N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماسترأكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالب: حسن نسيب

الموضوع

حول متراجحات نظيم الحالة لمؤثر هيلبرت-شميد

نوقشت يوم 01 جوان 2016 من طرف لجنة المناقشة :

عماره عبد القادر	أستاذ مساعد.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
غزال عبد الرزاق	أستاذ محاضر.ب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
السعيد محمد السعيد	أستاذ محاضر.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر.ب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

إهداء

إلى التي جعل الله الجنة تحت قدميها وإلى من رعتني بعطفها وغمرتني بحبها , إلى من تألمت لألمي وفرحت لفرحي إلى من يعجز اللسان عن وصف فضائلها , إلى الغالية التي تحن العين وتبكي لرؤيتها , إلى أعز وأغلى شيئ أملكه في الوجود.

أمي

حفظها الله وأطال في عمرها وأمدها بالصحة والعافية.

إلى من مهد لي الطريق من أجل الوصول , إلى هذا المستوى إلى من سهر على راحتي صغيرا وحرص على مستقبلي كبيرا , إلى الذي لم يبخل عليا بشيئ طيلة حياتي إلى من ترقب نجاحياتي.

أبي رحمه الله

إلى كل إخوتي وزوجاتهم وأخواتي وأزواجهن وكل أبنائهم وإلى جميع الأقارب.

إلى كل أصحابي و أصدقائي وخاصتا رفقاء الدرب منذ الطفولة

خليل – عبد اللطيف – منير – كمال – عبد الرحيم.

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

وإلى كل أساتذة وطلبة جامعة قاصدي مرباح ورقلة.

شكر وعرفان

اللهم لك الحمد حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه , ملء السموات وملء الأرض , وملء ما شئت من شيء بعد , أهل الثناء والمجد , أحق ما قال العبد , وكلنا لك عبد , أشكرك ربي على نعمك التي لا تعد , وآلائك التي لا تحد , أحمدك ربي وأشكرك على أن يسرت لي إتمام هذا العمل على الوجه الذي أرجو أن ترضى به عني.

ثم أتوجه بالشكر إلى من رعاني طالبا في برنامج الماستر، ومهد لي هذه الرسالةأستاذي ومشرفي الفاضل الدكتور:

مصطفى عسيلة

الذي له الفضل عليا – بعد الله تعالى – في المذكرة منذ أن كانت موضوعا وفكرة إلى أن صار رسالة , فله مني كل الشكر والتقدير والعرفان.

كما أقدم شكري في هذا اليوم إلى أساتذتي الموقرين في لجنة المناقشة رئاستا في الأستاذ عبد القادر عمارة وأعضاء في الأستاذين السعيد محمد السعيد و عبد الرزاق غزال لتفضلهم علي بقبول مناقشة هذه الرسالة , فهم أهل لسد خللها وتقويم معوجها وتهذيب نتوآتها والإبانة عن مواطن القصور فيها ة سائلا الله الكريم أن يثيبهم عني خيرا.

وأتوجه بالشكر الجزيل إلى جميع أساتذتي الفضلاء في قسم الرياضيات.

الرموز المستعملة

الرمز	معناه	اول صفحة
X	مجموعة كيفية	02
d	مسافة	02
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	00
$d(x,y)$	المسافة بين x و y	02
(X,d)	فراغا متريا	02
d_A	إقتصار المسافة d على المجموعة A	03
$P(X)$	المجموعات الجزئية من X	03
τ_x	أسرة المجموعات المفتوحة	03
$V(x)$	أسرة كل جوارات النقطة x	03
(X,τ)	فراغ تبولوجي	03
$O(x_0,r)$	الكرة المفتوحة	03
$F(x_0,r)$	الكرة المغلقة	03
$S(x_0,r)$	سطح الكرة	03
$\Vert\Vert$	تطبيق النظيم	04
$\Vert x\Vert$	نظيم العنصر x	04
$(X,\Vert.\Vert)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	04
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$, (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)	04
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة	04
$\langle\ ,\ \rangle$	تطبيق الجداء السلمي	05
$(X,\langle\ ,\ \rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	05
H	فراغ هيلبار	05
$x\perp y$	العنصر x عمودي على y	06
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	06
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A	06

$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H	06
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي لعنصر x على الفراغ X_0	06
$X^{\perp}$	المتمم العمودي للفراغ x بالنسبة للفراغ H	06
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	08
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	08
$ker(F)$	نواة المؤثر F	08
$F : X \to Y$	F مؤثر من X في Y	08
$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F	08
X^*	فراغ الأشكال الخطية على X	08
$L(X, Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	08
$L(X)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه	08
$l(X, Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	09
$l(X)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه	09
F^*	المؤثر القرين للمؤثر F	10
I	المؤثر الحيادي	11
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F	12
$l_{\infty}(X, Y)$	مجموعة المؤثرات المتراصة F	13
$(F_n)_{n \geqslant 1}$	متتالية المؤثرات	14
$F_n \xrightarrow{u} F$	F_n متقاربة بإنتظام نحو المؤثر F	14
$F_n \xrightarrow{s} F$	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F	14
$F_n \xrightarrow{w} F$	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	14
$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F	18
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	18
$P_{\sigma}(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F	18
$C_{\sigma}(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	18
$R_{\sigma}(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F	18
$R_{\lambda}(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F	20
$f(F)$	دالة المؤثر F	20
$A(F)$	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	20
s	الأعداد المميزة لـ F	24
l_p	صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة	26
$\\|F\\|_2, \\|F\\|_{HS}$	النظيم المطلق	27

المحتويات

مقدمة عامة

تعتبر دراسة المؤثرات الخطية والدراسة الطيفية لها من أهم ميادين التحليل الدالي , من حيث أنها تخلص ألى تسهيل حل المعادلات الدالية.

ومن الأشياء المهمة في دراسة المؤثر الخطي دراسة حالته , التي تنوب عنه في كثير من المسائل , وعلى هذا الأساس إخترنا عنوان المذكرة وهو:

"حول متراجحات نظيم الحالة لمؤثر هيلبرت–شميد"

حيث كون مؤثر هيلبرت–شميد من أهم المؤثرات داخل الصنف l_p أي صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة.
المذكرة مقسمة إلى فصلين.

الفصل الأول "مفاهيم أساسية" تحوي أهم المفاهيم والنظريات من التبولوجيا و التحليل الدالي الخاصة بالمؤثرات الخطية وقد وردت بدون برهان ومختصرة لإستعمالها في الفصل الثاني.

الفصل الثاني متراجحة نظيم الحالة و فيه تعرضنا لمختلف متراجحات الحالة والمقارنة بينها.
في الدراسة إعتمد صنف المؤثرات l_p أي صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة وهذا في حالة $p = 2$ و p مضاعف لـ 2.

الفصل 1

مفاهيم اساسية

مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي والتحليل المركب وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية هذه المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لإستعمالها في الفصل الثاني.

1.1 الفراغ المتري

تمهيد : لتكن X مجموعة كيفية غير خالية.

تعريف 1.1
يقال أن على المجموعة X أعطيت مسافة , إذا عرفنا تطبيق d من $X \times Y$ في $\mathbb{R}$ يحقق من أجل كل x , y , z من X مايلي :

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

التطبيق d يسمى مسافة , والعدد الحقيقي $d(x,y)$ المسافة بين x وy , والزوج (X,d) يسمى فراغا متريا.

نتيجة 1.1
إذا كان (X,d) فراغا متريا , فإنه من أجل كل z,y,x من X يتحقق مايلي :

1. $d(x,y) \geqslant 0$
2. $|d(x,z) - d(z,y)| \leqslant d(x,y)$

نتيجة 1.2
إذا كانت A مجموعة جزئية من X , فإن التطبيق d_A , $\left(d_A\right.$ إقتصار المسافة d على المجموعة $\left.A\right)$ هو مسافة على المجموعة A.

تعريف 1.2
إذا كان (X,d) فراغا متريا و A مجموعة جزئية من X , فإن الفراغ الجزئي المتري من الفراغ (X,d) الناتج عن المجموعة A يعرف بالزوج (A,d_A) , $\big(d_A$ إقتصار المسافة d على المجموعة $A\big)$.

1.1.1 تبولوجيا الفراغ المتري

ليكن (X,d) فراغا متريا و x_0 نقطة من X و r $(r>0)$ عدد من $\mathbb{R}$.

تعريف 1.3

1. تعرف الكرة المفتوحة في الفراغ المتري (X,d) ذات المركز x_0 ونصف القطر r , بأنها مجموعة النقط x من X حيث $d(x,x_0)<r$ ويرمز لها بالرمز $O(x_0,r)$, أي:
$$O(x_0,r)=\{x\in X/d(x,x_0)<r\}$$
2. تعرف الكرة المغلوقة في الفراغ المتري (X,d) ذات المركز x_0 ونصف القطر r , بأنها مجموعة النقط x من X حيث $d(x,x_0)\leqslant r$ ويرمز لها بالرمز $F(x_0,r)$, أي:
$$F(x_0,r)=\{x\in X/d(x,x_0)\leqslant r\}$$
3. يعرف سطح الكرة $F(x_0,r)$, بأنها مجموعة النقط x من X حيث $d(x,x_0)=r$ ويرمز له بالرمز $S(x_0,r)$, أي:
$$S(x_0,r)=\{x\in X/d(x,x_0)=r\}$$

تعريف 1.4
لتكن B , V , E , M مجموعات جزئية من X.

1. يقال أن المجموعة M مفتوح في الفضاء المتري (X,d) , إذا تحقق:
$$\forall x\in M,\exists r_x>0/O(x,r_x)\subset M$$
يرمز لأسرة المجموعات المفتوحة (X,d) بالرمز τ_x , وتسمى تبولوجيا على المجموعة X.
الزوج (X,τ_x) يسمى فراغا تبولوجيا.
2. يقال أن المجموعة E مغلوق في الفراغ المتري (X,d) إذا كانت متممتها CE بالنسبة للمجموعة X مفتوحة.
3. من أجل كل x من X المجموعة V تسمى جوار للنفطة x من X , إذا وجد مفتوح U في الفراغ المتري (X,d) يحقق $x\in U\subset V$.
يرمز لأسرة كل جوارات النقطة x بالرمز $\vartheta(x)$.
4. يقال أن المجموعة B محدودة في الفراغ المتري (X,d) , إذا وجد في الفراغ (X,d) كرة تحويها.

تعريف 1.5
لتكن M مجموعة جزئية من X و x_0 نقطة من X.

1. يقال أن x_0 نقطة تلاصق لـ M إذا حو كل جوار للنقطة x_0 نقطة على الأقل من M , ويرمز لمجموعة نقط التلاصق للمجموعة M بالرمز $\overline{M}$ أي:

$$x \in \overline{M} \Leftrightarrow (\forall V \in \vartheta(x) \ \ /V \cap M \neq 0)$$

تعريف 1.6
يقال أن:

1. الفراغ (X, d) إذا حوت كل تغطية من المفتوحات له تغطية منتهية له.
2. المجموعة M من الفراغ (X, d) متراصة إذا كان الفراغ الجزئي المرفق بها متراص أي (M, d_M) حيث d_M إقتصار d على M.
3. المجموعة M يقال أنها شبه متراصة إذا كانت $\overline{M}$ متراصة.
4. يقال أن x_0 نقطة تراكم للمجموعة M إذا حو كل جوار للنقطة x_0 نقطة x على الأقل من M تختلف عن x_0 يرمز لمجموعة نقاط التراكم بالرمز M' أي $x \in M' \Leftrightarrow (\forall V \in \vartheta(x) \rightarrow (V - \{x\}) \cap M \neq \phi)$

2.1.1 التقارب ومتتالية كوشي

ليكن (X, d) فراغا متريا و $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية عناصر من X و x_0 نقطة من X.

تعريف 1.7

1. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو العنصر x_0 , إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

أي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geqslant 1/\forall n \geqslant n_\varepsilon \rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

2. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ لكوشي (أساسية) , إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geqslant 1/\forall n \geqslant n_\varepsilon, \forall m \geqslant n_\varepsilon \rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

نتيجة 1.3

1. كل متتالية متقاربة تكون لكوشي.
2. نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ في الفراغ المتري إن وجدت تكون وحيدة.

2.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 2.8
يسمى فراغا شعاعيا نظيميا ، كل زوج $(X, \|.\|)$ ، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ معرف كالتالي:

$$X \mapsto \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \|x\|$$

ويحقق الشروط التالية:

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = \|\lambda\| \|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما ، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

ملاحظة 2.1
الفراغ الشعاعي النظيمي ، إختصارا يكتب ف.ش.ن.

نظرية 2.1
إذا كان Y ف.ش.ن و X_0 فرافا شعاعيا جزئيا مغلق منه حيث $X_0 \neq Y$, فإنه من أجل كل ε $(1 > \varepsilon > 0)$ يوجد عنصر x_ε $(\|x_\varepsilon\| = 1)$ يحقق المتراجحة

$$\inf_{x \in x_0} \|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$$

البرهان :

من أجل $y_0 \in X \backslash X_0$ نضع

$$\alpha = \inf_{x \in X_0} \|y_0 - x\| \tag{1.1}$$

نبرهن أن $\alpha > 0$ لهذا حسب الصيغة (1.1) يكفي برهان أن $\alpha \neq 0$.
لاحظ أنه إذا كان $\alpha = 0$, فإنه توجد متتالية $(x_n)_{n \geqslant 1}$ من X_0 تحقق

$$\|y_0 x_n\| < \frac{1}{n} \qquad , n \geqslant 1$$

بما أن X_0 مغلقة , فإن $y_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \in X_0$ وهذا مناف للفرض وبالتالي $\alpha > 0$.
من أجل كل $\varepsilon, (1 > \varepsilon > 0)$ نختار عنصرا x_0 من X يحقق:

$$\|y_0 - x_0\| < \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}$$

لاحظ بوضع $x_\varepsilon = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$ يكون:

$$\|x_\varepsilon - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\| x)\|}{\|y_0 - x_0\|} >$$

$$> \frac{\alpha}{\|y_0 - x_0\|} > 1 - \varepsilon \qquad ,\forall x \in X_0$$

ومنه نستنتج:

$$\forall \varepsilon, (0 < \varepsilon < 1), \exists x_\varepsilon \in X_0, (\|x_\varepsilon\| = 1) \qquad / \qquad \inf_{x \in X_0} \|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$$

نتيجة 2.4
يكون الفراغ الشعاعي النظيمي ذا بعد منته , إذا وفقط إذا كانت كرة الوحدة المغلقة فيه متراصة فيه.

1.2.1 فراغ بناخ

تعريف 2.9
يسمى الفراغ الشعاعي النظيمي $(X, \|.\|)$ بفراغ بناخ , إذاكانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

3.1 الفراغ الشبه هيلبرتي

1.3.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 3.10
يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من الجداء $X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي:

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق من أجل كل x , y , z من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(x, x) \geqslant 0$, $h(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x, x)$
3. $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$
4. $h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتيا.

نتيجة 3.5
كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا مع النظيم:

$$\|x\| = \sqrt{h(x, x)}$$

تعريف 3.11
الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام , ويرمز له بالرمز H.

2.3.1 التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتيا , A و B مجموعتان من X حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يقال أن العنصرين x , y من X متعامدان (ونكتب $x \perp y$) إذا كان جداؤهما السلمي معدوما.
أي:
$$\langle x, y\rangle = 0$$

2. يقال أن العنصر x من X عمودي على المجموعة A إذا كان عموديا على كل عنصر من A , ونكتب:
$$x \perp A \Longleftrightarrow \{\forall y \in A \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0\}$$
يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.

3. يقال أن A وB متعامدان إذا تحقق:
$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$
ونكتب $A \perp B$.

قضية 3.1
إذا كان X فراغا شبه هيلبرتيا ، فإن:

1. $\forall x, y \in X \longrightarrow \| \langle x, y\rangle \| \leqslant \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز).
2. $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (قانون متوازي الأضلاع).

3.3.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار.

نظرية 3.2 [4]
إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H , حيث $x \notin A$, فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A.
أي:
$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A / d(x, y_0) \equiv \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$

نظرية 3.3 [4]
إذاكان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H , وx عنصرا من H , حيث $x \notin X_0$, فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 , يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 يحقق:
$$(x - y_0) \perp X_0$$
في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 , ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

4.3.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار , و X_0 فراغا جزئيا مغلقا منه.

تعريف 3.12
يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0.
أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة 3.6

1. ${X_0}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
2. كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z/ \ \ y \in X_0, \ z \in {X_0}^{\perp}$$

3. $H = X_0 \oplus {X_0}^{\perp}$, عندها نقول أن ${X_0}^{\perp}$, X_0 , هما التحليل العمودي للفراغ H , ونكتب:

$$y = P_{X_0} x \, z = P_{X_0^{\perp}} x$$

حيث:
P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0 , و $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$.

قضية 3.2
تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

1. $P_{X_0}^2 = P_{X_0}$
2. $\|P_{X_0}\| \leq 1$
3. $\forall x, y \in H \longrightarrow \langle P_{X_0} x, y \rangle = \langle x, P_{X_0} y \rangle$

4.1 الجمع المباشر التبولوجي لفراغ هيلبار

تعريف 4.13
يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفراغات هيلبار $H_1, ..., H_n$ بأنه الفراغ H حيث

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n \tag{2.1}$$

(الصيغة (2.1) هي التحليل العمودي لـ H) حيث:

$$H \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, \quad n \geqslant 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة.
الفراغ H لهيلبار وفق الجداء السلمي:

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{n \geqslant 1} \langle \xi_n, \eta_n \rangle_{H_n}, \quad \xi, \eta \in H; \ \xi_n, \eta_n \in H_n$$

5.1 المؤثرات الخطية

1.5.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ فراغان شعاعيان نظيميان على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة جزئية غير خالية من X.

تعريف 5.14
إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y , يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y , يرمز له بالرمز F ونكتب $F(x) = y$ أو $Fx = y$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $Fx = y$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:
$$E(F) = \{y \in Y / \ y = Fx, \ x \in D(F)\}$$
- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:
$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$
- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$ حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:
$$\Gamma_F = \{(x, Fx) / \ x \in D(F)\} \subset X \times Y$$
- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:
$$\ker F = \{x \in D(F) / \quad Fx = 0\}$$

تعريف 5.15
المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k} \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 (F x_2)$
يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X, X) = L(X)$
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X, \mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X , وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي , ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X.

6.1 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 6.16
من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1 , F_2 من $L(X, Y)$ يعرف

1. جمع المؤثريين F_1 , F_2 كالتالي:

$$(F_1+F_2)x = F_1x + F_2x \ , \ x \in D(F_1)\cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x \ / \ x \in D(F_1) \ , \ \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 6.7
$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

7.1 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y , حيث X , Y ف.ش.ن.

تعريف 7.17
يقال أن F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق:

$$\exists\ c>0\ ,\ \forall x \in D(F)\ ,\ \|F(x)\|_Y \leqslant c\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x من X يقال أن F محدود على X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(F)\equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

تعريف 7.18
يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية:

1. $\|F\| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Fx\|}{\|tx\|}$
2. $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Fx\|$
3. $\|F\| = \min\{c/\|Fx\| \leqslant c\|x\|\}$

–الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $Y\equiv\mathbb{K}$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي:

$$X' = l(X,\mathbb{K})$$

تعريف 7.19

1. يقال أن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0/\ (\forall x\in D\,(F)\cap X/\ \|x-x_0\|<\delta) \longrightarrow \|Fx-Fx_0\|<\varepsilon$$

2. يقال أن المؤثر F مستمر إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه .

نتيجة 7.8
إذا كان المؤثر F من $L(X,Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 7.9
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ فإن:

1. $\forall x\in X,\ \|Fx\| \leqslant \|F\|\|x\|$
2. $\forall\varepsilon>0,\ \exists x_\varepsilon\in X/\ \|Fx_\varepsilon\| > (\|F\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|$

1.7.1 المؤثر الوحدوي والتكافؤ الوحدوي

تعريف 7.20
يقال أن المؤثر F من $l(H)$ وحدوي إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1. $E(F) = M \quad , \quad \forall x, y \in M \rightarrow \langle Fx, Fy \rangle = \langle x, y \rangle$
2. $FF^* = I = F^*F$, أي $\exists F^{-1} = F^*$

نتيجة 7.10
إذا كان F وحدويا فإن F قابل للقلب بإستمرار.

تعريف 7.21
المؤثران T , F من $l(H_1)$, $l(H_2)$ على التوالي $\left(H_2, H_1\text{فراغات هيلبار}\right)$ يقال أنهما متكافئين وحدويا إذا وجد مؤثر وحدوي S من H_2 في H_1 يحقق $T = S^{-1}FS$.

نتيجة 7.11
إذا كان F , T متكافئين وحدويا , فإن $\sigma(F) = \sigma(T)$.

2.7.1 المؤثر عديم القوة وشبه عديم القوة

تعريف 7.22
المؤثر F من $l(H)$ يقال أنه

1. عديم القوة إذا تحقق
$$\exists n_0 \geqslant 0 \ / \ F^{n_0} = 0$$
2. شبه عديم القوة إذا تحقق
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|F^n\|} = 0$$
أي $r_\sigma(F) = 0$.

نتيجة 7.12

1. إذا كان المؤثر F عديم القوة , فإن $\sigma(F) = \{0\}$.
2. يكون المؤثر F شبه عديم القوة إذا وفقط إذا كان $\sigma(F) = \{0\}$.

8.1 نظرية ريس للأشكال الخطية

نظرية 8.4 [5]
ليكن H فراغا لهيلبار.

1. إذا كان f شكلا خطيا ومحدودا على H $\left(\text{أي } f \in H'\right)$, فإنه يوجد عنصر وحيد y_f من H , بحيث:
$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y_f \rangle, \ \|f\| = \|y_f\|$$

2. إذاكان y عنصرا كيفيا من H , فإن الصيغة التالية:

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle,\ x \in H$$

تعرف شكلا خطيا ومحدودا f_y , عندها يكون:

$$\|f_y\| = \|y\|$$

1.8.1 المؤثر القرين

ليكن H_1 , H_2 فراغين لهيلبار وF من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 8.23
يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F , المؤثر F^* المعرف من H_2' في H_1' , بحيث من أجل كل (x,y) من $H_1{\times}H_2$ يكون

$$\forall(x,y) \in H_1{\times}H_2 \longrightarrow \langle Fx, y\rangle = \langle x, F^*y\rangle$$

نظرية 8.5 [5]
إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2', H_1')$ ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

تعريف 8.24
الفراغ الجزئي M $(M \subset D(F))$ من X يقال أنه ثابت بالنسبة للمؤثر F , $(F \in L(X))$, إذا كان $FM \subset M$.

قضية 8.3
ليكن المؤثر F من $l(H)$ و X فراغا جزئيا من H.
يكون الفراغ X ثابت بالنسبة للمؤثر F , إذا وفقط إذا كان متممه العمودي $X^\perp$ ثابت بالنسبة للمؤثر القرين F^* , أي:

$$FX \subset X \Leftrightarrow F^*X^\perp \subset X^\perp$$

البرهان :

- $[\Leftarrow]$ نفرض أن $FX \subset X$
من أجل كل x من X و y من $X^\perp$ لاحظ أن

$$\langle F^*y, x\rangle = \langle y, Fx\rangle = 0$$

هذا يعني :

$$\forall x \in X \to F^*y \perp x$$

أي $F^*y \in X^\perp$, وبالتالي يكون :

$$F^*X^\perp \subset X^\perp$$

- $[\Rightarrow]$ بنفس الطريقة نجد :

$$F^*X^\perp \subset X^\perp \Rightarrow FX \subset X$$

خواص المؤثر القرين

إذا كان $F,T \in l(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha}\, F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

2.8.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 8.25

يقال أن المؤثر $F \in l(H)$ قرين لنفسه إذا إنطبق مع قرينه أي $F = F^*$, عندها يكون:

$$\forall\ x\ ,\ y \in H\ \ \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

تعريف 8.26

المؤثر F من $l\,(H)$ يقال أنه غير سالب إذا حقق

$$\forall\ x \in H \qquad \langle Fx, x\rangle \geqslant 0$$

نتيجة 8.13

من أجل كل F من $l\,(H)$ المؤثر F^*F يكون غير سالب.

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F , T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$, لدينا:

1. من أجل كل α و β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$, فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H.
4. $\|F\| = \max(\|M_F\|, \|m_F\|)$ حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3.8.1 المؤثرالعكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y , حيث X , Y ف.ش.ن.

تعريف 8.27

يقال أن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $Fx = y$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذلك من أجل كل y من $E(F)$.
يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

تعريف 8.28
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه قابل للقلب بإستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي:

$$\exists\ F^{-1} \in l(Y,X)$$

نظرية 8.6
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X , Y لبناخ $(E(F)=Y)$, فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 8.14
ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث X , Y لبناخ , إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق: $TF=I_Y$ و $FT=I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $T=F^{-1}$.

نظرية 8.7 [5]
إذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $\|F\|<1$, فإن المؤثر $I-F$ قابل للقلب باستمرار , عندها يكون:

$$\|I-(I-F)^{-1}\| \leqslant \frac{\|F\|}{1-\|F\|},\ \ \|(I-F)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|F\|}$$

قضية 8.4
يكون للمؤثر F , $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c $(c>0)$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geqslant c\,\|x\|$$

4.8.1 المؤثرالمتقايس

تعريف 8.29
يسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان $\|Fx\|=\|x\|$, وذلك من أجل كل $x \in H$.

5.8.1 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H.
يعرف مؤثر الإسقاط العمودي على M على أنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M المعرف في القضية (**3.2**) , إختصارا يقال مؤثر إسقاط.
خصائص :

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geqslant 0$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leqslant \|x\|^2$
4. $P_M^2 = P_M$

قضية 8.5
إذا كان المؤثر F قرينا لنفسه في H و $F=F^2$, فإن F يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H.

9.1 تبولوجيا الفراغ $l(x,y)$

نعتبر أن X , Y فراغان لبناخ (معلوم أن $l(X,Y)$ أيضا لبناخ).

التبولوجيا المنتظمة

تعريف 9.30
تعرف التبولوجيا على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها التبولوجيا المتولدة من نظيمه.

تعريف 9.31
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بإنتظام (وفق نظيم الفراغ) نحو مؤثرا F من $l(X,Y)$, إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \overset{u}{\to} F \quad \text{أو} \quad F = u - \lim_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا القوية

تعريف 9.32
تعرف التبولوجيا القوية على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر Ψ_x المعرف كالتالي:

$$\Psi_x(F) = Fx \ / \ \Psi_x : l(X,Y) \longrightarrow Y$$

مستمرا من أجل كل x من X.

تعريف 9.33
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال أنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا القوية نحو مؤثرا F , إذا و فقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y , وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل x من X يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \|F_nx - Fx\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \overset{s}{\to} F \ \text{أو} \ F = s - \lim_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا الضعيفة

تعريف 9.34
تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر $\Psi_{x,f}$ المعرف كالتالي:

$$\Psi_{x,f} = f(Fx) / \Psi_{x,f} : l(X,Y) \longrightarrow \mathbb{C}$$

مستمرا من أجل كل x من X، ومن أجل كل f من Y'.

تعريف 9.35
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة نحو مؤثرا F , إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ متقاربة بضعف في الفراغ Y نحو Fx , وهذا من أجل كل x من X.
أي من أجل كل f من Y' يكون:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(F_nx) - f(Fx)\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{ أو } F = w - \lim_{n\to\infty} F_n$$

1.9.1 مبدأ المحدودية بإنتظام

ليكن X , Y فراغان لبناخ.

نظرية 9.8 [5]
إذا كانت $(F_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية متقاربة بقوة في الفراغ $l(X,Y)$ نحو F فإن:

1. $\forall n\geqslant 1$, $\exists\, c\in\mathbb{R}/\ \|F_n\|\leqslant c$, أي المتتالية $(F_n)_{n\geqslant 1}$ محدودة بإنتظام.
2. $F\in l(X,Y)$

البرهان :

1. المتتالية $(F_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة بقوة في الفراغ $l(X,Y)$ نحو F , يعني من أجل كل x من X المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y وبالتالي من أجل كل x من X المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ تكون محدودة.
أي أن:

$$\forall x\in X \to \|F_nx\|\leqslant M_x \quad \forall n\geqslant 1\ , M_x \text{ ثابت} \tag{3.1}$$

نبرهن أن الصيغة (3.1) تستلزم وجود كرة مغلقة.

$$\overline{O}(a_0,r_0)\,, a_0\in X, r_0>0$$

تكون المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ محدودة عليها.
نفرض العكس , أي أن المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ ليست محدودة على أي كرة مغلقة من X.
لتكن:

$$\overline{O}(x_0,\varepsilon_0)\,, x_0\in X, \varepsilon_0>0$$

كرة مغلقة من X.
واضح أن المتتالية $(F_nx)_{n\geqslant 1}$ ليست محدودة على الكرة المغلقة $\overline{O}(x_0,\frac{\varepsilon_0}{2})$ ومنه

$$\exists x_1\in \overline{O}\left(x_0,\frac{\varepsilon_0}{2}\right), \exists n_1\geqslant 1/\ \|F_{n_1}x_1\|\geqslant 1 \tag{4.1}$$

بما أن المؤثرات F_n , $n\geqslant 1$ مستمرة , فإنه يوجد $\varepsilon_1>0$ من أجله الصيغة (4.1) تكون صحيحة على الكرة المغلقة $\overline{O_1}(x_1,\varepsilon_1)$

$$(\overline{O_1}(x_1,\varepsilon_1)\subset \overline{O}(x_0,\varepsilon_0))$$

واضح أن المتتالية $(F_n x)_{n\geqslant 1}$ ليست محدودة على الكرة المغلقة $\overline{O}\left(x_1,\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$ ومنه

$$\exists x_2\in\overline{O}\left(x_1,\frac{\varepsilon_1}{2}\right),\exists n_2\geqslant n_1/\left\|F_{n_2}x_2\right\|\geqslant 2 \qquad (5.1)$$

بما أن المؤثرات $n\geqslant 1, F_n$ مستمرة , فإنه يوجد $\varepsilon_2>0$ من أجله الصيغة (5.1) تكون صحيحة على الكرة المغلقة $\overline{O_2}\left(x_2,\varepsilon_2\right)$

$$\left(\overline{O_2}\left(x_2,\varepsilon_2\right)\subset\overline{O_1}\left(x_1,\varepsilon_1\right)\right)$$

وهكذا نستمر في العملية حتى نحصل على متتالية أعداد موجبة $(\varepsilon_m)_{m\geqslant 1}$ تحقق $\lim\limits_{m\to\infty}\varepsilon_m=0$ ووجود عنصر x^* من X ينتمي إلى كل الكرات

$$k\geqslant 1,\overline{O_k}\left(x_k,\varepsilon_k\right)$$

من أجله تتحقق المتراجحة $\left\|F_{n_k}x^*\right\|\geqslant k$ وهذا مناف للمتراجحة (3.1) وبالتالي توجد كرة مغلقة

$$\overline{O}\left(a_0,r_0\right),a_0\in X,r_0>0$$

تكون المتتالية $(F_n x)_{n\geqslant 1}$ محدودة عليها.
لاحظ أنه من أجل كل x $(x\neq 0)$ من X يكون

$$\left(a_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)\in\overline{O}\left(a_0,r_0\right)$$

أي:

$$\left\|a_0-\left(a_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)\right\|\leqslant r_0$$

وعليه

$$\exists M>0\quad/\quad\left\|F_n\left(a_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)\right\|\leqslant M$$

لاحظ من ناحية ثانية

$$\exists M>0\quad/\quad\left\|F_n\left(a_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)\right\|=\left\|\frac{r_0}{\|x\|}F_n\left(x\right)+F_n\left(a_0\right)\right\|\geqslant$$

$$\geqslant\left\|\frac{r_0}{\|x\|}F_n\left(x\right)\right\|-\left\|F_n\left(a_0\right)\right\|\geqslant\frac{r_0}{\|x\|}\left\|F_n\left(x\right)\right\|-M$$

هذا يعني أن:

$$\left\|F_n\left(x\right)\right\|\leqslant\frac{2M}{r_0}\|x\|$$

بما أن $F_n\left(0\right)=0$ فإن:

$$\forall x\in X\to\left\|F_n\left(x\right)\right\|\leqslant\frac{2M}{r_0}\|x\|$$

أي أن:

$$\exists c=\frac{2M}{r_0}\in\mathbb{R}/\left\|F_n\right\|\leqslant c\qquad,\forall n\geqslant 1$$

2. بما أن
$$\lim_{n\to\infty} F_n x = Fx$$
من أجل كل x من X , فإنه من أجل كل x , y من X و α , β من K يكون
$$F(\alpha x+\beta y)=\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha x+\beta y)=\lim_{n\to\infty}(\alpha F_n x+\beta F_n y)=\alpha Fx+\beta Fy$$
بما أن النظيم تطبيق مستمر , فإنه حسب (1) نجد
$$\|Fx\|=\left\|\lim_{n\to\infty} F_n x\right\|=\lim_{n\to\infty}\|F_n x\|\leqslant \lim_{n\to\infty}\|F_n\|\,\|x\|\leqslant c\,\|x\|$$
أي أن $\|F\|\leqslant c$.
وبالتالي يكون $F\in l(X,Y)$.

نظرية 9.9 [5]
تكون المتتالية $(F_n)_{n\geqslant 1}$ من $l(X,Y)$ متقاربة بقوة نحو F من الفراغ $l(X,Y)$, إذا وفقط إذا تحقق مايلي:
1. المتتالية $(\|F_n\|)_{n\geqslant 1}$ محدودة.
2. $\lim_{n\to\infty} F_n = Fx$ من أجل كل x من M , $\big(M$ مجموعة , الغلاف الخطي لعناصرها كثيف في $X\big)$.

البرهان :

- $[\Leftarrow]$
  1. المتتالية $(\|F_n\|)_{n\geqslant 1}$ محدودة حسب النظرية السابقة.
  2. واضحة.
- $[\Rightarrow]$ نفرض أن الشرط 1 , 2 محقق.
  بوضع $c=\sup_{n\geqslant 1}\|F_n\|$ تكون
$$\|F_n\|\leqslant c \qquad ,n\geqslant 1$$
نرمز للغلاف الخطي للمجموعة M بالرمز M_0.
بما أن F , F_n $n\geqslant 1$ مؤثرات خطية , فإنه من (2) نستنتج أن:
$$\forall x\in M_0 \to \lim_{n\to\infty} F_n x = Fx$$
أي أن:
$$\forall x\in L(M),\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\geqslant 1/\forall n\geqslant n_\varepsilon \to \|F_n x - Fx\|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1}$$
بما أن $\overline{M_0}=X$, فإنه
$$\forall\xi\in X,(\xi\notin M_0),\forall\varepsilon>0,\exists X_\xi\in M_0/\ \|\xi-x_\xi\|<\frac{\varepsilon}{2(c+\|F\|)} \tag{7.1}$$
من الصيغة (6.1) و (7.1) نستنتج أن:
$$\|F_n\xi-F\xi\|=\|F_n\xi-F_n x_\xi+F_n x_\xi-Fx_\xi+Fx_\xi-F\xi\|\leqslant$$

$$\leqslant \|F_n\xi - F_nx_\xi\| + \|F_nx_\xi - Fx_\xi\| + \|Fx_\xi - F\xi\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F_n\| \|\xi - x_\xi\| + \|F_nx_\xi - Fx_\xi\| + \|F\| \|x_\xi - \xi\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\xi - x_\xi\| (\|F_n\| - \|F\|) + \|F_nx_\xi - Fx_\xi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(c + \|F\|)}(c + \|F\|) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

هذا يعني أن:
$$\forall \xi \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geqslant 1/\forall n \geqslant n_\varepsilon \to \|F_n\xi - F\xi\| < \varepsilon$$
أي أن المتتالية متقاربة بقوة نحو F من الفراغ $l(X,Y)$.

10.1 نظريةالأطياف

1.10.1 مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي

ليكن Fمؤثرا من $L(X)$, حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx - \lambda Ix = y \tag{8.1}$$

أو إختصارا نكتب:
$$F_\lambda x = y/\ F_\lambda \equiv F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب.
في حالة $y = 0$ المعادلة (8.1) تسمى متجانسة.

تعريف 10.36
العدد المركب λ يقال أنه نقطة نظامية للمؤثر F إذاكان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار , أي:

$$\exists (F_\lambda)^{-1} \in l(X)$$

يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$, ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\ \ (F_\lambda)^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 10.37
يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب , أي:
$$\sigma(F) = \mathbb{C} \backslash \rho(F)$$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا.
(أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثرF) تسمى بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$, ونكتب:

$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\ \ker F_\lambda \neq 0\}$$

2. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا مجموعة تعريفه أي المجموعة $E\left(F_\lambda\right)$ كثيفة في X , لكنه غير محدود.
تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma\left(F\right)$, ونكتب:

$$C_\sigma\left(F\right) = \{\lambda \in \mathbb{C}P_\sigma\left(F\right) / \; E\left(F_\lambda\right) \neq \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$

حيث $\left(F_\lambda\right)^{-1}$ غير محدود.

3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا , (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E\left(F_\lambda\right)$ ليست كثيفة في X.
تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$, ونكتب:

$$R_\sigma\left(F\right) = \{\lambda \in CP_\sigma\left(F\right) / \; \overline{E\left(F_\lambda\right)} \neq X\}$$

تعريف 10.38
يعرف مؤثر الحالة للمؤثر F بأنه المؤثر F_λ حيث $\lambda \in \rho\left(F\right)$ ويرمز له بالرمز $R_\lambda\left(F\right)$ أي:

$$R_\lambda\left(F\right) = F_\lambda^{-1} \qquad \lambda \in \rho\left(F\right)$$

تعريف 10.39
نسمي مجموعة طيفية للمؤثر T كل مجموعة جزئية من طيفه تكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد.

نتائج

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \; \|\lambda\| > \|F\|\} \subset \rho\left(F\right)$
3. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \; \|\lambda\| \leq \|F\|\} \supset \sigma\left(F\right)$

11.1 طيف المؤثرالقرين

قضية 11.6
ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب بإستمرار فإن المؤثر F^* أيضا يكون قابلا للقلب بإستمرار , عندها يكون

$$\left(F^*\right)^{-1} = \left(F^{-1}\right)^*$$

2. $\sigma\left(F^*\right) = \{\overline{\lambda} / \; \lambda \in \sigma\left(F\right)\}$

12.1 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.
2. $\sigma(F) \subset [m_F, M_F]$
حيث

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين.
4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F , فإن متممه العمودي $M^{\perp}$ يكون كذلك.

قضية 12.7
العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$.

نظرية 12.10 [5]
ليكن المؤثرين F , T من $l(X)$ إذا كانت λ , ξ من $\rho(F)$ فإن:

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi) R_\lambda(F) R_\xi(F) \tag{9.1}$$

الصيغة (9.1) تسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

قضية 12.8
المجموعة G مجموعة كل المؤثرات القابلة للقلب من $l(X)$ هي مجموعة مفتوحة بالنسبة للتبولوجيا المنتضمة في $l(X)$ وتحوي بالإضافة للمؤثر A الكرة O_A المعرفة ب

$$O_A \left\{ B / |A - B| < \left|A^{-1}\right|^{-1} \right\}$$

إذا كان المؤثر B في الكرة المذكورة فإن B^{-1} يعطى على شكل سلسلة

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(A - B) A^{-1} \right]^n$$

البرهان :

ليكن $|I - B| < 1$ لاحظ أن السلسلة

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (I - B)^n$$

متقاربة .
بما أن

$$SB = BS = (I - (I - B)) S = \sum_{n=0}^{\infty} (I - B)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (I - B)^n = I$$

فإن المجموعة

$$\{B / |I - B| < 1\} \subset G$$

نفرض أن

$$|A-B|<\left|A^{-1}\right|^{-1}\ \ ,\ \ A\in G$$

يكون

$$\left|I-BA^{-1}\right|=\left|(A-B)\,A^{-1}\right|<1$$

وعليه يكون المؤثر BA^{-1} قابل للقلب ومقلوبه يعطى بالعلاقة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(I-BA^{-1}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((A-B)\,A^{-1}\right)^{n}$$

ومنه B قابل للقلب في $l\,(X)$ ومقلوبه يعطى بالعلاقة

$$B^{-1}=A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left((A-B)\,A^{-1}\right)^{n}$$

نتيجة 12.15

إذا كان $T\ ,\ T_1$ من $l\,(X)$ و

$$|T-T_1|<|R_\lambda\,(T)|^{-1}\ \ ,\ \ \lambda\in\rho\,(T)$$

فإن $\lambda\in\rho\,(T_1)$ و

$$R_\lambda\,(T_1)=R_\lambda\,(T)\sum_{n=0}^{\infty}\left((T_1-T)\,R_\lambda\,(T)\right)^{n}$$

قضية 12.9

إذاكان $T\in l\,(X)$ و $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان $T_1\in l\,(X)$ تحقق $|T_1-T|<\delta$ يكون

$$\sigma\,(T_1)\subseteq\vartheta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)$$

و

$$R\,(\lambda,T_1)-R\,(\lambda,T)<\varepsilon\ ,\ \ \lambda\notin\vartheta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)$$

$\Big($$\vartheta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)$ جوار للطيف نصف قطره ε أي $\delta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)=\{\lambda/d\,(\lambda,\sigma\,(T))<\varepsilon\}$$\Big)$

البرهان :

من القضية (**12.8**)

$$\lim_{\lambda\to\infty}|R_\lambda\,(T)|=\lim_{\lambda\to\infty}\left|\lambda^{-1}\left(1-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right|=0$$

وعليه تكون

$$|R\,(\lambda,T)|\leqslant N_\varepsilon$$

من أجل λ من متممة $\vartheta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)$

ومنه حسب النتيجة السابقة من المتراجحة

$$|T_1-T|<N_\varepsilon^{-1}$$

يكون

$$\sigma\,(T_1)\subset\delta\,(\sigma\,(T)\,,\varepsilon)$$

حسب نفس النتيجة يكون

$$|R(\lambda,T_1)-R(\lambda,T)|<\frac{N_\varepsilon^2\,|T_1-T|}{1-|T_1-T|\,N_\varepsilon}<\varepsilon$$

عندما

$$|T_1-T|<\delta_2=\frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2-\varepsilon N_\varepsilon}$$

ومنه يأخذ δ أصغري δ_1 , δ_2 يكون المطلوب.

13.1 تحليلية الحالة

نظرية 13.11 [5]
حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهاية.
عندها يكون:

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)\,R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0=\infty$ يكون:

$$R_\lambda(F)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}F^n$$

14.1 دالة المؤثر

ليكن F مؤثرا من $l(X)$ $\big($ X بناخ$\big)$.
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود , أي $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F)=\sum_{k=0}^{n}a_kF^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة $\big($التحليلية على$\mathbb{C}\big)$, أي إذا كانت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F) \in l(B)$.
يمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف , هذا الصنف يرمز له ب $A(F)$.
-تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف (F) بأحد الصيغ التالية:

$$f(F) = \frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega} f(\lambda) R_\lambda(F)\, d\lambda$$

أو

$$f(F) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} F^n \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\partial\Omega \cup \Omega = \overline{\Omega}$ واقع في نطاق تحليلية f.
Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نظرية 14.12 [7]
إذا كانت الدالة f من الصنف , $A(F)$ فإن:

$$f(\sigma(F)) = \sigma(f(F))$$

قضية 14.10
إذا كانت الدالتان f , g من الصنف $A(F)$, $A(f(F))$ على التوالي و h دالة معرفة كالتالي $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ فإن h من الصنف $A(F)$, عندها يكون $h(F) = g(f(F))$.

نتيجة 14.16
إذا كانت σ مجموعة طيفية للمؤثر T و f من الصنف $A(T)$ حيث f تساوي واحد على σ وصفر على باقي أجزاء الطيف , فإننا نرمز لدالة المؤثر $f(T)$ بالرمز $E(\sigma,T)$ ونكتب إختصارا $E(\sigma)$ بدلا من $E(\sigma,T)$.

نظرية 14.13
إذا كانت f من $A(T)$ و τ مجموعة طيفية لـ $f(T)$ فإن $\sigma(T) \bigcap f^{-1}(\tau)$ مجموعة طيفية للمؤثر T عندها يكون

$$E(\tau, f(T)) = E\left(f^{-1}(\tau), T\right)$$

البرهان :

ليكن $\varphi_\tau(\mu) = 1$ من أجل كل μ في جوار ما للمجموعة τ و $\varphi_\tau(\mu) = 0$ من أجل كل μ من جوار ما لباقي أجزاء الطيف $\sigma(f(T))$.
عندها يكون

$$\varphi_\tau(f(T)) = E(\tau, f(T))$$

إذا كانت τ' متمم τ بالنسبة للطيف $\sigma(f(T))$ فإنه حسب نظرية تحويل الطيف (**14.12**) نستنتج أن الطيف $\sigma(T)$ هو إتحاد مجموعتين غير المتقاطعتين $f^{-1}(\tau)$, $f^{-1}(\tau')$.
بما أن f مستمرة فأن كل من المجموعتين تكون مغلقة ومفتوحة في آن واحد.
ومنه نستنتج أن

$$\sigma = \sigma(T) \bigcap f^{-1}(\tau)$$

تكون مجموعة طيفية للمؤثر T.
إذا كانت :

$$\varphi_\sigma(T) = \varphi_\tau(f(T))$$

فإن
$$E(\sigma,T)=\varphi_\sigma(T)$$
ومنه حسب القضية (**14.10**) يكون:
$$E(\tau,f(T))=E(\sigma,T)=E\left(f^{-1}(\tau),T\right)$$

نظرية 14.14 [5]

إذا كانت $f,g\in A(T)$, فإن المعادلة $f(T)=g(T)$ محققة إذا وفقط إذا تحققت المعادلة $f(\lambda)=g(\lambda)$ في مجموعة ما مفتوحة حاوية لكل الطيف $\sigma(T)$ بإستثناء عدد منته من الأقطاب $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\}$ للمؤثر F ومن أجل كل $1\leqslant i\leqslant k$ الدالة $f-g$ في النقط λ_i تملك صفرا من الدرجة أكبر أو يساوي درجة القطب λ_i.

نظرية 14.15

ليكن T من $l(X)$ $\left(X \text{ بناخ}\right)$
إذا كانت λ قطب للمؤثر T من الدرجة α , فإن λ تملك علو α أي:
$\big(\alpha$ هو أصغر الأعداد الطيفية التي تحقق $\quad (\lambda I-T)^m x=0\big)$ بالإضافة إلى ذلك النقطة λ من الطيف المعزولة تكون قطبا من الدرجة α إذا وفقط إذاكانت:
$$(\lambda I-T)^\alpha E(\lambda,T)=0\ ,\ (\lambda I-T)^{\alpha-1}E(\lambda,T)\neq 0$$

البرهان :

في برهان النظرية (**14.14**) وجدنا سلسلة لوران للحالة $R(\xi,T)$ في الجوار
$$0<|\xi-\lambda|<\varepsilon$$
للنقطة المعزولة λ أي السلسلة
$$R(\xi,T)=\sum_{n=-r}^{+r}A_n(\lambda-\xi)^n$$
حيث
$$A_{(m+1)}=-(\lambda I-T)^m E(\lambda,T)$$
ومنه λ قطب من الدرجة α إذا وفقط إذا تحقق
$$(\lambda I-T)^\vartheta E(\lambda,T)=0,(\lambda I-T)^{\vartheta-1}E(\lambda,T)\neq 0$$
برهان النفطة الأولى من النظرية نفرض λ قطب من الدرجة α
عندها يوجد شعاع x حيث
$$(\lambda I-T)^\alpha x=0,(\lambda I-T)^{\alpha-1}x\neq 0$$
هذا يعني علو λ لا يكون أقل من α.
نفرض أن علو λ يساوي n عندها من أجل شعاع x بحيث
$$(\lambda I-T)^n x=0\quad ,\quad (\lambda I-T)^{n-1}x\neq 0$$
وبما أن
$$R(\xi,T)x=-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda I-T)^i x}{(\lambda-\xi)^{i+1}}\quad ,\quad |\lambda-\xi|>|\lambda I-T|$$

فإنه بعد ضرب طرفي المعادلة بالمؤثر

$$(\xi I - T) = (\xi - \lambda) I + (\lambda I - T)$$

يكون من الواضح أن الدالة

$$R(\xi, T) x = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda I - T)^{jx}}{(\lambda - \xi)^{j+1}}$$

منتظمة على كل المستوي بإستثناء محتمل للنقطة $\lambda = \xi$.

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ منتظمة يعني } f \text{معرفة في جوار نقطة } z = \alpha \, (\alpha \neq 0) \text{ ونكتب شكل السلسلة} \\ f(z) = \sum_{0}^{\infty} C_n (2 - \alpha)^n \\ \text{متقاربة في جوار ما لـ } \alpha \end{array} \right)$$

وعليه إذا كانت K منحنى مغلق قابل للتقويم يحيط بالطيف $\sigma(f)$ و Γ دائرة صغيرة محيطة بـ λ , فإن

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_K R(\lambda, T) x d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\xi, T) x d\xi = e(T) x$$

ومنه يكون

$$(\lambda I - T)^\alpha x = (\lambda I - T)^\alpha e(T) x = 0$$

أي أن $\alpha \leqslant n$.

نظرية 14.16

إذا كان T_σ إقتصار المؤثر T على الفراغ $X_\sigma = E(\sigma) X$ فإن:

1. $\sigma(T_\sigma) = \sigma$
2. إذا كانت $f \in A(T)$, فإن:
$$f \in A(T_\sigma)$$
و $f(T_\sigma) = f(T)_\sigma$
3. النقطة λ من σ تكون قطب للمؤثر T من الدرجة k إذا وفقط إذا كانت قطب للمؤثر T_σ من نفس الدرجة.

البرهان :

لتكن $\lambda \in \sigma$ حيث $\lambda \notin \sigma(T_\sigma)$
عندها يوجد مؤثر خطي محدود A في الفراغ X_σ حيث

$$(\lambda I - T) A x = A (\lambda I - T) x = x \quad , \quad x \in X_\sigma$$

لتكن g دالة تساوي الصفر في كل النقط μ من جوار ما لـ σ تساوي $(\lambda - \mu)^{-1}$ في كل النقاط μ من جوار ما لنقط الطيف $\sigma(T)$ الباقية.
عندها يكون :

$$g(T) = (\lambda I - T) = (\lambda I - T) g(T) = I - E(\sigma)$$

إذا عرفنا مؤثر $A_1 : X \to X$ كالتالي :

$$A_1 x = A E(\sigma) x$$

يكون

$$(\lambda I - T)(A_1 + g(T))(\lambda I - T) = I$$

ومنه $\lambda \in \rho(T)$ وهذا مناف لكون $\lambda \in \sigma$ ومنه

$$\sigma \subseteq \sigma(T_\sigma)$$

العكس نفرض أن $\lambda \notin \sigma$
ليكن h دالة تساوي $(\lambda - \mu)^{-1}$ في النقطة μ من جوار ما لـ σ لا تحوي λ و تساوي الصفر في جوار ما لباقي نقط الطيف $\sigma(T)$
عندها يكون:

$$h(T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)h(T) = E(\sigma)$$

ومنه من أجل $h(T)_\sigma$ إقتصار المؤثر $h(T)$ على الفراغ X_σ تتحقق الصيغة التالية:

$$h(T)_\sigma(\lambda I_\sigma - T_\sigma) = (\lambda I_\sigma - T_\sigma)h(T_\sigma) = I_\sigma$$

ومنه $\lambda \notin \sigma(T_\sigma)$ أي :

$$R_\lambda(T_\sigma) = R_\lambda(T)_\sigma \ , \ \sigma(T_\sigma) \subseteq \sigma$$

لتكن $f \in A(T)$ و U جوار $\sigma(T)$ حدوده B متكونة من عدد منته من منحنيات جوردان القابلة للتقويم و $U \cup B$ يقع في نطاق تحليلية الدالة f عندها

$$f(T_\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_B f(\lambda) R_\lambda(T)\, d\lambda\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda) R_\lambda(T)_\sigma\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_B f(\lambda) R_\lambda(T_\sigma)\, d\lambda = f(T_\sigma)$$

حسب النظرية (**14.15**) , λ يكون قطب من الدرجة k للمؤثر T إذا وفقط إذا كان

$$(\lambda I - T)^k E(\lambda) = 0, (\lambda I - T)^{k-1} E(\lambda) \neq 0$$

بما أن $\lambda \in \sigma$ فإن

$$E(\lambda) E(\sigma) = E(\lambda)$$

وعليه يكون

$$(\lambda I - T)^m E(\lambda) = (\lambda I_\sigma - T_\sigma)^m E(\lambda), m = 1, 2, ...$$

ومنه النقطة λ تكون قطب للمؤثر T من الدرجة k إذا وفقط إذا كانت قطب للمؤثر T_σ من نفس الدرجة .

15.1 التحليل الطيفي

نظرية 15.17 [5]
كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_μ متعلقة بوسيط حقيقي μ وتحقق.

1. $E_\mu \leq E_\nu \ , \ \mu \leq \nu$
2. $E_{\mu+0} = E_\mu$

3. $\mu < m_F \longrightarrow E_\mu = 0\ ,\ \mu \geq M_F \longrightarrow E_\mu = I$

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F = \int_{m_F-0}^{M_F} \mu dE_\mu$$

نتيجة 15.17

- $F^n = \int_{m_F-0}^{M_F} \lambda^n dE_\lambda,\ \ n \geqslant 1$
- $\|Fx\|^2 = \langle Fx, Fx\rangle = \langle F^2x, x\rangle = \int_{m_F-0}^{M_F} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle$
- $\mu \in \rho(F) \longrightarrow R_\mu = \int_{m_F-0}^{M_F} \frac{\lambda}{\lambda-\mu} dE_\lambda$

الفصل 2

متراجحات نظيم الحالة

1.2 المؤثر المتراص

ليكن Y , X ف.ش.ن على الحقل $\mathbb{K}$ $\left(\mathbb{K}\right.$ إما $\mathbb{R}$ أو $\left.\mathbb{C}\right)$ و F من $L\left(X,Y\right)$.

تعريف 1.40

المؤثر F يقال أنه متراص , إذا حقق أحد الشروط التالية :

1. المؤثر F يحول كل مجموعة محدودة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y.
2. المؤثر F يحول كرة الوحدة المغلقة في X إلى مجموعة شبه متراصة في Y.
3. المؤثر F يحول كل متتالية محدودة في X إلى متتالية في Y يمكن إخراج منها متتالية جزئية أساسية إي (لكوشي).

يرمز لمجموعة المؤثرات المتراصة من X في Y بالرمز $l_{\infty}\left(X,Y\right)$.

نتيجة 1.18

$l_{\infty}\left(X,Y\right)$ فراغ شعاعي نظيمي جزئي مغلق من الفراغ $l\left(X,Y\right)$

نتيجة 1.19

إذا كان $F\in l_{\infty}\left(X\right)$ و $T\in l\left(X\right)$, فإن :

$$TF\in l_{\infty}\left(X\right) \qquad FT\in l_{\infty}\left(X\right)$$

نظرية 1.18

المؤثر F من $l\left(X,Y\right)$ حيث X , Y بناخ يكون من $l_{\infty}\left(X,Y\right)$ إذا وفقط إذا كان F^{*} من $l_{\infty}\left(X',Y'\right)$.

نتيجة 1.20

إذا كان T من $l_{\infty}\left(X\right)$, فإنه بوضع $T=T-\lambda I \qquad (\lambda\neq 0)$ يكون:

1. $\dim\ker F<\infty \qquad , \qquad \dim\ker F^{*}<\infty$
2. $E\left(F^{*}\right),E\left(F\right)$ مغلقتان.
3.

$$\ker F=\{0\}\Leftrightarrow E\left(F\right)=X$$
$$\ker F^{*}=\{0\}\Leftrightarrow E\left(F^{*}\right)=X'$$

نظرية 1.19
إذا كان F من $l_{\infty}(X)$ حيث X بناخ غير منته , فإن:

1. $0 \in \sigma(F)$
2. $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset \rho_{\sigma}(F)$
3. $\lambda \in \sigma(F) \setminus \{0\} \Rightarrow \ker F_{\lambda} < \infty$
4. $\sigma(F)$ مجموعة على الأكثر قابلة للعد إذا كانت غير منتهية فإنها تملك نقطة تراكم واحدة هي الصفر.

البرهان :

1. نفرض العكس.
لاحظ أن:
$$0 \notin \sigma(F) \Leftrightarrow 0 \in \rho(F) \Leftrightarrow \exists F^{-1} \in l(X)$$
بما أن $F \in l_{\infty}(X)$, $F^{-1} \in l(X)$, فإنه حسب النتيجة (**1.19**) يكون المؤثر الحيادي $I = FF^{-1}$ من $l_{\infty}(X)$ ومنه كرة الوحدة المغلقة تكون متراصة , هذا حسب النتيجة (**1.18**) مناف لكون $\dim X = \infty$.
وعليه يكون $0 \in \sigma(F)$.

2. نفرض أن $0 \neq \lambda \notin \rho_{\sigma}(F)$.
$$\lambda \notin \rho_{\sigma}(F) \Leftrightarrow \ker(F - \lambda I) = \{0\}$$
ومنه حسب النتيجة (**1.20**) يكون $E(F - \lambda I) = X$.
ومنه نستنتج أن $\lambda \in \rho(F)$, أي أن $0 \neq \lambda \notin \rho(F)$ وبالتالي حتما $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset \rho_{\sigma}(F)$

3. لتكن $\lambda \in \sigma(F) \setminus \{0\}$ ومنه حسب النتيجة (**1.20**) , وبما أن $F \in l_{\infty}(X)$, فإن $\ker F_{\lambda} < \infty$

4. معلوم عندنا:
$$\lambda \in \rho(F) \Rightarrow |\lambda| \leqslant \|F\|$$
نبرهن أنه من أجل كل α , $(0 < \alpha < \|F\|)$ الأعداد (القيم الذاتية) λحيث $\alpha \leqslant |\lambda|$ تكون منتهية.
نفرض العكس , أي توجد متتالية $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ غير منتهية , حدودها مختلفة مثنى مثنى من القيم الذاتية تحقق:
$$n \geqslant 1 \quad , \quad |\lambda_n| \geqslant \alpha$$
لتكن $(x_n)_{n \geqslant 1}$ متتالية الأشعة الذاتية المرفقة بالمتتالية $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$, أي:
$$n \geqslant 1 \quad , \quad Fx_n = \lambda_n x_n$$
نبرهن أنه من أجل كل k من الأشعة $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ مستقلة خطيا.
نفرض أنها صحيحة من أجل k ونبرهن صحتها من أجل $k+1$.
نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $k+1$, أي:
$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \qquad (1.2)$$

لاحظ من الصيغة (1.2) نستنتج أن:

$$x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}c_ix_i \Rightarrow F\left(x_{k+1}\right)=\sum_{i=1}^{k}c_iF\left(x_i\right)\Rightarrow \lambda_{k+1}x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}c_i\lambda_ix_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1}\sum_{i=1}^{k}c_ix_i=\sum_{i=1}^{k}c_i\lambda_ix_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\right)c_ix_i=0$$

وهذا مستحيل لأن $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ مستقلة خطيا و

$$1-\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}}\neq 0\ ,\ \ i=1...k$$

وبالتالي تكون الخاصية صحيحة من أجل $k+1$.
ليكن X_{k+1} الفراغ المتولد من الأشعة $\{x_1,x_2,...,x_k\}$.
واضح أن:

$$X_n\subset X_{n+1}\qquad ,\qquad n\geqslant 1$$

نطبق النظرية التمهيدية لريس على الفراغ X_k نجد:

$$\exists y_{k+1}\in X_{k+1},\|y_{k+1}\|=1/d\left(y_{k+1},X_{k+1}\right)>\frac{1}{2} \tag{2.2}$$

لاحظ أن المتتالية $\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_{n\geqslant 1}$ محدودة.
بما أن: $y_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kx_k$, فإن:

$$F\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_{n\geqslant 1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\lambda_n}F\left(x_k\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k\lambda_k}{\lambda_n}x_k+\alpha_nx_n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k\lambda_k}{\lambda_n}x_k-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_kx_k+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_kx_k+\alpha_nx_n=z_n+y_n$$

حيث:

$$z_n=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}-1\right)x_k\ \ \in X_{n-1}$$

ومنه من أجل $p>q\geqslant 2$ نجد :

$$\left\|F\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right)-F\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\|=\|y_p+z_p-(y_q+z_q)\|=\|y_p-(y_q+z_q-z_p)\|$$

بما أن:

$$X_{q-1}\subset X_q\subset X_{p-1}\subset X_p\qquad ,\qquad n\geqslant 1$$

فإن:

$$y_q+z_q-z_p\in X_{p-1}$$

ومنه حسب الصيغة (2.2) نجد :

$$\left\| F\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - F\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right) \right\| > \frac{1}{2}$$

هذا يعني أنه من المتتالية $\left(F\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ لا يمكن إخراج متتالية جزئية متقاربة وهذا مناف لكون المؤثر F متراص وذلك لأن المتتالية $\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_{n\geqslant 1}$ محدودة.
ومنه نستنتج أنه خارج الدائرة التي مركزها الصفر ونصف قطرها α , $(0 < \alpha < \|F\|)$ يوجد فقط عدد منته من القيم الذاتية لمؤثر F.
من ناحية ثانية عندنا الطيف $\sigma(F)$ متراص و هذا يعني أن كل جزء غير منته منه له نقطة تراكم.
بما أن الجزء غير المنته إن وجد يكون داخل الكرة المفتوحة ذات المركز صفر ونصف القطر α , فإن الصفر هو نقطة التراكم الوحيدة له.

نتيجة 1.21
إذا كان $F \in l_\infty(X)$.

1. نقطة المجموعة $\sigma(F)\setminus\{0\}$ يمكن ترتيبها حسب تناقص طويلتها.

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ...... \geqslant |\lambda_n| \geqslant ......, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

2. كل نقط المجموعة $\sigma(F)\setminus\{0\}$ نقط معزولة.
3. الصفر قد يكون وقد لا يكون قيمة ذاتية للمؤثر F.

نتيجة 1.22
إذا كان $F \in l_\infty(X)$ وقرين لنفسه , فإنه يملك على الأقل قيمة ذاتية مخالفة للصفر.

نظرية 1.20 [5]
كل مؤثر F متراص و قرين لنفسه يملك جملة متعامدة ومتجانسة منتهية أو غير منتهية من الأشعة الذاتية $\{e_1, e_2, ...\}$ مرفقة بقيمه الذاتية $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ غير المعدومة.
هذه الجملة تحقق من أجل كل g من $E(F)$ مساوات بارسفيل , أي:

$$\|g\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i\rangle|^2$$

أي الجملة $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ تامة في $E(F)$.

نتيجة 1.23
إذا كان $F \in l_\infty(H)$ وقرين لنفسه , فإنه يملك مجموعة على الأكثر قابلة للعد من القيم الذاتية $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ غير المعدومة وتحقق $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ وجملة من الأشعة الذاتية $(e_n)_{n\geqslant 1}$ مرفقة بيها عندها يكون

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n\rangle e_n$$

قضية 1.11
لكن F من $l_\infty(H)$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية دوال من الصنف $A(F)$ حيث

$$f_n(0)=0 \qquad n\geqslant 1$$

و V جوار للطيف $\sigma(F)$ تكون فيه كل الدوال f_n / $n\geqslant 1$ تحليلية , إذا كانت $(f_n(\lambda))_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو $f(\lambda)$ بإنتظام من أجل λ من V , فإن متتاليات المؤثر $(f_n(T))_{n\geqslant 1}$ متقاربة بإنتظام نحو المؤثر $f(T)$.

قضية 1.12
لكن F من $l_\infty(H)$, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية دوال من الصنف $A(F)$ حيث

$$f_n(0)=0 \qquad n\geqslant 1$$

و V جوار للطيف $\sigma(F)$ تكون فيه كل الدوال f_n / $n\geqslant 1$ تحليلية إذا كانت $(f_n(\lambda))_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو $f(\lambda)$ بإنتظام من أجل λ من V فإن متتاليات المؤثر $(f_n(T))_{n\geqslant 1}$ متقاربة بإنتظام نحو المؤثر $f(T)$.

2.2 الأعداد المميزة

تعريف 2.41
ليكن المؤثر F من $l_\infty(H)$, H هيلبار قابل للفصل , العدد $(s>0)$ الذي من أجله يوجد حل غير معدوم للجملة التالية:

$$\begin{cases} Fx = sy \\ F^*y = sx \end{cases}$$

يسمى قيمة شاذة أو العدد المميز للمؤثر F , والحلول x , y المرفقة به تسمى العناصر الأساسية لشميد.

العدد s^2 ينطبق مع القيم الذاتية لكل من المؤثرين غير السالبين والمتراصين FF^* و F^*F , حسب النتيجة (**1.23**) بما أن المؤثر F من $l(H)$ فإن المؤثر T , $T=FF^*$ يملك مجموعة على الأكثر قابلة للعد من القيم الذاتية $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ غير معدومة وتحقق $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$, وجملة من الأشعة الذاتية $(f_n)_{n\geqslant 1}$ المرفقة بها تحقق:

$$\forall f\in H \to Tf=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle f,f_n\rangle f_n$$

ومنه الأعداد المميزة للمؤثر F يمكن ترقيمها في متتالية ليست متزايدة ويكرر العدد بقدر درجة تضعيفه.
كل عدد منها يسمى s–عدد للمؤثر F المتراص.

نتيجة 2.24

1. $\lambda_i=\langle Tf_k,f_k\rangle=\langle F^*Ff_k,f_k\rangle=\langle Ff_k,Ff_k\rangle=s_i^2 \quad , \quad 1,2,...$
2. $s_1\geqslant s_2\geqslant .....\geqslant s_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

إذا وجد أكثر من مؤثر نكتب :
$s(F)$ لدلالة على s–عدد للمؤثر F , و $\lambda(T)$ لدلالة القيمة الذاتية للمؤثر T.

نظرية 2.21
إذا كان F من $l_\infty(H)$ و H_0 الفراغ الجزئي الصفري للمؤثر

$$\left(\forall f \in H_0 \to Ff = 0 \text{ أي}\right)$$

فإنه يمكن إيجاد جملتين $\{g_n\}_{n\geqslant 1}, \{f_n\}_{n\geqslant 1}$ متعامدتين ومتجانستين , ومتتالية اعداد موجبة $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ ليست متزايدة حيث $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, عندها يتحقق من أجل كل f من H مايلي:

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \qquad , \qquad f_0 \in H_0$$

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle f, f_n \rangle g_n$$

البرهان :

1. حالة المؤثر F قرين لنفسه من النظرية (**1.20**) نستنتج أن

$$\forall f \in H \to Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$$

حيث $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ القيم الذاتية غير المعدومة لـ F و $(e_n)_{n\geqslant 1}$ الأشعة الذاتية المرفقة بها.
بوضع

$$f_0 = f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

نجد

$$Ff_0 = Ff - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n = 0 \qquad \text{و} \qquad f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

ومنه يكفي أخد

$$\alpha_n = \lambda_n \qquad , \qquad g_n = f_n = e_n \qquad , \qquad n = 1, 2, ...$$

2. حالة المؤثر F كيفي من $l(H)$.
لتكن $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ للمؤثر T حيث $T = F^*F$.
بما أن المؤثر $T = F^*F$ قرين لنفسه , فإنه حسب الحالة (1) يكون

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \tag{3.2}$$

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle f, f_n \rangle f_n$$

حيث $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ القيم الذاتية غير المعدومة لـ T , و $(f_n)_{n\geqslant 1}$ الأشعة الذاتية المرفقة بها.
واضح أن الفراغ الصفري لكل من المؤثرين F و T منطبقين .
بإدخال المؤثر F على الصيغة (3.2) نجد

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle Ff_n \tag{4.2}$$

نختار جملة $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ بحيث يكون:

$$Ff_n = s_n g_n \quad , \quad n = 1, 2, ...$$

$s_n, n = 1, 2, ...$ هي s–عدد للمؤثر F عندها الصيغة (4.2) تكتب كالتالي :

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, f_n \rangle g_n$$

لاحظ أن:

$$\langle Ff_k, Ff_i \rangle = s_k s_i \langle g_k, g_i \rangle$$

من ناحية ثانية عندنا

$$\langle Ff_k, Ff_i \rangle = \langle Tf_k, f_i \rangle = \mu_k \langle f_k, f_i \rangle = \mu_k \delta_{ki}$$

ومنه يكون

$$s_k s_i \langle g_k, g_i \rangle = \mu_k \delta_{ki}$$

هذا يعني أن الجملة $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ متعامدة ومتجانسة.
وبالتالي يكفي أخذ $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ الأشعة الذاتية للمؤثر F و $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ هي s–عدد لمؤثر F والجملة $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ تحقق:

$$Ff_n = s_n g_n \quad , \quad n = 1, 2, ...$$

نتيجة 2.25
كل مؤثر من $l_\infty(H)$ يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(F) \langle \cdot\, , f_n \rangle g_n \tag{5.2}$$

حيث $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ جملتين من H متعامدتين ومتجانستين والسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بأنتظام.
الصيغة (5.2) تسمى تحليل شميد للمؤثر F.

3.2 صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة و مؤثر هيلبرت–شميد

تعريف 3.42
من أجل كل p $(0 < p \leqslant \infty)$, يسمى صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة في H بأنه المجموعة $l_p(H)$ المعرفة كالتالي:

$$l_p(H) = \left\{ F \in l_\infty(H) / \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p < \infty \right\}$$

حيث s_n هي s–عدد للمؤثر F.
المجموعة $l_p(H)$ تكون فراغا لبناخ مع النظيم:

$$\|F\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad , 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|F\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |s_n| = s_1 \qquad p = \infty$$

نتيجة 3.26

1. $p < q \quad \rightarrow l_p(H) \subset l_q(H)$
2. الفراغ $\left(l_p(H), \|.\|_p\right)$ في حالة $p \to \infty$ هو الفراغ $\left(l_\infty(H), \|.\|\right)$

تعريف 3.43

يعرف صنف شميد بأنه صنف كارلامان من أجل $p = 2$ عندها الفراغ $\left(l_2(H), \|.\|_2\right)$ يسمى فراغ مؤثرات هيلبرت–شميد والنظيم $\|.\|_2$ يسمى النظيم المطلق أو النظيم الطيفي.

$$l_2(H) = \left\{ F \in l_\infty(H) / \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 < \infty \right\}$$

$$\|F\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نتيجة 3.27

إذا كان F , T مؤثرين من $l(H)$, فإن:

1. $\|F\|_2 = \|F^*\|_2 \quad , \quad F \in l_2(H) \Leftrightarrow F^* \in l_2(H)$.
2. $\|F\| \leqslant \|F\|_2$.
3. $\forall T \in l \Rightarrow FT, TF \in l_2 \quad \forall F \in l_2$ و $\|FT\| \leqslant \|T\| \|F\|_2 \;,\; \|TF\|_2 \leqslant \|T\| \|F\|_2$

قضية 3.13

إذا كان F مؤثرين من $l_2(H)$, فإن نظيمه المطلق يعطى بالعلاقة

$$\|F\|_2 = \left(\sum_{n \geqslant 1} \left\| F f_n' \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\left(f_n'\right)_{n \geqslant 1}$ أساس متعامد ومتجانس لـ H.

البرهان :

لتكن $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ الأشعة الذاتية المرفقة بالقيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n \geqslant 1}$ غير المعدومة للمؤثر T.
نضيف إذا كان لازما للجملة $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ المعرفة في الحالة (1) من النظرية (**2.21**) , أساس للفراغ الصفري للمؤثر F (لأن المؤثرين F و T لهما نفس الفراغ الصفري) , نحصل على أساس $\left\{f_n'\right\}$ للفراغ H.
عندها يكون:

$$\|F\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f_n, f_n \rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle F f_n', F f_n' \right\rangle \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle F^* F f_n', f_n' \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| F f_n' \right\|^2$$

نتيجة 3.28
إذا كان $T \in l_2$ و $\{x_i/i \in I\}$ جملة كاملة متعامدة ومتجانسة في H , فإن:

$$\|T\| = \left(\sum_{\alpha,\beta \in I}^{\infty} |\langle Tx_\alpha, x_\beta \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نظرية 3.22 [8]
ليكن F من $l(H)$ إذا كانت f دالة من $A(F)$ حيث $f(0) = 0$ فإن:

1. دالة المؤثر $f(T)$ أيضا من $l_\infty(H)$
2. التطبيق h من $l_\infty(H)$ في نفسه حيث $h(T) = f(T)$ يكون مستمر.

4.2 المتراجحات

1.4.2 حالة البعد المنتهي

ليكن E^n فراغ هيلبار المنته $(dimE^n = n)$ و $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ اساس له و ليكن A مؤثر في E^n معرف كالتالي:

$$A\alpha_i = \sum a_{ij}\alpha_j \qquad i = 1, 2, ..., n$$

تعريف 4.44

1. نعرف مصفوفة المؤثر A في الأساس $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ بأنها المصفوفة $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$
2. يعرف أثر المؤثر A ويرمز له بالرمز

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

خصائص :

- $tr(A)$ غير متعلق بإختيار الأساس $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $tr(AB) = tr(BA)$ حيث A , B مؤثرات في E^n

تعريف 4.45
ليكن T , S مؤثرات هيلبارت–شميد في H يعرف أثر الثنائي $\langle S,T \rangle$ بالعبارة التالية :

$$tr\langle S,T \rangle = \sum_{\alpha} \langle Sx_\alpha, T^* x_\alpha \rangle$$

حيث $\{x_\alpha\}$ أساس متعامد ومتجانس لـ H.

تعريف 4.46
يعرف كثير الحدود المميز للمؤثر A ويرمز له بالرمز $\Delta(\lambda)$ بأنه محدد مصفوفة المؤثر $(\lambda I - A)$ أي:

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

نتيجة 4.29

1. $tr\,(A)$ يساوي معامل λ^{n-1} في كثير الحدود المميز مأخوذ بإشارة عكسية.
2. $tr\,(A)$ يساوي مجموع كل الأعداد الموجودة في طيفه بإعتبار التضعيفة.
3. إذا كان A عديم القوة , فإن $tr\,(A)=0$.

قضية 4.14
إذا كان T مؤثر خطي في فراغ هيلبار منته E^n و $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ قيمه الذاتية مع الأخذ بعين الإعتبار لتضعيفها , فإن في E^n يوجد أساس متعامد ومتجانس $\{x_i\}$ يحقق:

$$\langle Tx_i,x_i\rangle=\lambda_i, i=1,2,...,n$$

تعريف 4.47
إذا كان A مؤثر في E^n متقابل , و $(a_{i,j})$ مصفوفته بالنسبة لأساس

$$\alpha_1=(1,0,...,0)\,,\alpha_2=(0,1,...,0)\,,...,\alpha_n=(0,0,...,1)$$

فإن نظيم المؤثر A يعطى بالعلاقة التالية :

$$\|A\|=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|\alpha_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان

$$x=(x_1,x_2,...,x_n)\,,y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

شعاعين من E^n فإن :

$$|\begin{vmatrix} 0 & \overline{y_1} & \dots & \overline{y_n} \\ x_1 & a_{1.1} & \dots & a_{1.n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n.1} & \dots & a_{n.n} \end{vmatrix}|\leqslant\frac{\|x\|\,\|y\|\,\|A\|^{n-1}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}$$

نتيجة 4.30
إذا كان A مؤثر في فراغ هيلبار منته E^n و $tr\,(A)=0$, فإن في E^n يوجد أساس متعامد ومتجانس $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ بحيث

$$\langle A\varphi_i\ ,\ \varphi_i\rangle=0, 1\leqslant i\leqslant n$$

نظرية 4.23
إذاكان A مؤثر في E^n و $\lambda_1,\lambda_2,.......,\lambda_n$ قيمه الذاتية مع إعتبار تضعيفها و $\lambda\neq 0$ عدد مركب لا ينتمي إلى طيف المؤثر A فإن:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)e^{\frac{\lambda_i}{\lambda}}\,(\lambda I-A)^{-1}\right|\leqslant|\lambda|\,e^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\|A\|^2}{|\lambda|^2}\right)}$$

البرهان :

ليكن $B = \frac{A}{\lambda}$ حسب النظريات (**14.12**) و (**14.13**) يكون

$$E(\frac{\lambda_1}{\lambda}, B) = E(\lambda_i, A) \text{ و } \sigma(B) = \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, ..., \frac{\lambda_n}{\lambda} \right\}$$

بالإضافة إلى ذلك

$$tr(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{tr(A)}{\lambda}$$

ليكن N عدد صحيح أكبر من $|tr(B)|$, من أجل هذا العدد N نعرف على الفراغ $E^n \oplus E^N$ مؤثر B_N كالتالي:

$$B_N\,(x,y) = \left(Bx, \left(\frac{-1}{N} \right) tr(B)y \right)$$

واضح أن $tr\,(B_N) = 0$ والقيم الذاتية للمؤثر $I - B_N$ هي

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}, 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}, ..., 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda},$$

$$1 + \frac{tr(A)}{N}, 1 + \frac{tr(A)}{N}, ..., 1 + \frac{tr(B)}{N}$$

ومنه المحدد $det(I - B_N)$ هو جداء هذه العناصر أي:

$$|det(I - B_N)| = \left| \left(1 + \frac{tr(B)}{N} \right)^N \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda} \right) \right| \qquad (6.2)$$

بما أن

$$\frac{1}{N}\,|tr\,(B)| < 1 \quad , \quad \lambda \neq \lambda_k$$

فإن المؤثر العكسي $(I - B_N)$ موجود
عندها يكون

$$(I - B_N)^{-1}\,(x,y) = \left((I - B)^{-1}\,x, \left(1 + \frac{1}{N} tr\,(B) \right)^{-1} y \right) \qquad (7.2)$$

ومنه

$$\left| (I - B)^{-1} \right| \leqslant \left| ((I - B_N)^{-1}) \right|$$

بما أن:

$$|det\,(I - B_N)| \left| (I - B)^{-1} \right| \leqslant |det\,(I - B_N)|\,|(I - B_N)|$$

فإنه من التعريف (**4.47**) نستنتج :

$$|det\,(I - B_N)| \left| (I - B)^{-1} \right| \leqslant \frac{\|I - B_N\|^{N+n-1}}{(N+n-1)^{\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}}$$

حسب النتيجة (**4.30**) في الفراغ $E^n \oplus E^N$ يوجد أساس متعامد ومتجانس $z_1, z_2, ..., z_{n+N}$ بحيث $\langle B_N z_k, z_k \rangle = 0$ على القطر الرئيسي لمصفوفة المؤثر $I - B_N$ بالنسبة للأساس $z_1, z_2, ..., z_{n+N}$ يقع الواحد , في الأماكن الأخرى من العناصر المقابلة للصفر B_N مأخودة بإشارة عكسية ومنه

$$\|I - B_n\|^2 = (N + n - 1)\|B_n\|^2 = \left(N + n - N^{-1}\right)|tr(B)|^2 + \|B\|^2 \tag{8.2}$$

من المعادلة (6.2) , (8.2) يكون

$$\begin{aligned}
&\left|\left(1 + \frac{tr(B)}{N}\right)^N \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)(I - B)^{-1}\right| \\
&\leqslant \frac{\left(N + n + N^{-1}|tr(B)|^2 + \|B\|^2\right)^{\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}}{(N + n - 1)^{\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}} \\
&\leqslant \frac{\left(1 + \frac{|tr(B)|^2 + \frac{\|B\|^2}{N+n}}{N(N+n)}\right)^{\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}}{\left(1 - \frac{1}{N+n}\right)^{\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

هذه المتراجحة محققة من أجل كل N كبير بالقدر الكافي و لهذا يكون:

$$\left|e^{tr(B)} \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)(I - B)^{-1}\right| \leqslant e^{\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \|B\|^2\right)\right\}}$$

ومنه بأعتبار

$$B = \frac{A}{\lambda}\ ,\ tr(B) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}$$

نستنتج المطلوب.

نظرية 4.24

ليكن T مؤثر هيلبرت–شميد ... $\lambda_1, \lambda_2, ...$ قيمه الذاتية المخالفة للصفر مع اعتبار تضعيفه.
إذا كانت f , g دالتين تحليليتين في جوار ما لطيف المؤثر T وتساويان الصفر في البداية , فإن $f(T)$, $g(T)$ مؤثران لهيلبرت–شميد.

$$tr(f(T), g(T)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)\, g(\lambda_i)$$

عندها السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة مطلقا.

البرهان :

نبرهن أولا أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f(\lambda_i)|^2 < \infty \tag{9.2}$$

من النظرية (**3.22**) والنظرية (**14.13**) يكفي دراسة الحالة $f(z) = z$ ونبرهن أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2 < \infty \tag{10.2}$$

ليكن T_n إقتصار T على الفراغ الجزئي

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} E(\lambda_i, T) H$$

واضح أن $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ القيم الذاتية للمؤثر T_n في H_n بالإضافة إلى ذلك بما أن $\|T_n\| \leqslant \|T\|$
فإن من القضية (**4.14**) والنتيجة (**3.28**) يكون:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant \|T_n\|$$

أي أن المتراجحة (10.2) محققة
وعليه التقارب المطلق للسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i) g(\lambda_i)$$

يستنتج من (9.2) ومتراجحة شفارتز.
ليكن H' غلاقة الفراغ H , $\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i, T)$ و H'' المتمم العمودي لـ H'
لتكن $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ أساس للفراغ $H_1, ..., \{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ أساس للفراغ H_k ليكن $\{\chi_n\}$ أساس متعامد ومتجانس للفراغ H'' ومنه من التعريف (**4.45**) يكون

$$tr \langle f(T), g(T) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f(T) \varphi_i, g(T)^* \varphi_i \rangle + \sum_{\alpha} \langle f(T) \chi_\alpha, g(T)^* \chi_\alpha \rangle$$

حسب النظرية (**14.16**) , (**14.13**) و النتيجة (**4.29**)
ليكن H فراغ هيلبار قابل للفصل مع النظيم $\|.\|$.
E_N فراغ اقليدي بعده N $N < \infty$, $\mathbb{C}$ المستوي المركب , $\lambda \in \mathbb{C}$, $(j = 1, 2, ...)$ l_p صنف المؤثرات المتراصة حيث

$$\|A\|_p < \infty$$

$$p_r(\lambda, A) = \inf_{\alpha \in \sigma(A)} |\lambda^r - \alpha^r|, r = 1, 2, ...; \lambda \in \mathbb{C}$$

إذا كان $s \in H$, $I : Ix = x$

نظرية 4.25

إذا كان T مؤثر هيلبرت–شميد و $\lambda_1, \lambda_2, ...$ قيم الذاتية غير المعدومة مع إحتساب التضعيفة , فإن الجداء غير المنته

$$\varphi_\lambda(T) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}\right) e^{\frac{\lambda_i}{\lambda}}$$

متقارب ويعرف دالة تحليلية عندما $\lambda \neq 0$.

من اجل كل $\lambda \neq 0$ ثابتة , هذه الدالة تكون مستمرة كدالة مركبة معرفة على فراغ مؤثرات هيلبرت–شميد المعرفة على بناخ B أي $l_2(B)$.

البرهان :

لاحظ أنه إذا كان ξ عدد مركب حيث $|\xi| < 1$ فإن:

$$\log e^{\xi}\left(1-\xi\right) = \xi - \left(\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 + ...\right) = O\left(\left|\xi^2\right|\right), \xi \to 0 \qquad (11.2)$$

بوضع

$$g\left(\xi\right) = \xi, f\left(\xi\right) = \xi^{-1}\log\left\{e^{\xi}\left(1-\xi\right)\right\}$$

تكون f , g تحليليتان في كل $\mathbb{C}$ بإستثناء $\xi = 1$ ومساويتان لـ 0 عندما $\xi = 0$.
إذا كان T مؤثر هلبرت–شميد كل قيمه الذاتية المخالفة للصفر تختلف عن الواحد و إذا كانت $\lambda = 0$, فإنه حسب النظرية (**14.12**) المؤثر T_λ يملك قيم ذاتية ... $\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda},$ و بإستعمال النظرية (**4.24**) نحصل على

$$tr\left(f\left(\frac{T}{\lambda}\right), \frac{T}{\lambda}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left\{e^{\frac{\lambda_k}{\lambda}}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\right\}$$

حيث السلسلة في الطرف الايمن متقاربة مطلقا إذا كانت $\lambda_k \neq \lambda$ من أجل كل k.
بما أن $\lambda_k \to 0$, فإنه من الصيغة (11.2) تكون السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left\{e^{\frac{\lambda_k}{\lambda}}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\right\}$$

متقاربة بإنتظام ومطلقا على كل مجموعة متراصة من الأعداد λ لا تحوي 0 ولا تحوي أي من λ_k.
وعليه يكون الجداء

$$\varphi_\lambda\left(T\right) = \prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{\lambda_k}{\lambda}}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)$$

متقارب على هذه المجموعة المتراصة.
بما أن هذا من الواضح أنه يؤول للصفر عندما $\lambda = \lambda_k$, فإنه من السهولة ملاحظة أن الدالة $\varphi_\lambda\left(T\right)$ تحليلية عندما $\lambda \neq 0$ وتتقارب إلى الصفر فقط عندما $\lambda \in \sigma\left(T\right)$.
برهان أنه عندما $\lambda \neq 0$ الدالة $\varphi_\lambda\left(T\right)$ مستمرة بالنسبة لـ T وفق نظيم هيلبرت–شميد في فراغ $l_2\left(H\right)$.
نأخذ $\left(T_n\right)$ متتالية من الفراغ $l_2\left(H\right)$ حيث

$$\|T_n - T\| \to 0$$

عندها إذا كانت C مجموعة متراصة من المجموعة $\rho\left(T\right)$, فإنه من المتراجحة

$$\|T_n - T\| \geqslant |T_n - T|$$

والقضية (**12.9**) يكون $C \subseteq P\left(T_n\right)$ من أجل كل n كبير بالقدر الكافي.
إذا كانت f الدالة المعرفة في بداية البرهان فإنه من أجل n كبير بالقدر الكافي المؤثر $f\left(T_{n/\lambda}\right)$ من أجل كل λ من C حسب النظرية (**3.22**) يكون من $l_2\left(H\right)$
من نفس النظرية نستنتج أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f\left(\frac{T_n}{\lambda}\right) - f\left(\frac{T}{\lambda}\right)\right\| = 0$$

بإنتظام على λ من C.
وعليه حسب النتيجة (**4.30**) يكون

$$tr\left(f\left(\frac{T}{\lambda}\right), \frac{T}{\lambda}\right) = \lim_{n\to\infty} tr\left(f\left(\frac{T_n}{\lambda}\right), \frac{T_n}{\lambda}\right)$$

بإنتظام حيث λ من C.
بما أن

$$\varphi_{\lambda}(T) = \exp\left\{tr\left(f\left(\frac{T}{\lambda}\right), \frac{T}{\lambda}\right)\right\}$$

من أجل $\lambda \in \rho(T)$ من العلاقة السابقة نجد:

$$\varphi_{\lambda}(T) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\lambda}(T_n)$$

بإنتظام على λ من C.
لكن من أجل كل n الدالة $\varphi_{\lambda}(T_n)$ تحليلية من أجل $\lambda \neq 0$ ومنه إذا كان C منحنى مغلق لا يحوي $\lambda = 0$, فإنه من التقارب المنتظم للمتتالية $(\varphi_{\lambda}(T_n))_{n\geqslant 1}$ على C نستنتج التقارب المنتظم لنفس المتتالية داخل C ومنه

$$\varphi_{\lambda}(T_n) \to \varphi_{\lambda}(T)$$

من أجل كل $\lambda \neq 0$.
و بالتالي يكون الإستمرار في $l_2(H)$ للتطبيق φ_{λ}.

نظرية 4.26
اذا كان λ ينتمي الى مجموعة النقط النظامية لمؤثر هيلبرت–شميد T فإن

$$\left|\varphi_{\lambda}(T)(\lambda I - T)^{-1}\right| \leqslant |\lambda| \, e^{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\|T\|^2}{|\lambda|^2}\right)\right\}} \tag{12.2}$$

البرهان :

من النظرية (**4.25**) والقضية (**12.8**) نستنتج أنه يكفي البرهان في حالة مجموعة القيم $E(T)$ للمؤثر T مجموعة غير منتهية.
نفرض أن κ مجموعة تعريف المؤثر T , ونفرض أنه $R = \{x \in \kappa / Tx = 0\}$
عندها المؤثر T يكون تقابلاً من R^{+} على R.
ومنه الفراغ الجزئي R^{+} منه أيضًا .
نفرض أن G فراغ بعده واحد من الفراغ R.

$$m_1 = R^{\perp} + R + G, m_2 = m_1^{\perp}$$

عندها

$$Tm_1 = 0, Tm_2 \subseteq m_1$$

نضع $T_1 = T\mid_{m_1}$ عندها واضح أن :

$$\|T_1\| = \|T\|, \sigma(T_1) = \sigma(T), \varphi_{\lambda}(T_1) = \varphi_{\lambda}(T)$$

بالإضافة الى ذلك إذا كان $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ يكون

$$(\lambda I - T)^{-1}(m_1 + m_2) = (\lambda I - T_1)^{-1} m_1 + \lambda^{-1} m_2$$

وعليه يكون

$$\left|(\lambda I - T)^{-1}\right| = \max\left(\left|\lambda^{-1}\right|, (\lambda I - T_1)^{-1}\right)$$

من ناحية ثانية المتراجحة

$$\left|(\lambda I - T_1)^{-1}\right| < \left|\lambda^{-1}\right|$$

لا تكون صحيحة لأنه حسب القضية (**12.8**) المؤثر T_1 كونه قابل للقلب وهذا مستحيل لأن أشعته الذاتية من G تنتمي إلى مجموعة تعريفه m_1 وعليه يكون

$$\left|(\lambda I - T_1)^{-1}\right| = \left|(\lambda I - T)^{-1}\right|$$

ومنه برهان النظرية يستنتج مباشرة من النظرية (**4.23**).

نظرية 4.27

كل مؤثر من $l_\infty(H)$ يملك فراغ جزئي فعلي ثابت أي يوجد X_0 فراغ جزئي من H حيث

$$X_0 \neq H \neq \phi \qquad , FX_0 \subset X_0$$

نظرية 4.28

ليكن F مؤثر من $l_\infty(H)$.

إذا كان X, Y فراغين جزيين من H ثابتين بالنسبة للموثر F حيث $X \subset Y$ و $dim\,(Y \ominus X) > 1$, فإنه يوجد فراغ جزئي Z من H يحقق :

$$X \subset Z \subset Y \qquad , X \neq Z \neq Y$$

البرهان :

ليكن T إقتصار المؤثر F على Y واضح أن :

$$T : Y \to Y \qquad \text{و} \qquad TX \subset X$$

حسب ثبات المتمم العمودي بالنسبة للمؤثر المرافق يكون الفراغ $X_0 = Y \ominus X$ ثابت بالنسبة للمؤثر T^* ومنه حسب النظرية (**4.27**) يوجد فراغ جزئي X_1 $(X_1 \neq X_2)$ $X_1 \subset X_2$ ثابت بالنسبة للمؤثر T^* الفراغ $X_3 = Y \ominus X_2$ واضح أنه يحقق

$$X \subset X_2 \subset Y \qquad , X \neq X_2 \neq Y$$

وهو ثابت بالنسبة للمؤثر T.

قضية 4.15

إذا كان A مؤثر في E^n فإن المتراجحة محققة

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (n!)^{-\frac{1}{2}}\, p_1^{-1-i}(\lambda, A)\, \|A\|_2^n \qquad (\lambda \in \rho(A)) \tag{13.2}$$

البرهان :

حسب نظرية شور يوجد أساس متعامد ومتجانس $\{e_k\}$ بالنسبة للمؤثر A ونكتب عن طريق مصفوفة مثلثية a_{kn}

$$A = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} a_{ki} \langle\ .\ , e_i\rangle\, e_k$$

بوضع

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle\ .\ , e_i\rangle\, e_i \qquad (\lambda_i = a_{ii})$$

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}\left\langle\ .\ ,e_i\right\rangle e_k$$

نحصل على

$$A=S+T,\ \sigma\left(A\right)=\sigma\left(S\right)=\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{n}$$

$$R_\lambda\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\langle\ .\ ,e_n\right\rangle e_n}{\lambda_n-\lambda}\qquad\left\|R_\lambda\left(S\right)\right\|=\rho_1^{-1}\left(\lambda,A\right)\tag{14.2}$$

$$B_\lambda\equiv TR_\lambda\left(S\right)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left(\lambda-\lambda_i\right)^{-1}a_{ki}\left\langle\ .\ ,e_i\right\rangle e_k$$

$$R_\lambda\left(A\right)=\left(T+S-\lambda I\right)^{-1}=R_\lambda\left(S\right)\left(I+TR_\lambda\left(S\right)\right)^{-1}$$

بما أن طيف المؤثر في E^n يساوي القطر في مصفوفته المثلثية فإن:

$$B_\lambda^n=0\qquad\sigma\left(B_\lambda\right)=0\qquad\sigma\left(T\right)=0$$

من (14.2) نحصل على

$$R_\lambda\left(A\right)=R_\lambda\left(S\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(-1\right)^iB_\lambda^i\qquad\left(\lambda\in\rho\left(A\right)\right)\tag{15.2}$$

بما أن

$$\left\|B_\lambda\right\|_2\leqslant\left\|R_\lambda\left(S\right)\right\|\left\|T\right\|_2=\rho_1^{-1}\left(\lambda,A\right)\left\|T\right\|_2$$

فإنه حسب القضية (**4.16**)

$$\left\|B_\lambda^n\right\|^2\leqslant\left(n!\right)^{-1}\left\|B_\lambda\right\|_2^{2n}\leqslant\left(n!\right)^{-1}\rho_1^{-2n}\left\|V\right\|_2^{2n}\tag{16.2}$$

بما أن

$$\left\|T\right\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\left|a_{ki}\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\left|a_{ki}\right|^2=\left\|A\right\|_2^2$$

فإنه من المعادلة (14.2) و (16.2) نحصل على المتراجحة (13.2)

2.4.2 الحالة العامة

قضية 4.16
إذا كان F مؤثر هيلبرت–شميد شبه عديم القوة فإن:

$$\left\|F^n\right\|\leqslant\left\|F\right\|_2^n\left(n!\right)^{-\frac{1}{2}};\left(n=1,2,...\right)\tag{17.2}$$

البرهان :
نفرض أن U مؤثر هيلبرت–شميد شبه عديم القوة في الفراغ $L_2\left]0,1\right[$ أي:

$$\left(Uf\right)\left(t\right)=\int_0^tK\left(t,s\right)f\left(s\right)ds\ ,\ \left(f\in L_2\left]0,1\right[\right)\tag{18.2}$$

حيث النواة K تحقق الشرط

$$\|U\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(t,s)|^2 \, ds \, dt < \infty$$

بإستخدام n مرة متراجحة كوشي–بوتيانوفسكي نحصل على

$$\|U^n f\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^{t_1} K(t_1,s) f_{n-1}(s) \right|^2 dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 g(t_1) \int_0^{t_1} |f_{n-1}(s)|^2 \, ds \;\; dt_1 \leqslant ...$$

$$... \leqslant \int_0^1 g(t_1) ... \int_0^{t_{n-1}} g(t_n) \int_0^{t_n} |f(s)|^2 \, ds \;\; dt_n ... dt_1$$

حيث

$$g(t) = \int_0^1 |k(t,s)|^2 \, ds, \qquad f_i = U^i f \qquad (f \in L_2 \,]0,1[) \, .$$

بإعتبار

$$\int_0^1 g(t_1) ... \int_0^{t_{k-1}} g(t_n) \, dt_n ... dt_1 = \int_0^{z_0} ... \int_0^{z_{n-1}} dz_n ... dz_1 = (z_0^n / n!)$$

$$\left(z_k = \int_0^{t_{k-1}} g(t_k) \, dt_k, \qquad k = 1, 2, , ...; \qquad z_0 = \int_0^1 g(t) \, dt \right).$$

نحصل على

$$\|U^n\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{n!}\right) \left(\int_0^1 g(t)^n \right) = \left(\frac{1}{n!}\right) \|U\|_2^{2n} \qquad (19.2)$$

حسب النظرية (**4.28**) يوجد توسيع للمؤثر F يكون مكافئ وحدويا لمؤثر هيلبرت–شميد شبه عديم القوة U_0 من الفراغ $L_2^{(r)}(0,1)$ فراغ الدوال الشعاعية ببعد r.
U_0 يكون جمع عمودي لمؤثرات من النوع (18.2) ومنه وحسب (19.2) وبإعتبار

$$\|U_0\|_2 = \|F\|_2 \qquad \|U_0\| = \|F\|$$

نحصل على (17.2)

نظرية 4.29
إذاكان A مؤثر هيلبارت–شميد فإن المتراجحة محققة

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} \rho_1^{-n-1}(\lambda, A) \|A\|_2^n \qquad (\lambda \in \rho(A)) \qquad (20.2)$$

البرهان :

ليكن $\{d_k\}_{n \geqslant 1}$ أساس كيفي متعامد ومتجانس للفراغ H أي:

$$A = \sum_{n,k=1}^{\infty} b_{nk} \langle \; . \; , d_n \rangle \, d_k \qquad (b_{nk} \in C) \, .$$

بوضع

$$A_N = \sum_{n,k=1}^{N} b_{nk} \langle\ .\ , d_n \rangle\, d_k.$$

نحصل على

$$\|A - A_N\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

حسب النظريتين $(\mathbf{9.8})$, $(\mathbf{9.9})$ نحصل على

$$R_\lambda(A_N) \underset{n\to\infty}{\to} R_\lambda(A) \text{ و } \sigma(A_N) \underset{n\to\infty}{\to} \sigma(A)$$

ومنه حسب (13.2) نستنتج المتراجحة (20.2)

نظرية 4.30

إذا كانت $A \in l_{2r}(H)\,(r = 1, 2, ...)$. , فإن المتراجحة محققة

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(A)\| &\leqslant \|T_{\lambda,r}\| \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} \rho_r^{-n-1}(\lambda, A) \|A\|_{2r}^{nr} \\ T_{\lambda,r} &= \sum_{k=0}^{r-1} \lambda^{r-k-1} A^k. \end{aligned} \tag{21.2}$$

البرهان :

عندما $|\lambda| > \|A\|$ نحصل على

$$R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-1-n} A^n = -T_{\lambda,r} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-r(n+1)} A^{nr} = T_{\lambda r} R_{\lambda^r}(A^r)$$

بتعميم هذه المعادلة على كل النقط النظامية للمؤثر A و بإعتبار أن

$$\|A^r\| \leqslant \|A\|_{2r}^{r}$$

فإنه حسب النضرية $(\mathbf{4.29})$ يكون

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \|T_{\lambda,r}\| \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} \rho_1(\lambda^r, A^r) \|A^r\|_{2r}^{n}$$

$$\leqslant \|T_{\lambda,r}\| \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} \rho_1^{-1-n}(\lambda^r, A^r) \|A^r\|_{2r}^{n}.$$

حسب نظرية تحويل الطيف يكون

$$\sigma(A^r) = \{t^r, t \in \sigma(A)\},$$

$$\rho_1(\lambda^r, A^r) = \inf_{t\in\sigma(A^r)} |\lambda^r - t| = \inf_{t\in\sigma(A)} |\lambda^r - t^r| = \rho_1(\lambda, A)$$

ومنه نستنتج (21.2).

ملاحظة 4.2

من خلال متراجحات نظيم الحالة يتبين أن (13.2) , (20.2) تحويان على كثير الحدود المميز مما يجعلهما صعبتان في التطبيق.

بينما المتراجحة (12.2) خالية من كثير الحدود المميز وبالتالي تعتبر من ناحية عملية أفضل من المتراجحتان السابقتين.

خاتمة عامة

يندرج محتوى هذه المذكرة في توضيح مختلف متراجحات نظيم الحالة , إعتمد في الدراسة على مؤثر من الصنف l_p صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة وخاصة من أجل $p = 2$ و p مضاعف لـ2.

$$l_p = \left\{ F \in l_\infty(H) / \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

حيث $l_\infty(H)$ فراغ المؤثرات المتراصة و s_i هي s−عدد لـ F.

وهذه المتراجحات تتفاوت فيما بينها من ناحية التطبيق العملي حيث أن بعض المتراجحات كمتراجحة كارلامان لنظيم الحالة تحوي كثير الحدود المميز وهناك متراجحات تحوي بالإضافة إلى كثير الحدود المميز ثابت غير معين , هذه المتراجحات من ناحية عملية ليست سهلة التطبيق.

المتراجحات التي تكون من ناحية عملية سهلة التطبيق هي المتراجحات الخالية من كثيرات الحدود المميزة والثوابت غير المعينة.

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] د.أ.كولموغوروف، س. فومين؛ مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج.1987.

[2] إيروين كريزيك ؛ المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته-ترجمة د.خضر حامد الأحمد- ،الطبعة الرابعة - دمشق-2004-2005 م.

[3] محمد حازي؛ المختصر في الطبولوجيا، ديوان المطبوعات الجامعية, 1992-02.

[4] مصطفى . عسيلة؛ دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

[5] مصطفى . عسيلة؛ دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف،الجزء الأول ،المؤثرات المحدودة، .UKMO,2013

المصادر باللغة الأجنبية

[6] Davies E. B. ; Linear Oparators,and Their Spectra, Cambridge University Press 2007.

[7] Dunford N.,Schwartz J.T. ;Linear Operators,Part 1 :General Theory,wiley- interscience,New York,1958.

[8] Dunford N.,Schwartz J.T. ;Linear Operators,Part 2 :General Theory,wiley- interscience,New York,1958.

[9] Gokhberg I., Gokhberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Oparators, Part I, Birkhauser Verlag, 1990.

[10] Gokhberg I., Gokhberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Oparators, Part II, Birkhauser Verlag, 1990.

[11] Hutson V.C.L.,Pym J.S. ;Functional Analysis and Operator Theory,Academic Press,London, 1980.

[12] I. C .Gokhberg and M. G. Krein , Introduction to the Theory of Nonselfadjoint Operators,Am. Math. Soc. (1969).

[13] I. C .Gokhberg and M. G. Krein , Theory and Application of Volterra Operators in Hilbert Space, Am. Math. Soc. (1970).

[14] M. I. Gil, Estimation of the Norm of the Resolvent of a Completely Continuous Operator, Mathematical notes (USSR) 11.1979, V26, Issue 5, pp 849-851.

[15] Reed M.,Simon B. ;Methods of Modern Mathematical Physics, Part I, Springer-Verlang,1978.

[16] Rudin W. ;Functional Analysis ;McGraw-Hill,Book Company, 1973.

[17] Yosida K ;Functional Analysis,Springer-Verlage,1967.

[18] yu. L. Dalet,skii and M. G. Krein, Stabtlity of Solutions of DifferentlaL Equations in Banach Space, Am. Math. Soc. (1974).

حول متراجحات نضيم الحالة لمؤثر هيلبرت–شميد

الملخص :
هذا العمل يهدف إلى توضيح مختلف متراجحات نظيم الحالة لبعض المؤثرات الخطية والمقارنة بينها.

هذه العملية تسمى تقدير نظيم الحالة.

يعتمد في الدراسة على المؤثرات من الصنف l_p الذي يسمى صنف كارلامان للمؤثرات المتراصة و بالأخص في حالة $p = 2$ أي مؤثرات هيلبرت–شميد و أيضا من أجل p مضاعف للعدد 2 أي الصنف l_{2k} $k = 1, 2, ...$.

الكلمات المفتاحية : المؤثر الخطي , مؤثر هيلبرت–شميد , صنف كارلامان , متراجحة نظيم الحالة.

on inequalities of the norm of the resolvent of Hilbert–Schmidt operators

Abstract :
This work is devoted to illustrating the diffrent type of inequalities of the norm of the resolvent for some linear operator and to compare theme .
This operation is called estimation of the norme of the resolvent.
The study depend on the operators of type l_p which is called caleman type of compacte operator and specifically for $p = 2$ so the Hilbert-Shmidt operator, and also for any multiple p of 2 that is the type $k = 1, 2, ...$ l_{2k} .

key words : Linear Oparator,Hilbert-Schmidt Oparator,Class Carleman,inequality of the norm of the resolvent.

sur les inégalités de la norme de la résolvante pour l operateur de Hilbert–Schmidt

Resumé :
Ce travail a pour objectif d'éclaircir les différentes inégalités de la norme de résolvant pour quelques opérateurs linaires en effectuant une comparaison d'entre eux.
Cette opération est appelée estimation de la norme de résolvant.
Nous nnous basons dans notre étude sur les opérateurs de classe l_p appelées classe de Carleman des operateurs compacts, en particulier dans le cas $p = 2$, qui sont les opérateurs de Hilbert-Schmidt, ainsi pour des valeurs de p pairs de classe $k = 1, 2, ...$ l_{2k}.

Mot clés : Opérateurs linaires, operateur de Hilbert-Schmidt, classe de Carleman, inégalité de la norme du résolvant.