UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire : Master

Filiére : Mathématiques

Spécialité : Analyse

Par : Kantaoui Hafssa

Thème

Propriétés du semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Version de : 01/06/2016

Devant le jury composé de :

Dr.Meflah Mabrouk	Prof. université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Dr.Boussaad Abdelmalik	Prof. université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.Kouidri Mohamed	Prof. université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.Agti Mohamed	Prof. université KASDI Merbah - Ouargla	Encadreur

Année universitaire 2015/2016

Dédication

dédie ce modeste travaille à ma chére mére

, *A mon cher pére qui m'ont toujours soutenu* ,

Qui m'ont aide à affronter les difficultés ,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseilles, leurs patience, leur persévérance.

A mes trés chéres soeurs : ***Samiha*** *et* ***Zineb*** *et mes fréres :* ***M.Abdelkahar*** *et* ***M.Saddik****.*

A les petits : ***M.Belkasem, Abdellah, Ibrahim***

A mon marrier ***Ahmed***

A toute ma famille speciellement : tante ***Kadidja*** *.*

A tous les amis : ***Souhir, Nasira, Kawthar, Hanan, Samira, Hadda, Hadjer, Souraya, Yamina, Asma****.*

A tous les étudiants d'université de KASDI Merbah - Ouargla. A tous.

Remerciement

En premier lieu , je tient a témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient a exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire , **Mr : AGTI MOHAMED** , pour ces conseils , et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincérement les membres du jury :

⋆ **Dr : MEFLAH MABROUK** , d'avoir accepté la présidence du jury .

Aussi je remercier vivement , les professeurs :

⋆ **Dr : BOUSSAAD ABDELMALIK** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .

⋆ **Mr : KOUIDRI MOHAMED** d'avoir accepté l'examinateur de ce travail

Je les remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé a ce travail .

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon pére , ma mére , mon frére et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de KASDI Merbah - Ouargla .

Un grand merci a mes collégues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci a tous ceux qui ont contribué , de prs ou de loin , à l'aboutissement de ce travail .

Notations

X **:** Espace de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathcal{L}(X)$ **:** L'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés.

K **:** Constante.

t **:** Temps (s).

x **:** Variable d'espace X.

$\square$ **:** opérateur de d'Alembercien

Δ **:** opérateur de Laplacien

∇ **:** opérateur gradient.

$H_0^1(\Omega)$ **:** Noyau de l'opérateur linéaire trace .

u_{xx} **:** la dérivée partielle de u par rapport à x de l'ordre 2.

u_{yy} **:** la dérivée partielle de u par rapport à y de l'ordre 2.

u_t **:** la dérivée partielle de u par rapport à t.

Introduction

L'étude asymptotique des semi-groupe a beaucoup d'intérêt dans la stabilité des solutions, la régularité maximale pour les problèmes d'évolutions [13] [3], la stabilité exponentielle des semi-groupes [13] et la détermination de la norme de résolvante $(\lambda I - A)$ lorsque λ est prés du spectre [1] qui lui même représente grande importance concernant les opérateurs m-dissipatifs.

Les premier résultats partiels sur cette branche avaient été obtenus en 1981 par *J.Estarle* qui ont montre dans [8] que si $\sigma(T) = 1$ et T déférent de l'identité alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf n\|T^{n+1} - T^n\| \geq \frac{1}{e}$$

Plus récemment *J.Esterle* et *A.Mokhtari* en 2002 dans [10] prouvais que

$$\text{si} \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup \|T(t) - T(t(n+1))\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

alors on bien $T(t) = 0$ pour $t > 0$, on bien la sous-algébre A engendré par le semi-groupe $(T(t))_{t>0}$ est unitaire et il existe $u \in A$ tel que $T(t) = e^{tu}$ pour $t > 0$

Enfin *J.Estarle* a amélioré dans [9] en 2005 les résultats de *A.Mokhtarie* et *J.Esterle* en montrant notamment que si $(T(t))_{t>0}$ non trivial quasi nilpotent $\mathcal{C}_0$semi-groupe des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach alors il existe $\sigma > 0$ tel que :

$$\|T(t) - T(s)\| > (s-t)\frac{t^{t/(s-t)}}{s^{1/(s-t)}} \qquad \text{pour } 0 < t < s < \sigma$$

de plus si $(T(t))_{t>0}$ $\mathcal{C}$un semi-groupe et s'il existe $\eta > 0$ et une fonction continue $t \longrightarrow S(t)$ sur $[0, \eta]$ tel que $S(0) = 0, 0 < t < s(t)$ vérifie :

$$\|T(t) - T(s(t))\| < (s-t)\frac{t^{t/(s-t)}}{s^{1/(s-t)}} \quad \text{pour} \quad t \in]0, \eta]$$

alors le générateur infinitésimal est borné.

Dans ce travail nous é'tudions quelques propriétes des semi-groupes engendrés par des opérateurs m-dissipatifs notamment la distance entre deux semi-groupes engendés par les opérateurs de la Chaleur et des ondes (où nous appliquons les résultats trouvés par *J.Esterle* et *A.Mokhtari*).

Notre travail de mémoire commence par une présentation de la théorie générale et les notions qui seront utilisées dans ce travail.

Dans le deuxiéme chapitre nous étudions quelques ropriétés des semi-goupes engendés par des opérateurs m-dissipatifs où nous présentons deux exemples (semi-groupe de le Chaleur et le semi groupe des ondes).

Dans le troisiéme chapitre nous étudions la distance entre deux élémentes d'un semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif.

Enfin à titre d'application nous cherchons des solutions explicites pour l'équation de la Chaleur et l'équation des ondes où nous utilisons la transformée de Fourier puis nous étudions la distance entre deux solution.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Les opérateurs m-dissipatifs

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1.1 : Un opérateur linéaire non borné dans X est un couple $(A, D(A))$ ou $D(A)$ un sous-espace vectoriel de X et A une application linéaire de $D(A)$ dans X. Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A.

Définition 1.1.1.2 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est fermé si son graphe $G(A) = \{(x, Ax)\backslash x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times X$.

Définition 1.1.1.3 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X. Lorsque $D(A)$ est dense dans X, on dit que $(A, D(A))$ est de domaine dense dans X.

Définition 1.1.1.4 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X, de domaine dense dans X. On appelle adjoint de A l'opérateur $(A, D(A))$ défini par

$$D(A^*) = \{y \in X^{'} | \exists c \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \langle Ax, y \rangle_{X,X'} \leq c\|x\| \quad \text{pour tout } x \in D(A)\},$$

et

$$\langle x, A^*y \rangle_{X,X'} = \langle Ax, x \rangle_{X,X'} \quad \text{pour tout } x \in D(A) \quad \text{et pour tout} \quad y \in D(A^*).$$

Définition 1.1.1.5 : On noterons par X un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, par $\mathcal{L}(X)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X et par I l'unité de $\mathcal{L}(X)$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ nous noterons par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}|\lambda I - A \quad \text{est inversible dans} \quad \mathcal{L}(X)\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{L}(X)$ et par

$$R(.;A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$
$$R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 1.1.1.5 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit la convolution de f et g par

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

on vérifie sans peine que $f * g = g * f$, que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

1.1.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach

Définition 1.1.2.1 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si

$$\forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0, \quad \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 1.1.2.2 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est m-dissipatif si :

1. A est dissipatif,
2. $\forall f \in X, \quad \forall \lambda > 0, \quad \exists x \in D(A) \quad$ tel que $\quad \lambda x - Ax = f$.

Théorème 1.1.2.1 : Si A est m-dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1}f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Preuve : Soit $\lambda > 0$. pour tout $f \in X$, l'équation

$$\lambda x - Ax = f, \tag{1.1}$$

admet au moins une solution x_f dans $D(A)$ d'aprés la définition1.1.1.2, cette solution vérifie

$$\lambda \|x_f\| \leq \|\lambda x_f - Ax_f\| = \|f\|,$$

D'aprés la définition, nous en déduisons d'une part que l'équation (1.1) admet une solution unique x_f dans $D(A)$ et d'autre parte que

$$\|x_f\| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|.$$

Théorème 1.1.2.2 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans X. L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si

$$\exists \lambda_0 > 0 \ \ tel \ \ que \ \ \forall f \in X, \ \ \exists x \in D(A) \ \ vrifier \ \ \lambda_0 x - Ax = f. \tag{1.2}$$

Preuve : Il est évident que si l'opérateur A est m-dissipatif alors la condition (1.2) est satisfaite. Montrons la réciproque, de la condition (1.2) et du fait que A est dissipatif, il découle que, pour tout $f \in X$, l'équation $\lambda_0 x - Ax = f$ admet une solution unique dans $D(A)$. Comme dans la preuve du théorème (1.1.1.1), nous pouvons montrer que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda_0 I - A)\| \leq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Soit $\lambda > 0$, l'équation

$$\lambda x - Ax = f$$

est équivalente

$$\lambda_0 x - Ax = f + (\lambda_0 - \lambda)x,$$

Soit encore

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(f - (\lambda_0 - \lambda)x).$$

L'application

$$F : x \mapsto (\lambda_0 I - A)^{-1}(f - (\lambda_0 - \lambda)x)$$

une application de X dans X et elle vérifie

$$\|F(x_1 - F(x_2))\| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Si $\lambda \in (0.2\lambda_0)$. F une contraction dans X. On a montré que

$$\forall f \in X, \ \ \forall \lambda \in (0, 2\lambda_0), \ \ \exists x \in D(A) \quad \text{tel que} \quad \lambda x - Ax = f.$$

En étirant ce proséd, nous pourrons résoudre l'équation $\lambda x - Ax = f$ pour tout $\lambda \in (0.2^n\lambda_0)$ et pour tout $n \geq 1$, i.e. pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 1.1.2.3 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - A$ est un bijection de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X, alors A est fermé.
En particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergeant vers x dans X, et supposons que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans X, l'opérateur $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ étant borné, nous obtenons

$$x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x_n - Ax_n) \to (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \text{ quand } n \to \infty$$

Par conséquent, nous avons

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y)$$

et $(\lambda_0 I - A)x = \lambda_0 x - y$, soit encore $Ax = y$.

Corollaire 1.1.2.1 : Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace $(D(A), \|.\|_{D(A)})$ est un espace de Banach et $A\backslash_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A); X)$.

Preuve : si $(A, D(A))$ est un opérateur non borné sur X, l'application

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$$

est une norme sur $D(A)$. Nous la noterons $\|.\|_{D(A)}$.
Avec le Théorème 1.1.2.3, on peut facilement vérifier que $(D(A), \|.\|_{D(A)})$ est un espace de Banach. Par définition de $\|.\|_{D(A)}$, il est évident que $A\backslash_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A); X)$.
Du Théorème 1.1.2.1, il découle que l'opérateur $(\lambda I - A)\backslash D(A)$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X. Par abus nous dirons parfois que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est un isomorphisme de $D(A)$ sur X.

Définition 1.1.2.3 : Soit A un opérateur m-dissipatif dans X. La famille des opérateurs $\mathcal{R}(\lambda; A)$, $\lambda > 0$, définie par $\mathcal{R}(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé résolvant de A. L'opérateur $A_\lambda = \lambda A \mathcal{R}(\lambda; A)$ est appolé approximation de Yosida de A.

Remarque :

$$A_\lambda = \lambda A \mathcal{R}(\lambda; A) = \lambda(A - \lambda I)\mathcal{R}(\lambda; A) + \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda, A) = \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda; A) - \lambda I$$

L'opérateur A_λ est donc un opérateur borné dans X. De plus nous avons

$$A_\lambda x = \lambda \mathcal{R}(\lambda; A) A x \quad \textit{pour tout} \quad x \in X \tag{1.3}$$

En effet pour tout $x \in D(A)$

$$\lambda \mathcal{R}(\lambda; A) A x = \lambda \mathcal{R}(\lambda; A)(A - \lambda I)x - \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda; A)x = -\lambda x + \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda; A)x = A_\lambda x$$

Théorème 1.1.2.4 : Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X. Alors

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x - x\| = 0, \text{ pour tout } x \in X.$$

De plus

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|A_\lambda x - Ax\| = 0, \text{ pour tout } x \in D(A)$$

Remarque : Remarquons que le premier résultat du théorème signifie que $\lambda R(\lambda; A)$ est une approximation de l'identité. Le second signifie que $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une suite d'opérateurs bornés approchant A.

Preuve : Soit $x \in D(A)$, on a :

$$\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x - x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x - x + A(\lambda I - A)^{1}x = (\lambda I - A)^{-1}Ax.$$

Nous en déduisons

$$\|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x - x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } \lambda \longrightarrow \infty \tag{1.4}$$

Soit $x \in X$ et soit (x_n) une suite dans $D(A)$ convergeant vers x dans X. Comme $\|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)\| \leq 1$, nous avons

$$\|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x - x\| \leq \|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)\|\|x_n - x\| + \|x_n - x\| \leq$$
$$\|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)x_n - x_n\| + 2\|x_n - x\|$$

pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|A_\lambda x - Ax\| = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|\lambda \mathcal{R}(\lambda; A)Ax - Ax\| \xrightarrow{\lambda \longrightarrow \infty} 0$$

Théorème 1.1.2.5 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif de domaine dense dans X. Si A est fermé et A^* est dissipatif alors A est m-dissipatif.

Preuve : Montrons tout d'abord que $(I - A)(D(A))$ est fermé dans X. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $(I - A)(D(A))$ convergeant vers f dans X. Comme $f_n \in (I - A)(D(A))$, il existe $x_n \in D(A)$ tel que $x_n - Ax_n = f_n$. L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\|x_n\| \leq \|f_n\|$$

La suite $(x_n)_n$ converge donc vers un élément $x \in X$. Nous en déduisons que $Ax_n = x_n - f_n$ converge vers $x - f$. L'opérateur A étant fermé, nous avons $Ax = x - f$. Donc $f \in (I - A)(D(A))$ et $(I - A)(D(A))$ est fermé dans X. D'autre part

$$[(I - A)(D(A))]^{\perp} = ker(I - A^*) = 0.$$

et nous avons $ker(I - A^*) = 0$, car A^* est dissipatif. Donc $(I - A)(D(A)) = X$ et A est m-dissipatif d'après le théorème(1.1.2.2).

1.1.3 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.3.1 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A),\ (Ax, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente remplacée par

$$\forall x \in D(A),\ \mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0$$

Preuve : Supposons que A est dissipatif. Pour tout $x \in D(A)$, non nul, et tout $\lambda > 0$, posons $y_{x,\lambda} = \lambda x - Ax$ et $z_{x,\lambda} = y_{x,\lambda}/\|y_{x,\lambda}\|$. L'opérateur A étant dissipatif, on a

$$\begin{aligned} \lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = (\lambda x - Ax, z_{x,\lambda}) \\ = \lambda\mathrm{Re}(x, z_{x,\lambda}) - \mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}) \leq \lambda\|x\| - \mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{Re}(Ax, z_{x,\lambda}) \leq 0 \text{ et } \mathrm{Re}(x, z_{x,\lambda}) \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

La suite $(z_{x,\lambda})_\lambda$ étant borné dans X, il existe $z_x \in X$ et une suite $(\lambda_n)_n$ convergeant vers l'infini tels que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z_{x,\lambda_n} = z_x\,;$$

Avec les inégalités précédentes, par passage à la limite, nous obtenons

$$\mathrm{Re}(Ax, z_x) \leq 0 \text{ et } \mathrm{Re}(x, z_x) \geq \|x\|.$$

Comme

$$\mathrm{Re}(x, z_x) \leq \mid (x, z_x) \mid \leq \|x\|.$$

nous obtenons

$$(x, z_x) = \|x\| \text{ et } z = x.$$

Nous avons donc

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0.$$

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(Ax, x) \leq 0$ pour tout $x \in D(A)$. Alors nous avons

$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geq \mid (\lambda x - Ax, x) \mid \geq \mathrm{Re}(\lambda x - Ax, x) \geq \lambda \|x\|^2.$$

Théorème 1.1.3.2 : Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans X.

Preuve : Soit $y_0 \in X$ tel que $(y_0, x) = 0$ pour tout $x \in D(A)$. On a $(I - A)^{-1}y_0 \in D(A)$,

$$(y_0, (I - A)^{-1}y_0) = 0 \text{ et } ((I - A)(I - A)^{-1}y_0, (I - A)^{-1}y_0) = 0.$$

L'opérateur A étant m-dissipatif, il vient

$$\|(I - A)^{-1}y_0\|^2 = (A(I - A)^{-1}y_0, (I - A)^{-1}y_0) \leq 0.$$

Donc $(I - A)^{-1}y_0 = 0$, $y_0 = 0$, et $D(A)$ est dense dans X.

Théorème 1.1.3.3 : Soit A un opérateur dissipatif de domaine dense dans X. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.

Preuve : Supposons que A est m-dissipatif. Nous savons que A est fermé (Théorème 1.1.2.2), nous devons montrer que A^* est dissipatif. De maniére à simplifier la preuve nous identifions X et X'. Dans ce cas, $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de X'. Pour tout $y \in D(A^*)$, nous avons

$$(A^*y, \lambda R(\lambda; A)y) \leq (y, \lambda AR(\lambda; A)y) = (y, A_\lambda y)$$
$$= (y, \lambda^2 R(\lambda; A)y - \lambda y) \leq \lambda(y, \lambda R(\lambda; A)y) - \lambda\|y\|^2 \leq 0,$$

et

$$(A^*y, \lambda R(\lambda; A)y) \longrightarrow (A^*y, y) \text{ quand } \lambda \longrightarrow 0.$$

On en déduit que

$$(A^*y, y) \leq 0,$$

donc que A^* est dissipatif. La réciproque découle du Théorème (1.1.1.5).
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Identifions X et X', alors A et A^* opérent sur le même espace, dans ce cas le domaine de A^* est $D(A^*) = \{y \in X/\ \exists c \geq 0 \quad \text{tel que} \quad (Ax, y)_X \leq c\|x\| \quad \text{pour tout} \quad x \in D(A)\}$.

Définition 1.1.3.1 : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$, de domaine dense dans X est dit auto-adjoint si $A = A^*$. Il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$.

Définition 1.1.3.2 : L'opérateur A est dit symètrique si :

$$\forall u, v \in D(A) \quad : \quad (Au, v) = (u, Av)$$

L'opérateur A est dit autoadjoint si $\quad A^* = A \quad$ c'est-à-dire :

1. $D(A^*) = D(A)$
2. $\forall u \in D(A) \qquad A^*u = Au$

Proposition 1.1.3.1 : Soit $(-A)$ un opérateur m-dissipatif. Alors
A est symètrique $\Longleftrightarrow$ A est autoadjoint

Proposition 1.1.3.2 : Soit A un opérateur linéaire de domaine dense si :

1. $G(A) \subset G(A^*)$
2. A est dissipatif $\Longleftrightarrow \forall x \in D(A); \quad (Ax, x) \leq 0$

Alors : A est autoadjoint $\Longleftrightarrow$ A est m-dissipatif, avec $G(A)$ est le graphe de A.

Définition 1.1.3.3 : Soit A un opérateur de domaine dense dans l'espace E (Hilbert) on dit que A est anti-adjoint si $\quad A^* = -A.$

Corollaire 1.1.3.1 : Si A est anti-adjoint dans l'espace de Hilbert E, alors A est $-A$ sont m-dissipatif.

Preuve : Soit $x \in D(A)$, on a

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax). \quad \text{Ainsi} \quad (Ax, x) = 0$$

donc A et $-A$ sont dissipatifs, on déduit que A et $-A$ sont m-dissipatifs.
(Car si A est m-dissipatif alors $I + A$ est m-dissipatif)

Remarque : Si A est autoadjoint dans l'espace de Hilbert E et si A est dissipatif, alors A est m-dissipatif.

Corollaire 1.1.3.2 : Soit A est un opérateur linéaire dans l'espace E et de domaine dense, alors A et $-A$ sont m-dissipatif si et seulement si A est anti-adjoint.

1.2 Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1 : On appelle C_0 semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_t \leq 0 \subset \mathcal{L}(X)$ vérifiant les propriétès suivantes :

1. $T(0) = I_{\mathcal{L}(X)}$
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \quad$ pour tout $s, t \geq 0$
3. $\lim\limits_{t \overset{>}{\longrightarrow} 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X$
4. pour tout $x \in X$, $t \longrightarrow S(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X.

Définition 1.3.2 : On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_t \geq 0$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \; existes \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \qquad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Définition 1.3.3 : on appelle semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

Corollaire 1.3.1 : Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors :

1. Il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0, \tau] ;$$

2. il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve :

1. Supposons que pour tout $\tau > 0$ et tout $M \geq 1$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$. Pour $\tau = \dfrac{1}{n}$ et $M = n \in N^*$, il existe $t_n \in [0, \dfrac{1}{n}]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$. Donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n \in N^*}$ est non bornée. Si la suite $(\|T(t_n)x\|)_{n \in N^*}$ était bornée pour tout $x \in X$, alors compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus , il en résulterait que $(\|T(t_n)\|)_{n \in N^*}$ serait bornée, mais cela contredit l'affirmation précédente. Donc il existe $x_0 \in X$, tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_{n \in N^*}$ soit non bornée. D'autre part, compte tenu de la définition 2.1.1 (iii), il résulte que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|T(t_n)x_0\| = x_0$ et cela est contradictoire.

2. Pour $h > 0$ et $t > h$, nous noterons $m = \left[\dfrac{t}{h}\right] \in N^*$. Compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r \in [0, h)$ tel que $t = mh + r$. Alors :

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(mh)T(r)\| \leq \|T(h)\|^m \|\|T(r)\| \\ &\leq M^m M \leq M e^{t\frac{1}{h}\ln M}.\end{aligned}$$

L'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant $\omega = \dfrac{1}{h} \ln M$.

Théorème 1.3.1 : Soit $T(t)_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal, alors

1. Pour $x \in X$:

$$\lim \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

2. Pour $x \in X$: $\displaystyle\int_0^t T(s)ds \in D(A)$ et

$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x$$

3. Pour $x \in X$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. Pour $x \in D(A)$:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Preuve :

1. $\forall x \in X$, l'application $t \longrightarrow T(t)x$ continue,
   $F(t) = \displaystyle\int_0^t T(t)xds,\ F'(t) = T(t)x$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = T(t)x$$

2. Pour $x \in X$, $y = \displaystyle\int_0^t T(s)xds \in D(A)$, alors $\displaystyle\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h}$ existe :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(s)xds - \int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xd.
\end{aligned}$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - \int_0^h T(s)xds = T(t)x - x = A(\int_0^t T(s)xds)$$

3. Soient $x \in D(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\
&\leq M^{\omega t} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|
\end{aligned}$$

   Par conséquant :

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$$

d'où

$$T(t)Ax = \frac{d^+}{dt}T(t),\ \forall t \geq 0$$

Si $t-h \geq 0$, alors Nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\| \left\|\frac{T(h)x-x}{h} + Ax - Ax - T(h)Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right).\end{aligned}$$

par suite

$$lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} = T(t)Ax$$

et :

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax.\ \forall t \geq 0$$

Il s'en suite que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,\infty)$, quel que soit $x \in D(A)$. De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

4. D'aprés (3) on a

$$\int_0^t \frac{dT(t)}{dt}xdt = T(t)x|_0^t = \int_0^t T(s)Axds = \int_0^t AT(t)xds.$$

Théorème 1.3.2 (l'unicité de l'engendrement) : Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux C_0 semi-groupe ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors

$$T(t) = S(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Preuve : Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Définissons l'application :

$$[0, t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in D(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x, \quad$ pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x \ , \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $D(A) = X$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{L}(X)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que : $T(t)x = S(t)x$, $\forall t \geq 0$ et $x \in X$, ou bien : $T(t) = S(t)$, $\quad \forall t \geq 0$.

Corollaire 1.3.2 : Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X, alors $D(A)$ dense dans X, et A est fermé.

Preuve :

1. Montrons que $D(A)$ est dense dans X. Si $x \in X$. Alors, du Théorème (1.1)(2) on déduit

   $$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xdx \in D(A)$$

   Avec le Théorème(1.1)(1), on a $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} x_h = x$.

2. Montrons que A est fermé. Soit $(x_n)_n \subset D(A)$ est une suite telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow 0} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow 0} Ax_n = y$ dans X. Avec le Théorème(1.1)(3), on a

   $$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds.$$

Or $T(s)Ax_n$ converge vers $T(s)y$ dans X, uniformément sur $[0,t]$. En passant à la limite sur n, il vient

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds$$

En divisant cette égalité par $t > 0$, et en faisant tendre t vers 0, avec le Théorème(1.1)(1), on obtient $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t} = y$. Nous en dduisons $x \in D(A)$ et que $Ax = y$.

Théorème 1.3.3 : Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur X vérifiant

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'opérateur $(A - cI, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(e^{-ct}T(t))_{t \geq 0}$ fortement contenu sur X.

Preuve : $(e^{-ct}T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X d'aprés la définition (1.3.1)

Pour montrer que l'opérateur $(A - cI, D(A))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{-ct}T(t))_{t \geq 0}$, il suffit d'appliquer le Théorème(1.1.3).

1.3 Semi-groupes des contractions

Définition 1.4.1 : Un Semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ fortement continue sur X est un semi-groupe de contraction si :

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

1.3.1 Théorème de Hille Yosida

Théorème (Hille Yosida 1) : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. A est fermé,
2. $D(A)$ est dense dans X,
3. Pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème (Hille Yosida 2) : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si A est m-dissipatif et de domaine dense dans X.

1.3.2 Théorème (Lumer-Phillips) :

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si A est fermé et si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.

Prouve Le résultat découle des Théorèmes 1.1.2.5 et 2.4.2.
Si $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dans X, nous pouvons définir les puissances de A en étant qu'opérateurs non bornés de la faon suivante :

$$D(A^2) = \{x \in D(A) | Ax \in D(A)\} \quad \text{et} \quad A^2 x = A(Ax).$$

De maniére itérative, pour tout entier $k \geq 2$, nous posons

$$D(A^k) = \left\{x \in D(A^{k-1}) | Ax \in D(A^{k-1})\right\} \quad \text{et} \quad A^k x = A(A^{k-1}x).$$

Si $(A, D(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, il est possible de définir de nouveaux opérateurs m-dissipatifs comme suit. Nous définissons $(A_1, D(A_1))$ par

$$D(A_1) = D(A^2) \text{ et } A_1 x = Ax \text{ pour tout } x \in D(A_1).$$

1.4 Théorème (Théorème de Lax-Milgram) :

Soit H est un espace de Hilbert, et soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction bilinéaire. Supposons il existe deux constants $C < \infty$, $\alpha > 0$ tels que :
(i) $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout $(u,v) \in H \times H$ (continuité) ;
(ii) $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$ pour tout $u \in H$ (coercitives).
Alors, $\forall f \in H^*$ (espace dual de H), il existe $u \in H$ est unique, tels que $a(u,v) = (f,v)$ pour tout $v \in H$.

1.5 Analyse de Fourier

1.5.1 Transformée de Fourier :

Définition 1.2.1 : On définit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en posant

$$F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\pi\omega x} f(x)dx$$

$$F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\omega x} f(x)dx$$

Définition 1.2.2 : Soit $\hat{f}(\omega)$. La transformation inverse de Fourier de $f(\omega)$ est définie par la formule

$$F^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Propriétés 1.2.1 : La transformation de Fourier $f \longrightarrow F(f)$ est définie sur l'espace $\mathcal{L}^1$. Elle posséde les propriétés suivantes :

(1) Linéarité

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall a, b \in \mathbb{C}, \ \ F(af + bg) = aF(f) + bF(g)\,;$$

(2) Parité

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ F(x \longrightarrow f(-x))(\xi) = F(f)(-\xi) = F^{+}(f)(\xi)\,;$$

(3) Conjugaison

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ F(\bar{f})(\xi) = \overline{F(f)}(-\xi)\,;$$

(4) Translation

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall a \in \mathbb{R}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ F(x \longrightarrow f(x-a))(\xi) = e^{-ia\xi}F(f)(\xi)\,;$$

(5) Modulation

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ F(x \longrightarrow e^{i\alpha x}f(x))(\xi) = F(f)(\xi - \alpha)\,;$$

(6) Changement d'échelle

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \ \ \forall b \in \mathbb{R}^{\bullet}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \ F(x \longrightarrow f(bx))(\xi) = \frac{1}{|b|}F(f)(\xi/b)\,;$$

(7) Continuité et comportement à l'infini

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \quad F(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et on a } \quad \lim_{|\xi| \longrightarrow \infty} F(f)(\xi) = 0\,;$$

(8) Dérivation

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, \text{ continûment dérivable et telle que } f^{'} \in \mathcal{L}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ on a la relation}$$
$$F(f^{'})(\xi) = i\xi F(f)(\xi)\,;$$

(9) Multiplication par x

$$\forall f \in \mathcal{L}, \quad \text{telle que } x \longrightarrow xf(x) \in \mathcal{L}, \quad \text{et} \quad \forall \xi \in \mathcal{L}, \quad \text{on a la relation}$$
$$F(x \longrightarrow xf(x))(\xi) = iF^{'}(f)(\xi)\ .$$

(10) si

$$u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \quad F(u * v) = F(u)F(v)$$

1.5.2 Série de Fourier :

Définition : On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \right]$$

Avec a_0 , a_n et b_n son les coefficients de Fourier que les valeurs :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt.$$

est on écrire

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}.$$

Les coefficients des séries est :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} \, dt.$$

La forme de définir la série de Fourier est :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

donc $\omega_n = n\omega$ est $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

alors

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos \omega_n t dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin \omega_n t dt.$$

Chapitre 2

Semi-groupes engendrés par des opérateurs m-dissipatifs

2.1 Semi-groupe engendré par l'opérateur de la Chaleur et l'opérateur des ondes :

Théorème 2.1.1 : Soit X un espace de Banach sur le corps $\mathbb{R}$ et A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans X, pour tout $\lambda > 0$ on pose :

$$S_\lambda(t) = e^{tA_\lambda},$$

avec A_λ est l'approximation de Yosida de A.
Alors la suite $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)x$ converge uniformément sur l'intervalle borné $[a, b]$ vers une fonction $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, X)$ quand $\lambda \longrightarrow 0$, on pose $S(t)x = u(t)$ pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$ alors

$$T(t) \in \mathcal{L}(X) \quad et \quad \|T(t)\| \leq 1, \ \ \forall t \geq 0; \tag{2.1}$$

$$T(0) = I; \tag{2.2}$$

$$T(t + s) = T(t)T(s), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

de plus, pour tout $x \in D(A)$, $u(t) = S(t)x$ et l'unique solution de probléme :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[, X) \quad (i) \\ \\ u^{'}(t) = Au(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (ii) \\ \\ u(0) = u_0(x) \quad u(x,0) = x \quad (iii) \end{cases} \tag{2.4}$$

finalement

$$AT(t)x = T(t)Ax \tag{2.5}$$

Preuve : [5] Montrons ce théorème a 5 étapes :

Étape 1 : D'aprés la définition , pour tout $t \geq 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$T_\lambda(t) = e^{\frac{t}{\lambda}J_\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}I} = e^{-\frac{t}{\lambda}}e^{\frac{t}{\lambda}J_\lambda};$$

donc

$$\|T_\lambda(t)\| \leq e^{-\frac{t}{\lambda}}e^{\frac{t}{\lambda}\|J_\lambda\|} \leq 1$$

on particulier

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|x\| \tag{2.6}$$

pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$.

Étape 2 : Supposons $x \in D(A)$, et pour tout $s, t \geq 0$. Alors

$$\frac{d}{ds}\{T_\lambda(st)T_\mu(t-st)\} = tT_\lambda(st)T_\mu(t-st)(A_\lambda - A_\mu).$$

or

$$\frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}) = tA_\lambda e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x - te^{stA_\lambda}A_\mu e^{(1-s)tA_\mu}x.$$

et comme A_λ, A_μ, e^{stA_λ} et $e^{(1-s)tA_\mu}$ commutent quels soient $\lambda, \mu > 0$ et $t \geq 0$. On a alors

$$\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x)ds =$$
$$= \int_0^1 (tA_\lambda e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x - te^{stA_\lambda}A_\mu e^{(1-s)tA_\mu}x)ds$$

d'où

$$[e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}x]_0^1 = \int_0^1 (te^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}A_\lambda x - te^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}A_\mu x)ds$$

par suite

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = t\int_0^1 e^{stA_\lambda}e^{(1-s)tA_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)ds, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in X$$

donc

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = t\int_0^1 \|e^{stA_\lambda}\|\|e^{(1-s)tA_\mu}\|\|(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t(\lambda^2 R(\lambda;A)-\lambda I)}\| = \|e^{-\lambda t I}e^{\lambda^2 t R(\lambda,A)}\| \\
&\leq e^{-\lambda t}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda^{2k}R(\lambda;A)^k}{k!}\right\| \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\lambda|^{2k}\|R(\lambda;A)^k\|}{k!} \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k|\lambda|^{2k}}{k!(\lambda)^k} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t|\lambda|^2}{(\lambda)}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda t}e^{t\lambda} = 1
\end{aligned}$$

il résulte que :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

pour tout $\lambda > 0$. Par suite

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}\| &\leq t\int_0^1 \|(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds \\
&= t\|(A_\lambda x - A_\mu x)\|, \quad \forall x \in X \;\; et \;\; t \geq 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| = \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\{T_\lambda(st)T_\mu(t-st)x\}ds \right\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

déduire que u_λ est une suite de Cauchy on $\mathcal{C}([a,b],X)$ pour tout $T > 0$. Soit $u \in \mathcal{C}([0,+\infty),X)$ la limite de u_λ

Étape 3 : Soit $(T_\lambda(t))_{t\geq 0} = (e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ le semi-groupe uniformément continu engendré par A_λ. Avec l'**étape 2** on a

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \forall \lambda, \mu > 0, x \in D(A) \text{ et } \forall t \geq 0$$

Soit l'espace $[D(A)]$ de Banach $D(A)$ avec la norme $\|.\|_{D(A)}$ et $B([D(A)],X)$ l'espace des opérateurs borné définis sur $[D(A)]$ avec valeur dans X, muni de la topologie forte.

On note par $\mathcal{C}([0,+\infty[; B([D(A)],X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $B([D(A)],X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,+\infty[$.
Si $[a,b] \subset [0,+\infty[$, alors pour tout $x \in D(A)$ on a

$$\sup_{t\in[a,b]} \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq b(\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax\|)$$

et

$$b(\|A_\lambda x - Ax\| + \|A_\mu x - Ax) \longrightarrow 0$$

si $\lambda, \mu \longrightarrow +\infty$.
d'où il résulte que $((T_\lambda(t))_{t\geq 0})_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{C}([0,+\infty[; B([D(A)],X)$.
Donc, il existe un unique $T_0 \in \mathcal{C}([0,+\infty[; B([D(A)],X)$ tel que

$$T_\lambda(t)x \xrightarrow{c.u} T_0(t)x, \quad \text{si} \quad \lambda \longrightarrow +\infty, \forall x \in D(A).$$

Puisque

$$\|T_\lambda(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

par suite

$$\|T_\lambda(t)x\| \leq \|x\|, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in D(A).$$

Soit l'application linéaire

$$\psi_0 : D(A) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b], X)$$

$$\psi_0 x = T_0(.)x, \quad \forall a, b \in [a,b] \subset [0, +\infty[.$$

comme on a

$$\|\psi_0 x\|_{\mathcal{C}([a,b],X)} = \sup_{t\in[a,b]} \|T_0(t)x\| \leq \|x\|_{D(A)}, \forall x \in D(A).$$

donc ψ_0 est continu et puisque $\overline{D(A)} = X$, elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue :

$$\psi : X \longrightarrow \mathcal{C}([a,b], X)$$

telle que

$$\psi_{|D(A)} = \psi_0$$

et

$$\|\psi x\|_{\mathcal{C}([a,b],X)} \leq \|x\|, \ \ \forall x \in X.$$

Par conséquent, il existe un seul opérateur $T \in \mathcal{C}([a,b], B(X))$ tel que

$$\psi x = T(.)x, \quad \forall x \in X.$$

Ainsi quel que soit $[a,b] \subset [0, +\infty[$, il existe un seul opérateur noté

$$T \in \mathcal{C}([0, +\infty[, B(X))$$

Prend $x \in X$, et $(x_n)_{n\geq} \subset D(A)$, tels que $x_n \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow +\infty$, on a

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)x - T(t)x\| &\leq \|T_\lambda(t)x - T_\lambda(t)x_n\| + \|T_\lambda(t)x_n - T(t)x_n + \|T(t)x_n - T(t)x\| \\ &\leq 2\|x_n - x\| + \|T_{_\lambda}(t)x_n - T(t)x_n\|; \end{aligned}$$

$$T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x, \quad \text{si } \lambda \longrightarrow +\infty,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalle compacts de $[0, +\infty[$.
De plus

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

d'autre part

$$T(0)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} T_\lambda(0)x = x, \ \ \forall x \in X$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow 0} T(t)x = \lim_{t\longrightarrow 0}\left(\lim_{\lambda\longrightarrow +\infty} T_\lambda(t)x\right) = \lim_{\lambda\longrightarrow +\infty}\left(\lim_{t\longrightarrow 0} T_\lambda(t)x\right) = x, \ \ \forall x \in X$$

Soient $t, s \in [0, +\infty[$ et $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} \|T(t+s)x &- T(t)T(s)x\| \leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| \\ &+ \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)\| \\ &\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\|\|T_\lambda(s)x - T(s)x\| \\ &+ \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t) \longrightarrow T(t)$, si $\lambda \longrightarrow +\infty$, pour la topologie forte de $B(X)$.
par suite

$$T(t+s)x = T(t)T(s), \text{ pour tout } x \in X$$

Étape 4 : Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.
Par retour a le cas où $u \in D(A)$, on pose $v_\lambda(t) = A_\lambda T_\lambda(t)x = T_\lambda(t)A_\lambda x = u_\lambda^{'}(t)$. Pour tout $x \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda(t) - T(t)Ax\| &\leq \|T_\lambda(t)A_\lambda x - T(t)Ax\| \\
&\leq \|T_\lambda(t)\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(t)Ax - T(t)Ax\| \\
&\leq \|T(t)_\lambda Ax - T(t)Ax\| + \|A_\lambda x - Ax\| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

donc, $v_\lambda \longrightarrow T(t)Ax$ quand $\lambda \downarrow +\infty$, uniformément sur $[a,b]$, pour tout $T > 0$, prend

$$u_\lambda(t) = x + \int_0^t v_\lambda(s)ds$$

et quand $\lambda \downarrow +\infty$, devient

$$u(t) = x + \int_0^t T(s)Axdx$$

alors $u \in \mathcal{C}^1([0,\infty), X)$, et

$$u^{'}(t) = T(t)Ax \tag{2.7}$$

et puisque $G(A)$ est fermé il nous résulte que $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$
et $AT(t)x = T(t)Ax$, d'où (2.5)
Nous déduisons que $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, D(A)$
L'équation (2.4)(ii) découle de (2.5) et (2.7)

Étape 5 : Montrons l'unicité Soit $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, D(A) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[, X)$ une solution de probléme précédent et soit v une autre solution on pose $v(s) = T(t-s)u(s)$.
Pour $0 \leq s \leq t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad$ on a :

$$\begin{gathered}
\frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}T(t-s)u(s) = \frac{dT(t-s)}{ds}u(s) + T(t-s)\frac{du(s)}{ds} \\
= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u^{'}(s) = T(t-s)[u^{'}(s) - Au(t)] = 0
\end{gathered}$$

alors $\quad v(s) = v(0,$ par suite $\quad u(t) = T(t)x, \quad \forall t \geq 0,$

Théorème 2.1.2 : Soit $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X (espace de Hilbert). Si l'opérateur A est auto-adjoint alors, pour tout $x \in X$, $u(t) = S(t)x$ est l'unique solution du probléme :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, X)) \cap \mathcal{C}([0,+\infty[, D(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[; X) \quad (i) \\ u^{'}(t) = Au(t) \quad \forall t > 0 \quad (ii) \\ u(0) = x \quad (iii) \end{cases} \tag{2.8}$$

De plus, pour tout $t > 0$, on a

$$\|Ax(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|x_0\| \tag{2.9}$$

$$(Ax(t), x(t)) \leq \frac{1}{2t}\|x\|^2, \tag{2.10}$$

et

$$\|Ax(t)\|^2 \leq -\frac{1}{2t}(Ax(t), x(t)) \quad si \quad x_0 \in D(A). \tag{2.11}$$

Preuve : [5] Il est facile de vérifier que A_λ est auto-adjoint≤ 0, pour tout $\lambda > 0$. Si $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$, les fonctions $\|u_\lambda(t)\|$ et $\|u^{'}_\lambda(t)\|$ sont décroissants pour la variable t.
De plus, on a

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 = 2\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle = 2\langle A_\lambda u_\lambda(t), u^{'}_\lambda(t)\rangle = 2\|u^{'}_\lambda(t)\|^2 \tag{2.13}$$

d'aprés (2.8), on a $-\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle$ est décroissant pour la variable t. Intégrant (2.7) entre 0 et $t > 0$, il s'ensuit que

$$-t\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle \leq -\int_0^t \langle A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s)\rangle ds \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{2.14}$$

Intégrant (2.8), on obtient

$$2t\|u^{'}_\lambda(t)\| \leq 2\int_0^t \|u^{'}_\lambda(s)\|ds = -\langle A_\lambda x, x\rangle + \langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle \leq -\langle A_\lambda x, x\rangle \tag{2.15}$$

et

$$t^2\|u_\lambda^{'}\| \leq 2\int_0^t s\|u_\lambda^{'}(t)\|ds = 2\int_0^t s\frac{d}{ds}\langle A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)\rangle ds \leq -\int_0^t \langle A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s)\rangle ds \quad (2.16)$$

Donc, pour (2.9) il résulte

$$2t^2\|u_\lambda^{'}(t)\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (2.17)$$

d'autre coté, $G(A)$ est un sous-espace vectoriel, fermé on $X \times X$ fortement, et donc fermé faiblement. En autre, $u_\lambda^{'}(t) = A_\lambda u_\lambda(t) = A_\lambda \lambda R(\lambda, A)u_\lambda(t)$, et $\lambda R(\lambda, A)u_\lambda(t) \longrightarrow u(t)$ quand $\lambda \downarrow +\infty$ (voir étape 4 de preuve de théorème (2.1.1)). De plus (de (2.10)), pour tout $t > 0$, $\|A_\lambda \lambda R(\lambda, A)u_\lambda(t)\|$ est bornée quand $\lambda \downarrow +\infty$. D'où $u(t) \in D(A)$, pour tout $t < 0$, tel que

$$Au(t) = \lim_{\lambda \downarrow +\infty} A_\lambda \lambda R(\lambda; A)u_\lambda(t)$$

faiblement on X. (2.8 (i)(ii)(iii)) d'aprés le théorème (2.1.1), et (2.9),(2.10) et (2.11) découle par passage a la limite dans (2.17), (2.14) et (2.15) quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Pour démontrer l'unicité de u, on prend $t > 0$ et $0 < \varepsilon < t$, il nous résulte d'aprés (2.8(i)) et le théorème (2.1.1) que $u(t) = T(t-\varepsilon)u(t)$, et donc

$$\|u(t) - T(t)x\| \leq \|u(\varepsilon) - x\| + \|T(\varepsilon)x - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{pendant} \quad \varepsilon \downarrow 0$$

Alors $u(t) = T(t)x \quad$ pour tout $\quad t \geq 0$.

2.2 Exemples (application sur l'équation d'évolution)

Introduction Nous présentons ici deux exemples des C_0-semi-groupes engendrés par les opérateurs m-dissipatifs de la Chaleur et des ondes, sur l'espace de Hilbert ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{Q} = \Omega \times]0, +\infty[$.

2.2.1 Équation de la Chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{Q} \quad (i) \\ u(0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \quad (ii) \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[\quad (iii) \end{cases}$$

(Γ frontière de Ω) où $u(x,t)$ est une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans un espace de Hilbert qui dépend seulement de x et

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Designe Laplacien par rapport aux variables d'espace x , t est la variable de temps et

$$u(x,0) = u(0) = u_0(x) = x$$

est une fonction donnée.

Remarque : Montrons que le domaine de définition de Laplacien est égale a :

$$D(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on sait que $H^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$. On a $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout i, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$d'où pour tout j, $\dfrac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Donc $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset D(\Delta)$.
Soit $u \in D(\Delta)$, montrons que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$
Par définition de $D(\Delta)$ on a $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^2$ et de frontiére bornée, d'aprés le théorème de régularité du probléme de Dirichlet il vient que $u \in H^2(\Omega)$.

Théorème : On suppose que $u \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une fonction $u(x,t)$ unique vérifiant (I) et

$$u \in \mathcal{C}([0,+\infty[; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(]0,+\infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$u \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[; L^2(\Omega).$$

De plus

$$u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}; [\varepsilon, +\infty[) \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Enfin $u \in L^2([0,+\infty[; H_0^1(\Omega)$ et l'on a

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}|u_0(T)|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall T > 0$$

Preuve : [4] Montrons que l'opérateur A défini sur $E = L^2(\Omega)$ par $Au = -\Delta u$, tel que

$$D(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

est m-dissipatif.

Étudions maintenant le problème suivant, soit $f \in L^2(\Omega)$, existe-t-il (et est elle unique) une solution de l'équation :

$$\begin{cases} u - \lambda\Delta u = f & \lambda > 0 \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.18}$$

Soient $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $v \in D(\Omega)$, multiplions l'équation par v et intégrons par parties sur Ω , on obtient en utilisant la formule de Green :

$$\begin{aligned} -\lambda \int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega uv &= \int_\Omega fv \\ = \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv &= \int_\Omega fv \end{aligned}$$

On a alors par densité des fonctions continues dans $H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

C'est-à-dire en notant $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$ et $L(v) = \displaystyle\int_\Omega fv$, cela revient à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = L(v) \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Appliquons le théorème de Lax-Milgram :

− L'application $v \longmapsto L(v)$ est linéaire grâce à la linéarité de l'intégrale.

− De plus elle est Continuité car :

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

or $\|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H_0^1}$ (puisque $H_0^1 \subset L^2$) donc

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$$

et donc L est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

− La forme bilinéaire $a(u,v)$ est Continue car : Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|a(u,v)| \leq \max\{1,\lambda\}\langle u,v\rangle_{H^1}.$$

D'où pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

et donc $v \longmapsto a(u,v)$ est continue pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.

$-$ Coercivité : il faut montrer qu'il existe une constante α telle que $|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|_1$.

On a :

$$|a(u,u)| = \left|\lambda\int_\Omega \nabla u^2 + \int_\Omega u^2\right| \geq \min\{1,\lambda\}\|u\|_1^2$$

Donc le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence pour tout $f \in L^2(\Omega)$, d'un unique $u \in H_0^1(\Omega)$, solution du problème variationnel. De cela on déduit également que l'opérateur $(I+\lambda A)$ est bijectif.

De plus A est dissipatif car $\forall u \in D(A)$, on a encore une fois d'aprés la formule de Green :

$$\langle \Delta u, v\rangle = \int_\Omega u\Delta u dx = \int_\Omega -\nabla u^2 \leq 0$$

Donc A est un opérateur m-dissipatif. Montrons maintenant que A est auto-adjoint : il suffit de vérifier qu'il est symétrique car on vient de voir qu'il est m-dissipatif, on a :

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u\nabla v \quad \text{et}$$

$$\langle u, Av\rangle = \int_\Omega u(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u\nabla v$$

il résulte : $\quad (\Delta u, v) = (u, \Delta v) \quad$ alors $\quad G(\Delta) = G(\Delta^*)$

D'aprés la proposition précédente (2.2) l'opérateur Δ est auto-adjoint.

D'aprés le remarque (1) et le théorème (2.1) (2.8(ii)) nous déduisons (i)

Considérons la fonction $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$, φ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty]$

$$\varphi'(t) = \left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)_{L^2(\Omega)} = (u(t), \Delta u)_{L^2} = -\int_\Omega |\nabla u|^2$$

Par conséquent si $0 < \varepsilon < T < \infty$, on a

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{T} \varphi^{'}(t)dt = -\int_{\varepsilon}^{T} |\nabla u(t)|_{L^2}^2 dt$$

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\varphi(\varepsilon) \longrightarrow \frac{1}{2}|u_0|_{L^2}^2$.

Proposition : Soit $\varphi \in L^2(\Omega)$ et soit $u(t) = S(t)\varphi$ pour tout $t \geq 0$

Alors : u est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}([0,+\infty[; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)(([0,+\infty[; L^2(\Omega)), \\ \Delta u \in \mathcal{C}(([0,+\infty[; L^2(\Omega)) \\ u^{'}(t) = \Delta u(t) \quad t \geq 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

de plus on a : $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[; H_0^1(\Omega))$

$$\|\Delta u\|_{L^2} \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|\varphi\|_{L^2}, \quad \forall t > 0$$

$$\|\nabla u\|_{L^2}\| \leq \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2}}\|\varphi\|, \qquad \forall t > 0$$

Preuve : Il découle du théorème(2.1.2).

2.2.2 Equation des ondes :

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontiére Γ considérons le probléme suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0 & (I) \text{ sur } \quad \mathcal{Q} = \Omega \times]0,+\infty[\\ U = 0 & (II) \text{ sur } \quad \Sigma = \Gamma \times]0,+\infty[\\ U(x,0) = u_0(x) & (III) \text{ sur } \quad \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & (IV) \text{ sur } \quad \Omega \end{cases}$$

ou Δ désigne *laplacien.*
l'opérateur $\quad \Box = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad$ c'est *le D'Alembertien.*
en génèrale elle modélise la propagation d'***une onde*** (a acoustique élect romagnetique,etc...) dans un mile élastique homogéme $\Omega \in \mathcal{R}^n$.
L'équation (II) est la condition aux limites de *Dirichlet.*
Les équation (III) et (IV) traduisant l'étant initiale du systéme (déplacement initial $U_0(x)$ et la vitesse initiale $v_0(x)$ supposons que Ω de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec Γ borné.

Théorème (Existences et unicités) :[1] On suppose que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et que $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une solution unique vérifie les équations I,II,III et IV avec :

$$U \in \mathcal{C}([0,+\infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[; H_0^1) \cap \mathcal{C}^2([0,+\infty[; L^2(\Omega)) \tag{2.19}$$

De plus on a :

$$\left|\frac{\partial U(t)}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla U(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |V_0|_{L(2)(\Omega)} + |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t > 0 \tag{2.20}$$

Preuve : [4] on écrit l'équation (I) sous forme d'un systéme du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{Q} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{sur} \quad \mathcal{Q} \end{cases} \tag{2.21}$$

et on pose $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de sorte que ce système devient

$$\frac{\partial U}{\partial t} - AU = 0 \tag{2.22}$$

(c'est un équation d'évolution du premier ordre) avec

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

On applique le théorème de Hille-Yosida dans l'espace $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u_1, u_2) = \int_\Omega \nabla u_1.\nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1.u_2 dx + \int_\Omega v_1.v_2 dx$$

ou

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad et \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

On considère l'opérateur non borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ défini par (2.16) avec

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1) \times H_0^1(\Omega)$$

d'aprés (II) $\quad v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad$ sur $\quad \Sigma = \Gamma \times [0, +\infty[.$

Montrons que l'opérateur $(A, D(A))$ est m-dissipatif c'est-a-dire on applique le théorème de Hille-Yosida dans l'espace $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

L'espace E muni de produit scalaire défini par :

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1.\nabla u_2 dx + \int_\Omega v_1.v_2 dx$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

L'opérateur A est dissipatif sur E

Soit $U \in X, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}$$

$$(AU, U) = -\int_\Omega \nabla v.\nabla u dx + \int_\Omega (-\Delta u).v dx = 0 \qquad \forall U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$$

(d'aprés la formule de Green)

Montrons maintenant que l'opérateur A est m-dissipatif

Soit $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) = E$, et soit $\lambda > 0$.

l'équation

$$\lambda Y - AY = (f, g) \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} \lambda y_1 - y_2 = f \\ \\ \lambda y_2 - \Delta y_1 = g \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_2 = \lambda y_1 - f \\ \\ \lambda y_2 - \Delta y_1 = g \end{cases}$$

d'aprés l'équation (2) on a :

$$\lambda^2 y_1 - \lambda f - \Delta y_1 = g \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 y_1 - \Delta y_1 = \lambda f + g \tag{2.25}$$

Cette équation (2.18) admet une solution unique $y_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ car l'opérateur Δ est m-dissipatif.

Par conséquence $\quad y_2 \in H_0^1(\Omega) \quad$ unique d'où A est m-dissipatif.

Ainsi d'aprés le théorème de Hille-Yosida l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - AU = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times [0, +\infty[\\ \\ U_0(x) = U_0 & \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

admet une solution unique U, avec

$$U \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, E) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, D(A)) \tag{2.26}$$

puisque $U = D(A)$. Interprtant (2.19) on obtient (2.12).

Montrons l'égalité (2.13) :

D'aprés l'équation (I) on a :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial U}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left| \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx$$

et

$$\int_{\Omega} -\Delta U \frac{\partial U}{\partial t} dx = \int_{\Omega} \left(\nabla U \times \frac{\partial \nabla U}{\partial t} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int |\nabla U|^2 dx$$

$$\int \left| \frac{\partial U}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx = - \int |\nabla U(x,t)|^2 dx + c$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) = 0$$

ainsi

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 dx = c$$

alors on peut écrire

$$\left| \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{L^2}^2 + |\nabla U|_{L^2}^2 = |v_0|_{L^2}^2 + |\nabla u_0|_{L^2}^2$$

Romarque :

$$\left| \frac{\partial U(t)}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial U(x,t)^2}{\partial t} \right| dx$$

$$|\nabla U(t)|_{L(2)(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum \left| \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

Chapitre 3

Distance entre deux semi-groupes engendrés par un opérateur m-dissipatif prés de l'origine

3.1 Les formules explicitès en dimonsion un :

3.1.1 L'équation de la Chaleur :

Transformée de Fourier dans le cas de domaine non borné :

Considérons, dans cette exemple, une équation de diffusion, écrite sur un domaine non borné unidimensionnel, x $\in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ \\ u(0) = u_0(x) \end{cases}$$

Les conditions aux limites ne sont pas précisées explicitement dans ce probléme mais nous supposerons que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = C(t), \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

Pour résoudre ce probléme, on fait appel usuellement la transformée de Fourier, d'aprés le chapitre 1(1.5) : $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx$$

Et la transformée inverse :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Si on réalise une transformée de Fourier en espace de l'équation :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on obtient :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} - \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = 0$$

Avec

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \frac{\partial \widehat{u}(\xi,t)}{\partial t} \\ \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} e^{-2i\pi\xi x} \right]_{\mathbb{R}} + 2i\pi\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \\ &= (2i\pi\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} u(x,t) dx \\ &= -(2\pi\xi)^2 \widehat{u}(\xi,t) \end{aligned}$$

Et

$$\widehat{u}(\xi,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} u_0(x) dx = \widehat{u}_0(\xi)$$

On obtient donc une équation au dérivée partielle paramétrée par ξ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}(\xi,t)}{\partial t} + (2\pi\xi)^2 \widehat{u}(\xi,t) = 0 \\ \\ \widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Si on pose $g_\xi(t) = \hat{u}(\xi,t)$, on a donc

$$\frac{g'_\xi(t)}{g_\xi(t)} = -4\pi^2\xi^2 = (\ln g_\xi)'(t)$$

d'oú

$$\ln g_\xi(t) = -4\pi^2\xi^2 t + c \qquad \text{et} \qquad g_\xi(t) = Ce^{-4\pi^2\xi^2 t} = \hat{u}(\xi, t)$$

avec pour tout $\quad t = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = C = u_0(x)$

Ainsi,

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}_0(\xi)e^{-(2\pi\xi)^2 t}$$

Pour connaitre la solution du probléme initial, il reste à applique une transformée de Fourier inverse

$$u(x, t) = u_0(x).F^{-1}(e^{-(2\pi\xi)^2 t})$$

Appelons que la fonction $e^{(\pi x^2)}$ est invariante par transformée de Fourier F, i.e

$$F(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}$$

Et que

$$\forall k \neq 0, \quad F(\frac{1}{\mid k \mid}f(\frac{x}{k})) = \widehat{f}(k\xi)$$

On obtient donc

$$\widehat{e^{-\alpha\pi x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}$$

D'où on déduit :

$$F^{-1}(e^{-(2\pi\xi)^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Le probléme de diffusion sur un domaine unidimensionnel non borné est donc donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}u_0(x) * e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(s)e^{-\dfrac{(x-s)^2}{4t}}ds$$

Où encore

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-s)e^{-\frac{(s^2)}{4t}}ds$$

On noté généralement le noyau intégral de l'équation de la chaleur par :

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

La solution s'exprimant alors :

$$u(x,t) = u_0(x) * K(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(s) K(x-s,t) ds.$$

3.1.2 L'équation des ondes :

probléme de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Décomposition en ondes planes harmoniques :[12]

Venons en maintenant au lien entre les ondes planes harmoniques

$$u(x,t) = e^{i(\omega t - \xi x)}, \quad (\xi, \omega) \in \mathbb{R}^2 ... \tag{3.2}$$

et le probléme de Cauchy. Ce lien apparaît aisément lorsque l'on cherche à résoudre l'équation par transformation de Fourier partielle en espace. On va ainsi montrer que la solution $u(x,t)$ peut se récrire comme une superposition (infinie non dénombrable) d'ondes planes harmoniques. Nous utiliserons ici la transformation de Fourier F comme un outil de calcul. Celle que nous choisissons est définie dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ par :

$$u(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \longmapsto \hat{u}(k) = Fu(k) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \tag{3.3}$$

La transformation de Fourier inverse est

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} dx. \tag{3.4}$$

A la fonction $u(x,t)$ solution de (3.1) nous associons donc sa transformée de Fourier en x :

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-i\xi x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

On pourra donc reconstruire u à partir de $\hat{u}$ à l'aide de la formule :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi. \tag{3.6}$$

A partir de la définition (3.5) et de l'équation (3.1) on voit facilement que, pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \hat{u}(\xi,t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2} + \xi^2\hat{u} = 0, \tag{3.7}$$

a laquelle il convient d'adjoindre les conditions initiales :

$$\begin{cases} \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi) \\ \\ \dfrac{\hat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases} \tag{3.8}$$

La solution ((3.7),(3.8)) s'obtient trés aisément :

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)\cos\xi t + \hat{u}_1(\xi)\frac{\sin\xi t}{\xi}. \tag{3.9}$$

Par transformation de Fourier inverse nous obtenons :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{u}_0(\xi)\cos\xi t + \hat{u}_1(\xi)\frac{\sin\xi t}{\xi}\right)e^{i\xi x}d\xi. \tag{3.10}$$

Pour faire le lien avec les ondes planes, nous pouvons récrire (3.9) sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{u}(\xi,t) = \hat{u}^+(\xi,t) + \hat{u}^-(\xi,t) \\ \\ \hat{u}^+(\xi,t) = a^+(\xi)e^{-i\xi x} \\ \\ \hat{u}^-(\xi,t) = a^-(\xi)e^{i\xi x} \end{cases} \tag{3.11}$$

où les fonctions complexes $a^+(\xi)$ et $a^-(\xi)$ sont données par :

$$\begin{cases} a^+(\xi) = \dfrac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\xi) + i\dfrac{\hat{u}_1(\xi)}{\xi}\right) \\ \\ a^-(\xi) = \dfrac{1}{2}\left(\hat{u}_0(\xi) - i\dfrac{\hat{u}_1(\xi)}{\xi}\right) \end{cases} \tag{3.12}$$

A partir de (3.6) et (3.11), nous obtenons alors

$$\begin{cases} u(\xi,t) = u^+(\xi,t) + u^-(\xi,t) \\ \\ u^+(\xi,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} a^+(\xi)e^{i\xi(x-t)}d\xi \\ \\ u^-(\xi,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} a^-(\xi)e^{i\xi(x+t)}d\xi \end{cases} \tag{3.13}$$

Remarque :

On peut retrouver la formule de d'Alembert à partir de la formule (3.9). En effet, nous pouvons écrire :

$$u(x,t) = u^0(x,t) + u^1(x,t) \tag{3.14}$$

avec :

$$\begin{cases} u^0(.,t) = F^{-1}\hat{u}_0(.,t) \\ \\ u^1(.,t) = F^{-1}\hat{u}_1(.,t) \end{cases} \tag{3.15}$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} \hat{u}^0(\xi,t) = \hat{u}_0(\xi)\cos\xi t \\ \\ \hat{u}^1(\xi,t) = \hat{u}_1(\xi)\dfrac{\sin\xi t}{\xi} \end{cases} \tag{3.16}$$

Pour calculer $u^0(x,t)$, nous réécrivons :

$$\hat{u}^0(\xi,t) = \frac{1}{2}(\hat{u}_0(\xi)\exp i(t)\xi + \hat{u}_0(\xi)exp - i(t)\xi). \tag{3.17}$$

Rappelons ici la propriété bien connue de la transformation de Fourier vis à vis des opérateurs de translation ($a \in \mathbb{R}$) :

$$u_a(x) = u(x-a) \Longrightarrow \hat{u}_a(\xi) = \hat{u}(\xi) expi\xi a. \tag{3.18}$$

Nous utilisons alors (3.18) pour appliquer la transformation de Fourier inverse à l'égalité (3.17) et obtenons :

$$u^0(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)). \tag{3.19}$$

Pour calculer $u^1(x,t)$ nous observons que, en posant :

$$v_1(x) = \int_{-\infty}^{x} u_1(\xi) d\xi, \tag{3.20}$$

nous avons

$$u_1(x) = \frac{dv_1}{dx}(x), \tag{3.21}$$

ce qui se traduit après transformation de Fourier par :

$$\hat{u}_1(\xi) = i\xi \hat{v}_1(\xi), \tag{3.22}$$

et on peut écrire :

$$\hat{u}^1(\xi,t) = \frac{1}{2}(\hat{v}_1(\xi) exp - i(\xi)t - \hat{v}_1(\xi) expi(\xi)t). \tag{3.23}$$

En utilisant à nouveau la propriété (3.18) , nous obtenons finalement :

$$u^1(x,t) = \frac{1}{2}(v_1(x+t) - v_1(x-t)) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi. \tag{3.24}$$

Donc la formule explicité de la solution du problème (3.1) est s'écrit :

$$u(x,t) = u^0(x,t) + u^1(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi \tag{3.25}$$

3.2 Les formules explicitès en dimonsion deux :

3.2.1 L'équation de la Chaleur :

On considère le problème de la chaleur d'une plaque rectangulaire $\mathbb{R}$ de dimensions $a \times b$, aux faces isolées,

$$\begin{cases} u_t - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 & \text{sur} \quad (x,y) \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) & \text{sur} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \\ u(x,y,t) = 0 & \text{sur} \quad (x,y) \in \partial\mathbb{R}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Résolution. On a les trois étapes ordinaires.[18]

Étape 1 : On sépare les variables : $u(x,y,t) = H(x)Q(y)G(t)$ et l'on pose cette expression dans :

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{H^{''}(x)}{H(x)} + \frac{Q^{''}(y)}{Q(y)} = -\nu^2;$$

on sépare l'équation en $G(t)$:

$$G(t) = -\lambda^2 G(t), \quad \lambda = c\nu,$$

et les équations pour $H(x)$ et $Q(y)$:

$$\frac{H^{''}(x)}{H(x)} = -\left[\frac{Q^{''}(y)}{Q(y)} + \nu^2\right] = -k^2;$$

donc

$$H^{''}(x) + k^2 H(x) = 0,$$
$$Q^{''}(y) + p^2 Q(y) = 0, \quad p^2 = \nu^2 - k^2.$$

Étape 2 : On trouve les solutions $H(x)$ et $Q(y)$ qui satisfont. Alors,

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad p_n = \frac{n\pi}{b},$$

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \qquad m = 1, 2, 3, ...,$$

et

$$Q_n(y) = \sin\frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Puis résolvant l'équation pour $G(t)$, on a

$$G_{mn}(t) = B_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}, \quad \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \qquad m, n = 1, 2, 3, ...$$

On a les fonctions propres (solutions de (2.34) et (2.35)) :

$$u_{mn}(x, y, t) = B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{-\lambda_{mn}^2 t}, \quad m, n = 1, 2, 3, ...,$$

et les valeurs propres :

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \qquad m, n = 1, 2, 3, ...$$

Étape 3 : On satisfait (2.36) par superposition des fonctions propres :

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\lambda_{mn}^2 t},$$

c'est-à-dire on détermine les B_{mn} par (2.36) :

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(x, y).$$

Alors, comme pour la membrane vibrante rectangulaire, on développe $f(x, y)$ selon les $\sin(m\pi x/a)$ et $\sin(n\pi y/b)$ sur $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. Donc

$$\frac{2}{a}\times\frac{2}{b}\int_0^b\int_0^a f(x, y)\sin\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n_{0\pi}}{b}\right)dxdy$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right)dx\frac{2}{b}\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\left(\frac{n_0\pi}{b}x\right)dy.$$

Puisque

$$\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right)dx = \begin{cases} 0, & \text{sur } m \neq m_0 \\ 1, & \text{sur } m = m_0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{b}\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n_0\pi}{b}y\right)dy = \begin{cases} 0, & \text{sur} \quad n \neq n_0 \\ 1, & \text{sur} \quad n = n_0 \end{cases}$$

le 2^e membre de se réduit à $B_{m_0n_0}$. D'où

$$B_{m_0n_0} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m_0\pi}{a}x\sin\frac{n_0\pi}{b}ydxdy.$$

Donc, en général, B_{mn} est le coefficient de $\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$ du développement de Fourier de $f(x,y)$ en $\sin(m\pi x/a)$ sur $0 \leq x \leq a$ et en $\sin(n\pi y/b)$ sur$0 \leq y \leq b$.

Proposition(A) :

Soit la formule explicité de la solution du probléme (2.4)

$$T_tu_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-s)e^{-\frac{|s|^2}{4t}}ds = u_0 * g_t(x)$$

et

$$g_t(x) = K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

alors

$$\frac{d}{ds}T_su_0(x) = \Delta T_su_0(x)$$

Prouve : [13]

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T_su_0(x) &= \frac{d}{ds}(u_0 * g_s)(x) \\ &= \frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-z)g_s(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x-z)\frac{d}{ds}gs(z)dz \\ &= (u_0 * \frac{d}{ds}g_s)(x) \end{aligned}$$

de plus comme l'on a la relation $\Delta T_su_0(x) = (u_0 * \Delta g_s)(x)$ vériée par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
T_s u_0(x) &= \Delta(u_0 * g)(x) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(g * u_0)(x) + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(g * u_0)(x)\right) \\
&= \left(g * \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_0(x) + ... + g * \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u_0(x)\right) \\
&= g * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_0 + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)
\end{aligned}$$

Pour montrer l'égalité il suffit de vérifier que

$$\Delta g_s(x) = \frac{d}{ds} g_s(x)$$

nous allons pour cela calculer séparément les deux expressions

$$\begin{aligned}
g_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
\frac{d}{dt} g_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \times \left(-\frac{\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1}}{t} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \times \frac{|x|^2}{4t^2} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} \times t} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{|x|^2}{4t^2}\right) \\
\frac{d}{dt} g_t(x) &= \frac{1}{4\pi} \times e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \times \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)
\end{aligned}$$

Calculons à présent $\Delta g_s(x)$

$$\Delta g_s(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Delta e^{\frac{-|x|^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{i=1}^{n} \partial^2 x_i e^{\frac{-|x|^2}{4t}} x_i^2$$

nous calculerons donc la formule aux dérivées partielles séparément pour plus de lisibilité.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{\partial x_i^2} &= \left(\prod_{j\neq i} e^{\frac{-|x_j|^2}{4t}}\right) \times \frac{\partial^2 e^{\frac{-|x_i|^2}{4t}}}{\partial x_i^2} \\
\partial^2 e^{\frac{-|x_i|^2}{4t}} \partial x_i^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{2x_i}{4t} e^{\frac{-x_i^2}{4t}}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{2t} e - \frac{x_i^2}{4t} + (\frac{-x_i}{2t})(\frac{-2xi}{4t} e^{\frac{-x_i^2}{4t}})\right) \\
&= e^{\frac{-x_i^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right)
\end{aligned}
$$

Nous nous retrouvons donc avec

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}{\partial x_i^2} &= \left(\prod_{j\neq i} e^{\frac{-|x_j|^2}{4t}}\right) \times e^{-\frac{x_i^2}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1} e^{\frac{-|x_j|^2}{4t}}\right) \times \left(\frac{x_i^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right) \\
&= e^{-\frac{|x|}{4t}} \left(\frac{x_i^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right)
\end{aligned}
$$

et nous retrouvons grâce à ce résultat l'égalité

$$\frac{d}{ds} T_s u_0(x) = \Delta T_s u_0(x)$$

Romarque(I) : [13] D'après la proposition, laplacien est le générateur au l'opérateur $T_t(x)$, tel que

$$\frac{d}{ds} T_s u_0(x) = \Delta T_s u_0(x) = \Delta u(s, x)$$

de plus

$$T_t u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x-s) e^{-\frac{|s|^2}{4t}} ds = u_0 * g_t(x)$$

3.2.2 L'équation des ondes :

Le modèle est donné par l'équation des ondes sur le rectangle $\mathbb{R} = [0, a] \times [0, b]$,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), & \text{sur} \quad (x, y) \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, y, t) = 0 & \text{sur} \quad (x, y) \in \partial\mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), & \text{sur} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Étape 1 :[18] Pour séparer les variables on pose

$$u(x, y, t) = H(x)Q(y)G(t)$$

dans (2.27) :

$$HQ\ddot{G} = c^2(H^{''}QG + HQ^{''}G).$$

En divisant par c^2HQG, on a :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{H^{''}(x)}{H(x)} + \frac{Q^{''}(y)}{Q(y)} = -\nu^2.$$

On sépare l'équation en $G(t)$:

$$\ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad \lambda = c\nu,$$

et les équations en $H(x)$ et $Q(y)$:

$$\frac{H^{''}(x)}{H(x)} = -\left[\frac{Q^{''}(y)}{Q(y)} + \nu^2\right] = -k^2,$$

d'où

$$H^{''}(x) + k^2H(x) = 0,$$
$$Q^{''}(y) + p^2Q(y) = 0, \qquad p^2 = \nu^2 - k^2.$$

Étape 2 : On trouve les solutions de (2.31) et (2.32) qui satisfont les conditions au bord :

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx,$$
$$Q(y) = C\cos py + D\sin py\,;$$

avec

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0,$$
$$Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0\,;$$

donc

$$H(0) = A = 0,$$
$$H(a) = B \sin ka = 0 \Longrightarrow k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

De même

$$C = 0 \qquad \text{et} \qquad p_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Donc

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad m = 1, 2, 3, ...,$$
$$Q_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Puisque

$$\lambda = c\nu \quad \text{ et } \quad p^2 = \nu^2 - k^2, \quad \text{ c'est-à-dire } \quad \nu^2 = k^2 + p^2,$$

alors

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2},$$

et

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}\ .$$

D'autre part, la solution générale de (2.30) est

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B^*_{mn} \sin \lambda_{mn} t.$$

On a les fonctions propres (solutions de (2.27) et (2.28)) :

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

et les valeurs propres :

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$$

Étape 3 : On trouve par superposition la solution

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t)$$

qui satisfait les conditions initiales (2.29). De la première de ces conditions, on obtient

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y = f(x,y).$$

Pour déterminer les B_{mn} on développe $f(x,y)$ en série de Fourier de sinus sur $0<x<a$ et $0<y<b$. Alors,

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m_0\pi}{a}x\sin\frac{n_0\pi}{b}ydxdy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m_0\pi}{a}xdx\int_0^b \sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{n_0\pi}{b}ydy.$$

Donc

$$B_{mn} = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy, \quad m=1,2,3,...,n=1,2,3,...$$

Enfin, on détermine les B^*_{mn} de la même façon :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B^*_{mn}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y = g(x,y)$$

alors

$$B^*_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy, \quad m=1,2,3,...,n=1,2,3,...$$

3.3 Distance entre deux élément d'un semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Étudions maintenant la distance entre deux solution du problème de la chaleur dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ lorsque nous faisons une translation du temps d'un valeur α.

Proposition(1) Considérons le problème de la chaleur sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$, et soit $u(t), \quad t \geq 0$ la solution de ce problème, alors pour $\alpha \geq 0$ on a :

$$\|u(t+\alpha) - u(t)\| \leq 2\|u_0\|, \quad \forall t \geq 0$$

Preuve : Soit $t \geq 0$ et $\alpha > 0$ et $u(0,x) = u_0(x)$ alors

$$\begin{aligned} \|u(t+\alpha) - u(t)\| &= \|T(t+\alpha)u_0 - T(t)u_0\| \\ &= \|T(\alpha)T(t)u_0 - T(t)u_0\| \\ &\leq \|T(\alpha) - I\|\|u_0\| \\ &\leq 2\|u_0\| \end{aligned}$$

puisque $(T(t)_{t\geq 0})$ est un semi-groupe de contraction.
De plus il nous résulte d'après le théorème VII.4 (brezis)(page 105) et l'inégalité de Young :

$$\|u(t+\alpha) - u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Utilisons maintenant les formules explicites.
trouvées dans la partie (3.1)

Proposition(2) Soit le problème de la chaleur (2.4) alors on a : pour tout $t \geq 0$ et $\alpha \in [0, +\infty[$

$$\|u(t+\alpha) - u(t)\| \leq 2\|u_0\|, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha > 0$$

Preuve Soit la solution

$$T_t u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x-s) e^{-\frac{|s|^2}{4t}} ds = u_0 \star g_t(x)$$

avec

$$g_t(x) = K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

D'aprés la proposition (A) et la remarque (I) nous d'enduisons que

$$\|T_t u_0(x) - T_{t+\alpha} u_0(x)\| \leq 2\|u_0\| \quad \forall t \geq 0$$

Bibliographie

[1] Thierry Audibert . Équation de la chaleur, approches élèmentaires . 21 décembre 2013

[2] N.-E. Benamara and N. Nikolski, Resolvent tests for similarity to a normal operator, Proc. London Math. Soc. 78 (1999), no. 3, 585 ?626.

[3] S. Blunck, Analyticity and discrete maximal regularity on Lp-spaces, J. Funct. Anal. 183 (2001), no. 1, 211 ?230.

[4] Haim Brezis ,ANALYSE FONCTIONNELLE Théorie et applications.MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987

[5] Thierry Cazenave. Alain Haraux University of Cergy-Pontoise, France . An Introduction to Semilinear Evolution Equations

[6] Marcel Dekker Inc . Evolution Equations

[7] Marcel Dekker Inc . Semi-groupe Theory and Evolution Equations The Second International Conference

[8] J. Esterle, Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, in Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981), 66-162, Lecture Notes in Math., 975, Springer, Berlin, 1983.

[9] Jean Esterle . Distance near the origin between elements of a strongly continuous semigroup. 2005 by Institut Mittag-Leffier. All rights reserved

[10] J. Esterle and A. Mokhtari, Distance entre éléments d'un semi-groupe dans une algébre de Banach, J. Funct. Anal., 195, (2002), 167-189.

[11] John K. Hunter ,Nonlinear Evolution Equations .October 1996

[12] Extrait du poly de Patrick JOLY, ANALYSE ET APPROXIMATION DE MODÉLES DE PROPAGATION D'ONDES PARTIE I ANALYSE MATHÉMATIQUE, ANNÉE 2001-2002

[13] Matthieu FRADELIZI. semi-groupes, isopérimétrie et hypercontractivité. Université de Marne la vallée Académie de Créteil. Année 2005/2006

[14] NIGEL KALTON, STEPHEN MONTGOMERY-SMITH, KRZYSZTOF OLESZKIEWICZ, AND YURI TOMILOV.POWER-BOUNDED OPERATORS AND RELATED NORM ESTIMATES

[15] Frédéric Legoll et Mathieu Lewin . Mathématiques des modéles multi-échelles . Mars 2013

[16] A.Pazy, *Semi-groupes of linéaire operateur and Applications to Partial Differential equations*

[17] Jean-Pierre RAYMOND . Équations d'évolution

[18] Rémi Vaillancourt, Mathématiques de l'ingénieur, Département de mathématiques, Université d'Ottawa, Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5

[19] Cheng-Zhong Xu and Gauthier Sallet. EXPONENTIAL STABILITY AND TRANSFER FUNCTIONS OF PROCESSES GOVERNED BY SYMMETRIC HYPERBOLIC SYSTEMS. June 2002, Vol. 7, 421-442

Conclusion

La distance entre deux solution du problème de la chaleur est uniformément bornée par rapport à α c'est-à-dire :

$\exists M = \|u_0\|$ pour tout $\alpha \in [0, +\infty[$ et pour tout $t \geq 0$

$$\|u(t+\alpha) - u(t)\| \leq 2\|u_0\|$$

où α est la valeur de la translation du temps $t \longrightarrow t + \alpha$

Nous prouvons aussi dire pour l'équation des ondes l'énergie :

$$\left|\frac{\partial U(t)}{\partial t}\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla U(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |V_0|_{L(2)(\Omega)} + |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t > 0$$

est conservée au cours du temps.

Propriétés du semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatfi

الملخص

في هذه المذكرة درسنا بعض خواص نصف الزمر المولدة بصنف خاص من المؤثرات, بالأخص المسافة بين عنصرين من نصف الزمرة $\|T(t) - T(s)\|$ بجوار المبدأ.

من جهة أخرى طبقنا النتائج المحصل عليها من طرف ج. ايستارل, أ. مختاري, م بركاني و ز. بن داود على نصف الزمر الحرارية ونصف زمر الأمواج أين أدخلنا الشكل التحليلي للحلول باستعمال تحويلات فوري.

الكلمات المفتاحية: نصف زمرة, نصف الزمر الحرارية, مولد نصف زمرة.

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire certaines propriétés des semi-groupes engendrés par des opérateurs m-dissipatifs, notamment la distance entre deux éléments d'un semi-groupe $\|T(t) - T(s)\|$ prés de l'origine.

D'un autre côté nous appliquons les résultats trouvés par J. Esterle , A Mokhtari, M. Berkani et Z. Bendaoud sur les semi-groupes de la chaleur et des ondes où nous introduisons les formes explicites des solutions concernant les deux probléme par l'utilisation de la transformée de Fourier.

Mots clés : semi-groupes, semi-groupe de la chaleur, opérateurs m-dissipatifs

Abstract

We study in this work some properties of semigroups generated by m-dissipative operators in particular the distance between two elements of a semigroup $\|T(t) - T(s)\|$ the origin.

On the other side we apply the results found by J. Esterle, A Mokhtari, M. Berkani and Z. Bendaoud, on the heat and waves semigroups where we introduce explicit formulas for the solutions about both problems by the use of Fourier transform.

Keywords : semigroups, heat semigroups, m-dissipative operators.