right) \cap (\mathcal{A}_\lambda(u_m) \leq L)\right\}. \tag{2.74}$$

Comme $(u, u_t) \in C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))$ $\mathbb{P}$-p.s, et le côté de droite de (2.74) appartient à $\mathcal{F}_T$, on obtient

$$\{(t,\omega)|0 \leq t \leq T, (u(t,\omega), u_t(t,\omega)) \in A\} \in \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T \tag{2.75}$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))$ $\mathbb{P}$-p.s. Étant donné que chaque boule fermée de rayon fini de $(H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \times H_0^1(\mathcal{D})$ est fermé dans $H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D})$, on obtient

$$\mathcal{B}((H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \times H_0^1(\mathcal{D})) \subset \mathcal{B}(H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))$$

Donc (2.75) vérifie pour tout $\mathcal{B}((H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \times H_0^1(\mathcal{D}))$. Par l'unicité de trajectoire on peut remplacer T dans (2.75) par toute $0 \leq t \leq T$ et (u, u_t) est $(H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \times H_0^1(\mathcal{D})$-progressivement mesurable.

2.3.4 Montrons que $\mathbb{E}\left(\mathcal{A}_\lambda(u)\right) \leq C_N$

Tout d'abord, nous allons montrons que pour tout $\omega \in \Omega_1$,

$$\mathcal{A}_\lambda(u) \wedge K \leq \varliminf_{m\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K \tag{2.76}$$

pour tout $K > 0$. Pour obtenir (2.76), on distingue deux cas :

i) Si $\varliminf_{m\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K = K$, alors l'inégalité est évidente.

ii) Si $\varliminf_{m\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K = \delta < K$, alors il existe une sous suite $\{u_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_{m_k}) = \delta, \tag{2.77}$$

et $\{u_{m_k}(\omega)\}$ converge vers $u(\omega)$ dans le sens de (2.50) - (2.52) et (2.63).
Comme

$$u_{m_k} \to u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D}))) \tag{2.78}$$

alors d'après la proposition (1.11) on obtient

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))} \leq \varliminf_{k\to\infty} \|u_{m_k}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D})\cap H^2(\mathcal{D}))}, \tag{2.79}$$

et comme

$$u'_{m_k} \to u' \text{ faible étoile dans } L^{\infty}(0,T;H_0^1(\mathcal{D})) \tag{2.80}$$

Donc d'après la proposition (1.11) on obtient

$$\|u'\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))} \leq \varliminf_{k\to\infty} \|u'_{m_k}\|_{L^{\infty}(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))}, \tag{2.81}$$

et par le lemme de Fatou on trouve

$$\int_0^T \int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u'(s))u'(s)dxds \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_0^T \int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u'_{m_k}(s))u'_{m_k}(s)dxds \tag{2.82}$$

De (2.77), (2.79), (2.81), (2.82) on obtient

$$\mathcal{A}_\lambda(u) \leq \lim_{k\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_{m_k}) = \delta, .$$

Donc,

$$\mathcal{A}_\lambda(u) \wedge K \leq \varliminf_{m\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K$$

Par (2.41), (2.76) et le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mathcal{A}_\lambda(u) \wedge K\right) &\leq \mathbb{E}\left(\varliminf_{m\to\infty} \mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K\right) \\ &\leq \varliminf_{m\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathcal{A}_\lambda(u_m) \wedge K\right) \\ &\leq C_N \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{A}_\lambda(u) \wedge K\right) \leq C_N$$

où C_N est constante indépendante de K et λ .

En passant la limite $K \uparrow \infty$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{A}_\lambda(u)\right) \leq C_N \tag{2.83}$$

□

2.4

Ensuite, nous fixons $N > 0$ et considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f_N(u) + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.84}$$

Lemme 2.3. *Supposons que (2.2), (2.15), et (2.16) sont vérifiés. Alors il existe un unique solution trajectorielle de (2.84) telle que*

$$u \in L^2(\Omega; L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D})))$$

$$u_t \in L^2(\Omega; L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0,T]; L^2(\mathcal{D})))$$

et

$$u_t \in L^q((0,T) \times \mathcal{D}).$$

Preuve

2.4.1 L'existence

On note u_λ la solution de (2.12) sous les conditions (2.15) et (2.16). Comme $\mathbb{E}(\mathcal{A}_\lambda(u_\lambda)) \leq C_N$ pour tous les $\lambda > 0$, on peut répéter le même étapes utilisé dans la preuve de lemme 2.2, en considérant $\lambda = \dfrac{1}{m}, m = 1, 2, ...$ il existe $\Omega_2 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega \backslash \Omega_2) = 0$ et les propriétés suivantes. Pour chaque $\omega \in \Omega_2$,

$$M \in C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D})), \text{ et pour tout } \lambda = \frac{1}{m}, \ m \geq 1, \tag{2.85}$$

$$\left(u_\lambda' - \varepsilon M(t)\right)' - \Delta u_\lambda + g_\lambda(u_\lambda') = f_N(u_\lambda)$$

vérifie dans le sens des distributions sur $(0,T) \times \mathcal{D}$, donc il existe une sous suite satisfaisant

$$\mathcal{A}_{\lambda_k}(u_{\lambda_k}) \leq L_\omega, \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ et } L_\omega > 0, \tag{2.86}$$

$$u_{\lambda_k} \to u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})), \tag{2.87}$$

$$u_{\lambda_k} \to u \text{ forte dans } C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D})), \tag{2.88}$$

$$u_{\lambda_k}' \to u' \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D})), \tag{2.89}$$

$$u_{\lambda_k}' \to u' \text{ forte dans } C([0,T]; L^2(\mathcal{D})), \tag{2.90}$$

$$u_{\lambda_k}' \to u' \text{ p.p } (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{D}, \tag{2.91}$$

pour une fonction $u = u(\omega)$. Par le lemme 1.14

$$g_{\lambda_k}(u_{\lambda_k}') \longrightarrow g(u') \text{ p.p } (t,x) \in (0,T) \times \mathcal{D}.$$

Il résulte de (2.86) et le lemme 1.15 que

$$g_{\lambda_k}(u_{\lambda_k}') \longrightarrow g(u') \text{ faible dans } L^{\frac{q}{q-1}}((0,T) \times \mathcal{D}).$$

Donc, $u = u(\omega)$ satisfies (2.84) dans le sens des distributions sur $(0,T) \times \mathcal{D}$ pour $\omega \in \Omega_2$.

2.4.2 L'unicité

Supposons que pour $\omega \in \Omega_2$ il y a une autre suite qui converge vers $\tilde{u} = \tilde{u}(\omega)$ dans le sens de (2.86)-(2.91). De même la preuve du lemme 2.2, nous pouvons montrer que $u(\omega) = \tilde{u}(\omega)$ résulte de l'équation

$$u_{tt}(\omega) - \tilde{u}_{tt}(\omega) - \Delta(u(\omega) - \tilde{u}(\omega)) + g(u_t(\omega)) - g(\tilde{u}_t(\omega)) = f_N(u(\omega)) - f_N(\tilde{u}(\omega))$$

et

$$u, \tilde{u} \in L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \cap C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}))$$
$$u_t, \tilde{u}_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D})) \cap C([0,T]; L^2(\mathcal{D}))$$
$$g(u_t(\omega)), g(\tilde{u}_t(\omega)) \in L^{\frac{q}{q-1}}((0,T) \times \mathcal{D}).$$

2.4.3 Progressive mesurablilité de la solution

De même démonstration de 2.3.3, (u, u_t) est à valeur dans $(H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D})) \times H_0^1(\mathcal{D})$ progressivement mesurable.

2.4.4 Montrons que $\mathbb{E}(\mathcal{A}(u)) \leq C_N$

On définit

$$\mathcal{A}(u) = \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))} + \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D}))} + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} g(u_t) u_t dxdt \tag{2.92}$$

Alors, par le même étapes de 2.3.4 dans la preuve de lemme 2.2, on obtient

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}(u)) \leq C_N. \tag{2.93}$$

□

Maintenant, nous considérons l'existence locale et de l'unicité de la solution pour le problème (2.1) sous l'hypothèse (2.6).

2.5

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses (2.2), (2.6) et (2.7), alors il existe une unique solution trajectorielle local de (2.1) telle que*

$$(u, u_t) \in L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))),$$

$$u_t \in L^q((0,T) \times \mathcal{D}),$$

2.5.1 L'existence

Preuve Nous choisissons des suite $\{u_{0,m}\}$ $\{u_{1,m}\}$ et $\{\sigma_m(x,t,\omega)\}$ telle que

$$u_{0,m} \in H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D}), \quad u_{1,m} \in H_0^1(\mathcal{D}), \quad \sigma_m(x,t,\omega) \in L^2(\Omega; L^2(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap L^\infty(\mathcal{D})))$$

et

$$E\int_0^T \left(\|\nabla\sigma_m(t)\|_2^2 + \|\sigma_m(t)\|_\infty^2\right) dt < \infty.$$

si $m \to \infty$,

$$u_{0,m} \to u_0 \text{ forte dans } H_0^1(\mathcal{D}), \tag{2.94}$$

$$u_{1,m} \to u_1 \text{ forte dans } L^2(\mathcal{D}), \tag{2.95}$$

$$\mathbb{E}\int_0^T \|\sigma_m(x,t) - \sigma(x,t)\|_2^2 dt \to 0. \tag{2.96}$$

Pour chaque $m \geq 1$, soit u_m la solution de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = f_N(u) + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), & (x,t) \in \mathcal{D} \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\mathcal{D} \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.97}$$

Par le lemme 2.3, on obtient

$$u_m \in L^2(\Omega; L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}) \cap H^2(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}))) \tag{2.98}$$

$$u_m' \in L^2(\Omega; L^\infty(0,T; H_0^1(\mathcal{D}))) \cap L^2(\Omega; C([0,T]; L^2(\mathcal{D}))) \tag{2.99}$$

et l'équation d'énergie

$$\begin{aligned} &\|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m'\|_2^2 + 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |u_m'|^q dxds - 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m' dxds \\ &= \|\nabla u_{0,m}\|_2^2 + \|u_{1,m}\|_2^2 + 2\int_0^t (u', \varepsilon\sigma_m(x,s))dW_s + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^\infty \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_i e_i^2(x)\sigma_m^2(x,s) dxds. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Soit

$$M_m(t,x) = \int_0^t \sigma_m(x,s)dW(s,x), \quad t > 0, \quad x \in D.$$

Alors, pour tout m_1, m_2

$$(u_{m_1}'' - u_{m_2}'') - \Delta(u_{m_1} - u_{m_2}) + g(u_{m_1}') - g(u_{m_2}') = f_N(u_{m_1}) - f_N(u_{m_2}) + \varepsilon(M_{m_1} - M_{m_2})' \tag{2.101}$$

vérifie en sens de distribution sur $(0,T)\times D$ pour tout ω.
En appliquent la formule d'Ito dans (2.101), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u'_{m_1}(t)-u'_{m_2}(t)\|_2^2+\|\nabla u_{m_1}(t)-\nabla u_{m_2}(t)\|_2^2+2\int_0^t\left(g(u'_{m_1})-g(u'_{m_2}),u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\right)ds\\
&\leq\|\nabla u_{0,m_1}-\nabla u_{0,m_2}(t)\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2+2\int_0^t\left(f_N(u_{m_1})-f_N(u_{m_2}),u'_{m_1}-u'_{m_2}\right)ds\\
&\qquad+2\varepsilon\int_0^t(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2},u'_{m_1}-u'_{m_2})dW_s+\varepsilon^2c_0^2TrQ\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2ds
\end{aligned}\tag{2.102}$$

Pour le terme d'amortissement en utilisant l'inégalité suivante

$$(|a|^{q-2}a-|b|^{q-2}b)(a-b)\geq c|a-b|^q\tag{2.103}$$

pour $a,b\in\mathbb{R},\ q\geq 2$, oú c est constante positive. Donc,

$$(|u_{m_1}|^{q-2}u_{m_1}-|u_{m_2}|^{q-2}u_{m_1})(u_{m_1}-u_{m_2})\geq c|u_{m_1}-u_{m_2}|^q\tag{2.104}$$

De (2.98), (2.99), (2.102) et (2.104) on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u'_{m_1}(t)-u'_{m_2}(t)\|_2^2+\|\nabla u_{m_1}(t)-\nabla u_{m_2}(t)\|_2^2+2c\int_0^t\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\|_q^q ds\\
&\leq\|\nabla u_{0,m_1}-\nabla u_{0,m_2}(t)\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2+2\int_0^t\left(f_N(u_{m_1})-f_N(u_{m_2}),u'_{m_1}-u'_{m_2}\right)ds\\
&\qquad+2\varepsilon\int_0^t(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2},u'_{m_1}-u'_{m_2})dW_s+\varepsilon^2c_0^2TrQ\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2ds
\end{aligned}\tag{2.105}$$

pour tout $t\in[0,T]$. Pour le troisième terme à droit de (2.105), en utilisant l'inégalité (2.13) on obtient

$$\begin{aligned}
2&\left|\int_0^t(f_N(u_{m_1})-f_N(u_{m_2}),u'_{m_1}-u'_{m_2})ds\right|\\
&\leq 2\int_0^t\|f_N(u_{m_1})-f_N(u_{m_2})\|_2\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2ds\\
&\leq 2C_N\int_0^t\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2ds\\
&\leq C_N\int_0^t\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2ds+C_N\int_0^t\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2ds
\end{aligned}\tag{2.106}$$

Où C_N est constante positive indépendante de m_1 et m_2.
En regroupant (2.105), (2.106) et prenant l'espérance, il résulte

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)\leq\|\nabla u_{m_{0,1}}-\nabla u_{m_{0,2}}\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2\\
&+C_N\int_0^T\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)ds\\
&+\varepsilon^2c_0^2TrR\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2ds+2\varepsilon\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2},u'_{m_1}-u'_{m_2})dW_s\right|.
\end{aligned}\tag{2.107}$$

Pour le dernièr terme à droite de (2.107), par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Young nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2},u'_{m_1}-u'_{m_2})dW_s\right|\right)\\
&\qquad=\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t(u'_{m_1}-u'_{m_2},(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2})e_i)dB_i(s)\right|\right)\\
&\qquad\leq\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t\left|(u'_{m_1}-u'_{m_2},(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2})e_i\right|^2dt\right)^{1/2}\\
&\qquad\leq\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i\int_0^t\|(\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2})e_i\|_2^2dt\right)^{1/2}\right)\\
&\qquad\leq\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2\left(c_0^2TrQ\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2dt\right)^{1/2}\right)\\
&\qquad\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)+Cc_0^2TrQ\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2\,dt
\end{aligned}\tag{2.108}$$

De (2.107) et (2.108), on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)\leq\|\nabla u_{m_{0,1}}-\nabla u_{m_{0,2}}\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2\\
&+C_N\int_0^T\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)ds+\varepsilon^2c_0^2TrQ\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2\,ds\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)+Cc_0^2TrQ\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2\,dt
\end{aligned}\tag{2.109}$$

Où c_0 et C sont des constantes positives. En prenant (2.107), (2.108) en compte et en invoquant à nouveau l'inégalité Gronwall, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)\\
&\leq C_N\left(\|\nabla u_{0,m_1}-\nabla u_{0,m_2}\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2+\varepsilon^2c_0^2TrQ\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2\,ds\right)
\end{aligned}\tag{2.110}$$

De (2.105) et (2.110) on déduire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_q^q\right)\\
&\leq C_N\left(\|\nabla u_{0,m_1}(t)-\nabla u_{0,m_2}(t)\|_2^2+\|u_{1,m_1}-u_{1,m_2}\|_2^2+\varepsilon^2c_0^2TrQ\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma_{m_1}-\sigma_{m_2}\|_2^2\,ds\right)
\end{aligned}\tag{2.111}$$

Il résulte de (2.94) - (2.96) et (2.110) lorse que $m\longrightarrow\infty$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|\nabla u_{m_1}-\nabla u_{m_2}\|_2^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left\|u'_{m_1}-u'_{m_2}\right\|_2^2\right)\longrightarrow 0$$

On déduit que, $\{u_m\}$ et $\{u_m^{'}\}$ sont des suites de Cauchy dans les espases de Banach $L^2(\Omega; H_0^1(\mathcal{D}))$ et $L^2(\Omega, L^2(\mathcal{D}))$, respectivement . Ainsi,

$$(u_m, u_m^{'}) \to (u_N, u_N^{'}) \text{ fortement dans } L^2(\Omega; C([0,T]; H_0^1(\mathcal{D}) \times L^2(\mathcal{D}))) \tag{2.112}$$

pour une certaine fonction u_N dépendante N.
Aussi, par (2.94) - (2.96) et (2.111),

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|u_{m_1}^{'} - u_{m_2}^{'}\right\|_q^q\right) \longrightarrow 0$$

Donc, $\{u_m^{'}\}$ est un suite de Cauchy dans l'espace de Banach $L^q((0,T)\times\mathcal{D})$. Alors $\{u_m^{'}\}$ convergent fortement dans $L^q((0,T)\times\mathcal{D})$. Ensuite, il existe des sous suites de $\{u_m^{'}\}$, tel que

$$u_m^{'} \to u_N^{'} \text{ p.p } \ (t,x) \in (0,T)\times\mathcal{D}. \tag{2.113}$$

Il résulte de (2.93), (2.113) et le lemme 1.15 que

$$|u_m^{'}|^{q-2}u_m^{'} \to |u_N^{'}|^{q-2}u_N^{'} \text{ faible dans } L^{\frac{q}{q-1}}((0,T)\times\mathcal{D}). \tag{2.114}$$

Par conséquent, en utilisant (2.112), (2.113), la convergence des données initiales et $\sigma_m(x,t)$, u_N est la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q-2}u_t = f_N(u) + \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x), & (x,t)\in\mathcal{D}\times(0,T), \\ u(x,t) = 0 & (x,t)\in\partial\mathcal{D}\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & x\in\mathcal{D}, \end{cases} \tag{2.115}$$

□

où u_0, u_1 et $\sigma(x,t)$ satisfont la condition (2.6), (2.7).

2.5.2 l'unicité

La preuve de unicité de (2.115) est similaire dans le lemme 2.2

2.6 L'équation d'énergie

Théorème 2.5. *Sous les hypothèses du Théorème 2.4, on a l'équation d'énergie est vérifiée :*

$$\begin{aligned} &\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2 + 2\int_0^t\int_{\mathcal{D}}|u_t(s)|^q dxds - 2\int_0^t\int_{\mathcal{D}}|u(s)|^{p-2}u(s)u_t(s)dxds \\ &= \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2 + 2\int_0^t (u_t(s), \varepsilon\sigma(x,s))dW_s + \varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{D}}\lambda_i e_i^2(x)\sigma^2(x,s)dxds. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Preuve Pour obtenir l'équation de l'énergie (2.116), en prenant la limite dans l'équation approximative (2.100).
De (2.112),
$$\|\nabla u_m\|_2^2 \to \|\nabla u_N\|_2^2, \quad \|u_m^{'}\|_2^2 \to \|u_N^{'}\|_2^2,$$
D'prés (2.94) et (2.95) on a
$$\|\nabla u_{0,m}\|_2^2 \to \|\nabla u_0\|_2^2, \;\; \|u_{1,m}\|_2^2 \to \|u_1\|_2^2$$
Et par (2.114)
$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |u_m^{'}|^q dxdt \;\to\; \int_0^t \int_{\mathcal{D}} |u_N^{'}|^q dxdt$$
De (2.96), le terme $\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_i e_i^2(x)\sigma_m^2(x,s)dxds$ converge en moyenne vers $\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \lambda_i e_i^2(x)\sigma^2(x,s)dxds.$
Pour les deux termes restants dans (2.100) on considère

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m^{'}dxds - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_N\|_2)|u_N|^{p-2}u_N u_N^{'}dxds\right| \\ &\leq \int_0^t \left|(f_N(u_m) - f_N(u_N), u_N^{'})\right| ds + \int_0^t \left|(f_N(u_m), u_m^{'} - u_N^{'})\right| ds. \end{aligned} \tag{2.117}$$

A partir de (2.13) et (1.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|(f_N(u_m) - f_N(u_N), u_N^{'})\right| &\leq \|f_N(u_m) - f_N(u_N)\|_2 \|u_N^{'}\|_2 \\ &\leq C_N \|\nabla u_m - \nabla u_N\|_2 \|u_N^{'}\|_2. \end{aligned} \tag{2.118}$$

et de même façon

$$\left|(f_N(u_m), u_m^{'} - u_N^{'})\right| \leq C_N \|\nabla u_m\|_2 \|u_m^{'} - u_N^{'}\|_2. \tag{2.119}$$

remplaçant (2.118) et (2.119) dans (2.117), on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m^{'}dxds - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_N\|_2)|u_N|^{p-2}u_N u_N^{'}dxds\right| \\ &\leq C_N \int_0^t \left(\|\nabla u_m\|_2 + \|u_N^{'}\|_2\right)\left(\|\nabla u_m - \nabla u_N\|_2 + \|u_m^{'} - u_N^{'}\|_2\right) ds \end{aligned} \tag{2.120}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left|\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m^{'}dxds - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_N\|_2)|u_N|^{p-2}u_N u_N^{'}dxds\right| \\ &\leq 2C_N \left(\mathbb{E}\int_0^t \left(\|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_N^{'}\|_2^2\right) ds\right)\left(\mathbb{E}\int_0^t \left(\|\nabla u_m - \nabla u_N\|_2^2 + \|u_m^{'} - u_N^{'}\|_2^2\right) ds\right) \end{aligned} \tag{2.121}$$

Par ailleurs, d'après (2.112) le terme à droite converge vers zéro lorsque $m \to \infty$.
Donc,

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_m\|_2)|u_m|^{p-2}u_m u_m^{'}dxds \longrightarrow \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_N\|_2)|u_N|^{p-2}u_N u_N^{'}dxds. \tag{2.122}$$

Enfin, pour le terme intégrale stochastique, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\int_0^t (u_m', \sigma_m)dW_s - \int_0^t (u_N', \sigma)dW_s\right| \\
&\qquad \leq \mathbb{E}\left|\int_0^t (u_m' - u_N', \sigma_m)dW_s\right| + \mathbb{E}\left|\int_0^t (u_N', \sigma_m - \sigma)dW_s\right|
\end{aligned} \tag{2.123}
$$

Maintenant, par l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (u_m' - u_N', \sigma_m)dW_s\right| \\
&\qquad \leq C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|u_m' - u_N'\|_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T (\sigma_m Qe_i, \sigma_m e_i)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\qquad \leq Cc_0 TrQ\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|u_m' - u_N'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\sigma_m\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{2.124}
$$

Alors, lorsque $m \to \infty$ on a

$$
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (u_m' - u_N', \sigma_m)dW_s\right| \longrightarrow 0. \tag{2.125}
$$

De même facon

$$
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (u_N', \sigma_m - \sigma)dW_s\right| \leq Cc_0 TrQ\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|u_N'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\sigma_m - \sigma\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},
$$

Alors d'aprés (2.96), lorsque $m \to \infty$ on a

$$
\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (u_N', \sigma_m - \sigma)dW_s\right| \longrightarrow 0 \tag{2.126}
$$

En regroupant (2.123), (2.125) et (2.126), on obtient :

$$
\int_0^t (u_m', \sigma_m)dW_s \;\longrightarrow\; \int_0^t (u_N', \sigma)dW_s, \quad m \to \infty.
$$

Par conséquent, on obtient l'équation de l'énergie (2.115)

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla u_N\|_2^2 + \|u_N'\|_2^2 + 2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} |u_N'|^q dxds - 2\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \chi(\|\nabla u_N\|_2)|u_N|^{p-2}u_N u_N' dxds \\
&= \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2 + 2\int_0^t (u_N', \varepsilon\sigma(x,s))dW_s + \varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathcal{D}} \lambda_i e_i^2(x)\sigma^2(x,s)dxds.
\end{aligned} \tag{2.127}
$$

Pour chaque N, introduire le temps d'arrêt τ_N définie par

$$
\tau_N = \inf\{t > 0;\ \|\nabla u_N\|_2 \geq N\}
$$

Donc, pour $t \in [0, \tau_N \wedge T), \quad u(t) = u_N(t)$ est la solution locale de (2.1). Soit

$$\tau_\infty = \lim_{N \longrightarrow \infty} \tau_N$$

Ainsi, nous avons construit une solution locale unique

$$u(t) = \lim_{N \longrightarrow \infty} u_N(t) \qquad \square$$

de (2.1) sur $\in [0, T \wedge \tau_\infty)$ qui satisfait l'équation de l'énergie (2.116) dans le théorème 2.5.

Chapitre 3

L'existence globale

Dans ce chapitre, nous montrons que la solution de (2.1) est globale si $q \geq p$. Nous utilisons le lemme de **Borel-Cantelli** pour prouver l'existence globale de solution nous introduisons la fonction d'énergie suivante :

$$\mathcal{E}(u(t)) = \|u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{2}{p}\|u\|_p^p \tag{3.1}$$

Théorème 3.1. *Supposons que (2.2), (2.6) et (2.7) sont vérifiés. Si $q \geq p$, alors pour tout $T > 0$ il existe une solution unique u de (2.1) tel que*

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathcal{E}(u(t)) < \infty \tag{3.2}$$

Preuve Pour tout $T > 0$, nous allons montrer que

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} u_N(t) = \lim_{N \longrightarrow \infty} u(t \wedge \tau_N) = u \quad \mathbb{P} - \text{p.s} \quad \text{Pour tout } t \leq T$$

A cet effet il suffit montrer que

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_N \to \infty) = 1$$

Rappelons que, pour $t \in [0, \tau_N \wedge T)$, $u(t) = u_N(t) = u(t \wedge \tau_N)$ est un solution locale de (2.1). D'aprés le théorème (2.5), ona l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}&\|\nabla u(t \wedge t_N)\|_2^2 + \|u_t(t \wedge t_N)\|_2^2 + 2\int_0^{t \wedge t_N} \int_{\mathcal{D}} |u_t(s)|^q dx ds - 2\int_0^{t \wedge t_N} \int_{\mathcal{D}} |u(s)|^{p-2} u(s) u_t(s) dx ds \\ &= \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2 + 2\int_0^{t \wedge t_N} (u_t(s), \varepsilon\sigma(x,s)) dW_s + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge t_N} (\sigma(x,s) Q e_i(x), \sigma(x,s) e_i(x))\, ds.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Et comme
$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |u|^{p-2} u_t u dx dt = \frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p - \frac{1}{p}\|u_0\|_p^p \tag{3.4}$$
En regroupant (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} &\|\nabla u(t\wedge t_N)\|_2^2 + \|u_t(t\wedge t_N)\|_2^2 + \frac{2}{p}\|u(t\wedge t_N)\|_p^p = \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2 + \frac{2}{p}\|u_0\|_p^p \\ &-2\int_0^{t\wedge t_N}\int_{\mathcal{D}} |u_t(s)|^q dx ds + 4\int_0^{t\wedge t_N}\int_{\mathcal{D}} |u(s)|^{p-2} u(s) u_t(s) dx ds \\ &+2\int_0^{t\wedge t_N} (u_t(s), \varepsilon\sigma(x,s)) dW_s + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge t_N} (\sigma(x,s)Qe_i(x), \sigma(x,s)e_i(x))\, ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De (3.1), on déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u(t\wedge t_N)) = \mathcal{E}(u(0)) &+ 4\int_0^{t\wedge t_N}\int_D |u|^{p-2} u u_t(s) dx ds - 2\int_0^{t\wedge t_N}\int_D |u_t(s)|^q dx ds \\ &+2\int_0^{t\wedge t_N} (u_t(s), \varepsilon\sigma) dW_s + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge t_N} (\sigma(x,s)Qe_i(x), \sigma(x,s)e_i(x))\, ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, nous obtenons

$$\left|\int_D |u|^{p-2} u u_t(s) dx\right| \leq \|u\|_p^{p-1}\|u_t\|_p \leq C_\beta\|u\|_p^p + \beta\|u_t\|_p^p \tag{3.7}$$

où $\beta > 0$ et C_β est une constante dépendant de β.
Sous les hypothéses $q \geq p$ et (2.2), l'inégalité d'injection donne

$$\|u_t\|_p^p \leq C\|u_t\|_q^p \tag{3.8}$$

où C est un injection constante. Par conséquent, à partir de (3.6), (3.7) et (3.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(u(t\wedge \tau_N)) \leq \mathcal{E}(u(0)) + 4C\beta\int_0^{t\wedge t_N} \|u_t(s)\|_q^p ds - 2\int_0^{t\wedge t_N}\|u_t(s)\|_q^q ds \\ &+4C_\beta\int_0^{t\wedge t_N}\|u\|_p^p ds + 2\int_0^{t\wedge t_N}(u_t(s), \sigma dW_s) + \varepsilon^2 c_0^2 TrQ\int_0^{t\wedge t_N}\|\sigma(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Utilisation $q \geq p$, on distingue deux cas :

1. $\|u_t\|_q^q > 1$ nous choisissons donc β petite telle que $-2\|u_t\|_q^q + 4C\beta\|u_t\|_q^p \leq 0$,
2. $\|u_t\|_q^q \leq 1$, dans ce cas, nous avons $-2\|u_t\|_q^q + 4C\beta\|u_t\|_q^p \leq 4C\beta$.

Par conséquent, dans les deux cas, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u(t\wedge \tau_N)) \leq \mathcal{E}(u(0)) &+ 4C\beta(t\wedge t_N) + 4C_\beta\int_0^{t\wedge t_N}\|u\|_p^p ds \\ &+2\int_0^{t\wedge t_N}(u_t(s), \sigma dW_s) + \varepsilon^2 c_0^2 TrQ\int_0^{t\wedge t_N}\|\sigma(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En prenant l'espérance de (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(u(t\wedge\tau_N))\right) &\leq \mathcal{E}(u(0))+4C\beta(t\wedge t_N)+\varepsilon^2c_0^2TrQ\int_0^{t\wedge t_N}\mathbb{E}\|\sigma(s)\|_2^2ds \\ &+K\int_0^{t\wedge t_N}\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(s)\right)ds\end{aligned} \tag{3.11}$$

où K est constante positive.
De (2.6), on déduit, en utilisant le lemme de Gronwall que :

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(u(t\wedge\tau_N))\right)\leq\left(\mathcal{E}(u(0))+CT\right)\exp(KT)\leq C_T \tag{3.12}$$

D'autre part, nous avons

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(u(T\wedge\tau_N))\right)\geq C\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\tau_N\leq T\}}\mathcal{E}(u(\tau_N))\right)\geq C\mathbb{E}\left(\|u_{\tau_N}\|_2^2\mathbf{1}_{\{\tau_N\leq T\}}\right)\geq CN^2\mathbb{P}\left(\tau_N\leq T\right). \tag{3.13}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(u(T\wedge\tau_N))\right)\geq CN^2\mathbb{P}\left(\tau_N\leq T\right). \tag{3.14}$$

De (3.12) et (3.14), on obtient

$$\mathbb{P}\left(\tau_N\leq T\right)\leq\frac{C_T}{N^2}$$

Et comme τ_N est un suite croissante de temps d'arrêt, alors on a

$$\mathbb{P}\left(\tau_\infty\leq T\right)\leq\mathbb{P}\left(\tau_N\leq T\right)\leq\frac{C_T}{N^2},$$

Donc, on peut appliquer le lemme de **Borel-Cantelli**, d'où

$$\mathbb{P}\left(\tau_\infty\leq T\right)=0$$

qui implique

$$\lim_{N\to\infty}\tau_N=\infty\qquad\mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Par conséquent, sur $[0,T\wedge\tau_\infty)=[0,T)$, $u=\lim_{N\to\infty}u_N(t)$ est la solution globale qui annoncé.

Pour vérifier l'énergie (3.2), en utilisant (2.116), (3.7), (3.8) et (2.6), nous avons

$$\mathcal{E}(u(t))\leq\mathcal{E}(u(0))+(4C\beta+\varepsilon^2C_1)t+4KC_\beta\int_0^t\mathcal{E}(u(s))ds+2\int_0^t(u_t(s),\varepsilon\sigma)dW_s, \tag{3.15}$$

où C_1 et K sont des constantes positives.
En prenant l'espérence sur (3.15), on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{E}(u(t))&\leq\mathcal{E}(u(0))+(4C\beta+\varepsilon^2C_1)T+4KC_\beta\int_0^T\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{E}(u(s))ds \\ &+2\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^T(u_t(s),\varepsilon\sigma)dW_s,\end{aligned} \tag{3.16}$$

Pour le terme stochastique en utilisant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de Young, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (u_t,\varepsilon\sigma)dW_s\right| &\leq C_2\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\|u_t\|_2\left(\varepsilon^2\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T(\sigma Qe_i,\sigma e_i)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\leq \frac{1}{4}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u_t\|_2^2+C_3c_0^2\varepsilon^2 TrQ\int_0^T\mathbb{E}\|\sigma(t)\|_2^2dt\end{aligned} \tag{3.17}$$

De (2.6), (3.17) et (3.16) on obtient

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{E}(u(t))\leq C_4+C_5\int_0^T\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{E}(u(t))ds \tag{3.18}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\mathcal{E}(u(t))\leq C_4\exp(C_5T),$$

□

Où $C_i, i=1,...,5$ sont des constantes positives.

Perspectives

Des questions qui peuvent être posées sont :

- Est ce qu'on peut étudier l'existence et l'unicité des solutions lorsque nous supposons σ dépendent de u et ∇u,
- Est ce qu'on peut obtenir l'existence et l'unicité des solutions pour le probléme

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{q-2} u_t = |u|^{p-2} u + \varepsilon\sigma(u, \nabla u, x, t)\partial_t W(t, x), & (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\mathcal{D} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{3.19}$$

où $q \geq 2$, $p > 2$, ε constante positive, et $W(t, x)$ est processus de Wiener Hilbertien

Annexe A

Sommaire

A.1 Preuve l'inégalité (2.20)

d'aprés (2.18) ona

$$(u_m^{''}, e_j) = (\Delta u_m, e_j) + (g_\lambda(u_m^{'}), e_j) + (f_N(u_m), e_j) + (e_j, \varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x)), \tag{A.1}$$

On pose

$$\Psi(t) = \Delta u_m(t) - g_\lambda(u_m^{'}(t)) + f_N(u_m(t)) \tag{A.2}$$

Alors, on obtient

$$d(u_m^{'}, e_j) = (\Psi(t), e_j)dt + (e_j, \varepsilon\sigma(x,t)dW(t,x)), \tag{A.3}$$

On définie la fonction $\eta(x) = x^2$ et les dérivée de η sont $\eta^{'}(x) = 2x,\ \eta^{''}(x) = 2$
En appliquant la formule d'Ito sur la fonction η on obtient

$$\begin{aligned}(u_m^{'}, e_j)^2 = (u_0, e_j)^2 &+ 2\int_0^t (\Psi(s), e_j)(e_j, u_m^{'})ds + 2\int_0^t (u_m^{'}, e_j)(e_j, \varepsilon\sigma(x,t)dW_s) \\ &+ \int_0^t Tr\left((e_j, \sigma(x,s))Q(e_j, \sigma(x,s))^*\right) ds\end{aligned} \tag{A.4}$$

Pour le derniére trme à droite on pose $\Phi_j = (e_j, \varepsilon\sigma(x,t))$, alors on a

$$\begin{aligned} Tr\left(\Phi_j Q \Phi_j^*\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_j Q e_k, \Phi_j e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_j \lambda_k e_k, \Phi_j e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\Phi_j e_k, \Phi_j e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\|\Phi_j e_k\|_2^2 \leq \sup_{k\geq 1}\|e_k\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\|\Phi_j\|_2^2 \\ &\leq c_0^2 TrQ|(e_j, \varepsilon\sigma)|^2. \end{aligned} \tag{A.5}$$

De (A.4) et (A.5), on obtient

$$\begin{aligned}(u_m', e_j)^2 \leq (u_0, e_j)^2 &+ 2\int_0^t (\Psi(s), e_j)(e_j, u_m')ds + 2\int_0^t (u_m', e_j)(e_j, \varepsilon\sigma(x,t))dW_s \\ &+c_0^2 TrQ \int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma)|^2 ds\end{aligned} \tag{A.6}$$

et sommant (A.6) en j, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m (u_m', e_j)^2 \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^m (u_0, e_j)^2 + 2\int_0^t \sum_{j=1}^m (\Psi(s), e_j)(e_j, u_m')ds \\ &+ \quad 2\int_0^t \sum_{j=1}^m (u_m', e_j)(e_j, \varepsilon\sigma(x,t))dW_s + c_0^2 TrQ \sum_{j=1}^m \int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma)|^2 ds\end{aligned} \tag{A.7}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2 \quad &\leq \quad \|u_m'(0)\|_2^2 + 2\int_0^t (\Psi(s), u_m')ds + 2\int_0^t (u_m', \varepsilon\sigma(x,t))dW_s \\ &\quad +c_0^2 TrQ \sum_{j=1}^m \int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma)|^2 ds\end{aligned} \tag{A.8}$$

Pour le deuxième terme à droite, d'après (A.2) on a

$$\int_0^t (\Psi(s), u_m')ds = \int_0^t (\Delta u_m(t), u_m')ds - \int_0^t (g_\lambda(u_m'(t)), u_m')ds + \int_0^t (f_N(u_m(t)), u_m')ds \tag{A.9}$$

et par formule de Green on a

$$(\Delta u_m, u_m') = -(\nabla u_m, \nabla u_m') = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_2^2 \tag{A.10}$$

Finalement, de (A.8), (A.9) et (A.10) on obtient

$$\begin{aligned}&\|u_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 \leq \|u_m'(0)\|_2^2 + \|\nabla u_m(0)\|_2^2 - 2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} g_\lambda(u_m'(s))u_m'(s)dxds \\ &+2\int_0^t \int_{\mathcal{D}} f_N(u_m(s))u_m'(s)dxds + 2\int_0^t (u_m'(s), \varepsilon\sigma)dW_s + c_0^2 TrQ \sum_{k=1}^m \int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma)|^2 ds\end{aligned} \tag{A.11}$$

Où

$$TrQ < \infty, \qquad c_0 = \sup_{k\geq 1}\|e_k\|_\infty < \infty$$

A.2 Preuve l'inégalité (2.30)

Daprès (2.17) ona

$$\nabla u_m'' - \nabla(\Delta u_m) + \nabla g_\lambda(u_m') = \nabla f_N(u_m) + \nabla(\varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W(t,x)), \tag{A.12}$$

alors

$$(\nabla u_m'', e_j) - (\nabla(\Delta u_m), e_j) + (\nabla g_\lambda(u_m'), e_j) = (\nabla f_N(u_m), e_j) + (e_j, \nabla(\varepsilon\sigma(x,t)\partial_t W_t)), \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} d(\nabla u_m', e_j) &= (\nabla(\Delta u_m), e_j)dt - (\nabla g_\lambda(u_m'), e_j)dt + (\nabla f_N(u_m), e_j)dt \\ &\quad + (e_j, \nabla(\varepsilon\sigma(x,t)dW_t)), \end{aligned} \tag{A.14}$$

On pose

$$\Psi(t) = \Delta u_m - g_\lambda(u_m') + f_N(u_m)$$

Donc

$$\begin{aligned} d(\nabla u_m', e_j) &= (\nabla\Psi(t), e_j)dt + (e_j, \nabla(\varepsilon\sigma(x,t)dW_t)), \\ &= (\nabla\Psi(t), e_j)dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(e_j, \nabla(\varepsilon\sigma e_i))dB_i(t) \end{aligned} \tag{A.15}$$

En appliquent la formule d'Ito on obtient

$$\begin{aligned} (\nabla u_m'(t), e_j)^2 &= (\nabla u_m'(0), e_j)^2 + 2\int_0^t (\nabla\Psi(s), e_j)(e_j, \nabla u_m')ds \\ &\quad + 2\int_0^t (\nabla u_m', e_j)(e_j, \nabla(\sigma dW_s)) + \langle M_\sigma, M_\sigma\rangle_t \end{aligned} \tag{A.16}$$

telle que

$$M_\sigma = \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\int_0^t (e_j, \nabla(\varepsilon\sigma e_i))dB_i(t)$$

$$\begin{aligned} \langle M_\sigma, M_\sigma\rangle_t &= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \nabla(\varepsilon\sigma e_i))|^2 ds \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon e_i\nabla\sigma)|^2 ds + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma\nabla e_i)|^2 ds \\ &\leq \sup_{i\geq 1}\|e_i\|_\infty^2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon\nabla\sigma)|^2 ds + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma\nabla e_i)|^2 ds \\ &\leq c_0^2 TrQ\int_0^t |(e_j, \varepsilon\nabla\sigma)|^2 ds + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma\nabla e_i)|^2 ds \end{aligned} \tag{A.17}$$

De (A.16) et (A.17), on obtient

$$\begin{aligned} &(\nabla u_m'(t), e_j)^2 \leq (\nabla u_m'(0), e_j)^2 + 2\int_0^t (\nabla\Psi(s), e_j)(e_j, \nabla u_m')ds \\ &+ 2\int_0^t (\nabla u_m', e_j)(e_j, \nabla(\sigma dW_s)) + c_0^2 TrQ\int_0^t |(e_j, \varepsilon\nabla\sigma)|^2 ds + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t |(e_j, \varepsilon\sigma\nabla e_i)|^2 ds \end{aligned} \tag{A.18}$$

Et sommant (A.18) en j

$$\sum_{j=1}^{m}(\nabla u_m^{'}(t),e_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{m}(\nabla u_m^{'}(0),e_j)^2 + 2\int_0^t\sum_{j=1}^{m}(\nabla\Psi(s),e_j)(e_j,\nabla u_m^{'})ds$$
$$+2\int_0^t\sum_{j=1}^{m}(\nabla u_m^{'},e_j)(e_j,\nabla(\sigma dW_s)) + c_0^2 TrQ\sum_{j=1}^{m}\int_0^t|(e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds \tag{A.19}$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t|(e_j,\varepsilon\sigma\nabla e_i)|^2ds$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\nabla u_m^{'}(t)\|_2^2 &\leq \|\nabla u_m^{'}(0)\|_2^2+2\int_0^t(\nabla\Psi(s),\nabla u_m^{'})ds + 2\int_0^t(\nabla u_m^{'}(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))\\ &+ c_0^2TrQ\sum_{j=1}^{m}\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{A.20}$$

Pour le deuxiéme terme à droite, en appliquent la formule de Green on obtient

$$(\nabla\Psi(s),\nabla u_m^{'}) = -(\Psi(s),\Delta u_m^{'}) = -(\Delta u_m,\Delta u_m^{'}) + (g_\lambda(u_m^{'}),\Delta u_m^{'}) - (f_N(u_m),\Delta u_m^{'})$$

Donc,

$$(\nabla\Psi(s),\nabla u_m^{'}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m\|_2^2+(g_\lambda(u_m^{'}),\Delta u_m^{'}) - (f_N(u_m),\Delta u_m^{'}) \tag{A.21}$$

Finalement, de (A.20) et (A.21) on a

$$\begin{aligned}&\|\nabla u_m^{'}(t)\|_2^2+\|\Delta u_m(t)\|_2^2\leq \|\nabla u_m^{'}(0)\|_2^2 + \|\Delta u_m(0)\|_2^2+2\int_0^t\int_{\mathcal{D}}g_\lambda(u_m^{'}(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds\\ &-2\int_0^t\int_{\mathcal{D}}f_N(u_m(s))\Delta u_m^{'}(s)dxds + 2\int_0^t(\nabla u_m^{'}(s),\varepsilon\nabla(\sigma dW_s))\\ &+c_0^2TrQ\sum_{j=1}^{m}\int_0^t|(\nabla e_j,\varepsilon\nabla\sigma)|^2ds + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\int_0^t|(e_j,\sigma\nabla e_i)|^2ds\end{aligned} \tag{A.22}$$

Bibliographie

[1] J.U. Kim, *On the stochastic wave equation with nonlinear damping*, Appl. Math. Optim. 58 (2008), 29–67.

[2] Haim Brézis, *Analyse fonctionnelle.* Dunod, Paris, 1999.

[3] Gao, H., Guo, B. and Liang, F, *Stochastic wave equations with nonlinear damping and source terms, Infinite Dimensional* , Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 16 (2013), no. 2, 1-29

[4] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires* Dunod, Paris, 1969.

[5] Da Prato, G. and Zabczyk, J. : *Stochastic equations in infinite dimensions* Cambridge, 1992.

[6] Claudia Prévôt, Michael Röckner, *A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations,*, Springer, 2007.

[7] Karatzas, I. and Shreeve, S. : *Brownian motion and stochastic calculus, Graduate texts in mathematics,* 113, Springer, 1988.

[8] P.-L. Chow, *Stochastic Partial Differential Equations,* Chapman & Hall/CRC, NewYork, 2007.

[9] Leszek Gawarecki and Vidyadhar Mandrekar *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions*, Springer, Berlin, 2011.

[10] Helge Holden, Bernt Øksendal, Jan Ubøe, Tusheng, *Stochastic Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2009.

[11] Bo, L., Tang, D., and Wang, Y. : *Explosive solutions of stochastic wave equation with damping on R*, J. Differential Equations 244 (2008), 170–187.

[12] Prévôt, C. and Röckner, M. : *A concise course on stochastic partial differential equations,*, Springer Lecture Notes in Math., 1905, Berlin, 2007.

[13] E. Pardoux, *Equations aux derivées partielles stochastiques non linéaries monotones*, Thèse, Université Paris XI 1975.

[14] V. Barbu, G.D. Prato, L. Tubaro, *Stochastic wave equations with dissipative damping*, Stochastic Process. Appl. 117 (2007), 1001–1013.

[15] Georgiev, V. and Todorova, G. *: Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term*, J. Differential Equations 109 (1994), 295–308.

[16] É. Pardoux. *Stochastic Partial Differential Equations*, University, Shanghaï, April 2007

Index

Abstract

In this paper, we discuss an initial boundary value problem for the stochastic wave equation involving the nonlinear damping term $|u_t|^{q-2} u_t$ ut and a source term of the type $|u|^{p-2} u$.We will establish the local existence and uniqueness of solution by the Faedo-Galerkin approximation method and show that the solution is global for $q \geq p$.

Keywords : *stochastic wave equation, Faedo-Galerkin approximation, global existence, unicity, Energy equality..*

Résumé

Dans ce travail, nous étudions un probléme aux limites pour l'équation des ondes stochastique impliquant le terme non linéaire d'amortissement $|u_t|^{q-2} u_t$ et le terme de source de type $|u|^{p-2} u$. nous allons établir l'existence locale et l'unicité de la solution par la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin et de montrer que la solution est globale pour $q \geq p$.

Mots clés : *équation d'onde stochastique, approximation de Faedo-Galerkin, unicité, l'existence globale , l'égalité d'énergie.*