N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالبة : عبابسة دلال

الموضوع

سلوك الحالة للمؤثر المشوش

نوقشت يوم 1 جوان 2016 من طرف لجنة المناقشة :

عبد القادرعمارة	أ.مساعدأ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
عبد الرزاق غزال	أ.محاضرب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
سعيد محمد السعيد	أ.محاضرأ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عسيلة مصطفى	أ.محاضرب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

إهداء

... أسمى عبارات المحبة والإمتنان
إلى من جعلت رضايتهم في رضاية الرحمان
إلى أمي العزيزة حفظها الله في كل مكان
إلى أبي العزيز رحمه الله في جنات الغفران
إلى من جعل البيت جواهر ثمينة
إلى إخوتي "محمد"،"عيسى" و "حسينة "
إلى أخوالي وخالاتي وأعمامي وعماتي
إلى كل قريب من كل الجهات
إلى أستاذي الذي تابع مذكرتي ليلة بليلة
إلى أستاذي الفاضل "الدكتور مصطفى عسيلة"
إلى كل زملائي وزميلاتي في"قسم الإعلام الآلي والرياضيات"

شكر وعرفان

أشكر الله أولا على توفيقه لي على كتابة هذه المذكرة ومن بعد الواحد الأحد الشكر موصول إلى أستاذي الفاضل "الدكتور مصطفى عسيلة" المشرف على هذه المذكرة و الأستاذ"الدكتور عبد الرزاق غزال"بصفته رئيس لجنة المناقشة والأستاذ "الدكتور السعيد محمد السعيد"بصفته مناقشا وكذلك أشكر أستاذي "قربوسة ياسين" وزملائي الطلبة : "وقاد إبراهيم"،"كنتاوي حفصة"،"عطاوات محمد"و"نسيب حسن"على المجهودات المبدولة من أجل مساعدتي على كتابة هذه المذكرة وكل أساتذتي الذين درسوني ،وكل زملائي وزميلاتي في المسار الدراسي.

الرموز المستعملة

الرمز	معناه	أول صفحة
X	مجموعة كيفية	02
$P(X)$	مجموعةالمجموعات الجزئية من X	02
τ	تبولوجي	02
(X,τ)	فراغ تبولوجي	02
$\Vert\Vert$	تطبيق النظيم	03
$\Vert x\Vert$	نظيم العنصر x	03
$(X,\Vert\Vert)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	03
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$ ،(إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)	03
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	03
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة	03
$\langle,\rangle$	تطبيق الجداء السلمي	04
$(X,\langle,\rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	04
H	فراغ هيلبار	04
$x\perp y$	العنصر x عمودي على y	04
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	05
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A	05
$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بانسبة للفراغ H	05
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0	05
$X^{\perp}$	المتمم العمودي للفراغ x بالنسبة للفراغ H	06
$f(z)$	الدالة المركبة	07

$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	08
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	08
$\ker F$	نواة المؤثر F	08
$F : X \longrightarrow Y$	F مؤثر من X في Y	08
$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F	08
X^*	فراغ الأشكال الخطية على X	09
$L(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	09
$L(X)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه	09
$l(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	09
$l(X)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه	10
F^*	المؤثر القرين للمؤثر F	11
I	المؤثر الحيادي	12
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F	12
$(F_n)_{n\geq 1}$	متتالية المؤثرات	13
$F_n \xrightarrow{u} F$	F_n متقاربة بانتظام نحو المؤثر F	13
$F_n \xrightarrow{s} F$	F_n متقاربة بقوة نحو المؤثر F	13
$F_n \xrightarrow{w} F$	F_n متقاربة بضعف نحو المؤثر F	14
V_λ	الفراغ الذاتي	14
$\rho(F)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر F	16
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	16
$P_\sigma(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F	16
$C_\sigma(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	16
$R_\sigma(F)$	الطيف الباقي للمؤثر F	16
$R_\lambda(F)$	مؤثر الحالة للمؤثر F	17
$f(F)$	دالة المؤثر F	18
$A(F)$	مجموعة الدوال التحليلية في جوار ما لـ $\sigma(F)$	18
E_φ	الدالة الطيفية للمؤثر F	19
P_σ	المسقط الطيفي	20

المحتويات

مقدمة عامة

تعتبر دراسة المؤثرات الخطية من الناحية الطيفية من أهم الدراسات في التحليل الدالي من حيث أنها تخلص إلى تسهيل حلول المعادلات الدالية ومن أهم فروع هذه الدراسةهي مسألة التشويش على المؤثر الخطي وملاحظة التغيير بعد التشويش . و التشويش هو إضافة مؤثر له صفات معينة إلى المؤثر المدروس وعلى هذا الأساس اخترنا عنوان المذكرة هو :

" سلوك الحالة للمؤثر المشوش"

في هذه المذكرة اعتمدنا في الدراسة على المؤثرات القرينة لنفسها و المؤثرات المغلقة من ذوات الحالة المتراصة .
المذكرة توضح الشرط الكافي من أجل التقارب الحالي للمؤثر المشوش نحو مؤثر غير مشوش .
المذكرة مقسمة إلى فصلين :
الفصل الأول: " مفاهيم أساسية" من التبولوجيا والتحليل الدالي وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية و أخذت مختصرة وبدون براهين هذا لغرض استعمالها في الفصل الثاني .
الفصل الثاني: "تقارب الحالي المنتظم" تعرضنا فيه إلى التعريف ببعض أنواع المؤثرات الخطية ومفهوم التشويش ومن تم دراسة سلوك الحالة الذي يعبر عنه بالتقارب الحالي المنتظم.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا والتحليل الدالي والتحليل المركب وبالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية هذه المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لإستعمالها في الفصل الثاني .

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1 1

تعرف التبولوجيا على X ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، تحقق:

1. $X \in \tau \; , \; \varnothing \in \tau$.
2. $\forall O_1, O_2 \in \tau; \;\; O_1 \bigcap O_2 \in \tau$.
3. $(O_i \in \tau / i \in I); \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$، I مجموعة دلائل كيفية.

- الزوج (X, τ) يسمى فراغا تبولوجيا.
- عناصر الأسرة τ تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ).

تعريف 1 2

تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي على أنها متمم المجموعة المفتوحة فيه.

ليكن $T = (X, \tau)$ فراغا تبولوجيا، M مجموعة جزئية غير خالية من X و x نقطة من X.

تعريف 1 3

يقال أن V من $P(X)$ جوار للنقطة x إذا تحقق

$$\forall G \in \tau / x \in G \subset V$$

نرمز لمجموعة جوارات النقطة x بالرمز $V(x)$

تعريف 1 4

يقال أن النقطة x نقطة تلاصق للمجموعة M إذا كان كل جوار للنقطة x يحوي نقطة على الأقل من M.
يرمز لمجموعة نقط تلاصق M بالرمز $\overline{M}$.
المجموعة $\overline{M}$ تسمى لصاقة M ونكتب :

$$x \in \overline{M} \Leftrightarrow$$
$$(\forall v \in V(x) \to v \cap M \neq \varnothing)$$

تعريف 1 5

لتكن A, B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من X.

1. يقال أن المجموعة A كثيفة في المجموعة B إذا كان $B \subset \overline{A}$.
2. يقال أن المجموعة A كثيفة في X إذا كان $\overline{A} = X$.

ليكن $T = (X, \tau)$ فراغا تبولوجيا .

تعريف 1 6

يقال أن الفراغ T منفصل إذا وجد من أجل كل نقطتين x, y مختلفتين منه،جوارللنقطة x وآخر للنقطة y تقاطعما خالي،أي:

$$\forall (x, y) \in T \ / \ x \neq y \to$$
$$\exists v_x \in V(x) \ , \ \exists v_y \in V(y) \ / \ v_x \cap v_y = \varnothing$$

1.1.1 التراص في الفراغ التبولوجي

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا و I مجموعة دلائل كيفية .

تعريف 1 7

لتكن B مجموعة جزئية من X و A أسرة معرفة كالتالي :

$$A = \{A_i \subset X / i \in I\}$$

1. يقال أن الأسرة A تغطية للمجموعة B إذا كانت :

$$B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

(تغطية ل X يعني : $X = \bigcup_{i \in I} A_i$) .

2. يقال أن التغطية A مفتوحة،إذا كانت كل عناصرها مفتوحات .

3. نقول أنه بإمكاننا إخراج من التغطية A للمجموعة B تغطية منتهية،إذا وجدت I_0 منتهية من I بحيث يكون:

$$B \subset \bigcup_{i\in I_0} A_i$$

تعريف 1 8

1. يقال أن الفراغ (X,τ) متراص إذا كان منفصلا وحقق الشرط التالي:
   كل تغطية مفتوحة له تحوي تغطية منتهية له (شرط بوريل- ليباق).

2. يقال أن المجموعة A من X متراصة إذا كان الفراغ الجزئي (A,τ_A) متراصا.

3. المجموعة A من الفراغ (X,τ) يقال أنها شبه متراصة إذا كانت $\bar{A}$ متراصة .

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة غير خالية .

تعريف 1 9
يسمى فراغا متريا ، كل زوج (X,d) ، حيث d تطبيق من $X\times X$ في R_+ ، $R_+=[0,\infty[$ يحقق من أجل كل x,y,z من X ما يلي :

1. $[d_1]$. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $[d_2]$. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $[d_3]$. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

التطبيق d يسمى مسافة ، و العدد $d(x,y)$ المسافة بين x و y .

ليكن $d(x,y)$ فراغا متريا .

تعريف 1 10

1. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من عناصر X ، متقاربة نحو x من X ، إذا كانت

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n,x)=0$$

أي :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\geq 1/\forall n\geq n_\varepsilon \rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

ونكتب

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$$

2. يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ من عناصر X ، لكوشي ،(أساسية) ،إذا كان :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m, n_\varepsilon \geq 1/\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon \to d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

3. يقال أن المتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$ من المجموعات الجزئية غير خالية من X ، أنها متتالية كوشي ، إذا كانت متداخلة و قطرها يؤول إلى الصفر. (يفهم التداخل على أنه إحتواء بالتناقص) أي :

$$A_1 \supset A_2 ... \supset A_n \supset \text{ و } \lim_{n\longrightarrow\infty} \delta(A_n) = 0$$

نظريه 1 1
ليكن (X, d_X) , (Y, d_Y) فراغين متريين،و A مجموعة كثيفة في X .
إذا كان

$$f : A \to (Y, d_Y)$$

تطبيقا مستمرا بانتظام،حيث الفراغ (Y, d_Y) تام،فإنه يوجد تمديد وحيد مستمر بانتظام للتطبيق f على X .
يرمز لهذا التمديد ب f^* .

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1 11
يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ أي:

$$X \mapsto \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \|x\|$$

يحقق الشروط التالية :

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

ملاحظه 1
الفراغ الشعاعي النظيمي ، إختصارا يكتب ف.ش.ن .

1.3.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 1 12
يقال أن X فراغ بناخ إذا كانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

4.1 الفراغ الهيلبرتي

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 1 13
يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من الجداء$X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق من أجل كل x, y, z من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(x, x) \geq 0, \quad h(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x, x)$
3. $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$
4. $h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتي.

نتيجة 1 1
كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا مع النظيم:

$$\|x\| = \sqrt{h(x, x)}$$

2.4.1 الفراغ الهيلبرتي

الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ويرمز له بالرمز H.

3.4.1 التعامد

مفهوم التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي ، A و B مجموعتان من X ،حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يقال أن العنصرين(الشعاعيين) x,y من X متعامدان (ونكتب $x \perp y$) إذاكان جداؤهما السلمي معدوما.
أي:
$$< x, y >= 0$$

2. يقال أن العنصر x من X عمودي على المجموعة A إذاكان عموديا على كل عنصر من A ، ونكتب:
$$x \perp A \Longleftrightarrow \{\forall y \in A \longrightarrow < x, y >= 0\}$$
يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.

3. يقال أن A وB متعامدان إذا تحقق:
$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$
ونكتب $A \perp B$.

قضيه 1 1
إذا كان X فراغا شبه هيلبرتي، فإن:

1. $\forall x, y \in X \longrightarrow |< x, y >| \leq \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز)

2. $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (قانون متوازي الأضلاع)

4.4.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار .

نظريه 1 2
إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A.
أي:
$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A / d(x, y_0) \equiv \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$

نظريه 1 3
إذاكان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H، وx عنصرا من H، حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 يحقق :
$$(x - y_0) \perp X_0$$
في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 ، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

5.4.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغاً لهيلبار، و X_0 فراغاً جزئياً مغلقاً منه.

تعريف 1 14

يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0 .
أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة 1 2

- ${X_0}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
- كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z / \ \ y \in X_0, \ z \in {X_0}^{\perp}$$

- $H = X_0 \oplus {X_0}^{\perp}$ ، عندها نقول أن ${X_0}^{\perp}$, X_0 ، هما التحليل العمودي للفراغ H , ونكتب:

$$y = P_{X_0}x \ , z = P_{X_0^{\perp}}x$$

حيث:
P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0 , و $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$.

قضيه 1 2

تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

1. $P_{X_0}^2 = P_{X_0}$
2. $\|P_{X_0}\| \leq 1$
3. $\forall x, y \in H \longrightarrow < P_{X_0}x, y > = < x, P_{X_0}y >$

5.1 الجمع المباشر التبولوجي لفراغ هيلبار

تعريف 1 15

يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفراغات هيلبار $H_1, ..., H_n$ بأنه الفراغ H حيث

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n \tag{1.1}$$

(الصيغة (1.1) هي التحليل العمودي لـ H) حيث :

$$H \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, \ \ n \geq 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة.
الفراغ H لهيلبار وفق الجداء السلمي :

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{n \geq 1} \langle \xi_n, \eta_n \rangle_{H_n}, \ \ \ \xi, \eta \in H; \ \xi_n, \eta_n \in H_n$$

6.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.6.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X,\|.\|_X)$، $(Y,\|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ ولتكن D مجموعة غير خالية من X، (D قد تساوي X).

تعريف 1 16

إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا معينا y من Y، يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y، يرمز له بالرمز F ونكتب $y=F(x)$ أو $y=Fx$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $y=Fx$ و $x\in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ونكتب:
$$E(F)=\{y\in Y/\ y=Fx,\ x\in D(F)\}$$
- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:
$$X\supset D(F)\overset{F}{\to}E(F)\subset Y$$
إختصارا نكتب:
$$F:X\longrightarrow Y$$
- مجموعة الأزواج (x,Fx) من فراغ الجداء $X\times Y$ حيث $x\in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ونكتب:
$$\Gamma_F=\{(x,Fx)/\ x\in D(F)\}\subset X\times Y$$
- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$ ونكتب:
$$\ker F=\{x\in D(F)/\ \ Fx=0\}$$

تعريف 1 17

المؤثر F من X في Y يقال إنه خطي إذا تحقق مايلي:

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1,x_2\in D(F),\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in\Bbbk\longrightarrow F(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1F(x_1)+\alpha_2(Fx_2)$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X,Y)$.

- في حالة $X=Y$ إختصارا نكتب $L(X,X)=L(X)$.
- في حالة $Y=\mathbb{K}$ المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

تعريف 1 18

ليكن U مؤثر من X نحو Y .

نقول أن المؤثر U معرف بكثافة إذا كانت مجموعة تعريفه $(D(U))$ كثيفة في X .

7.1 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 1 19
من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1, F_2 من $L(X,Y)$ يعرف

1. جمع المؤثريين F_1, F_2 كالتالي:

$$(F_1 + F_2)x = F_1x + F_2x,\ x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x/\ \ x \in D(F_1),\ \ \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 1 3
$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

8.1 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y.

تعريف 1 20
يقال إن F محدود على مجموعة تعريفه إذا تحقق:

$$\exists c > 0,\ \forall x \in D(F),\ \|F(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

إذا تحققت الصيغة الأخيرة من أجل كل x من X يقال إن F محدود على X أو محدود.
نرمز لمجموعة المؤثرات المحدودة من X في Y حيث $D(F) \equiv X$ بالرمز $l(X,Y)$ وهو فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.

تعريف 1 21
يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ بأحد الصيغ التالية:

1. $\|F\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|}{\|x\|}$
2. $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Fx\|$
3. $\|F\| = \min\{c/\|Fx\| \leq c\|x\|\}$

-الفراغ $l(X,Y)$ في حالة $\mathbb{K} \equiv Y$ يسمى الفراغ الثنوي التبولوجي ويرمز له بالرمز X' أي

$$X' = l(X,K)$$

تعريف 1 22

1. يقال إن المؤثر F مستمر في النقطة x_0 من $D(F)$ إذا تحقق:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 / \ (\forall x \in D(F) \cap X / \ \|x - x_0\| < \delta) \longrightarrow \|Fx - Fx_0\| < \varepsilon$.

2. يقال إن المؤثر F مستمر إذا كان مستمرا في كل نقطة من مجموعة تعريفه.

نتيجة 1 4
إذا كان المؤثرF من $L(X, Y)$ فإن F مستمر يكافئ F محدود.

نتيجة 1 5
إذا كان المؤثر F من $l(X, Y)$ فإن:

- $\forall x \in X,\ \|Fx\| \leq \|F\|\|x\|$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X / \ \|Fx_\varepsilon\| > (\|F\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$

9.1 نظرية ريس للأشكال الخطية

نظريه 1 4
ليكن H فراغاً لهيلبار.

1. إذا كان f شكلاً خطياً ومحدوداً على H (أي $f \in H'$) ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_f من H، بحيث:

$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y_f \rangle,\ \|f\| = \|y_f\|$$

2. إذا كان y عنصراً كيفياً من H ، فإن الصيغة التالية:

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle,\ x \in H$$

تعرف شكلا خطيا ومحدودا f_y ،عندها يكون:

$$\|f_y\| = \|y\|$$

1.9.1 المؤثر القرين

ليكن H_1، H_2 فراغين لهيلبار وF من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 1 23
يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H_2' في H_1'، بحيث يكون

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Fx, y \rangle = \langle x, F^* y \rangle$$

نظريه 1 5
إذا كان $F \in l(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2', H_1')$ ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

خواص المؤثر القرين

إذا كان $F,T \in l(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha}\, F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

2.9.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 1 24

يقال إن المؤثر $F \in l(H)$ قرين لنفسه إذا انطبق مع قرينه أي $F = F^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H,\ \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F و T مؤثرين قرينين لنفسهما من $l(H)$.
لدينا:

1. من أجل كل α و β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$ فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H .
4. $\|F\| = \max(|M_F|, |m_F|)$ حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

3.9.1 المؤثرالعكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y ، $D(F)$ مجموعة تعريفه و $E(F)$ مجموعة قيمه.

تعريف 1 25

يقال إن المؤثر F قابل للقلب إذا كانت المعادلة $y = Fx$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذلك من أجل كل y من $E(F)$.

يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

4.9.1 قابلية القلب باستمرار

تعريف 1 26
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال إنه قابل للقلب باستمرار إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي

$$\exists F^{-1} \in l(Y,X)$$

نتيجة 1 6 (نظرية بناخ للمؤثر العكسي)
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا حيث X, Y لبناخ $Y = (E(F))$ فإنّ المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 1 7
ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ حيث X, Y لبناخ. إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق:
$TF = I_Y$ و $FT = I_X$ فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $T = F^{-1}$.

قضيه 1 3
إذا كان المؤثر F من $l(X)$ حيث X لبناخ و $\|F\| < 1$، فإن المؤثر $I - F$ قابل للقلب باستمرار، عندها يكون:

$$\|I - (I-F)^{-1}\| \leq \frac{\|F\|}{1-\|F\|}$$

و
$$\|(I-F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|F\|}$$

قضيه 1 4
يكون للمؤثر F , $(F \in L(X,Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c $(c > 0)$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geq c\|x\|.$$

5.9.1 المؤثرالمتقايس

تعريف 1 27
يسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس إذا كان

$$\|Fx\| = \|x\| \qquad \forall x \in H$$

6.9.1 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H. يعرف مؤثرالإسقاط العمودي على M على أنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M المعرف في القضية (2.1) ، إختصارا يقال مؤثر إسقاط.

خصائص 1

1. $P_M^2 = P_M$
2. المؤثر P_M قرين لنفسه.

3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geq 0$
4. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leq \|x\|^2$

قضيه 1 5
إذا كان المؤثر F قرينا لنفسه في H و $F = F^2$ فإن F يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H .

7.9.1 المؤثر غير سالب

تعريف 1 28
يسمى المؤثر F من $l(H)$ مؤثرا غير سالبا إذا كان قرينا لنفسه و يحقق

$$\langle Fx, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in H$$

10.1 تبولوجيا الفراغ $l(x, y)$

نعتبر في كل مايلي أن X, Y فراغان لبناخ .

التبولوجيا المنتظمة

تعريف 1 29
تعرف التبولوجيا المنتظمة على الفراغ $l(X, Y)$ بأنها التبولوجيا المتولدة من نظيمه .

تعريف 1 30
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X, Y)$ يقال إنها متقاربة بانتظام (وفق نظيم الفراغ) نحو مؤثرا F من $l(X, Y)$ ، إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{u} F \text{ أو } F = u - \lim_{n\to\infty} F_n$$

التبولوجيا القوية

تعريف 1 31
تعرف التبولوجيا القوية على الفراغ $l(X, Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X, Y)$ من أجلها يكون المؤثر Ψ_x المعرف كالتالي:

$$\Psi_x : l(X, Y) \longrightarrow Y$$
$$\Psi_x(F) = Fx$$

مستمرا من أجل كل x من X.

تعريف 1 32
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا القوية نحو مؤثرا F إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو Fx بالنسبة لنظيم الفراغ Y وهذا من أجل كل x من X .
أي من أجل كل x من X يكون:

$$\lim_{n\to\infty}\|F_nx - Fx\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{s} F \text{ أو } F = s - \underset{n\to\infty}{lim} F_n$$

التبولوجيا الضعيفة

تعريف 1 33
تعرف التبولوجيا الضعيفة على الفراغ $l(X,Y)$ بأنها أضعف تبولوجيا على $l(X,Y)$ من أجلها يكون المؤثر $\Psi_{x,f}$ المعرف كالتالي:

$$\begin{gathered}\Psi_{x,f} : l(X,Y) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \Psi_{x,f} = f(Fx)\end{gathered}$$

مستمرا من أجل كل x من X ومن أجل كل f من Y'.

تعريف 1 34
متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ يقال إنها متقاربة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة نحو مؤثرا F إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(F_nx)_{n\geq 1}$ متقاربة بضعف في الفراغ Y نحو Fx وهذا من أجل كل x من X. أي من أجل كل f من Y' يكون:

$$\underset{n\to\infty}{lim}\|f(F_nx) - f(Fx)\| = 0$$

ونكتب:

$$F_n \xrightarrow{w} F \text{ أو } F = w - \underset{n\to\infty}{lim} F_n$$

1.11 مبدأ التمديد بالإستمرارية

ليكن X ف.ش.ن و Y فراغ لبناخ

نظريه 1 6
كل تطبيق f من $l(D(f),Y)$ حيث $\overline{D(f)} = X$ له تمديد f^* على X يحقق $\|f^*\| = \|f\|$.
أي:

$$\begin{gathered}\exists f^* \in l(X,Y)/f^*(x) = f(x), x \in D(F) \\ \|f^*\| = \|f\|\end{gathered}$$

البرهان

عندنا $f \in l(D(F), Y)$ يعني أن f مستمر بإنتظام.

بما أن X فراغ متري و Y فراغ متري تام فإنه حسب نظرية التمديد في الفراغ المتري (النظرية 1 1) يوجد تمديد f^* مستمرا بإنتظام على X .

ومنه لبرهان النظرية يكفي أن نبرهن أن f^* خطي و $\|f^*\| = \|f\|$.

نبرهن :

$$\forall x_1, x_2 \in X \to f^*(x_1 + x_2) = f^*(x_1) + f^*(x_2)$$
$$\forall \lambda \in K, \forall x \in X \to f^*(\lambda x) = \lambda f^*(x)$$

بما أن $\overline{D(F)} = X$ فإن :

$$x_1, x_2, x \in X \Rightarrow \exists (x_n^1)_{n\geq 1}, (x_n^2)_{n\geq 1}, (x_n)_{n\geq 1} \subset D(f)/$$
$$x_n^1 \to x_1, x_n^2 \to x_2, x_n \to x, \lambda x_n \to \lambda x; (n \to \infty)$$

لاحظ :

$$f^*(x_1) = \lim_{n\to\infty} f^*(x_n^1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n^1)$$
$$f^*(x_2) = \lim_{n\to\infty} f^*(x_n^2) = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2)$$
$$f^*(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} f^*(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda x_n)$$

وبالتالي

$$f^*(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} f^*(x_n^1 + x_n^2) = \lim_{n\to\infty} f(x_n^1) + \lim_{n\to\infty} f(x_n^2) = f^*(x_1) + f^*(x_2)$$
$$f^*(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda f(x_n) = \lambda f^*(x)$$

ومنه يكون : $f^* \in l(X, Y)$

نبرهن أن: $\|f\| = \|f^*\|$ عندنا :

$$\|f^*\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \|f^*(x)\| \geq$$
$$\sup_{x\in D(f), \|x\|\leq 1} \|f^*(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \|f\|$$

أي أن :

$$\|f^*\| \geq \|f\| \quad (1)$$

من ناحية ثانية عندنا :

$$\forall x \in D(f) \to f(x) = f^*(x)$$

بما أن:

$$\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$$

فإن:

$$\|f^*(x)\| \leq \|f\|\|x\|$$

ومنه من تعريف $\|f^*\|$ ينتج أن :

$$\|f^*\| \leq \|f\| \qquad (2)$$

(1) و (2) تعني :

$$\|f^*\| = \|f\|$$

نتيجة 1 8
كل شكل خطي $f \in (D(f))' = l(D(f), K)$ حيث $\overline{D(f)} = X$ (X ف.ش.ن) له تمديد $f^* \in X'$ يحقق :

$$\|f^*\| = \|f\|$$

12.1 نظرية بناخ -شتاينهوس [2]

لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $l(X,Y)$ ،حيث X بناخ .

قضيه 1 6
إذا وجد ثابت $c > 0$ و $F(x_0, r)$ ،(كرة مغلقة)، بحيث :

$$\forall x \in F(x_0, r) \to \|f_n(x)\| \leq c$$

فإن المتتالية $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ محدودة ، أي يوجد ثابت M ، يحقق : $\|f_n\| \leq M$.

البرهان

من أجل كل x من X يكون :

$$(x_0 + \frac{x}{\|x\|}r) \in F(x_0, r)$$

أي :

$$\|x_0 - (x_0 + \frac{x}{\|x\|}r)\| \leq r$$

ومنه حسب الفرض يكون

$$\|f_n(x_0 + \frac{x}{\|x\|}r\|) \leq c$$

لكن من ناحية ثانية :

$$\|f_n(x_0 + \frac{x}{\|x\|}r)\| = \|\frac{r}{\|x\|}f_n(x) + f_n(x_0)\| \geq$$
$$\|\frac{r}{\|x\|}f_n(x)\| - \|f_n(x_0)\| \geq \frac{r}{\|x\|}\|f_n(x)\| - c$$

هذا يعني أن :

$$\|f_n(x)\| \leq \frac{2c}{r}\|x\|$$

بما أن $f_n(0)=0$ فإن :

$$\forall x \in X \to \|f_n(x)\| \leq \frac{2c}{r}\|x\|$$

أي أن $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ محدودة ويكون عندها :

$$\|f_n\| \leq \frac{2c}{r}$$

نتيجة 1 9

إذا كانت $(f_n(x))_{n\geq 1}$ محدودة من أجل كل x ثابتة من X فإن $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ محدودة .

نظريه 1 7

تكون المتتالية $(f_n(x))_{n\geq 1}$ من $l(X,Y)$ متقاربة بإنتظام نحو f من $l(X,Y)$ إذا وفقط إذا تحقق :

1. $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ محدودة .
2. $f_n \xrightarrow{u} f, n\to\infty$ على فراغ جزئي X_0 من X حيث : $\overline{X_0}=X$.

البرهان

$[\Leftarrow]$ $f_n \overset{u}{\to} f \;,\; n\to\infty$ يعني :

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f, \forall x \in X$$

و بالتالي يكون :

$$\|f_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|f\|$$

هذا يعني أن $(f_n(x))_{n\geq 1}$ محدودة من أجل كل x ثابتة من X ومنه حسب النتيجة السابقة المتتالية $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ تكون محدودة .

بما أن

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f, \forall x \in X$$

على X فإنه يكفي أخذ $X_0=X$, $(\overline{X_0}=X)$.

$[\Rightarrow]$ بما أن $\bar{X}_0=X$ فإنه

$$\forall \varepsilon>0, \forall x \in X, (x\notin X_0), \exists x_0/\|x-x_0\|<\varepsilon$$

بما أن $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ محدودة فإنه $\exists c=\sup_{n=1,0,\dots}\|f_n\|$ حيث $f_0=f$.

نبرهن الآن أن

$$f_n \xrightarrow{u} f, n \to \infty$$

على X .
عندنا :

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) + f(x_0) - f(x_0) - f(x)\| =$$
$$\|f_n(x - x_0) + f_n(x_0) - f(x_0) + f(x - x_0) \leq \|f_n\|\|x - x_0\| \leq$$
$$\|f_n(x_0) - f(x_0)\| + \|f\|\|x - x_0\| \leq 2c\varepsilon + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| \qquad (*)$$

بما أن $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ متقاربة نحو $f(x_0)$ فإنه :

$$\forall \varepsilon \longrightarrow 0, \exists n_\varepsilon \geq 1 / \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

ومنه حسب $(*)$ نجد :

$$\forall \varepsilon \longrightarrow 0, \exists n_\varepsilon \geq 1 / \|f_n(x) - f(x)\| < (2c + 1)\varepsilon$$

هذا يعني أن :

$$f_n \xrightarrow{u} f, n \to \infty$$

على X .

13.1 نظرية الأطياف

1.13.1 مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي

ليكن F مؤثرا من $L(X)$ ، حيث X فراغ بناخ مركب $(\mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$. مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx - \lambda I x = y \qquad (2.1)$$

أو إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x = y / \ F_\lambda \equiv F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ و y معطى من X و λ وسيط مركب.
في حالة $y = 0$ المعادلة (2.1) تسمى متجانسة .

تعريف 1 35
العدد λ من K يقال إنه قيمة ذاتية للمؤثر F إذا كان للمعادلة $y = Fx$ حلا غير معدوم. عندها الحل غير المعدوم يسمى الشعاع الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F.

تعريف 1 36
يعرف الفراغ الذاتي المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F بأنه مجموعة كل الأشعة الذاتية λ مضافا إليها الشعاع الصفري ويرمز له بالرمز V_λ، أي:

$$V_\lambda = \ker(F - \lambda I)$$

بعد الفراغ V_λ يسمى التضعيف الذاتي أو الهندسي للقيمة الذاتية λ.

تعريف 1 37

العدد المركب λ يقال إنه نقطة نظامية للمؤثر F إذا كان المؤثر F_λ قابلا للقلب باستمرار، أي: $\exists(F_\lambda)^{-1} \in l(X)$ يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالرمز $\rho(F)$ ، ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ (F_\lambda)^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 1 38

يعرف طيف المؤثر F ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$ بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي :

$$\sigma(F) = \mathbb{C} \backslash \rho(F)$$

ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام وهي:

1. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ لا يقبل مؤثرا عكسيا، (أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F) تسمى بالطيف النقطي ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:

$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \ \ker F_\lambda \neq 0\}$$

2. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود . تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر ويرمز له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب $(F_\lambda)^{-1}$ غير محدود.

$$C_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C}P_\sigma(F)/ \ E(F_\lambda) \neq \overline{E(F_\lambda)} = X\}$$

3. مجموعة الأعداد المركبة λ التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، (محدود أو غير محدود) مجموعة تعريفه أي المجموعة $E(F_\lambda)$ ليست كثيفة في X. تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$، ونكتب:

$$R_\sigma(F) = \{\lambda \in CP_\sigma(F)/ \ \overline{E(F_\lambda)} \neq X\}$$

نتائج

1. $\sigma(F)$ مجموعة متراصة في $\mathbb{C}$.
2. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| > \|F\|\} \subset \rho(F)$
3. $\{\forall\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leq \|F\|\} \supset \sigma(F)$

14.1 طيف المؤثر القرين

قضيه 1 7
ليكن $F \in l(H)$.

1. إذا كان المؤثر F قابلا للقلب باستمرار فإن المؤثر F^* أيضا يكون قابلا للقلب باستمرار. عندها يكون

$$(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$$

2. $\sigma(F^*) = \{\overline{\lambda} / \lambda \in \sigma(F)\}$

15.1 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرينا لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.
2. $F = F^* \Longrightarrow \sigma(F) \subset [m_F, M_F]$ ، حيث

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x \rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين .
4. إذا كان الفراغ الجزئي M ثابت بالنسبة للمؤثر F، فإن متممه العمودي $M^\perp$ يكون كذلك .

قضيه 1 8
العدد λ يكون قيمة ذاتية للمؤثر F القرين لنفسه إذا وفقط إذا كان: $\overline{E(F_\lambda)} \neq H$.

نظريه 1 8
ليكن المؤثرين F, T من $l(X)$

1. إذا كانت λ, ξ من $\rho(F)$ فإن:

$$R_\lambda(F) - R_\xi(F) = (\lambda - \xi) R_\lambda(F) R_\xi(F) \qquad (3.1)$$

الصيغة (3.1) تسمى المتطابقة الأولى للحالة أو متطابقة هيلبار للحالة.

16.1 تحليلية الحالة

تعريف 1 39
ليكن المؤثر F من $l(X)$ من أجل كل λ من $\rho(F)$ يرمز للمؤثر $(F_\lambda)^{-1}$ بالرمز $R_\lambda(F)$.
المؤثرات $\{R_\lambda(F) / \lambda \in \rho(F)\}$ تسمى حالة المؤثر F.

نظريه 1 9 [6]
حالة المؤثر F أي $R_\lambda(F)$ دالة تحليلية في كل مجال تعريفها بمافيها المالانهايةعندها يكون:

- من أجل λ_0 ثابتة من $\rho(F)$ يكون:

$$R_\lambda(F)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)\,R_{\lambda_0}^{n+1}$$

- من أجل $\lambda_0=\infty$ يكون:

$$R_\lambda(F)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}F^n$$

17.1 دالة المؤثر

ليكن F مؤثرا من $l(B)$.
معلوم أنه إذا كانت f دالة كثير حدود، أي $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ فإن دالة المؤثر F تعرف كالتالي:

$$f(F)=\sum_{k=0}^{n}a_kF^k$$

يمكن تعميم التعريف السابق على الدوال الصحيحة (التحليلية على $\mathbb{C}$)، أي إذا كانت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

فإن

$$f(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF^n$$

عندها يكون $f(F)\in l(B)$.
يمكن تعميم التعريف إلى صنف الدوال التحليلية في جوار ما للطيف، هذا الصنف يرمز له بـ $A(F)$.
-تعرف دالة المؤثر F لدوال الصنف $A(F)$ بأحد الصيغ التالية:

$$f(F)=\frac{-1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}f(\lambda)R_\lambda(F)d\lambda$$

أو

$$f(F)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}F^n\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

حيث Ω جوار مفتوح للطيف $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ واقع في نطاق تحليلية f.
Γ دائرة مركزها الصفر حاوية تماما للطيف $\sigma(F)$.

نتيجة 1 10
إذا كانت الدالة f من الصنف $A(F)$ فإن: $f(\sigma(F))=\sigma(f(F))$

الفصل 2
التقارب الحالي المنتظم

مقدمه

هناك مسألة نموذجية لنظرية التشويش هي كيفية إستقرار القيم و الأشعة الذاتية للمؤثر الخطي المشوش T.
في التعامل مع مثل هذه المسائل غالبا ما ندرس أسرة المؤثرات من الشكل

$$T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon T_1 \tag{1.2}$$

حيث ε متغير سلمي من المفترض أن يكون صغير ، T_0 يسمى المؤثر غير المشوش و εT_1 يسمى التشويش .
ليكن Y, X ف.ش.ن على نفس الحقل $\mathbb{K}$

تعريف 2 1
المؤثر F من $l(X,Y)$ يقال أنه متراص إذا حول كل مجموعة محدودة من X إلى مجموعة شبه متراصة في Y

نتيجة 2 1
النهاية المنتظمة لنهاية المتتاليات المتراصة هي متراص .

تعريف 2 2
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه ذو حالة متراصة إذا كان مؤثر الحالة له $R_\lambda(F)$ متراص .

1.0.2 المؤثر المغلق وقابلية الإغلاق

ليكن F مؤثر من $(D(F) \neq H)L(H)$ و F غير محدود على مجموعة تعريفه

تعريف 2 3
المؤثر F يقال أنه مغلق إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1. بيانه Γ_F مغلق في $H \oplus H$.
2. من أجل كل متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$ حيث

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \quad , \quad Ff_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$$

يكون

$$g = Ff, f \in D(F)$$

نتيجة 2 2
كل مؤثر محدود يكون مغلقا .

قضيه 2 1
إذا كان $F \in L(H)$ حيث

$$\exists F^{-1} \in L(H)$$

فإن المؤثر F مغلق .

البرهان

نفرض أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من $D(F)$ حيث :

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ و } Ff_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$$

بوضع $g_n = Ff_n$ نجد $f_n = F^{-1}g_n$.
بما أن F^{-1} محدود فإن :

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \\ \lim_{n\to\infty} F^{-1}g_n = F^{-1}g$$

أي

$$g = Ff \text{ و } f \in D(F)$$

نتيجة 2 3

1. إذا كان F مغلق فإن المؤثر $(F - \lambda I)$ مغلق $(\lambda \in \mathbb{K})$.
2. إذا كان F مغلق و F^{-1} موجود فإن F^{-1} مغلق أيضا .

تعريف 2 4
يقال أن المؤثر F قابل للإغلاق إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1. وجود العنصر g من H غير متعلق بإختيار المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$.
2. إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $D(F)$ حيث

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0, \lim_{n\to\infty} Ff_n = h$$

فإن $h = 0$.

3. إذا كانت غلاقة(لصاقة) بيانه Γ_F تمثل بيان لمؤثر خطي .

نرمز لهذا المؤثر إن وجد بالرمز $\overline{F}$ ويسمى غلاقة F.

نتيجة 2 4
كل مؤثر F من $L(H)$ محدود على مجموعة تعريفه $D(F)$ يكون قابلا للإغلاق ،عندها تكون غلاقته هي تمديده بالإستمرارية على $\overline{D(F)}$.

تعريف 2 5
ليكن T مؤثر مغلق و S مؤثر قابل للإغلاق في X حيث $\overline{S}=T$.
عندها يعرف الجزء المركزي للمؤثر T بأنه مجموعة تعريف المؤثر S أي $D(S)$.

نتيجة 2 5
ليكن T مؤثر مغلق في X.
إذا كانت $\rho(T) \neq \varnothing$ فإن المجموعة D من $D(T)$ تكون جزء مركزي للمؤثر T إذا وفقط إذا كانت صورة كل $(T - \lambda I)$ كثيفة في X.

2.0.2 المؤثر المتناظر ،التمديد

ليكن F مؤثر من $L(H)$ حيث $\overline{D(F)}=H$.

تعريف 2 6
يقال أن المؤثر F متناظر إذا تحقق :

$$\langle Ff, g\rangle = \langle f, Fg\rangle \qquad f, g \in D(F)$$

نتيجة 2 6
يكون المؤثر F متناظرا إذا وفقط إذا كان $F \subset F^*$ أي يكون F^* تمديد للمؤثر F.

نتيجة 2 7
إذا كان المؤثر F متناظرا فإنه يكون قابلا للإغلاق ويكون $\overline{F}$ متناظرا.

1.2 الأعداد المميزة للمؤثر المتراص وخصائصها

تعريف 2 7
العدد S ، $(S>0)$ الذي من أجله يوجد حل غير معدوم للجملة التالية

$$\begin{cases} Fx = Sy \\ F^*y = Sx \end{cases}$$

يسمى القيمة الشاذة أو العدد المميز للمؤثر F و الحلول x, y المرفقة به تسمى العناصر الأساسية لشميد

نتيجة 2 8
العدد S^2 ينطبق مع القيم الذاتية لكل من المؤثرين F^*F ، FF^* ، ذلك لأن :

$$F^*Fx = S^2x,$$
$$FF^*y = S^2y$$

بما أن المؤثرين F^*F ، FF^* غير السالبين و المتراصين ، فإن المؤثر $T, (T = FF^*)$ يملك مجموعة على الأكثر قابلة للعد من القيم الذاتية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ غير معدومة و تحقق $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. وجملة من الأشعة الذاتية $(f_n)_{n\geq 1}$ مرفقة بها ، عندها يكون :

$$\forall f \in H \longrightarrow Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, f_n\rangle f_n$$

وعليه الأعداد المميزة للمؤثر F ترقم في متتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ ليست متزايدة و يكرر العدد بقدر درجة تضعيفه .

1. كل عدد منها يسمى $S-$ عدد للمؤثر F المتراص .

2. إذا وجد أكثر من مؤثر نكتب $S(F)$ للدلالة على $S-$ عدد للمؤثر F ، و $\lambda(F)$ للدلالة على القيمة الذاتية للمؤثر F .

نتيجة 2 9

1. $\lambda_n = \langle Tf_n, f_n\rangle = \langle F^*Ff_n, f_n\rangle = \langle Ff_n, Ff_n\rangle = S_n^2 \ \ , \ \ n \geq 1$

2. $S_1 \geq S_2 \geq .... \geq S_n \ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

3. $S_n(F) = S_n(F^*) \ \ , \ \ n \geq 1$

4. $S_n(F) = \lambda_n(|F|) = \lambda_n(\sqrt{F^*F}) \ \ , \ \ n \geq 1$

5. $S_n(\alpha F) = |\alpha| S_n(F) \ \ , \ \ \alpha \in R$

6. $FF^* = F^*F \Rightarrow S_n(F) = |\lambda_n(F)| \ \ , \ \ n \geq 1$

7. إذا كان المؤثر F غير سالب ، فإن :

$$S_n(F) = \lambda_n(F), n \geq 1$$

قضيه 2 2

إذا كان المؤثر F من $l_\infty(H)$ و المؤثر T من $l(H)$ ، فإن :

1. $S_1(F) = \|F\|$

2. $S_n(TF) \leq \| T \| S_n(F) \ \ , \ \ n \geq 1$

3. $S_n(FT) \leq \| F \| S_n(T) \ \ , \ \ n \geq 1$

البرهان

1. من تعريف العدد المميز و حسب النتيجة (2 8) يكون

$$S_1^2(F) = \max_{f\neq 0} \frac{\langle F^*Ff, f\rangle}{\langle f, f\rangle} =$$
$$\max_{f\neq 0} \frac{\langle Ff, Ff\rangle}{\langle f, f\rangle} = \max_{f\neq 0} \frac{\|Ff\|}{\|f\|}$$

ومنه نستنتج أن $S_1 = \|F\|$

2. من تعريف العدد المميز يكون :

$$S_1^2(TF) = \lambda_n((TF)^*(TF)),$$
$$S_1^2(TF) = \lambda_n(F^*F), n \geq 1$$

من ناحية ثانية من أجل كل f من H يكون

$$\langle (TF)^*(TF)f, f\rangle = \|TFf\|^2 \leq$$
$$\|T\|^2\|Ff\|^2 = \|T\|^2\langle Ff, Ff\rangle =$$
$$\langle \|T\|^2F^*Ff, f\rangle$$

ومنه نستنتج أن

$$0 \leq (TF)^*(TF) \leq \|T\|^2F^*F$$

من المتراجحة الأخيرة حسب النتيجة (2 9) نستنتج أن

$$\lambda_n((TF)^*(TF)) \leq \|T\|^2\lambda_n(F^*F) \qquad n \geq 1$$

هذا حسب تعريف العدد المميز يعني أن :

$$S_n^2(TF) \leq \|T\|^2S_n^2(F) \qquad n \geq 1$$

ومنه يكون

$$S_n(TF) \leq \|T\|S_n(F) \qquad n \geq 1$$

3. بما أن

$$\|T\| = \|T^*\|$$
$$S_n(F) = S_n(F^*) \qquad n \geq 1$$

فإنه حسب 2 يكون :

$$S_n(TF) = S_n(T^*F^*) \leq$$
$$\|T^*\|S_n(F^*) = \|T\|S_n(F) \qquad n \geq 1$$

نظريه 2 1
إذا كان F من l_∞ و H_0 الفراغ الجزئي الصفري للمؤثر (أي $(\forall f \in H \longmapsto Ff = 0)$)،فإنه يمكن إيجاد جملتين $(g_n)_{n\geq 1}$ ، $(f_n)_{n\geq 1}$ متعامدتين ومتجانستين و متتالية أعداد موجبة $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ليست متزايدة حيث $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ،عندها يتحقق من أجل كل f من H مايلي :

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \quad , \quad f_0 \in H_0$$
$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle f, f_n \rangle g_n$$

حيث السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بإنتظام .

البرهان

1. حالة المؤثر f قرين لنفسه . حسب النقطة 1 من النتيجة (2 9) ، يكون :

$$\forall f \in H \longmapsto Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n$$

حيث $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ القيم الذاتية الغير المعدومة للمؤثر F ، $(e_n)_{n\geq 1}$ الأشعة الذاتية المرفقة بها ، و السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بإنتظام .
بوضع

$$f_0 = f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

نجد

$$Ff_0 = Ff - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n = 0$$
$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \quad \text{و}$$

أي أن

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \qquad f_0 \in H$$

ومنه يكفي أخد :

$$\alpha_n = \lambda_n = f_n = e_n \qquad n = 1, 2, ...$$

2. حالة المؤثر F كيفي من $l_\infty(H)$.

بما أن المؤثر $T = F^*F$ غير سالب ، (ومنه قرين لنفسه) ومتراص ، فإنه حسب الحالة الأولى يكون :

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f f_n \rangle f_n \\ Tf &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle f f_n \rangle f_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

حيث $(\mu_n)_{n\geq 1}$ القيم الذاتية غير المعدومة للمؤثر T و $(f_n)_{n\geq 1}$ مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بها ، و السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بانتظام . واضح أن الفراغ الصفري لكل من المؤثرين F و T منطبقين . بإدخال المؤثر F على الصيغة (2.2) نجد

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle F f_n \tag{3.2}$$

نختار جملة $(g_n)_{n\geq 1}$ بحيث يكون :

$$Ff_n = S_n g_n, n = 1, 2, ...$$

حيث $s_n, n = 1, 2, ...$ هي $S-$ عدد للمؤثر F عندها الصيغة (3.2) تكتب كالتالي :

$$Ff = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \langle f, f_n \rangle g_n$$

لاحظ أن

$$\langle Ff_k, Ff_i \rangle = S_k S_i \langle g_k, g_i \rangle$$

من ناحية ثانية عندنا :

$$\langle Ff_k, Ff_i \rangle = \langle Tf_k, f_i \rangle = \mu_k \langle Ff_k, Ff_i \rangle = \mu_k \delta_{ki} / \delta_{ki} = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$$

ومنه يكون :

$$S_k S_i \langle g_k, g_i \rangle = \mu_k \delta_{ki}$$

هذا يعني أن الجملة $(g_n)_{n\geq 1}$ متعامدة و متجانسة . و بالتالي يكفي أخد $(f_n)_{n\geq 1}$ الأشعة الذاتية للمؤثر F و $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ هي $s-$ عدد للمؤثر F و الجملة $(g_n)_{n\geq 1}$ تحقق

$$Ff_n = S_n g_n \qquad n = 1, 2, ...$$

نتيجة 2 10
كل مؤثر F من l_H يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(F)\langle ., f_n\rangle g_n \tag{4.2}$$

حيث $(f_n)n \geq 1$ ، $(g_n)_{n\geq 1}$ جملتين من H متعامدتين ومتجانستين ، و السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بإنتظام . عندها يكون :

$$F^* = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(F)\langle ., g_n\rangle f_n \tag{5.2}$$

ذلك لأن :

$$[\langle ., f_n\rangle g_n]^* = \langle ., g_n\rangle f_n, n \geq 1$$

الصيغة (4.2) و (5.2) تسمى تحليلية شميد للمؤثر F ، F^* على التوالي

نظريه 2 2
لتكن $F_n\{n = 1, 2, ...\}$ مؤثرات قابلة للإغلاق في H و $D(F_n) = D\{n = 1, 2, ...\}$ وليكن

$$Fg = \lim_{n\to\infty} F_n g \qquad \forall g \in D = D(A)$$

إذا وجدت متتالية المؤثرات العكسية $\{F_n^{-1}\}$ محدودة بانتظام

$$\forall n \longrightarrow \|F_n^{-1}\| \leq c$$

فإنه يوجد المؤثر $\overline{F^{-1}}$ محدود على المجموعة $\overline{R(F)}$ حيث $\overline{R(F)}$ غلاقة $D(F^{-1})$ و

$$\overline{F^{-1}}f = \lim_{n\to\infty} \overline{F_n^{-1}}f \qquad f \in R(F)$$

البرهان

1. نحل المعادلة المتجانسة

$$Fg = 0, g \in D(F) \tag{6.2}$$

من الفرض عندنا

$$\lim_{n\to\infty} F_n g = Fg$$

و منه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \geq 1 \quad \forall n \geq n_\varepsilon \longrightarrow$$
$$\|F_n g\| \leq\| Fg \| +\varepsilon = \varepsilon$$

بما أن $n \geq 1$ فإن

$$\|g\| = \|F_n^{-1}F_ng\| \leq$$
$$\|F_n^{-1}\|\|F_ng\| \leq \varepsilon c$$

بما أن $\varepsilon(0 < \varepsilon)$ كيفية فإن

$\|g\| = 0$ أي $g = 0$

ومنه المعادلة تملك فقط الحل المعدوم هذا يعني أن F^{-1} موجود على $R(F)$.

2. نبرهن أن :

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{-1}f = F^{-1}f \qquad f \in R(F)$$

عندنا

$$F^{-1}f \in D(f) \subset D(F_n) \qquad f \in R(F)$$

ومنه المؤثر F_nF^{-1} معرف على كل f من $R(F)$.
نعرف المتتالية $(h_n)_{n\geq 1}$ كالتالي :

$$h_n = F_n(F_n^{-1} - F^{-1})f =$$
$$f - F_nF^{-1}f$$

لاحظ أن

$g = F^{-1}f \in D(F)$ من أجل $F_ng \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Fg$

ومنه يكون

$$\|h_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

وعليه من أجل كل f من $R(F)$ يكون :

$$\|(F_n^{-1} - F^{-1})f\| = \|F_n^{-1}h_n\| \leq$$
$$\|F_n^{-1}\|\|h_n\| \leq c\|h_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ومنه يكون

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{-1}f = F^{-1}f \qquad f \in R(F)$$

ومنه المتتالية $(F_n^{-1})_{n\geq 1}$ محدودة بإنتظام ومتقاربة بقوة نحو F^{-1} على $R(F)$ هذا حسب مبدأ المحدودية المنتظمة(النظرية 1 7).
تكون المتتالية $(F_n^{-1})_{n\geq 1}$ متقاربة بقوة نحو $\overline{F^{-1}}$ على $\overline{R(F)}$ عندها يكون F^{-1} محدود .

الفجوة بين الفراغات

ليكن Z فراغ بناخ و M, N فراغات جزئية مغلقة من Z و $S_M(S_N)$ سطح كرة الوحدة المغلقة في $M(N)$ أي

$$S_M = \{u \in M/\|u\| = 1\}$$
$$S_N = \{v \in N/\|v\| = 1\}$$

نضع

$$\delta(M, N) = \sup_{u\in S_M} dist(u, N)$$
$$\delta(N, M) = \sup_{v\in S_N} dist(v, M)$$
$$\hat{\delta}(M, N) = \max[\delta(M, N), \delta(N, M)]$$

تعريف 2 8
تعرف الفجوة بين الفراغين N و M بأنها العدد $\hat{\delta}(M, N)$

نتيجة 2 11

1. $\hat{\delta}(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$
2. $\hat{\delta}(M, N) = \hat{\delta}(N, M)$
3. $0 \leq \hat{\delta}(M, N) \leq 1$

الفجوة بين المؤثرات

تعريف 2 9
تعرف الفجوة بين المؤثرين الخطيين المغلقين T, S من فراغ بناخ X في فراغ بناخ Y بأنها الفجوة بين بيانيهما ونرمز لها بالرمز $\hat{\delta}(T, S)$ أي :

$$\hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(\Gamma(T), \Gamma(S))$$

حيث $\Gamma(T), \Gamma(S)$ بيان T, S على التوالي

نتيجة 2 12
بوضع

$$\delta(T, S) = \delta(\Gamma(T), \Gamma(S))$$

يكون

$$\hat{\delta}(T, S) = max\{\delta(T, S), \delta(S, T)\}$$

1.1.2 التقارب الحالي المنتظم

تعريف 2 10

يقال أن متتالية المؤثرات $(F_n)_{n\geq 1}$ المغلقة متقاربة بشكل معمم منتظم نحو مؤثر F مغلق إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. $\hat{\delta}(F_n, F) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2. من أجل كل λ من $\rho(F)\bigcap\rho(F_n)$ يكون

$$\|R_\lambda(F_n) - R_\lambda(F)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad (7.2)$$

نتيجة 2 13

يكفي تحقق الصيغة (7.2) من أجل λ_0 من $\rho(F)\bigcap\rho(F_n)$.

قضيه 2 3

إذا كانت $(F_n)_{n\geq 1}$ متتالية مؤثرات مغلقة متقاربة بشكل معمم منتظم نحو F مغلق و $F_n, n \geq 1$ يملك حالة متراصة ، فإن F يملك حالة متراصة أيضا

البرهان

إذا كانت λ من $\rho(F)\cap\rho(F_n)$ فإن $R_\lambda(F)$ نهاية منتظمة للحالة $R_\lambda(F_n)$ و بالتالي حسب النتيجة (2 1) $R_\lambda(F)$ مؤثر متراص لأن $R_\lambda(F_n)$ مؤثر متراص .

2.1.2 التقارب الحالي القوي

تعريف 2 11

نرمز بالرمز Δ_b لمجموعة النقط λ من المستوي المركب التي تحقق

$$\exists n_0 \geq 1/\forall n\geq n_0 \to \begin{cases} \lambda\in\rho(F_n) \\ \|R_\lambda(F_n)\|\leq M_0 \end{cases}$$

حيث M_0 ثابت من Δ_s.

Δ_s يسمى نطاق محدودية المتتالية $(R_\lambda(F_n))_{n\geq 1}$.

نضع

$$\Delta_s = \{\lambda\in\mathbb{C}/\exists(s - \lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n))\}$$
$$\Delta_u = \{\lambda\in\mathbb{C}/\exists(u - \lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n))\}$$

Δ_s ، (Δ_u) يسمى نطاق التقارب القوي (المنتظم) للمتتالية $(R_\lambda(F_n))_{n\geq 1}$.

تعريف 2 12

يقال أن متتالية المؤثرات المغلقة $(F_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بالشكل المعمم القوي نحو المؤثر المغلق F إذا كانت

$$s-\lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n) = R_\lambda(F)$$

نتيجة 2 14
بالنسبة للتقارب القوي النتيجة (2 13) في الحالة العامة غير صحيحة .

قضيه 2 4
Δ_b مجموعة مفتوحة في المستوي المركب .
المتتالية $(R_\lambda(F_n))_{n\geq 1}$ محدودة بإنتظام بالنسبة للعدد n و λ على كل مجموعة متراصة من Δ_b .

البرهان

لتكن $\lambda_0 \in \Delta_b$.
بتحليل $(R_\lambda(F_n))_{n\geq 1}$ في سلسلة نيومان من أجل

$$|\lambda-\lambda_0| < \|R_\lambda(F_n)\|^{-1}$$

نحصل على

$$R_\lambda(F_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k (R_{\lambda_0}(F_n))^{k+1}$$

إذا كان $\|R_{\lambda_0}(F_n)\| \leq M_0$ فإن

$$\|R_\lambda(F_n)\| \leq M_0(1-M_0|\lambda-\lambda_0|)^{-1}$$

عندما

$$|\lambda-\lambda_0| < M_0^{-1}$$

أي أن $(R_\lambda(F_n)_{n\geq 1})$ محدود.

نتيجة 2 15

1. Δ_s مجموعة مغلقة و مفتوحة في Δ_b (لأن Δ_s عبارة عن إتحاد مجموعات متراصة Δ_{bk} من Δ_b) .
2. التقارب القوي للحالة $R_\lambda(F_n)$ يكون منتظما على كل مجموعة متراصة من Δ_s .
3. إذا كان:

$$s-\lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n) = R_\lambda(F)$$

فإن $\Delta_s \subset \rho(F)$.

نتيجة 2 16
بوضع :

$$R_\lambda = s - \lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n),$$
$$\lambda \in \Delta_s$$

يكون :

$$R_\lambda - R_\zeta = (\lambda-\zeta)R_\lambda R_\zeta,$$
$$\lambda, \zeta \in \Delta_s$$

نظريه 2 3

إذا كانت Δ_s مجموعة غير خالية و R_λ تمثل حالة مؤثر ما مغلق أي

$$R_\lambda = R_\lambda(F) = (F-\lambda I)^{-1}$$

فإن

$$\Delta_s = \rho(F) \cap \Delta_b$$

البرهان

من النتيجة (2 15) إذا كانت $R_\lambda = R_\lambda(F)$ فإن $\Delta_s \subset \rho(F)$ ومنه

$$\Delta_s \subset \rho(T) \cap \Delta_b$$

نبرهن الإحتواء العكسي أي

$$\Delta_s \supset \rho(T) \cap \Delta_b$$

من متطابقة هيلبار للحالة نستنتج أن

$$\begin{gathered} R_\lambda(F_n) - R_\lambda(F) = \\ (1+(\lambda-\lambda_0)R_\lambda(F_n))\,(R_{\lambda_0}(F_n) - R_{\lambda_0}(F))\,(1+(\lambda-\lambda_0)R_\lambda(F), \\ \lambda, \lambda_0 \in \rho(T)\cap\Delta_b \end{gathered} \tag{8.2}$$

إذا كانت $\lambda_0 \in \Delta_s$ فإن

$$s - \lim_{n\to\infty} R_{\lambda_0}(F_n) = R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}(F)$$

ومنه ومن الصيغة (8.2) وباعتبار $(R_\lambda(F_n))_{n\geq 1}$ محدودة بإنتظام يكون

$$s - \lim_{n\to\infty} R_\lambda(F_n) = R_\lambda(F)$$

هذا يعني أن $\lambda \in \Delta_s$.

أي

$$\Delta_s \supset \rho(T) \cap \Delta_b$$

ومنه

$$\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b$$

نتيجة 2 17
ليكن T_n و T مؤثرين قرينين لنفسيهما في فراغ بناخ .
إذا كانت الصيغة

$$s - \lim_{n\to\infty} R_\zeta(T_n) = R_\zeta(T)$$

صحيحة من أجل بعض الأعداد المركبة ζ فإنها تكون صحيحة من أجل أي عدد غير حقيقي ζ .
أي أن Δ_s تحوي كل الأعداد غير الحقيقة.

البرهان

بما أن

$$\|R_\zeta(T_n)\| \leqslant \frac{1}{\zeta}$$

فإن المجموعة Δ_b و أيضا $\rho(T)$ تحوي كل الأعداد غير الحقيقية ومنه حسب النظرية (2 4) المجموعة Δ_s تحوي كل الأعداد غير الحقيقية.

نظريه 2 4
ليكن T_n, T مؤثرات مغلقة.
وليكن D جزء مركزي للمؤثر T بحيث من أجل كل عنصر u من D يكون أيضا من $D(T_n)$ من أجل n كبير بالقدر الكافي و يحقق

$$T_n u \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} Tu$$

إذا كانت المجموعة $\rho(T) \cap \Delta_b$ غير خالية فإن T_n متقاربة بالشكل المعمم المنتظم نحو T عندها يكون

$$\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b$$

البرهان

من أجل كل $\zeta \in \rho(T) \cap \Delta_b$ ، نحصل على

$$\begin{gathered} R_\zeta(T_n)u - R_\zeta(T)u = \\ R_\zeta(T_n)(T - T_n)R_\zeta(T)u \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} 0 \end{gathered}$$

حيث $R_\zeta(T)u \in D$ (نلاحظ أن $\|R_\zeta(T_n)\|$ محدود) .
لكن مجموعة العناصر u كثيفة في X ذلك لأن D جزء مركزي للمؤثر T (النتيجة 2 5).
بما أن المتتالية $(R_\zeta(T_n))_{n\geq 1}$ محدودة فإن

$$R_\zeta(T_n) \ \underset{\to}{s} \ R_\zeta(T), n \to \infty$$

وبالتالي

$$\Delta_s \supset \rho(T) \cap \Delta_b$$

ومنه حسب النظرية (2 3) يكون

$$\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b$$

نتيجة 2 18
إذا كان T_n ، T مؤثرين قرينين لنفسهما في فراغ بناخ ، وليكن D جزء مركزي للمؤثر T بحيث

$$T_n u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tu \qquad \forall u \in D$$

فإن

$$R_\zeta(T_n) \xrightarrow{s} R_\zeta(T), n \to \infty$$

من أجل كل ζ غير حقيقي .
عندها $(T_n)_{n\geq 1}$ متقاربة بشكل معمم قوي نحو T .

3.1.2 التحليل المقارب للحالة

لتكن $T_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ مجموعة مؤثرات في فراغ H معرفة كالتالي

$$T_\varepsilon = T + \varepsilon T_1$$

حيث

i) T مؤثر مغلق .

ii) المجموعة $D = D(T) \cap D(T_1)$ تعتبر جزء مركزي للمؤثر T .

iii) T_ε مؤثر مغلق يعتبر تمديد للمؤثر $T + \varepsilon T_1$ معرف في النطاق D من أجل $1 \leq \varepsilon < 0$.

يمكن تعريف النطاق Δ_b و النطاق Δ_s لمؤثر الحالة

$$R_\zeta(T_\varepsilon) = (T_\varepsilon - \zeta)^{-1}$$

عندما $\varepsilon \to 0$.
حسب تعريف Δ_b يكون

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\|R_\zeta(T_\varepsilon)\| = M(\zeta) < \infty \qquad \zeta \in \Delta_b$$

بما أن

$$T_\varepsilon u \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} Tu$$

حيث $u \in D$ (D جزء مركزي للمؤثر T) فإنه حسب النظرية (2 4) يكون

$$T_\varepsilon \xrightarrow{s} T \qquad \varepsilon \longrightarrow 0$$

تقارب معمم قوي .
عندها يكون

$$\Delta_s = \rho(T) \cap \Delta_b$$

نتيجة 2 19
إذا أضيف إلى الشروط السابقة الشرط
$iv)$ المجموعة $\rho(T) \cap \Delta_b = \varnothing$
يكون

$$s - \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} R_\zeta(T_\varepsilon) = R_\zeta(T) \qquad \zeta \in \Delta_s \tag{9.2}$$

أي أن

$$R_\zeta(T_\varepsilon)u \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} R_\zeta(T)u \qquad u \in X$$

نظريه 2 5
ليكن $\zeta \in \Delta_s$.
إذا كان $R_\zeta(T)u \in D(T_1)$ فإن

$$\begin{gathered} R_\zeta(T_\varepsilon)u = R_\zeta(T)u - \\ \varepsilon R_\zeta(T)T_1R_\zeta(T)u \; + \; o(\varepsilon) \end{gathered} \tag{10.2}$$

(حيث $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$)

البرهان

لاحظ أن

$$\begin{gathered} R_\zeta(T_\varepsilon)u - R_\zeta(T)u = \\ -R_\zeta(T_\varepsilon)(T_\alpha - T)R_\zeta(T)u = \\ -\varepsilon R_\zeta(T_\varepsilon)T_1R_\zeta(T)u \end{gathered} \tag{11.2}$$

و

$$R_\zeta(T)u \in D \subset D(T) \cap D(T_1)$$

من (11.2) و باعتبار (9.2) نستنتج (10.2) .

2.2 إستقرار القيم الذاتية

تعريف 2 13
لتكن $Q \in C^2(\Omega, R)$ حيث $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ، نقول أن Q هولومورفية إذا تحقق

$$\forall (x,y) \in \Omega \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

تعريف 1 40

نسمي أسرة هولومورفية من النمط A : A أسرة $F_\varepsilon \in (X,Y)$ ، معرفة من أجل ε من المجال D_0 من المستوي المركب تسمى هولومورفية من النمط A إذا تحقق

$i)$ $D(F_\varepsilon)=D$ مستقلة عن ε.

$ii)$ $F_\varepsilon u$ هولومورفية من أجل كل $u \in D$.

تعريف 2 14

الجملة F_ε تسمى هولومورف قرينة لنفسها إذا كانت $F_\varepsilon \in l(H)$ هولومورف في نطاق D_0 و متناظرة على المحور الحقيقي و F_ε معرفة بكثافة من أجل كل ε و تحقق $F_\varepsilon^* = F_{\bar{\varepsilon}}$.

نتيجة 2 20

المؤثر $F(x)$ قرين لنفسه من أجل كل عدد حقيقي x من D_0.

لتكن $(F_n)_{n\geq 1}$ متتالية مؤثرات مغلقة متقاربة بشكل معمم قوي نحو مؤثر F مغلق .

تعريف 2 15

القيم الذاتية المعزولة λ للمؤثر F يقال أنها مستقرة بالنسبة للتشويش إذا تحققت الشروط التالية :

$i)$ نطاق التقارب Δ_s للحالة $R_\zeta(F_n)$ يحتوي شريحة تكون جوار للقيمة λ بمعنى آخر يوجد $\delta(0\geq\delta)$ حيث من أجل كل ζ حيث

$$0<|\zeta-\lambda|<\delta$$

$\zeta \in \rho(F_n)$ من أجل n كبير بقدر كافي و

$$s-\lim_{n\to\infty} R_\zeta(F_n)=R_\zeta(F)$$

هذا الشرط يعني أن الدائرة

$$\Gamma=\{\zeta/|\zeta-\lambda|=r \ \ , \ \ 0<r<\delta\}|\subset\Delta_s$$

و التقارب

$$R_\zeta(F_n) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{s}} R_\zeta(F)$$

حسب النظرية (2 5) يكون منتظما على Γ.

ومن مؤثر الإسقاط (مسقط ريس)

$$P_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\zeta(F_n)d\zeta \qquad (12.2)$$

معرف ويحقق

$$n\to\infty, P_n \xrightarrow{s} P=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\zeta(F)d\zeta \qquad (13.2)$$

حيث P هو مسقط ريس المرفق بالقيمة الذاتية λ للمؤثر F .

$ii)$ $dimP_n \leqq dimP$ (من أجل n كبير بقدر كافي)

نتيجة 2 21
من الصيغة (13.2) ومن الشرط (ii) من أجل n كبير بالقدر الكافي يكون

$$\| P_n - P \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, dimP_n = dimP$$

3.2 التقارب الحالي المنتظم

قضيه 2 5
ليكن T_0 مؤثر مغلق ويملك حالة متراصة و من أجل $\varepsilon_1,(\varepsilon_1 > 0)$ المؤثر T_{ε_1} قابل للإغلاق .
إذا وجد λ_0 من $\rho(T_0)$ و $c,(c>0)$ حيث

$$\forall y \in D \longrightarrow Re\langle (T_0-\lambda I)y, Ty\rangle \geq -c\langle y,y\rangle \tag{14.2}$$

فإن مجموعة المؤثرات $T_0+\varepsilon T_1$ قابلة للإغلاق وغلاقتها تحليلية من الصنف $[A]$ في النصف المفتوح على المستوي $\{\varepsilon/\varepsilon \in C, Re\varepsilon > 0\}$.

البرهان

نفرض في (16.2) $\lambda_0 = 0$.
من أجل $y \in D$ نحصل على

$$\| T_1 y \|^2 = \frac{1}{\varepsilon_1^2} \| (\varepsilon_1 T_1 + T_0)y - T_0 y \|^2$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_1^2}\{\|T_{\varepsilon_1} y \|^2 - \| T_0 y \|^2 - 2\varepsilon_1 Re\langle T_0 y, T_1 y\rangle\} \leq$$
$$\frac{1}{\varepsilon_1^2} \| T_{\varepsilon_1} y \|^2 + \frac{2c}{\varepsilon_1}\|y\|^2$$

ومنه يكون

$$\|T_1 y\| \leq \frac{1}{\varepsilon_1}\|T(\varepsilon_1)y\| + \sqrt{\frac{2c}{\varepsilon_1}\|y\|}$$

ومنه نستنتج أن مجموعة المؤثرات $T_0+\varepsilon T_1$ قابلة للإغلاق وغلاقتها تحليلية من الصنف $[A]$ في القرص المفتوح نصف قطره ε_1 و مركزه النقطة $\varepsilon = \varepsilon_1$.
نستعمل نفس الإجراءات من أجل $\varepsilon = \frac{3}{2}\varepsilon_1$ نجد من أجلها قرص مشابه .
واضح أن إتحاد كل الأقراص المحصل عليها هو النصف الأيمن المفتوح للمستوي أي

$$\{\varepsilon/\varepsilon \in \quad Re\varepsilon > 0\}$$

في حالة $\lambda_0 \neq 0$ نضع

$$T_0' = T_0 - \lambda I$$

الذي له نفس صفات T_0 ونجد بنفس الطريقة المطلوب.

قضيه 2 6

إذا كان $\lambda_0 \notin R_\sigma(\overline{T_\varepsilon})$ من أجل $\varepsilon > 0$ صغير و $\lambda \notin R_\sigma(T_\varepsilon)$ من أجل $\varepsilon > 0$ صغير بالقدر الكافي فإن المجموعة $D = D(T_0) \cap D(T_1)$ تكون جزء مركزي للمؤثر T_0 .

الجزء المركزي للمؤثر T_0 هوالجزء المركزي للمؤثر $(T_0 - \lambda_0 I)$ والعكس بالعكس .

ومنه بدون إخلال بالعموم نفرض أن $\lambda_0 = 0$ في المتراجحة (16.2) و $\lambda_0 = 0 \in \rho(T)$.

من الصيغة الأخير نستنتج وجود $\alpha_1 > 0$ بحيث يكون

$$\|T_0 y\| \geq \alpha_1 \|y\|$$

من أجل $y \in D(T_0)$.

نبرهن أن من أجل $\varepsilon(0 \geq \varepsilon)$ صغير بالقدر الكافي يكون $0 \in \rho(T_\varepsilon)$.

من العبارة (16.2) نجد

$$\| T_\varepsilon y \|^2 \geq \| T_0 y \|^2 - 2c\varepsilon \| y \|^2 \geq (\alpha_1^2 - 2c\varepsilon)\|y\|^2 \qquad \forall y \in D$$

ومنه نستنتج وجود مؤثر عكسي محدود .

حسب نظرية التمديد بالإستمرار النظرية (1 6) يكون المؤثر $\overline{T_\varepsilon^{-1}}$ محدود محدود أيضا.

بما أن $0 \notin R_\sigma(T(\varepsilon))$ فإن المؤثر يكون معرفا على كل H .

ومنه وبما أن

$$\overline{T_\varepsilon^{-1}} = (\overline{T_\varepsilon})^{-1}$$

فإن $0 \in \rho(\overline{T_\varepsilon})$ من أجل $\varepsilon > 0$ صغير بالقدر الكافي .

من أجل برهان المطلوب يكفي برهان أن المجموعة

$$D_1 = \{y/y \in H, y = T_0 z/z \in D\}$$

كثيفة في H .

نبرهن هذا بالعكس ، نفرض أن D_1 ليست كثيفة في H أي يوجد شعاع غير معدوم h من H يكون عمودياعلى كل الأشعة من D_1

نأخذ الشعاع

$$g(\varepsilon) = \frac{\overline{T_\varepsilon^{-1}} h}{\|\overline{T_\varepsilon^{-1}} h\|}$$

من أجل $\varepsilon > 0$ صغير .

لاحظ أن

$$\overline{T_\varepsilon} g(\varepsilon) = \frac{h}{\|\overline{T_\varepsilon^{-1}} h\|}$$

بما أن D جزء مركزي للمؤثر $\overline{T_\varepsilon}(0 < \varepsilon)$ فإنه من أجل كل ثابت $(0 < \varepsilon)$ توجد متتالية أشعة $(g_n(\varepsilon))_{n=1}^{\infty}$ بحيث $g_n(\varepsilon) \in D, (n = 1, 2, ...)$ تحقق

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n(\varepsilon)-g(\varepsilon)\|=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|\overline{T_\varepsilon}g(\varepsilon)-\overline{T_\varepsilon}g_n(\varepsilon)\|=0$$

عندنا

$$T_\varepsilon g_n(\varepsilon)=T_0g_n(\varepsilon)+\varepsilon T_1g_n(\varepsilon)= \frac{h}{\|\overline{T_\varepsilon^{-1}}h\|}+h_n(\varepsilon)$$

حيث $\lim_{n\to\infty}\|h_n(\varepsilon)\|=0$ و منه نحصل على

$$\langle T_0g_n(\varepsilon),T_1g_n(\varepsilon)\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\{-\|T_0g_n(\varepsilon)\|^2+\langle T_0g_n(\varepsilon),h_n(\varepsilon)\rangle\}$$

و منه نستنتج أن

$$Re\langle T_0g_n(\varepsilon),T_1g_n(\varepsilon)\rangle \le \frac{1}{\varepsilon}\|T_0g_n(\varepsilon)\|\{-\|T_0g_n(\varepsilon)\|+\|h_n(\varepsilon)\|\} \tag{15.2}$$

نثبت عدد ε_0 حيث

$$0<\varepsilon_0<\frac{\alpha_1^2}{2(c+1)}$$

من أجل هذا ε_0 نختار عدد طبيعي m حيث

$$\|h_m(\varepsilon_0)\|<\frac{\alpha_1}{2}\|g_m(\varepsilon_0)\|$$

هذا ممكن لأن

$$\|g_n(\varepsilon_0)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\|g(\varepsilon_0)\|=1$$

و

$$\|h_n(\varepsilon_0)\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ومنه من (15.2) نستنتج أن

$$Re\langle T_0g_m(\varepsilon_0),T_1g_m(\varepsilon_0)\rangle \le -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\alpha_1^2}{2}\|g_m(\varepsilon_0)\|^2 \le -(c+1)\|g_m(\varepsilon_0)\| \qquad \forall g_m(\varepsilon_0)\in D$$

وهذا مناف للشرط (16.2) .

نظريه 2 6

ليكن T_0 مؤثر مغلق ويملك حالة متراصة و من أجل $\varepsilon_1,(\varepsilon_1>0)$ المؤثر T_{ε_1} قابل للإغلاق .
إذا وجد λ_0 من $\rho(T_0)$ و $c,(c>0)$ حيث

$$\forall y\in D\longrightarrow Re\langle(T_0-\lambda E)y,Ty\rangle\ge -c\langle y,y\rangle \tag{16.2}$$

فإن المؤثر $T_\varepsilon,(\varepsilon>0)$ قابل للإغلاق .

وإذا كان $\lambda_0\notin R_\sigma(\overline{T_\varepsilon})$ من أجل $\varepsilon>0$ صغير فإن من أجل كل λ من $\rho(T_0)$ يكون من $\overline{\rho}(T_\varepsilon)$ من أجل ε صغير بالقدر الكافي و

$$\|(\overline{T_\varepsilon}-\lambda I)^{-1}-(T_0-\lambda I)^{-1}\|\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0 \tag{17.2}$$

البرهان

في برهان القضية (2 5) نفرض في (16.2) أن $\lambda_0 = 0$.
من أجل $y \in D$ عندنا

$$Re\langle T_0y, T_1y\rangle = Re\langle T_1T_0^{-1}z, z\rangle$$

حيث $z = T_0y$ حسب القضية (2 6) المجموعة

$$D_1 = \{z : z = T_0y, y \in D\}$$

كثيفة في H ومنه المؤثر

$$T_1T_0^{-1}$$

معرف بكثافة في H و

$$D(T_1T_0^{-1}) = D_1$$

نبرهن أن المؤثر

$$(\varepsilon T_1T_0^{-1} + I)^{-1}$$

موجود من أجل $(\varepsilon > 0)$ صغير و يتقارب بقوة نحو المؤثر الحيادي I عندما $(\varepsilon \longrightarrow 0)$.
لدينا

$$z = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon T_1T_0^{-1} + I)z$$

من أجل كل $z \in D_1$.
حسب القضية (2 6) المؤثر

$$\varepsilon T_1T_0^{-1} + I = (\varepsilon T_1 + T_0)T_0^{-1}$$

يملك تمديد مغلق .
أيضا يكون عندنا

$$\|(\varepsilon T_1T_0^{-1} + I)z\|^2 = \varepsilon^2\|T_1T_0^{-1}z\|+$$
$$2\varepsilon Re\langle T_1T_0^{-1}z, z\rangle + \|z\|^2 \geq (1 - 2c\varepsilon)\|z\|^2$$

أي المؤثر

$$(\varepsilon T_1T_0^{-1} + I)^{-1}$$

موجود و

$$\|(\varepsilon T_1T_0^{-1} + I)^{-1}\| \leq 2, \varepsilon \in]0.1/4c[\tag{18.2}$$

ومنه كل شروط النظرية (2 2) محققة ومنه نستنتج التقارب القوي

$$(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} I$$

المؤثر T_0^{-1} و $(T_0^{-1})^*$ حسب الشروط وحسب النتيجة (2 10) يكونا متراصين ومنه يحققان تحليل شميد .
أي

$$(T_0^{-1})^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_i\langle ., z_i\rangle y_i$$

حيث $(y_i)_i^\infty$ و $(z_i)_i^\infty$ جمل متعامدة ومتجانسة من الأشعة الذاتية للمؤثرين $T_0T_0^*$ و $T_0^*T_0$.
$(s_i)_i^\infty$ القيم الذاتية المرفقة به مرتبة تزايديا .
نرمز بالرمز B_n إلى الإسقاط العمودي للفراغ H على الغلاف الخطي للجملة $(z_i)_{i=1}^n$.
من أجل برهان النظرية نبرهن أنه من أجل كل $\alpha(0<\alpha)$ يوجد $\beta(\alpha)>0$ بحيث يكون

$$\|\overline{T_\varepsilon^{-1}}-T_0^{-1}\| \leq \alpha \qquad \forall\varepsilon\in]0,\beta[$$

نثبت عدد $\alpha>0$.
نختار n بحيث يكون

$$s_i < \frac{\alpha}{6}, i>n$$

لاحظ أن

$$\|\ (T_0^{-1})^*(I-B_n)\ \| \leq \frac{\alpha}{6} \tag{19.2}$$

لاحظ من التقارب القوي

$$(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} I$$

نستنتج التقارب القوي للمؤثر القرين أي

$$((\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1})^*(T_0^{-1})^* \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (T_0^{-1})^*$$

من الصيغة الأخيرة نستنتج التقارب المنتظم

$$((\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1})^*(T_0^{-1})^*B_n \underset{(\varepsilon\longrightarrow 0)}{\longrightarrow} (T_0^{-1})^*B_n$$

نختار $\beta>0$ بحيث

$$\|\{((\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1})^*-I\}(T_0^{-1})^*B_n\| < \alpha 2 \qquad \varepsilon\in]0,\beta[$$

ومنه من (18.2) و (19.2) نحصل على

$$\begin{gathered}
\|\overline{(\varepsilon T_1-T_0)^{-1}}-T_0^{-1}\| = \\
\|T_0^{-1}\{(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1}-I\}\| = \\
\|\{(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1^*}-I\}T_0^{-1^*}\| \leq \\
\|\{(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1^*}-I\}T_0^{-1^*}B_n\| + \\
\|\{(\varepsilon\overline{T_1T_0^{-1}}+I)^{-1^*}-I\}T_0^{-1^*}\{I-B_n\}\| \leq \\
\frac{\alpha}{2}+\frac{2\alpha}{6}=\alpha
\end{gathered}$$

نظريه 2 7
ليكن T_0 قرينا لنفسه ويملك حالة متراصة و T_1 مؤثر متناظر.
إذا وجد λ_0 من $\rho(T_0)$ وثابت $c(c \geq 0)$ يحقق

$$\forall y \in D \rightarrow$$
$$Re\langle (T_0 - \lambda_0 I)y, T_0 y\rangle \geq -c\langle y, y\rangle$$

ومن أجل $\varepsilon_1(\varepsilon_1 > 0)$ المؤثر $\overline{T_{\varepsilon_1}}$ قرين لنفسه فإن المؤثر $T_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ قابل للإغلاق وغلاقته مؤثر قرين لنفسه عندها يكون

$$\|(\overline{T_\varepsilon} - \lambda I)^{-1} - (T_0 - \lambda I)^{-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

البرهان

لاحظ أن من شروط النظرية والقضية (2 5) نستنتج أن $\overline{T_\varepsilon}, \varepsilon > 0$ قرين لنفسه(تحليلية من النمط A) .
بما أن الطيف الباقي خال بالنسبة للمؤثر القرين لنفسه فإن التقارب (17.2) يستنتج من النظرية (2 6) .

خاتمة عامة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على توضيح الشرط الكافي للتقارب الحالي المنتظم للمؤثر المشوش نحو المؤثر غير المشوش .
أي الحصول على العلاقة :

$$\|R_\lambda(\overline{F_\varepsilon}) - R_\lambda(F_0)\| \,_{\varepsilon\to 0}\, 0$$

حيث $R_\lambda(F_0)$ هي حالة المؤثر غير المشوش F_0.
و $R_\lambda(\overline{F_\varepsilon})$ هي حالة مؤثر الغلاقة للمؤثر F_ε .
نظرا لوسع الموضوع درسنا الحالة عندما يكون T_0 قرين لنفسه وحالته متراصة ، ومغلق وحالته متراصة .
ويبقى الموضوع للدراسة في الحالات الأخرى للمؤثر T_0 .

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] .أ. كولموغوروف، س. فومين، مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج. 1987 .

[2] مصطفى . عسيلة، دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج. 2009 .

[3] مصطفى . عسيلة، دروس في التحليل الرياضي مطبوعة ، UKMO , 2008 .

المصادر باللغة الأجنبية

[4] Birman M.S. ;Spectral Theory of self-adjoint Opertors in Hilbert Space, D.Reidel Publishing Company,Book Company, 1987.

[5] B. Simon , "Determination of eigenvalues by divergent perturbation series, " Adv . Math.,7, 240-253 (1971).

[6] Dunford N., Schwartz J.T. ; Linear Operators, Parti : General Theory, wiley-interscience, New York,1958.

[7] Huston V.C.L.,Pym J.S. ;Functional Analysis and Operator Theory , Academic Press,London,1980.

[8] Muller V. ;Spectral Theory of Linear Operators,Birkhauser-Verlag,2007.

[9] Reed M., Simon B. ; Methods of Modern Mathematical Physics, Part I, Functional analysis 1972.

[10] T. Kato ; Perturbation Theory for Linear Operators , Springer-Verlage Berlin-Heidelberg-New York (1966).

[11] V. V. Borisov, Uniform resolvent convergence of linear Operators under perturbation,mathematical notes (USSR) 08.1990,V48,Issue2,PP731-735.

سلوك الحالة للمؤثر المشوش

الملخص

هذا العمل يهدف إلى توضيح الشرط الكافي من أجل الحصول على التقارب المعمم للمؤثر المشوش نحو المؤثر غير المشوش هذا التقارب يعرف بالتقارب الحالي المنتظم وهو يترجم سلوك حالة المؤثر المشوش .

اعتمد في الدراسة على مؤثرات قرينة لنفسها وأخرى مغلقة من ذوات الحالة المتراصة، هذا النوع من التقارب نجده بالأساس له علاقة باستقرار القيم الذاتية أثناء التشويش وسلوك الحل للمسائل الشاذة .

الكلمات المفتاحية: المؤثر المشوش - تقارب المؤثرات - المؤثر القرين لنفسه - المؤثر المغلق - الحالة المتراصة .

The behaviour of the resolvent of the perturbat operator

Abstract

This work is devoted to clarifying the sufficient condition for the convergence of the perturbed operator to the non-perturbed one. This convergence is known as the uniform resolvent convergence, and it reflects The behaviour of the resolvent of the perturbat operator.

The study is based on the self-adjoint operators, and closed operators having a compact resolvent ; and this study is related to the stability of the eigenvalues under the perturbation .

key words : perturbat operators , convergence of operators , self-adjoint operator , closed operator , compact resolvent .

Comportement Résolvente de l'operateur perturbé

Résumé

le but de ce travail est de clarifier la condition suffisante pour la convergence de l'opérateur perturbé vers l'opérateur non perturbé , cette convergence est connue comme la convergence résolvante uniforme , et elle traduit le comportement résolvante de l'opérateur perturbé .

L'étude est basée sur les opérateurs auto-adjoint et les opérateurs fermés ayant une résolvante compacte ; et cette étude est liée a la stabilité des valeurs propres sous la perturbation.

.

les mots clés : perturbé opérateurs , convergence de l'opérateur , auto-adjoint opérateur , Opérateur fermé , résolvante compact.