

Plongement et placement de certaines classes d'arbres dans l'hypercube

Kamel KABYL¹ and Abdelhafid BERRACHEDI²

¹ Université A/Mira de Béjaïa, Département des sciences Commerciales,
k_kabyle2000@yahoo.fr,

² Faculté de mathématiques, USTHB, BP32 El Alia 16111 Bab Ezzouar,
abdelhafid.berrachedi@yahoo.fr

Résumé De nombreux problèmes (booléens, de théorie des graphes, de codes...) sont formalisables comme problèmes combinatoires sur l'hypercube. L'hypercube est un graphe intéressant dont la topologie est utilisé en informatique (parallélisme, réseaux), il est fondamentale de déterminer quels sont les graphes et particulièrement les arbres qui sont plongeable dans l'hypercube et de déterminer aussi combien de copies d'un arbre donné qu'on peut placer dans un hypercube de dimension donnée. Nous avons introduit certaines classes d'arbres pour lesquelles nous avons déterminé la dimension cubique et nous avons donné aussi pour certaines classes le nombre de copies qu'on peut placer dans l'hypercube de dimension donnée.

Mots-clés : Hypercube, Plongement, Graphes, Arbres, Isomorphisme

1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n , et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n , qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u) \varphi(v)$ dans Q_n . D'une manière générale, l'étude d'un plongement de graphe G dans l'hypercube revient à voir si G est isomorphe à un sous graphe de Q_n . Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer les conditions (nécessaires et suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous-graphe de l'hypercube Q_n . Une classe importante à étudier est celles des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, théorie des réseaux électriques... et l'utilisation pratique de l'hypercube en théorie des codes, transfert de l'information, architecture parallèle, décision

mulicrère, réseaux d'interconnexion etc... Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans Q_n pour un certain n . Firsov[8] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques et a montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné G est plongeable (on parle alors d'hypercube optimal). Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [1] ont montré le résultat suivant : Le problème de décider si un graphe G est plongeable dans Q_n est *N.P*-complet. Wagner et Corneil [4] ont montré que ce problème reste *N.P* complet même dans le cas où G est un arbre. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de plongement d'arbres dans l'hypercube : On peut citer : A. Berrachedi [2], S. Bezrukov [3], I. Havel [5], F. Harary [9], M. Kobeissi [11], M.Laborde [12]. . . . Dans le même contexte, on définit dans ce papier des nouvelles classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. Comme on a donné aussi le nombre maximum de copies de certaines topologies qu'on peut placer dans un hypercube de dimension donnée. Pour un graphe $G(V(G), E(G))$ $V(G)$ et $E(G)$, désignent respectivement l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes.

Un hypercube de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble de sommets sont les n -uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en une seule coordonnée.

Un graphe biparti $G(X \cup Y; E)$ est dit équilibré si $Card(X) = Card(Y)$. L'hypercube Q_n est un graphe biparti équilibré, n -régulier ayant 2^n sommets et $n.2^{n-1}$ arêtes. Tout graphe plongeable dans un hypercube est dit cubique. Comme conditions nécessaires de plongement de graphe dans Q_n on a : pour qu'un graphe G soit plongeable dans Q_n il faut que : $|V(G)| \leq 2^n$, G est biparti et le degré maximum de (G) , $\Delta(G) \leq n$. Si de plus $|V(G)| = 2^n$ alors G doit être équilibré. Toutes ces conditions sont nécessaires pour un graphe G plongeable dans Q_n , mais ne sont pas suffisantes.

La Cn -valuation aux cas des arbres est donnée comme suit : Un arbre T est Cn -valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T , il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K . I. Havel et moravek [7] ont montré qu'un graphe G est plongeable dans Q_n si et seulement s'il existe une Cn -valuation de G .

2 Quelques classes d'arbres plongeables dans Q_n

On présente quelques résultats connus sur les plongements d'arbres dans l'hypercube.

2.1 Arbres binaires

Un arbre T est dit binaire si son degré maximum $\Delta(T) \leq 3$. Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I-Havel [5].

Proposition 1. [5] *Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$. Si T est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors T est plongeable dans Q_n .*

2.2 Arbres binaires complets

L'arbre binaire complet D_n est le graphe défini inductivement comme suit : Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$ est un graphe biparti complet. Pour $n \geq 2$, D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1 , T_2 de D_{n-1} et d'un nouveau sommet u , tel que u est relié par une arête à un sommet de degré 2 de T_1 et par une autre arête à un sommet de degré 2 de T_2 . D_n Possède 2^n sommets pendants, $2^n - 2$ sommets de degré 3 et un seul sommet de degré 2. Le sommet de degré 2 sera appelé la racine de D_n , donc D_n possède $2^{n+1} - 1$ sommets.

Proposition 2. [5] *Pour tout $n \geq 2$, l'arbre D_n est plongeable dans $Q_n + 2$ $\dim(D_1) = 2$ et $\dim(D_n) = n + 2$.*

A partir de l'arbre binaire complet D_n , on définira d'autres arbres plongeables dans l'hypercube.

1. Pour $n \geq 1$ on désigne par \widehat{D}_n l'arbre formé à partir de deux copies disjointes de D_n , tel que leurs racines sont reliées par une arête appelée arête axiale. \widehat{D}_n a $2^{n+2} - 2$ sommets.

Proposition 3. [5]

Pour tout $n \geq 1$, l'arbre \widehat{D} est plongeable dans $Q_n + 2$; $\dim(\widehat{D}_n) = n + 2$.

2. Soit $n \geq 1$, on désigne par \check{D}_n l'arbre formé à partir de \widehat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets au niveau de l'arête axiale, et la chaîne obtenue partir de l'arête axiale sera appelée chaîne axiale de \check{D}_n . L'arbre \check{D}_n peut être défini à partir de \widehat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets de degré 2 au niveau d'une arête pendante de \widehat{D}_n . Il est clair que \check{D}_n et \widehat{D}_n possèdent le même nombre de sommets. \check{D}_n possède deux sommets de degré 2, 2^{n+1} sommets pendants et $2^{n+1} - 2$ sommets de degré 3.

Proposition 4. [13]

Pour tout $n \geq 1$, $\dim(\check{D}_n) = \dim(\widehat{D}_n) = n + 2$.

3 Plongement et placement de certaines classes d'arbres

3.1 La classe AD_n

Pour $n \geq 1$ l'arbre AD_n est obtenu à partir de l'arbre binaire D_n en reliant un seul sommet de degré 1 à nouveau sommet. AD_n possède donc 2^{n+1} sommets. AD_3 est montré dans la figure suivante :

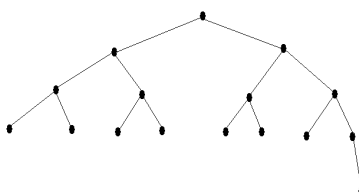


Fig. 1.

Théorème 1. Pour tout $n \geq 3$, $\dim(AD_n) = n + 1$.

Démonstration. Il est clair que $D - n$ est plongeable dans AD_n , et que AD_n est plongeable dans \widehat{D}_n , donc $\dim(D_n) \leq \dim(AD_n) \leq \dim(\widehat{D}_n)$, mais $\dim(D_n) = \dim(\widehat{D}_n) = n + 2$, alors $\dim(AD_n) = n + 2$.

3.2 La classe $A\widehat{D}_n$

Pour $n \geq 1$ l'arbre $A\widehat{D}_n$ est obtenu à partir de deux copies disjointes de AD_n , en reliant les racines par une arête. $A\widehat{D}_2$ est donné par le graphe suivant :

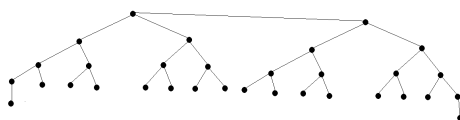


Fig. 2.

Théorème 2. *L'arbre $A\widehat{D}_n$ est plongeable dans Q_{n+2} et $\dim(A\widehat{D}_n) = n + 2$*

Démonstration. dans cette démonstration on va utiliser les chaînes ainsi que la notion de la C_n valuation, il est clair que toute chaîne de l'arbre de $A\widehat{D}_n$ est aussi dans l'arbre \widehat{D}_n , donc toute chaîne de $A\widehat{D}_n$ est C_{n+2} valuation, car $\dim(\widehat{D}_n) = n + 2$. donc $A\widehat{D}_n$ est plongeable dans Q_{n+2} est $\dim(A\widehat{D}_n) = n + 2$ car $A\widehat{D}_n$ possède 2^{n+2} sommets et ne peut pas être plongeable dans Q_{n+1} .

On peut parler d'un autre plongement concernant ce type d'arbre qui nécessite de trouver combien d'arbre de même topologie qu'on peut plonger dans un hypercube de dimension donnée.

On peut faire une généralisation comme suit :

pour $n=1$, l'arbre $A\widehat{D}_1$ est donné dans la figure suivante :

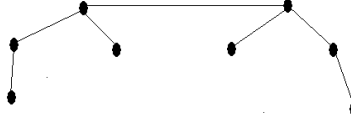


Fig. 3.

Pour $k \geq 2$, l'arbre $A^k\widehat{D}_1$, il obtenu en reliant deux copies de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ en reliant un sommet de degré 3 de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ à un sommet de degré 3 de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ par une arête.

Il est clair que l'arbre $A\widehat{D}_1$ est plongeable dans Q_3 , comme Q_4 est obtenu à partir de deux copies de Q_3 , donc là si on va prendre seulement l'arête reliant les deux copies de $A\widehat{D}_1$, et les arêtes formant dans chaque Q_3 l'arbre $A\widehat{D}_1$, on obtient l'arbre $A^2\widehat{D}_1$ plongeable dans Q_4 , et que qu'on va supprimer l'arête reliant les deux copies de $A\widehat{D}_1$. On fait de la même manière pour $A^3\widehat{D}_1$ est plongeable dans Q_5 , car dans chaque Q_4 , il y a une copie de $A^2\widehat{D}_1$, et comme Q_5 est obtenu à partir de deux copies de Q_4 , alors si on va prendre seulement l'arête reliant seulement les deux copies de $A^2\widehat{D}_1$, on prouve facilement que $A^3\widehat{D}_1$ est plongeable dans Q_5 . Faisant de la même manière, on montrera facilement que $A^{k-1}\widehat{D}_1$ est plongeable dans Q_{k+2} avec $K \geq 2$. Par la suite on va supprimer les arêtes formant les arbres $A^k\widehat{D}_1$, $k \geq 2$ on aura donc :

- Q_4 peut contenir au maximum $2 = 2^{(4-3)}$ copies de $A\widehat{D}_1$
- Q_5 peut contenir au maximum $4 = 2^{(5-3)}$ copies de $A\widehat{D}_1$
- Q_6 peut contenir au maximum $8 = 2^{(6-3)}$ copies de $A\widehat{D}_1$
- Donc Q_n peut contenir au maximum 2^{n-3} copies de $A\widehat{D}_1$.

Cette méthode nous permet de donner le résultat suivant :

Proposition 5. *Le nombre de maximum de copie de l'arbre \widehat{AD}_1 , qu'on peut placer dans un hypercube de dimension n est 2^{n-3} .*

Pour la démonstration il suffit d'utiliser la récurrence sur n .

3.3 La classe AB_n

Pour $n \geq 1$ l'arbre AB_n est obtenu de la manière suivante : AB_1 est le graphe de la figure suivante :

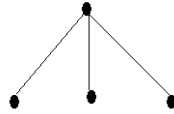


Fig. 4.

Pour $n \geq 2$, AB_n est obtenu en reliant deux copies disjointes de AB_{n-1} , tel que un sommet de degré $n + 1$ de la première copie est relié par une arête à un sommet de degré $n + 1$ de la deuxième copie. AB_2 est montré dans la figure suivante :

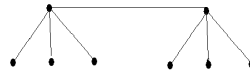


Fig. 5.

AB_3 est montré dans la figure suivante :

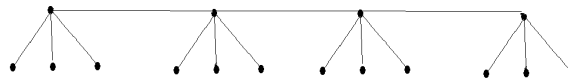


Fig. 6.

AB_4 est montré dans la figure suivante :

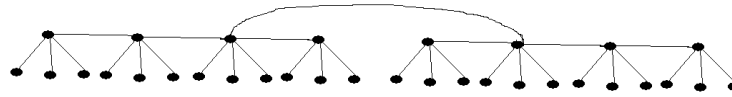


Fig. 7.

Théorème 3. Pour tout $n \geq 2$, $\dim(AB_n) = n + 3$.

Démonstration. Cette démonstration se fait par construction, il est clair que AB_1 est plongeable dans Q_3 , alors si on prend les arêtes de AB_1 dans chaque copie de Q_3 est parmi les arêtes qui forment Q_4 seulement l'arête reliant les deux copies de AB_1 pour obtenir AB_2 , donc il est clair que AB_2 est plongeable dans Q_4 , on fait la même chose pour AB_3 , si on va prendre parmi les arêtes qui forment Q_5 seulement l'arête reliant les deux copies de AB_2 , on montrera facilement que AB_3 est plongeable dans Q_5 , de la même manière donc on va montrer que AB_n est plongeable dans Q_{n+2} , maintenant il reste à montrer que $\dim(AB_n) = n + 2$. Comme le degré maximum de AB_n est $n+2$, donc AB_n ne peut pas être plongeable dans Q_{n+1} d'où $\dim(AB_n) = n + 2$.

On peut parler d'un autre plongement concernant ce type d'arbre qui nécessite de trouver combien d'arbre de même topologie qu'on peut plonger dans un hypercube de dimension donnée.

il est clair que Q_3 peut contenir deux copies de AB_1 de telle sorte que les sommets de la première copie ne sont pas reliés aux sommets de la deuxième copie, comme le montre le graphe de la figure suivante :

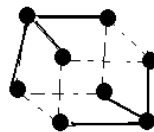


Fig. 8.

Même chose Q_4 peut contenir deux copies de AB_2 , comme le montre le

graphe de la figure suivante :

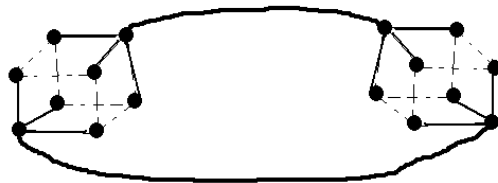


Fig. 9.

On peut aussi le montrer pour Q_5 par le graphe suivant :

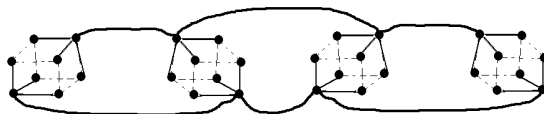


Fig. 10.

Pour Q_4 le fait que Q_3 contient deux copies disjointes de AB_1 , et que Q_4 est obtenu à partir de deux copies disjointes de Q_3 , alors si on va prendre parmi les arêtes formant Q_4 seulement les arêtes reliant les copies de AB_1 , on montre que Q_4 va contenir deux Copies disjointes de AB_2 , même chose pour Q_5 va contenir deux copies de AB_3 et d'une manière générale Q_n va contenir deux copies de AB_{n-2} pour tout $n \geq 3$.

D'après les 3 figures ci-dessus on a :

- Q_3 peut contenir au maximum $2 = 2^{(3-2)}$ copies de AB_1 ,
- Q_4 peut contenir au maximum 2 copies de AB_2 , donc au maximum $4 = 2^{(4-2)}$ copies de AB_1 ,
- Q_5 peut contenir au maximum 2 copies de AB_3 , donc au maximum $8 = 2^{(5-2)}$ copies de AB_1
- D'où donc Q_n peut contenir au maximum 2^{n-2} copies de AB_1 . Cette méthode nous permet de donner le résultat suivant :

Proposition 6. *Le nombre maximum de copies de AB_1 , qu'on peut placer dans un hypercube de dimension n , est 2^{n-2} .*

Pour la démonstration il suffit d'utiliser la récurrence sur n .

Références

1. Arfati, J. Papadimitriou, C.H. and Papageorgiou, P. : The complexity of cubical graphs. proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. (1984) 51-57.
2. Berrachedi, A. : Sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres. Actes du Colloque Cusi'04, Colloque sur L'optimisation et les Systèmes d'Information. Université de Tizi-Ouzou.
3. Bezrukov, S. and Monien, B. Unger, W. and Wechsung, G. : Embedding ladders and caterpillars into hypercube. discrete applied mathematics , **83** (1992) 21-29.
4. Corneil, D.G. and Wagner, A. : Embedding trees in a hypercube is NP- complet. siam j. comput **19** (1990),570-590
5. Havel, I. : On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. Cas prest. Mat **109** (1984) 135-152.
6. Havel, I. and Liebel, P. : One legged caterpillars spans hypercubes. Journal of graph theory. **10** (1986) 69-77
7. Havel, I. and Moravek, J. : B -valuation of graphs . Czech- Math .jour ., **22** (1972),338-351.
8. Firsov, V. : On isometric embeddings of graph into a boolean cube. cyber - netics 1, (1965) 112-113.
9. Harary, F. Lewinter, M. and Widolski, W. : On two legged caterpillars which span a hypercube. Congr. Numer. **66** (1988) 103-108.
10. Kabyl, k. : Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres. Actes du Colloque Cusi'05, Colloque sur L'optimisation et les Systèmes d'Information. Université de Béjaia.
11. kobeissi, M. and Mollard, M . : Spanning graphs of hypercubes starlike and double starlike trees. Accept discrete Math.
12. Labord, J.M. and Rao hebbbar, S.P. : Another characterisation of hypercube . discrete Math., **39** , (1982) 161-166.
13. Nebesky, L. : Embedding m -quasistars into n-cubes. C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.
14. Nekri, M. and Berrachedi, A. : Two new classes of Trees Embeddable into hypercubes. RAIRO Oper. Res., **38**, (2004) 295303.