رقم الترتيب:..........
رقم التسلسل:.........

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

القسم: الرياضيات

مذكرة ماستر أكاديمي

الميدان : الرياضيات

إختصاص :تحليل

من إعداد الطالب : مبوزة حسين

عنوان:

الحلول العددية
لبعض المعادلات التكاملية

نوقشت يوم:

2016/06/05

أمام أعضاء لجنة المناقشة المكونة من السادة:

عسيلة مصطفى	أ.محاضر.ب (جامعة ورقلة)	رئيسا
بن السايح عبد الله	أ.محاضر.ب (جامعة ورقلة)	مناقشا
مرابط إسماعيل	أ.محاضر.أ(جامعة ورقلة)	مناقشا
على مش	أ. مساعد.أ (جامعة ورقلة)	مشرفا

السنة الدراسية: 2015-2016


بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس المحتويات

كلمة شكر و عرفان

الحمد لله على إحسانه ، والشكرُ له على توفيقِه وامتِنانه ،

يا رب حمدا ليس غيرك يحمد   يامن له كل الخلائق تصمد

و أشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيمًا لشأنِه، وأشهد أن محمدًا عبدُه ورسولُه الداعي إلى رضوانه و سنته

و ملته وعلى أهله و أصحابه و زوجه و عطرته

لك الــحمدُ حمدًا طـــــــيبًا و مُباركًا ** لك الحمدُ مولانا عليك المُعوَّلُ

لك الحمدُ أعلى الحــمد و الشكر و الثّنا ** أعزُّ و أزكَى ما يكونُ و أفــضلُ

أنـــت أهـــلُ الثـــــنّاءِ والمـجد ** فامنُــنْبجميلٍ من الــثَّناءِ المُواتِي

حُبُّنا وامتِداحُنا ليس إلا مِنَّةٌ منك يا عظيمَ الهِباتِ

يقول الحق (ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحا ترضه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين....) صدق الله العظيم .

يقول سيد الخلق وحبيب الحق ((من لم يشكر الناس لا يشكر الله)).

أتوجه بالشكر الجزيل لأستاذي الفاضل على مش المشرف على هذه المذكرة

أتوجه بالشكر الجزيل لأستاذي الفاضل و الأب الكريم الأستاذ مفلاح مبروك

أتوجه بالشكر الجزيل لأستاذي الفاضل وحفظه الله الأستاذ السعيد زيبار رئيسا المناقشة اللهم اجعل له زخرن للأمة في القيم و التواضع .

أشكر كل الأساتذة الكرام و الإطارات و العمال بجامعة قاصدي مرباح بورقلة .

كما أشكر كل من قدم لي يد العون و من صدر لي معروف و نهي عن منكر في إتمام هذا العمل و إخراجه في حلية جديدة بفضل الله تعالى.

مبوزة حسين

المقدمـــــة

مقدمة:

تؤدى المعادلات التكاملية دورا مهما في حل كثير من المشاكل الفيزيائية و يكون هذا خاصة عن طريق الحلول العددية و قد ناسب هذا التطور السريع في هندسة الكمبيوتر. و لهذا كان للطرق العددية في ايجاد الحل المقرب (بالد قة التي تحتاجها) للمعادلات التكاملية نظرية و عملية في آن واحد.

في هذا البحث قمنا بدراسة الحلول العددية لبعض المعادلات التكاملية و قد ركزنا خاصة على معادلات فولتيرا و فريد هولم،و جديربالذكر ان هناك طرق عديدة لايجاد حلول هذه المعادلات و قد استعرضنا بعضها فقط سنشير اليها عند ذكرنا لخطة البحث.

قسمنا بحثنا هذا الى ثلاثة فصول:

الفصل الاول: ذكرنا فيه التعريفات الاساسية و اهم النتائج مثل متناوية فريد هولم و ذكرنا فيه ايضا على سبيل الاختصار طرق كلاسكية للحل الصريح عن طريقة النواة الحالة ...الخ.

اما الفصل الثاني:فقد قسمسناه الى قسمين:

القسم الأول:عرضنا فيه طرق كلاسيكية من التحليل الدالي كطرق عامة لانشاء متتالية دوال تتقارب الى الحل التام للمعادلة التكاملية مثل سلال نيومان وطريقة التقريبات المتوالية.

فصلنا القول في حالة النواة المنحلة وطبقناه على حالة معادلات خطية من نوع فولتيرا و فريد هولم هذا عن القسم الاول من الفصل الثاني.

اما القسم الثاني: من الفصل الثاني فقد خصصناه لعرض طرق الحساب العددي لحلول المعادلة مستعملين طرق الحساب العددى للتكاملات البسيطة كطرق شبه المنحرفة ، وسيمبسون، التكيف، وهو ما اقتصرنا عليه مع ملاحظة أننا في هذه الطرق حصينا قيم الدوال في نقاط معينة هي نقاط تجزئة المجال المكاملة.

وفي الفصل الثالث: اعطينا الامثلة التطبيقية على هذه الطرق و قارنا في جداول بين قيم الحل التام و الحلول المقربة في نقاط تجزئات مختلفة و قارنا بين الطرق نفسها في حسابات الاخطأ المطلقة.

الفصل الأول

تعريفات و نتائج أساسية في المعادلات التكاملية (الخطية)

III.الفصل الأول: المعادلات التكاملية (ملخص نظري)

تعريفٌات أساسيةٌ

تعريفٌ

ملاحظة:

مثال

معادلات فريد هولم التكاملية

المؤثر التكاملي الخطي

تعريف 2: (المؤثر التكاملي الخطي)

تعريف 3 (المؤثر القرين):

ملاحظة :

نظرية 2:

المعادلات ذات النوى المتناظرة

نظرية 3

نظريات فريد هو لم

حالة النوى المنحلة

معادلات فولتيرا:

تعريف:

المعادلات التكاملية الخطية " فولتيرا (Volterra)" من النمط الأول

ملاحظة

حل معادلة تكاملية لفولتيرا(Volterra)

تعريف

مثال

العلاقة بين المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية الخطية و المعادلات التكاملية لفولتيرا:

وجود ووحدانية الحل

مثال

متناوبة فريد هولم(Fredholm)

نظرية1 (Riesz)

نظرية 2 (متناوبة فريد هولم)

IV.المعادلات التكاملية (ملخص نظري)

I.1.تعريفات أساسية

تعريف 1:

نقول عن معادلة أنها معادلة تكاملية إذا كانت تحوي الدالة المجهولة تحت رمز المكاملة كالمعادلة التالية مثلا:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \qquad (1)$$

حيث f و k دالتان معلومتان و φ هي الدالة المجهولة.

أما المتغير (x, t) فينتمي الى المنطقة $\{a \le x \le b,\ \ a \le t \le b\}$.

المعادلة (1) خطية بالنسبة للدالة المجهولة φ.

هناك معادلات تكاملية غير خطية مثل المعادلات من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\, g(\varphi(t),t)dt$$

حيث f و k و g دوال معلومة و g دالة غير خطية. في هذا البحث سنقتصر على دراسة الحلول العددية للمعادلات التكاملية الخطية.

مثال: المعادلات التكاملية لآبل: $\varphi(x) - \lambda\int_a^x \left[\frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\right]dt = f(x),\quad (0 \le \alpha \le 1, f(x) = 0)$

معادلة خطية من نمط فولتيرا.

ملاحظة:

تسمى المعادلة (1) معادلة فريد هولم من النمط الثاني:

$$f\,(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad (2)$$

(التي تحوي الدالة المجهولة فقط تحت رمز المكاملة) معادلة فريد هولم من النمط الأول.

أما معادلة آبل الوارد ذكر ها أعلاه فهي معادلة من نمط فولتيرا، و الشكل العام لهذه المعادلات:

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (3)$$

(معادلة فولتيرا من النمط الأول) أو:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (4)$$

(معادلة فولتيرا من النمط الثاني).

من الواضح انه يمكن اعتبار معادلة فولتيرا بمثابة معادلة فريد هولم حيث نفرض على الدالة k الشرط:

$$x < t\,, \quad k(x,t) = 0$$

لكنه من الأفضل أن نضع معادلات فولتيرا في صنف خاص لأنها تتمتع بخاصيات لا تتوفر في معادلات كيفية من نمط فريد هولم.

إذا كانت الدالة f معدومة في المعادلات (1) أو (2) أو (3) نقول عندئذ أن المعادلة متجانسة.

إذا كان الأمر غير ذلك نقول أن المعادلة غير متجانسة.

مثال1: نعتبر المعادلة التكاملية معرفة كما يلي: $\varphi(x) - 3\int_a^b \mathrm{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos x$

حيث ان $\varphi(x) = \cos 2x$ و $\mathrm{k}(x,t) = \begin{cases} \sin x\cos t\,, & 0 \le x \le \mathrm{t} \\ \sin t\cos x\,, & \mathrm{t} \le x \le \pi \end{cases}$

الحل:

$$\varphi(x) - 3\int_a^b \mathrm{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \cos x \iff \varphi(x) - 3\left[\int_0^\pi \mathrm{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right] = \cos x$$

$$\iff \varphi(x) - 3\left[\int_0^x \mathrm{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_x^\pi \mathrm{k}(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right] = \cos x$$

$$\iff \cos 2x - 3\left[\int_0^x \sin x\cos t\cos 2t\,\mathrm{d}t + \int_x^\pi \sin t\cos x\cos 2t\,\mathrm{d}t\right] = \cos x$$

$$\iff \cos 2x - 3\left[\sin x\int_0^x \cos t\cos 2t\,\mathrm{d}t + \cos x\int_x^\pi \sin t\cos 2t\,\mathrm{d}t\right] = \cos x$$

$$= \frac{1}{2} - 3\left[\sin x\int_0^x \cos 3t\,\mathrm{d}t + \cos x\int_x^\pi \sin(-t)\mathrm{d}t\right] = \cos x$$

$$= \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{2}{3}$$

$$\int_0^x \cos t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \int_x^\pi \cos 3t\,\mathrm{d}t + \int_x^\pi \cos t\,\mathrm{d}t = \sin 3x - \sin x$$

و بالتعويض في (1) نجد: $\varphi(x) = \cos x$

I.2. معادلات فريد هولم التكاملية (Fredholm)

I.2.1. المؤثر التكاملي الخطي

ندرس في هذه الفقرة معادلات فريد هولم من النمط الثاني، أي المعادلات ذات الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (5)$$

نعتبر عموما ان كل الدوال ذات قيم مركبة.

ان الدالة k تسمى نواة المعادلة و نفرضها دالة قابلة للقياس و تنتمي إلى L^2 على المربع $a \leq x \leq b$

و $a \leq t \leq b$،

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx\, dt < \infty \text{،} \quad \left(k \in L^2([a,b]^2,\ dx) \text{ اي}\right) \qquad (6)$$

تعريف 2: (المؤثر التكاملي الخطي)

$\forall\ k: C([a,b] \times [a,b]) \to \mathbb{R}$، المؤثر التكاملي الخطي المعرف على المجموعة $C[a,b]$ كما يلي:

$$A: C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}) \qquad (7)$$

$$\varphi \to A\varphi$$

$$x \in [a,b], \quad (A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (8)$$

حيث k هي نواة المؤثر التكاملي A.

تعريف 3 (المؤثر القرين):

نقول بأن مؤثرين A,B المعرفين كما يلي $\forall A,B: C[a,b] \to C[a,b]$ يكونان قرينين اذا حققا:

$$\forall \langle \varphi,\psi \rangle \in C[a,b]^2 \text{،} \qquad \langle A\varphi,\psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle \qquad (9)$$

نرمز للقرينB:A^*. (اي $A^* = B$)

ملاحظة :

نعتبر في المعادلة (5) أن الدالة f معلومة و $\varphi(t)$ دالة مجهولة، و ان كليهما ينتمان إلى$L^2[a,b]$.

تسمى النوى المنتمية إلى الصف L^2 نوى هيلبرت – شميت.

نلحق بالمعادلة (5) المؤثر A المعرف بالمساواة : $\psi = A\varphi$.

(ونكتب$\psi(x) = (A\varphi)(x)$). الدالة $\psi(x)$ تعرف بالعلاقة:

$$\psi(x) = (A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{10}$$

يسمى كل مؤثر من الشكل (10) مؤثر فريد هولم.

إذا حققت النواة $k(x,t)$، زيادة على ذلك، الشرط (6) فإن A يسمى مؤثر هيلبرت – شميت.

من الواضح ان دراسة المعادلة (5) تتمثل في دراسة خاصيات هذا المؤثر.

نظرية1: (انظر [1] ص 637)

تعرف المساواة (6) مؤثر خطي في الفضاء $L^2[a,b]$ متراصا يحقق نظيمه:

$$\|A\| \le \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx\, dt} \tag{11}$$

(حيث $k(x,t)$ دالة مربعها يقبل المكاملة)

نظرية 2:

ليكن A مؤثرا لهيلبرت – شميت معرفا بالنواة $k(x,t)$ ،عندئذ يكون قرينةA^* معرفا بالنواة $\overline{k(x,t)}$.

البرهان : باستخدام نظرية فوبيني نحصل على:

$$(Af,g) = \int_a^b \left[\int_a^b k(x,t)f(t)dt\right]\overline{g(x)}dx = \int_a^b \int_a^b k(x,t)f(t)\,\overline{g(x)}dtdx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b k(x,t)\overline{g(x)}\,dx\right] f(t)dt = \int_a^b f(t)\left[\int_a^b g(x)\overline{k(x,t)}dx\right]dt =$$

$$= (f, A^*g)$$

و منه يأتي تاكيد النظرية.

بصفة خاصة فان كل مؤثر من العلاقة (10) يكون مؤثرا قرينا لنفسه في L^2 اي $A^* = A$

إذا وفقط إذا كان $\overline{k(x,t)} = k(t,x)$.

اما في الحالة التي يكون فيها فضاء هيلبرت حقيقيا (و بالتالي تكون النوي أيضا حقيقية) فان هذا الشرط

يكتب على $k(x,t) = k(t,x)$.

I.2.2. المعادلات ذات النوى المتناظرة

نعتبر معادلة فريد هولم التكاملية من النمط الثاني:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (12)$$

و نفرض أن النواة تحقق الشرطين:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx\, dt < \infty \quad (13)$$

$$k(x,t) = \overline{k(t,x)} \quad (14)$$

نقول عندئذ أن المعادلة (9) ذات نواة متناظرة.

نستنتج مما ورد في النظريتين السابقتين أن مؤثر فريد هو لم المرفق لـ (12):

$$A\varphi = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (15)$$

متراص و قرين لنفسه، لذا يمكن كتابة المعادلة (8) على الشكل التالي:

$$\varphi = A\varphi + f \quad (16)$$

نظرية 3: (انظر[1] ص642)

إذا لم يكن العدد 1 قيمة ذاتية للمؤثر فإن المعادلة تقبل من أجل كل f حلا (وحيدا).

أما إذا كان العدد1 قيمة ذاتية للمؤثر فان المعادلة (13) تقبل حلا إذا وفقط إذا كانت الدالة f متعامدا على الدوال الذاتية للمؤثر المرافقة للقيمة الذاتية 1. و إذا كان الشرط الأخير محققا فإن المعادلة (13) تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول.

I.3. نظريات فريد هو لم (Fredholm)

I.3.1. حالة النوى المنحلة

ننتقل الآن إلى دراسة معادلات فريد هولم من النمط الثاني التي لها نوى تحقق:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx\, dt < \infty \qquad (17)$$

نفرض هنا شرط التناظر نعتبر في البداية:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (18)$$

و نفرض أن نواتها منحلة أي انها تكتب على الشكل:

$$k(x،t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t) \qquad (19)$$

حيث a_i و b_i دوال من L^2. يلحق المؤثر المعرف بنواة من الشكل (13) بكل دالة $\varphi \in L^2$ المجموع:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt \qquad (20)$$

أي عنصرا من الفضاء الجزئي ذي البعد المنتهي المولد عن الدوالa_i $(i = 1,2,\dots,n)$.

نلاحظ في (19) أنه يمكن اعتبار الدوال $a_1,\dots,a_n$ مستقلة خطيا. لانه لو لم يمكن الأمر كذلك لتمكنا، بعد وضع كل دالة من الدوال a_i على شكل عبارة خطية لدوال مستقلة خطية، من تمثيل نفس النواة $k(x,t)$ على شكل مجموع حدود ذات الشكل $\widetilde{a_j}(x),\ \widetilde{b_j}(t)$ حيث $\widetilde{a_j}$ دوال مستقلة خطية، وعدد حدود هذا المجموع أصغر من عدد حدود المجموع (19). و الأمر كذلك بالنسبة للدوال b_i . من السهل حينئذ أن نرى بأننا نحصل على نواة تكون فيها الدوال a_i مستقلة خطيا، و كذا الدوال b_i.

ندرك إذن أن الأمر يتعلق بحل المعادلة (18) باعتبار النواة المنحلة (19) حيث $a_1, \dots, a_n$

(و كذلك $b_1, \dots, b_n$) دوال مستقلة خطيا.بتعويض النواة $k(x,t)$ بالمجموع المساوي له، في المعادلة

(18) نحصل على:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt \qquad (21)$$

بإدخال الرموز:

$$\int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt = c_i \quad ، \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (22)$$

تكتب المعادلة (12) على الشكل:

إذن تصبح المعادلة

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, c_i \qquad (23)$$

نفرض من

$$c_i = \int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt \qquad (24)$$

بتعرض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$c_i = \int_a^b b_i(t)\varphi(f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, c_i)dt \qquad (25)$$

I.4. معادلات فولتيرا(Volterra)

تعريف:

نسمي معادلة تكاملية خطية " لفولتير " من النمط الثاني ، كل معادلة تكتب من هذا الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (26)$$

حيث:$f(x)$ و $k(x,t)$ دالتين معلومتين، λ وسط حقيقي.$\varphi(x)$ الدالة المجهولة $k(x,t)$ نواة معادلة فولتير.

إذا كان $f(x) = 0$ فإن المعادلة التكاملية (26) تكتب من الشكل التالي:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (27)$$

كل معادلة من هذا الشكل تسمي المعادلة المتجانسة لفولتير من النمط الثاني.

I.4.1. المعادلات التكاملية الخطية " فولتيرا(Volterra) " من النمط الأول:

نعتبر المعادلة التكاملية من الشكل:

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (28)$$

حيث$\varphi(x)$ دالة المجهولة ، إن المعادلة التكاملية (28) تسمى بالمعادلة التكاملية الخطية لفولتيرا من النمط الأول نأخذ بعد قليل $a = 0$ و هذا الأمر لا ينقص من عمومية المسألة.

- **ملاحظة:** باستعمال رمز المؤثر التكاملي فإن (28) تكتب بالشكل التالي:

$$A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (29)$$

I.4.1. حل معادلة تكاملية لفولتيرا(Volterra)

تعريف: تسمى حد من المعادلة (28)،(29)،(30) كل دالة $\varphi(x)$ تُرجع لنا هذه المعادلة إلى متطابقة.

* **مثال**: برهن أن الدالة $\varphi(x) = 3$؟

$$\begin{cases} x^3 = \int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt \\ \varphi(x) = 3 \end{cases} \qquad (30)$$

هو حل لمعادلة فولتيرا التكاملية.

الحل : بتعويض الدالة $\varphi(x) = 3$ في الطرف الأيمن نجد :

$$x^3 = 3\int_0^x (x-t)^2 dt \iff x^3 = \int_0^x (x-t)^2 3dt$$

$$\iff x^3 = 3\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x$$

$$\iff x^3 = 3\left(\frac{1}{3}((x-x)^3 + (x-0)^3)\right)$$

$$\iff x^3 = 3\left(\frac{1}{3}(x-0)^3\right)$$

$$\iff x^3 = x^3$$

و هذا حسب تعريف الحل الوارد في أعلاه.

I.5. العلاقة بين المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية الخطية و المعادلات التكاملية لفولتيرا:

تعتبر المعادلات التكاملية بطريقة سهلة لإيجاد حلولها من المعادلات الجبرية أو التفاضلية

فإنها حل المعادلة التفاضلية الخطية (من المرتبة n):

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = F(x) \qquad (31)$$

حيث العوامل$a_i(x)$ دالة مستمرة $(i = 1, \dots, n)$

مع الشروط الابتدائية

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \qquad (32)$$

هو حل معادلة تكاملية لفولتيرا من النمط الثاني.

نوضح هذا بمثال معادلة تفاضلية خطية (من المرتبة n):المعادلة التكاملية الخطية من الدرجة الثانية:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = F(x) \qquad (33)$$

$$y(0) = c_0 \quad ; \quad y'(0) = c_1 \qquad (34)$$

و لنضع:

$$y'' = \varphi(x) \qquad (35)$$

و يأخذ الشروط الابتدائية في الحسبان نصل تواليا إلى:

$$y'' = \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; y' = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1 \qquad (36)$$

$$(36) \Leftrightarrow y = \int_0^x (x - t)\varphi(t)dt + c_1(x) + c_0 \qquad (37)$$

لقد استعملنا الصيغة:

$$\int_0^x dt \int_0^x dt \dots \int_0^x dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x - t)^{(n-1)}(t)dt \qquad (38)$$

بتعويض (36) و (38) في المعادلة (34) تصبح بالشكل:

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + c_1 a_1(x) + \quad (39)$$

$$(35) \Leftrightarrow \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + +c_1 x a_2(x) + +c_0\, a_2(x) = F(x)$$

أو :

$$\varphi(x) + \int_0^x (a_1(x)+a_2(x)(x-t))\varphi(t)dt = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - \quad (40)$$

$$-c_0 a_2(x)$$

نضع:

$$k(x،t) = -(a_1(x) + a_2(x)(x-t)) \quad (41)$$

و

$$f(x) = F(x) - \left(c_1 a_1(x) + c_1 x\, a_2(x) + c_0 a_2(x)\right) \quad (42)$$

و بالتالي تصبح:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x،t)\varphi(t)dt \quad (43)$$

لنرجع لفولتير من النمط الثاني.

I.5.1. وجود ووحدانية الحل : وجود و وحدانية الحل لمسألة كوشي الاتية:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = F(x) \quad (44)$$

$$y(0) = c_1 \quad ; \quad y'(0) = c_2 \quad (45)$$

ذات العوامل المستمرة في جوار الصفر أي $(x = 0)$.

اذن لحل مسالة كوشي هذه نحل بدلا عنها المعادلة التكاملية الاتية:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

حيث $k(x,t)$ و $f(x)$ معرفتين بالعلاقتين:

$$\begin{cases} k(x,t) = -(a_1(x) + a_2(x)(x-t)) \\ f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x)) \end{cases}$$

وذلك بتعويض $\varphi(x)$ في العبارة $y = \int_0^b (x-t)\varphi(t)dt + c_1(x) + c_0$

نجد حل (1) الذي يحقق الشروط الابتدائية (2)

مثال:

اوجد المعادلة التكاملية المرفقة بالمعادلة التفاضلية الخطية مع وجود الشروط الابتدائية

$$y'' + y = 0 \qquad (46)$$

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1 \qquad (47)$$

الحل

نضع: $y'' = \varphi(x)$

$$c_0 = 0 \text{ و } c_1 = 1 \text{ و } a_1(x) = 0 \text{ و } a_2(x) = 1 \qquad (48)$$

$$y'' = \varphi(x) \Leftrightarrow y' = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1 \qquad (49)$$

$$(39) \Leftrightarrow y = \int_0^b (x - t)\varphi(t)dt + c_1 x + c_0 \qquad (50)$$

$$\varphi(x) = -x - \int_0^b (x-t)\varphi(t)dt + x \qquad (51)$$

I.2.5. متناوبة فريد هولم (Fredholm)

نظرية1 (Riesz):

ليكن المؤثر المتراص $A: E \to E$ على E فضاء نظامي.

اذن المؤثر $L = I - A$ (المؤثر المدروس في اطار المعادلات التكاملية) له الخواص الاتية:

- $Ker(L)$ ذو بعد منتهي.
- $Im(L)$ هو مغلق، و البعد المرفق منتهي.

- توجد r وحيدة حيث $r \in IN$ يسمى عدد **Riesz** للمؤثر A بحيث:

$$\{0\} = Ker(\mathrm{L}^0) \subset Ker(\mathrm{L}^1) \subset \cdots \subset Ker(\mathrm{L}^{\mathrm{r}}) = Ker(\mathrm{L}^{\mathrm{r}+1}) = \cdots$$

$$E = Im(\mathrm{L}^0) \subset Im(\mathrm{L}^1) \subset \cdots \subset Im(\mathrm{L}^{\mathrm{r}}) = Im(\mathrm{L}^{\mathrm{r}+1}) = \cdots$$

و لدينا الجمع المباشر: $E = Ker(\mathrm{L}^{\mathrm{r}}) \oplus Im(\mathrm{L}^{\mathrm{r}})$.

زادة على ذلك لدينا متناوبة فريد هولم: $Im(\mathrm{L}) = Ker(\mathrm{L}^*)^{\perp}$ بحيث L^* المؤثر القرين لـ L.

نظرية 2 (متناوبة فريد هولم):

نعتبر المعادلات التكاملية المتجانسة و النواة $k: [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ نعرف المسائل الاتية:

(52) اوجد $\varphi \in C[a,b]$ حيث $\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0$

(53) اوجد $\psi \in C[a,b]$ حيث $\psi(x) - \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt = 0$

نعتبر من اجل $f \in C[a,b]$ و $\mathrm{g} \in C[a,b]$ المعادلات التكاملية بطرف ثاني

(54) اوجد $\varphi \in C[a,b]$ حيث $\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$

(55) اوجد $\psi \in C[a,b]$ حيث $\psi(x) - \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt = \mathrm{g}(x)$

اذن لدينا متناوبة:

- إما المعادلات (52) و (53) تقبل الحلول الواضحة $f(x) \equiv 0$ و $\mathrm{g}(x) \equiv 0$ ففي هذه الحالة المعادلات(54) و (55) تملك حلا وحيدا $\varphi \in C[a,b]$ و $\psi \in C[a,b]$ من اجل كل $f \in C[a,b]$ و $\mathrm{g} \in C[a,b]$.

- او اما المعادلات (52) و (53) لها نفس العدد المنتهي من الحلول، m مستقيا خطيا، ففي هذه الحالة المعادلات (54) و (55) تملك حلولا اذا وفقط اذا من اجل كل حل φ لـ (52) و من اجل كل حل ψ لـ (53) لدينا:

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dt = \int_a^b \mathrm{g}(x)\varphi(x)dt = 0 \qquad (56)$$

فعند هذه الشروط, الحل العام لـ (54) يكتب بالصيغة الاتية:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i \qquad (57)$$

حيث $\tilde{\varphi}$ يمثل حل خاص لـ (54) و الدوال $\left(\varphi_i\right)_{0\leq i\leq m}$ تكون عائلة حرة من حلول (52).

الفصل الثانـي

طرق عددية لحل معادلات تكاملية (عرض نظري)

II – الفصل الثاني :طرق عددية لحل معادلات تكاملية (عرض نظري)

- ❖ **القسم الأول**
- **طرق كلاسكية**
- **مقدمة :**
- **سلاسل نيومان (Neumann)**
- **نظرية1 (بناخ ،Banach)**
- **طريقة التقريبات المتوالية**
- **نظرية2**
- **طريقة نيستروم (Nystrom)**
- **ملاحظة**
- **نظرية3**
- **طريقة النواة المنحلة**
- **نظرية4**
- **مفاهيم عامة على الاستقطاب**
- **تعريف**
- **نظرية5**
- **ملاحظة**
- **إستقطاب كثير حدود**
- **نظرية 6**
- **المعادلات التكاملية ذات الأنوية المنحلة**
- **طرق القواعد المنتهية**
- **طرق الإسقاط**
- **تعريف**
- **تعريف**
- **النظرية7(Banach-Steinhaus)**
- **النظرية**
- **تعريف**
- **نظرية 8**
- **نظرية 9**
- **تعريف**
- **نظرية 10**
- **نظرية11**
- ❖ **القسم الثاني: الحلول العددية لمعادلات التكاملية**
- **مقدمة**
- **الحل العددي للمعادلات المتكاملة لفولتيرا**

1- طريقة شبه المنحرف (trapézes)

2- **طريقة سمبسون (simpson)**

3- **طريقة التكيف (adaptative)**

- **ملاحظة**
- **الحل العددي للمعادلات المتكاملة لفريد هولم:**

1- طريقة شبه المنحرف

2- طريقة ثانية

3- **طريقة التكيف**

- **ملاحظات**

III طرق عددية لحل معادلات تكاملية (عرض نظري)

.1.II القسم الأول

.1.II طرق كلاسكية:

مقدمة :توجد عدة طرق تعتمد على نتائج في التحليل الدالي: لأجل اقتراح خوارزميات عملية تستعمل

في إيجاد حلول تقريبية للمعادلات التكاملية، فعالية هذه الطرق تكمن في دراسة المسائل الأتية:

1- دراسة تقارب الخوارزمية نحو الحل التام للمعادلة التكاملية.

2- دراسة سرعة التقارب للخوارزمية.

3- تقويم الخطأ.

ألان نقدم بعض النتائج من التحليل الدالي التي تتعلق بهذه المشكلات.

.1.1.II سلاسل نيومان (Neumann)

لتكن المعادلة التكاملية ذات النواة المستمرة $k(x,t)$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \implies \varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t = f(x) \qquad (1)$$

يمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$\mathrm{A}(\varphi) := f(x) + \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \implies \varphi(x) - \mathrm{A}(\varphi) = f(x) \qquad (2)$$

نلاحظ بسرعة أن وجود الحل لهذه المعادلة يتعلق بمقلوب المؤثر $I-\mathrm{A}$ (أي: $(I-\mathrm{A})^{-1}$)

فلهذا نحج إلى النظرية الأتية:

نظرية1 (بناخ، Banach) (انظر[1] ص 311):

E فضاء بناخ و المؤثر I و A مؤثرا خطيا مستمرا من E في E يطبق في نفسه بحيث : $\|\mathrm{A}\| \leq q < 1$. عندئذ يقبل المؤثر $I-\mathrm{A}$ مقلوبا $(I-\mathrm{A})^{-1}$

يعطى بـ :

$$(I-\mathrm{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{A}^k \qquad (3)$$

$$\|(I-\mathrm{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q} \qquad (4)$$

البرهان :

بما أن : $\|A\| < 1$ فان : $\sum_{k=0}^{\infty} A^k < \infty$ (متقاربة).

فيكفي أن نطبق العلاقة $k = 0,1, \ldots$ ، $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

نرمز بـ : V لمجموع هذه السلسلة، فلدينا

$$V(I-A) = (I + A + \cdots + A^k + \cdots)(I-A) =$$

$$= (I + A + \cdots + A^k + \cdots) - (A + A^2 + \cdots + A^{k+1}) = I$$

و بطريقة مشابهة: $(I-A)V = I$.

إذن: $V = (I-A)^{-1}$

$$\|V\| \leq \|I\| + \|A\| + \cdots + \|A\|^{k+1} \leq 1 + q + \cdots + q^k + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

فحسب هذه النظرية، تحت الشرط $\|A\| < 1$ الحل الوحيد φ^* للمعادلة (2) من الشكل :

$$\varphi^* = (I-A)^{-1}(f) = f + A(f) + A^2(f) + \cdots + A^k(f) + \cdots + \quad (5)$$

هذه السلسلة تسمى سلسلة نيومان.

ومن طريقة بسيطة، نستفيد من تقارب هذه السلسلة في الوصول إلى تقريب للحل φ^* بـ :

$(\varphi_k = M_k f)$.

حيث المؤثر M_k معرف بـ: $M_k = \sum_{i=0}^{k} A^i$.

نبين أن المؤثراتA^i التكاملية مثل A.

بالفعل ، $v = A^2(\varphi)$ ترمزلـ $v = A(w)$ حيث: $w = (\varphi)$.

إي أن:

$$v(x) = \int_a^b k(x,y)\, w(y) dy \quad (*)$$

و

$$w(y) = \int_a^b k(x,t)\, \varphi(t) dt \quad (*')$$

فنجد:

$$v\ (x) = \int_a^b k(x,y)\left[\int_a^b k(y,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_a^b k(x,y)k(y،t)\mathrm{d}y\right]\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b k_2(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

حيث: $\left(k_2(x,t) = \int_a^b k(x,y)k(y,t)\mathrm{d}y\right)$

نبرهن بالتراجع : $v = A^i(\varphi)$.

$$v\ (x) = \int_a^b k_i(x\ ,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \quad ,\ (i = 2\,,3\,,\ldots,)$$

حيث k_i معطى بالعلاقة التراجعية:

$$(6) \quad (i = 2\,,3\,,\ldots,) \ ، \ k_i(x,t) = \int_a^b k_{i-1}(x,y)\,k(y,t)\mathrm{d}y \ ، \ \text{(فرض التراجع)}$$

نشر هذه الكتابة تعطينا

$$(7) \quad k_i(x,t) = \int_a^b \ldots \int_a^b k(x,y_1)k(y_1,y_2)\ldots\ k_{i-1}(x,t)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_{i-1}$$

الدوال $k_i(x,t)$ تسمى نوى مكررة.

الآن سلسلة نيومان يمكن كتابتها على الشكل المفصل الأتي:

$$(8) \quad \varphi^* = f(x) + \int_a^b k(x,t)\,f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b k_2(x,t)\,f(t)\mathrm{d}t + \cdots$$

$$= f(x) + \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{\infty} k_i(x,t)\right) f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b k_i(x,t)\,f(t)\mathrm{d}t + \cdots +$$

إذن لدينا φ_k معرفة بالشكل التالي:

$$(9) \quad \varphi_k = f(x) + \int_a^b m_i(x,t)\,f(t)\mathrm{d}t \quad \text{حيث} \quad m_i(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(x,t)$$

2.1.II. طريقة التقريبات المتوالية: (انظر[11] ص75)

طريقة تقريبات متوالية هي واحدة من الطرق الأكثر استعمال لحل المعادلة (2). تعتمد هذه الطريقة على المبدأ الأتي: تعطى عنصر كيفي $\varphi_0 \in C[a,b]$ يسمى التقريب الأولي ومن ثم وانطلاقا من هذا العنصر نقوم بإنشاء متتالية (φ_n) للحلول المقربة:

$$\varphi_{n+1} = f + A(\varphi_n) \text{ ،} \qquad (n = 0,1,\dots) \tag{10}$$

فإذا تحصلنا من هذا على متتالية متقاربة نحو حل المعادلة المعتبرة نقول عن هذه طريقة تقريبات متوالية من اجل للمعادلة (2)التكاملية نلاحظ المؤثر التكاملي A خطي و مستمر،

فإذن $\varphi^* = lim_{n\to\infty} \varphi_n$ هو الحل التام المعادلة (2).

نضع:

$$I - A + \dots + A^n + \dots \tag{11}$$

لدينا النظرية الآتية:

نظرية2:

إذا كانت السلسلة (11) متقاربة، فان طريقة التقريبات المتوالية للمعادلة (2) تتقارب نحو الحل الوحيد التام φ^* للمعادلة (2) و ذلك مهما يكن التقريب الأول φ_0.

و لدينا:

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \le \|(I - A)^{-1}\|\|A^n\|\|\varphi_1 - \varphi_0\| \text{ ،} \quad (n = 1,2,\dots) \tag{12}$$

بخاصة ، و هنا العلاقة (12) (السرعة التقارب)، بشروط نظرية بناخ، يمكن استبدالها بـ:

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \le \frac{q^n}{1-q}\|\varphi_1 - \varphi_0\| \text{ ،} \qquad (n = 1,2,\dots) \tag{13}$$

البرهان :

نطبيق تواليا العلاقة (10) فنتحصل:

$$\varphi_n = f + A(f) + A^2(f) + \cdots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi_0) \text{ ، } (n = 1, 2, \dots) \qquad (14)$$

فإذا كانت السلسلة (11) متقاربة فعندئذ:

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} A^i(f) = (I - A)^{-1}(f) \qquad (15)$$

لان $A^n(\varphi_0) \to 0$ (الحد العام لسلسلة متقاربة).

نبرهن $\psi = \varphi^*$ حيث φ^*هو الحل التام ψ للمعادلة (2).

لدينا من علاقة سابقة.

$$\varphi_{n+1} = f + A(\varphi_n)$$

و $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \psi$ فان $\lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1} = \psi$

و بما أن A مستمر فنستطيع الكتابة:

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

$$= f + A(\psi)$$

إذن ψ هو حل للمعادلة (2) ومن وحدانية النهاية فان $\psi = \varphi^*$

للحصول على الحاد الأعلى (12)، نعوض φ^* بـ φ_0 في (14)

عندئذ واضح بان الصيغة (10): $\varphi^* = \varphi_n$ ،$(n = 1, 2, \dots)$.

فنصل إلى:

$$\varphi^* = f + A(f) + A^2(f) + \cdots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi^*) \text{ ، } (n = 1, 2, \dots)$$

ونطرح المساواة (14) من العلاقة و بإدخال النظمي نجد:

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \le \|A^n\| \|\varphi^* - \varphi_0\| \text{ ، } (n = 1, 2, \dots) \qquad (16)$$

نضع : $\tilde{\varphi} = \varphi^* - \varphi_0$ علما ان φ^* هي الحل التام للمعادلة (2) و من ثم $\varphi^* - A(\varphi^*) = f$

فلدينا

$$(I - A)(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} - A(\tilde{\varphi}) = \varphi^* - A(\varphi^*) - \varphi_0 + A(\varphi_0)$$

$$= f + A(\varphi_0) - \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0$$

بحيث:

$$(\tilde{\varphi}) = (I - A)^{-1}(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{17}$$

و باستعمال (16) نتحصل على الحاد الأعلى المطلوب.

ملزومة: ليكن k نواة مستمرة تحقق: $max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\, dt < 1$

عندئذ المعادلة التكاملية من النمط الثاني: $x \in [a,b]$ ، $\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\, \varphi(t)dt = f(x)$

تملك حلا وحيدا φ: $\varphi \in C([a,b])$ من أجل كل $f \in C[a,b]$

وإضافة لذلك: طريقة التقريبات المتوالية:

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x,t)\, \varphi_n(t)dt + f(x) \quad , \qquad (n = 0,1, \dots)$$

تتقارب بانتظام نحو الحل التام لأجل φ_0 كيفية من $C([a,b])$.

3.1.II. طريقة نيستروم (Nystrom):

هذه الطريقة من أفضل الطرق التي تساعد على الحل العددي للمعادلات التكاملية و هي تقوم على فكرة استبدال المعادلة التكاملية بجملة معادلات جبرية خطية كالأتي:

يمكن ان نكتب المعادلات التكاملية على شكل جبري للمعادلات الخطية بالشكل الأتي.

لتكن المعادلة التكاملية:

$$\forall\, x \in [a,b] \quad ، \varphi(x) - \int_a^b k(x،t)\, \varphi(t) \mathrm{d}t = f(x) \qquad (18)$$

نعرف المؤثر التكاملي A كالأتي:

$$\forall\, x \in [a,b] \quad ، \quad (\mathrm{A}\varphi)(x) = \int_a^b k(x،t)\, \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad (19)$$

الملحقة بها،

ليكن النقط (y_i^n) و الأوزان (w_i^n) .

نعرف مؤثر جديد A_n بـ:

$$\forall\, x \in [a,b] \quad ، (A_n\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} k\left(x، y_i^{(n)}\right) \varphi\left(y_i^{(n)}\right) \qquad (20)$$

إذن ،تغيري من الحل φ^* للمعادلة $\varphi - \mathrm{A}\varphi = f$ بالحل φ_n للمسالة $\varphi_n - A_n\varphi_n = f$

أبحث عن φ_n بحيث:

$$\varphi_n(x) - \sum_{i=1}^{n} w_i^{(n)} k\left(x, y_i^{(n)}\right) \varphi\left(y_i^{(n)}\right) = f(x) \qquad (21)$$

من أجل $x = \left(y_j^{(n)}\right)_{1\le j\le n}$ و الترميزات الاتية:

- $\varphi\left(y_j^{(n)}\right) = \varphi_j \quad ، \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$
- $f\left(y_j^{(n)}\right) = f_j \quad ، \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$
- $k\left(y_j^{(n)}، y_i^{(n)}\right) = k_{ji} \;, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n)$

فنحصل على الجملة الجبرية ذات n معادلة خطية:

$$\varphi_j - \sum_{i=1}^{n} w_i k_{ji} \varphi_i = f_j \quad ، \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad (22)$$

بحيث f_j ، w_i ، k_{ji} نعتبرها كميات معلومة و φ_j دالة مجهولة.

المصفوفة الملحقة بهذه الجملة هي من الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1-w_1k_{11} & -w_2k_{21} & \dots & -w_nk_{n1} \\ -w_1k_{12} & 1-w_2k_{22} & \dots & -w_nk_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1k_{1n} & -w_2k_{2n} & \dots & 1-w_nk_{nn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ملاحظة :

إن طريقة نستروم و في حالة المعادلة التكاملية لفولتيرا معرفة على الفضاء $C[a,b]$, فنحصل على مصفوفة مثلثية سفلى ، و هذا ما سنوضح في مايلي (القسم 2)

نظرية3: (انظر[5] ص13)

لنفرض أن طريقة $(Q_n)_n$ نظرية لنستروم غير متقاربة $Q_n(f) \to \int_a^b f$, $\forall f \in C[a,b]$

إذن نظرية لنستروم هي تتقارب من نقطة إلى نقطة $A_n\varphi(x) \to A\varphi$ ، $\forall f \in C[a,b]$

(لكن ليس بالضرورة أن تكون متقاربة بانتظام)

2.II. طريقة النواة المنحلة

يكون المؤثر التكاملي A معرف بـالصيغة (1)على الفضاء $C[a,b]$ لنفس الجداء السلمي.

طريقة النواة المنحلة تمثل تتقارب النواة k لمتتالية النواة المنحلة k_n المعرفة بـالعلاقة:

$$\forall x، t \in [a,b] \quad ، \quad k_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} p_j(x)q_j(t) \quad (24)$$

حيث $(q_i)_{1\le i\le j}$ و $(p_i)_{1\le i\le j}$ دالتين مستمرتين و مستقلتين خطيا.

المؤثر التكاملي A يتقارب نحو متتالية المؤثرات $(A_n)_{n\in N}$ المعرف بالصيغة الاتية:

$$A_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n}\langle\varphi, q_j\rangle\, p_j \quad (25)$$

المعادلة (1) متقاربة

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^{n} z_j p_j(x) = f(x) \quad (26)$$

نكتب الصيغة الآتية:

$$z_i = \int_a^b q_i(t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t \quad ، \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

وكذلك يمكن ان نكتبها بالعلاقة الآتية:

$$z_i = \int_a^b q_i(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b q_i(x)\,f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b q_i(x)p_j(x)\mathrm{d}x\right) z_i$$

نضع:

$$c_i = \int_a^b q_i(x)\,f(x)\mathrm{d}x \text{ ،} \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x)p_j(x)\mathrm{d}x \qquad (28)$$

و بالتالي نجد:

$$z_i = c_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_i \text{ ،} \qquad (i = 1, 2, \dots n) \qquad (29)$$

و النظرية الآتية توضح ذلك:

نظرية4: (انظر[18] ص60)

حلول للمعادلة:

$$\varphi_n - \sum_{j=1}^{n}\langle \varphi, q_j\rangle\, p_j = f \qquad (30)$$

لدينا الصيغة الأتية:

$$\varphi_n = f + \sum_{i=1}^{n} z_i\, p_i \qquad (31)$$

أن المعاملات هي الحل للجملة $z_1, z_2, \dots, z_n$ (29)

$$\forall i \in \{1, 2, \dots n\} \text{ ،} \quad z_i - \sum_{j=1}^{n}\langle p_j, q_i\rangle = \langle f, q_i\rangle \qquad (32)$$

II.2.1. مفاهيم عامة على الاستقطاب

تعريف:

ليكن U_n فضاء جزئي على $C[a,b]$ ذو البعد المنتهي n ، $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقط من $[a,b]$

حيث الدالة $f \in U_n$ تتحقق $\forall i \in \{1, 2, \dots n\}$ ، $f(x_i) = 0$ تكون دالة معدومة.

نقول عن المجموعتين أنهما أحاديتا الذوبان.

نظرية5: (انظر[3] ص95)

U_n هو النقط $(x_n)_{1\leq i\leq j}$ إذا كانت الدالة $g \in C[a,b]$ فإنها توجد الدالة وحيدة $u \in U_n$ تستقطب g نقط.

$$\forall i \in \{1,2,\dots n\} \qquad , \quad u(x_j) = g(x_j) \tag{33}$$

ملاحظة:

المؤثر التكاملي $p_n: C[a,b] \to U_n$ الذي يحول g الى u هو مؤثر إستقاط مستمر.

II.2.2. إستقطاب كثير حدود (انظر[6] ص63)

إذا كان I مجال متراص على $\mathbb{R}$ فان مجموعة كثير الحدود IP للدالة كثير الحدود على I كثيفة في $C(I)$.

بحيث لكل $f \in C(I)$ و لكل $\varepsilon > 0$، توجد دالة كثير حدودP على I:

$$\|f - p\| = sup\{|f(x) - p(x)|: x \in I\} < \varepsilon \tag{34}$$

نظرية النواة : (انظر[9] ص16)

I مجال متراص على $\mathbb{R}$ و (L_n) متتالية المؤثرات الخطية الموجبة على $C(I)$ بحيث:

$$lim_{n\to\infty} L_n p_k = p_k ، \qquad (k = 1,2,\dots n) \tag{35}$$

إذن:

$$L_n f \to f \quad \text{حيث} \quad f \in C(I) \tag{36}$$

نظرية 6: (انظر[9] ص16)

لنفرض استقطاب كثير الحدودp_n من $f \in C^{(n+1)}([a,b])$:

$a = x_0 < x_1 = x_0 + h \dots < x_n = b$ حيث $h = \frac{1}{n}$

إذن لدينا:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{n+1}\|_\infty \tag{37}$$

حيث أن:

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \tag{38}$$

بدون فرضية نحول تقسيم لـ $(x_j)_{1<j<n}$ ليس بالضرورة تكون L_n متقاربة بانتظام لـ $(x_j)_{1<j<n}$ عند ما تقسيم.

II.3.2. المعادلات التكاملية ذات الأنوية المنحلة

النواة $k(x، t)$ لمعادلة فريد هولم تسمى منحلة اذا كانت تكتب من الشكل: $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

حيث تكون معرف بالشكل: $a \leq x, t \leq b$ ، $\varphi(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$

الحل، φ^* التقريبي ، $a \leq t \leq b$ الدالة $x \rightarrow k(x, t)$ الى النقط

$x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_n$

نواة المنحلة:

$$k_n (x, t) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x)k(x_j, t) \tag{39}$$

$(L_j)_{1<j<n}$ تسمي استقطاب، الاستقطاب يحقق: $L_k(x_j)_{1<j<n} = \delta_{kj}$

U_n أي x_j

II.3. طرق القواعد المنتهية (انظر[4])

تسمى هذه الطرق الإسقاط بالعلاقتين مع الطرق الرباعية، هي التي تتلخص في إمكانها إعطاء تفتيش جيد بين المحور في التدقيق و تبسيط.

II.3.1. طرق الإسقاط (انظر[2])

تعريف:

ليكن X فضاء شعاعي نظيمي $U \subset X$ فضاء جزئي غير تام مؤثر محدود $P: X \rightarrow Y$ يسمى مسقط إذا حققت:

$$\forall\varphi \in U \ ، \ P\varphi = \varphi \tag{40}$$

تعريف:(Méthode de projection) (انظر[7] ص10)

نعطيX و Y فضاءين لبناخ $A: X \to Y$ و مؤثر محدود متباين.

بحيث $f \in (X) \subset Y$ نحاول تقريب من حل الإشكالية:

$$\varphi \in X \quad \text{بحيث} \quad A\varphi = f \tag{41}$$

نعطي متتالية فضاءات جزئية شعاعية $X_n \subset X$ و $Y_n \subset Y$ ذو البعد المنتهي و كذلك هما مسقطين

$P_n: Y \to Y_n$.

لنعلم أن المشكل

$$\varphi_n \in X_n \quad \text{بحيث} \quad P_n A\varphi_n = P_n f \tag{42}$$

هذه الطرق الإسقاط تسمى التقارب إذا يوجد n_0 بحيث $f \in A(X)$ المعادلة القريبة (42) تؤكد حل وحيد$\varphi_n \in X_n$، وهذا الحل يقارب الحل φ لـ (41)

شرط التقارب، يمكن له أو يوضح عند دالة المؤثر $A_n = P_n A : \quad X_n \to Y_n$ هذا يعني من خلال، هذا المؤثر غير مقلوب، و الكل عندنا تقارب محدود:

$$A_n^{-1}P_n(f) = A_n^{-1}\big(P_n(A\varphi)\big) = (P_n A)^{-1}P_n A\varphi \to \varphi \tag{43}$$

قبل دراسة تقارب طرق الإسقاط، سنذكر بعض النظريات الأساسية.

النظرية7(Banach-Steinhaus): (انظر[2] ص17)

$\{A_n\varphi\}_{n\in N}$ متتالية مؤثر محدود $A_n: X \to Y$ فضاءين لـ X و Y.

لنفرض أن متتالية هي محدودة: لكل $\varphi \in X$ يوجد كل C $\|A_n\varphi\| \le$.

النظرية:

ليكن$\{A_n\varphi\}_{n\in N}$ متتالية لمؤثرات محدودة $A_n: X \to Y$ من فضاءين لبناخ X و Y.

لنفرض أن متتالية متقاربة تؤول لمؤثر $A: X \to Y$.

$A_n\varphi_{n\to\infty} \to A\varphi$ ، $\forall\varphi = X$ إذن المؤثر A هو محدود.

تعريف:

يكون $\varphi \in X$ ، اذن المتتالية $\{A_n\varphi\}_{n\in N}$ هي متقاربة ، فهي محدودة.

باستعمال النظرية (7) المتتالية $\{\|A_n\|\}_{n\in N}$هي محدود و عليه فان النهاية $\|A\|$.

نظرية 8:

ليكن $\{A_n\}_{n\in N}$ متتالية لمؤثرات محدودة $A_n : X \to Y$ على الفضاء النظمي X و الفضاء البناخY .

نفرض أن المتتالية متقاربة نحو المؤثر $A: X \to Y$ (محدود).

إذن التقارب بانتظام لنظامي على كل مجموعة متراص $U \subset X$.

$$sup_{\varphi\in Y}\|A_n\varphi - A\varphi\|_Y \to 0 \tag{44}$$

إثبات:

لدينا :المتقاربة الزمنية التي تؤكد على وجود نظام موجد على الأنظمة $\|A_n\|$ كذلك $\|A\|$

ليكن $\varepsilon > 0$،

$U \subset \cup_{\varphi\in U} B(\varphi\varepsilon)$ ، كما U هي متراصة، نكتب $U \subset \cup_{i=1}^{m} B(\varphi_i , \varepsilon)$

كما أن لدينا متقاربة $A_n\varphi - A\varphi$ لـ مجموعة محددة من العناصر $\varphi_1, \varphi_2, \dots , \varphi_m,$

نجد $n \geq N$

$$\left\|A_n\varphi_j - A\varphi_j\right\|_Y \leq \varepsilon \quad ، \quad \forall j \in \{1, 2, \dots m\} \tag{45}$$

إذن ، إذا أخذنا $\varphi \in U$ ،

$$\|A_n\varphi - A\varphi\|_Y \leq \left\|A_n\varphi - A_n\varphi_j\right\|_Y + \left\|A_n\varphi_j - A\varphi_j\right\|_Y + \|A_j\varphi - A\varphi\|_Y$$

$$\leq \|A_n\| \left\|\varphi - \varphi_j\right\| + \varepsilon + \|A\| \left\|\varphi - A_n\varphi_j\right\|$$

$$\leq (2c + 1)\varepsilon \tag{46}$$

نظرية 9: (انظر[2] ص19)

متتالية $(L_n)_{n\in N}$ لمؤثرات محدودة $L_n: Y \to Z$, حيث Z فضاء نظامي و Y فضاء بناخ.

نفرض أن المتتالية متقاربة نحو مؤثر $L : X \to Y$ (محدود).

نعطى مؤثر متراص محدود $A : X \to Y$, أو X فضاء شعاعي نظامي.

إذن تقارب أنظمة متتالية لمؤثرات محدودة متراص $L_n : X \to Y$ نحو لمؤثر

$$\|(L_n - L)A\|_{n\to} \to 0$$

تعريف:

نقول عن X_n انه الفضاء الجزئ ، فضاء نظامي ذو البعد في نظام اذا كانت المجموعة

$\{\psi = \varphi، \|\varphi\|_X \leq 1\}$ هي متراصة.

إذن من النظرية (2) ، المتقاربة $L_n\psi - L\psi$ منتظم على $\overline{U}$ اذن على U اذا كان $\varepsilon > 0$:

$$\left\|(L_nA_n\varphi - LA\varphi)\right\|_Z \leq \varepsilon \quad ، \quad \forall\psi = A\varphi \in U$$

تعطي بالعلاقة الأتية : $\|(L_n - L)A)\|_{(X,Z)} \leq \varepsilon$

نظرية 10: (انظر[2] ص19)

ليكن $\{A_n\}_{n\in N}$ المتتالية مؤثرين محددين فضاءين بناخ X و Y.

نفرض أن المتتالية متقاربة بنظام نحو مؤثر محدد.

نظرية11: (انظر[2] ص20)

$$A : X \to Y$$

فضاءين لبناخ X و Y متقاربة اذا وفقط اذا يوجد قطر n_0 في مجال المؤثر المعرفة

$P_nA_n : X_n \to Y_n$ قابلة للقلب و اذا المؤثر كثير الحدود $(P_n\, A)^{-1}P_nA_n \; : X_n \to X_n$ منتظمية و محدود.

$$\exists\ M > 0, \forall n \geq n_0, \|(P_n\ A)^{-1}\ P_n\ A\| \leq M$$

يوجد تقليل الخطأ عند ما $\varphi \in X$ يكون الحل متقارب $\varphi_n = (P_n\ A)^{-1}\ P_n\ A\varphi$:

$$\|\varphi - \varphi_n\|_X \leq (1 + M)\ inf_{\psi \in X_n}\|\psi - \varphi\|$$

إذن الإشكالية: $(I - \mathrm{A})\varphi = f(x)$ حيث $\varphi \in X$

تقليل الخطأ:

$$\sum_{i=1}^{n} \propto_i\ (I - \mathrm{A})u_i - f \tag{49}$$

نفرض شرط

$$\langle\sum_{i=1}^{n} \propto_i\ (I - \mathrm{A})u_i - f\ , u_j\rangle = 0\ ، \quad j = 1,2, \dots , n \tag{50}$$

نتحصل على الجملة المعادلات الخطية.

$$\sum_{i=1}^{n} \propto_i\ \left(\langle(I - \mathrm{A})u_i, u_j\rangle - \langle f, u_j\rangle\right) = 0\ ، \ j = 1,2, \dots , n \tag{51}$$

$$(51) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \propto_i\ \left(\langle u_i,\ u_j\rangle - \langle \mathrm{A}u_i,\ u_j\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle f,\ u_j\rangle\ 0\ ، j = 1,2, \dots , n \tag{52}$$

$$(51) \Leftrightarrow \propto_i - \sum_{i=1}^{n}\ \langle \mathrm{A}u_i,\ u_j\rangle \propto_i = \sum_{i=1}^{n}\langle f,\ u_j\rangle\ 0\ ، \quad j = 1,2, \dots , n \tag{53}$$

الشكل : $(I - M_n) \propto = F$ حيث $F_i = \langle f, u_j\rangle$ و $m_{ij} = \langle \mathrm{A}u_i,\ u_j\rangle$.

II.2. القسم الثاني: الحلول العددية لمعادلات التكاملية

مقدمة:

في هذا الجزء الثاني من نفس الفصل سنذكر بعض الطرق العددية لحل المعادلات التكاملية مع توضيح الاختلاف في مراحل الحل، و إعطاء مثال تطبيقي لكل طريقة.

وأيضا و بهدف تحليل النتائج المحصل عليها و كذلك بالرسم.

II.1.2. الطرق العددية لمعادلات فولتيرا (Volterra)

II.1.1.2.طريقة شبه المنحرف (trapézes) (انظر[2] ص22)

تذكير :

لتكن المعادلة التكاملية لفولتيرا من الشكل التالي:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad ، \quad a < x < b \qquad (58)$$

حيث $max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,t)|\, dt < 1$

لتكن التجزئة الآتية للمجال $[a,b]$.

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_n = b$$

نأخذ هذه التجزئة المنتظمة أي نقسم المجال $[a,b]$ على n ،مجال طول كل منه يساوي $h = \frac{b-a}{n}$

أطراف هذه المجالات هي النقط : $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$

(hهي خطوة التجزئة).

فإذن المجالات هي: $[x_j\,,\ x_{j+1}]$ حيث $j = 0, 1, 2, \ldots, n$

فيكون لدينا من المعادلة (2):

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \int_a^{x_j} k(x_j,t)\varphi(t)dt \quad ، a < x_j < b \qquad (59)$$

من أجل المعادلة (2) لدينا النتيجة الآتية التي تصف الحل التقريبي بطريقة شبه المنحرف للمعادلة التكاملية لفولتيرا.

نقسم مرة أخرى بالمكاملة المتغيرة t.

إذا وضعنا $t = (x_i)_{0 \le i \le j}$ و بمراعاة طريقة شبه لحساب التكاملات و تصبح لدينا:

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \left[\frac{h}{2}\, k(x_j, x_0)\varphi(x_0) + h\sum_{i=1}^{j-1} k(x_j, x_i)\varphi(x_i) + \right. \qquad (60)$$

$$\left. + \frac{h}{2} k(x_j, x_j)\varphi(x_j)\right]$$

نضع: $\varphi_j = \varphi(x_j)$ و $g_j = g(x_j)$ و $k_{ji} = k(x_j, x_i)$

و نكتب المعادلة (4)على الشكل التالي:

$$\varphi_j = g_j + \frac{h}{2}\, k_{j0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i + \frac{h}{2} k_{jj}\varphi_j \,،\quad j = 0, 1, 2, \dots, n \qquad (61)$$

يمكن كتابة المعادلة (4) بالشكل التالي.

$$(4) \Leftrightarrow \varphi_j - \frac{h}{2}\, k_{jj}\varphi_j = g_j + \frac{h}{2}\, k_{j0}\varphi_j + h\sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i$$

$$(4) \Leftrightarrow \varphi_j\left(1 - \frac{h}{2}\, k_{jj}\right) = g_j + \frac{h}{2}\, k_{j0}\varphi_j + h\sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i$$ حيث $j = 0,1,\dots, n$

إذا كان $j = 0$ فإن: $\varphi(a) = g(a)$.

و بالتالي:

$$\varphi_0 = g_0 \qquad (62)$$

فنحصل على جملة معادلات جبرية خطية بالشكل الأتي: $A\varphi = b$

حيث A هي المصفوفة المثلثية السفلية.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{h}{2}k_{10} & 1-\frac{h}{2}k_{11} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{h}{2}k_{1n} & \dots & & 1-\frac{h}{2}k_{mm} \end{bmatrix}$$

و $b = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = (g_0, g_1 \dots, g_n)^t$ ، $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$

فلدينا:

جداء القطر الرئيس $\det(A) = \left(1-\frac{h}{2}k_{11}\right)\left(1-\frac{h}{2}k_{22}\right)\dots\left(1-\frac{h}{2}k_{nn}\right)$

نرمز لمصفوفة: $K = (k_{jj})_{jj}$.

M معرفة بالعلاقة: $M = \|K\| = max_{0\le j\le n}|k_{jj}|$

$$\det(A) \ge (1-\frac{h}{2}M)^n = (1-\frac{b-a}{2n}M)^n = (1-\frac{h}{2}M)^{\frac{b-a}{2}} \quad (63)$$

الطرف الأيمن لهذا المتباينة غير معدوم من أجل $h \to 0$.

عندما $h \to 0$ يؤول الطرف الأيمن من (6) إلى $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$.

إذن محدد الجملة (($\det(A)$) (4) غير معدوم.

2.1.2.II طريقة سمبسون (simpson)

و تسمى أنها طريقة سمبسون المعدلة .

نعتبر نفس المعادلة لفولتيرا:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt ، \quad a < x < b \tag{64}$$

وليكن $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{2j-1} < x_{2j} \ldots < x_n = b$، تجزئة ذات خطوة h هي صغيرة بكفاية.

هدفنا، هو تقريب الحل لهذه المعادلة في لعقد ذات الدليل الزوجي (أي نقطة x_{2j})

الطريقة نفسها كما في شبه المنحرف،المعادلة (13) تصبح على الشكل الأتي:

$$\varphi_{2j} = g(x_{2j}) + \int_a^{x_{2j}} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt \tag{65}$$

$$\varphi_{2j} = g(x_{2j}) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_{2i}}^{t_{2i}+2} k(x_{2j},t)\varphi(t)dt \tag{66}$$

باستعمال التربيع لطريقة سمبسون المعادلة (14) تصبح:

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3}(k_{2j2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j2i+1}\varphi_{2i+1} + k_{2j2i+2}\varphi_{2i+2}) \tag{67}$$

بما أن h صغيرة، نقربها. $\varphi_{2i+1} = \frac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2}$ المعادلة (15) تصبح:

$$\varphi_{2j} = g(t_{2j}) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3}\Big[k(x_{2j},t_{2i})\,\varphi(t_{2i}) + 4k(x_{2j},t_{2i+1})\left[\frac{\varphi_{2i}+\varphi_{2i+2}}{2}\right] +$$
$$+k(x_{2j},t_{2i+2})\varphi_{2i+2}\Big]$$

نضع: $\varphi_j = \varphi(x_j)$ و $g_j = g(x_j)$ و $k_{ji} = k(x_j,t_i)$

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{3}\left[k_{2j2i}\varphi_{2i} + 4k_{2j2i+1}\left[\frac{\varphi_{2j}+\varphi_{2i+2}}{2}\right] + k_{2j2i+2}\varphi_{2i+2}\right]$$

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{j-1}\left(\left[k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}\right]\varphi_{2i} + \left[2k_{2j2i+1}+k_{2j2i+2}\right]\varphi_{2i+2}\right)$$

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \frac{h}{3}\left(\sum_{i=0}^{j-1}(\left[k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}\right]\varphi_{2i} + \sum_{i=1}^{j}\left[2k_{2j2i-1}+k_{2j2i}\ \right]\varphi_{2i}\right)$$

فتصبح لدينا:

$$\varphi_{2j} = g_{2j} + \frac{h}{3}\left[k_{2j0} + 2k_{2j1}\right]\varphi_0 + \frac{h}{3}\left[2k_{2j2j-1} + k_{2j2j}\right]\varphi_{2j} + \quad (68)$$

$$+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j-1}\left[k_{2j2i-1} + k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}\right]\varphi_{2i}$$

$$\varphi_{2j}\left(1-\frac{h}{3}\left[2k_{2j2j-1} + k_{2j2j}\right]\right) = g_{2j} + \frac{h}{3}\left(\left[k_{2j0} + 2k_{2j1}\right]\varphi_0 \quad (69)\right.$$

$$+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{j-1}\left[k_{2j2i-1} + k_{2j2i} + 2k_{2j2i+1}\right]\varphi_{2i}$$

اذا كانت $j = 0$ فان $\varphi_0 = g_0 = g(a)$.

3.1.2.II. طريقة التكيف (adaptative)

الفائدة من هذه الطريقة هو تقليل الخطأ، من أجل الحصول على حل أدق نحتفظ بالخطوات السابقة نفسها،

لتكن الخطوة j السابقة الموافقة للحل φ_j

نطبق التقسيم نفسه في الطريقة الأولى على المجال $\left[x_0, x_{j-1}\right]$ إلا في هذا المجال $x_{j-\frac{1}{2}} \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$

ملاحظة : فنجد أن هذه الطريقة أكثر دقة من طريقة شبه المنحرف و هذا ما تؤكده الأمثلة

في الفصل الثالث.

ليكن:

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \sum_{i=0}^{j-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t)\varphi(t)dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_j, t)\varphi(t)dt + \quad (70)$$

$$+\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

بإستعمال طريقة شبه المنحرف

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \sum_{i=0}^{j-2}\frac{1}{2}(k_{ji+1}\,\varphi_{i+1} + k_{ji}\varphi_i)h + \frac{1}{2}\left(k_{jj-\frac{1}{2}}\varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{jj-1}\varphi_{j-1}\right)\frac{h}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_{jj}\varphi_j + k_{jj-\frac{1}{2}}\varphi_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{h}{2}$$

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \sum_{i=0}^{j-2}\frac{1}{2}hk_{ji}\,\varphi_i + \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{2}hk_{ji+1}\,\varphi_{i+1} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_{jj-1}\varphi_{j-1} + 2k_{jj-\frac{1}{2}}\varphi_{i-\frac{1}{2}} + k_{jj}\varphi_j\right)\frac{h}{2}$$

(71)

$$\varphi_j\left(1-\frac{1}{4}hk_{ij}\right) = g_j + \frac{1}{2}hk_{j0}\varphi_0 + \sum_{i=1}^{j-2}\left(hk_{ji}\varphi_i + \frac{3h}{4}k_{jj-1}\varphi_{j-1} + \frac{h}{2}k_{jj-\frac{1}{2}}\varphi_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

بنفس الطريقة نحدد قيمة $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$.

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} k\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\varphi(t)dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k\left(x_{j-\frac{1}{2}}, t\right)\varphi(t)dt \quad (72)$$

باستعمال طريقة نفسها لشبه المنحرف

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2}\frac{1}{2}\left(k_{j-\frac{1}{2}i+1}\varphi_{i+1} + k_{j-\frac{1}{2}i}\varphi_i\right)h + \quad (73)$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}\,\varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{j-\frac{1}{2}j-1}\,\varphi_{j-1}\right)\frac{h}{2}$$

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{j-2}k_{j-\frac{1}{2}i}\varphi_i + \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{j-1}k_{j-i}\varphi_i +$$

$$+\frac{1}{4}\left(k_{j-\frac{1}{2}j-1}\varphi_{j-1} + k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}\varphi_{j-\frac{1}{2}}\right)h$$

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{4}k_{j-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\right) = g_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}k_{j-\frac{1}{2}0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-2}k_{j-\frac{1}{2}i}\varphi_i + \frac{3}{4}k_{j-\frac{1}{2}j-1}\varphi_{j-1} \quad (74)$$

بعوض (8) إلى (11)، نحصل على قيمة $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$

2.2.II.الحل العددي للمعادلات المتكاملة لفريد هولم (Fredholm)

هنا لدينا الحد الأعلى للتكامل الوارد في المعادلة ثابت، و هذا له اثره في الطريقة كما سوف نرى.

1.2.2.II. طريقة الأولى (شبه المنحرف)

هي الطريقة نفسها المعرفة (شبه المنحرف) التي طبقناها سابقا، نريد الآن أن نجد بها الحل العددي للمعادلة التكاملية لفريد هولم من النمط الثاني:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(x، t)\varphi(t)dt \quad ، \qquad a < x < b \qquad (75)$$

إن الدالتين $k(x، t)$ ،$g(x)$ معلوماتان.

نقسم المجال$[a , b]$ بالتساوي ، $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_j < x_n = b$

باستخدام طريقة شبه المنحرف نجد:

$$\int_a^b k(x، t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2}[k_i(x)\varphi_i(x) + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}(x)] \qquad (76)$$

مع: $\varphi_i = \varphi_i(x)$ ، $k(x، x_i) = k_i(x)$

فنحصل على المعادلة الأتية:

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2}[k_i(x)\varphi_i + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}] \qquad (77)$$

فإذن (20) لـ φ_i تصبح بشكل معادلات جبرية من الشكل:

$$\left(I - \frac{h}{2}K\right)\Phi = G \qquad (78)$$

حيث الأشعة G و Φ معرفة على التوالي بمركباتها φ_i و $g(x_i) = g_i(x)$

مركبات K تعطى بـ: $k_{ji} = k_j(x_i)$

و يكون الهدف هو حل الجملة (21)، و نستعمل على سبيل المثال الطريقة التكرارية لغوص سيدل اي:

$$\varphi_j^{(i+1)} = \frac{1}{q_{jj}}\left(g_j - \sum_{l=1}^{j-1} q_{jl}\varphi_l^{(i+1)} - \sum_{l=j+1}^{N} q_{jl}\varphi_l^{(i)}\right), \quad i = 0,1,2\ldots, \quad (79)$$

حيث $Q = (I - \frac{h}{2}K)$ و التقريب الأول: $\varphi^{(0)} = G$

ملاحظات : شرط كافي لتقارب الصيغة (20) لما المصفوفة Q تكون قطرية و $\|Q\| < 1$.

II.2.2.2. طريقة ثانية:

فالمعادلة على الشكل (21)، تكون الدالة المجهولة خارج التكامل.

التقريب لـ (21) يعطي بـ:

$$\varphi_i = g_i + \sum_{j=1}^{n} w_j k(x_i, x_j)\varphi_j \quad (80)$$

حيث $j = 1,2,\ldots,n$، w_j هي أوزان.

فنجد العلاقة الأتية:

$$\varphi_i^{(m)} = g_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} k(x_i, x_j)\varphi_j^{(m-1)}, \quad m = 1,2,\ldots, \quad (81)$$

هي تقريبات لـ φ^*.

تكون هذه الطريقة متقاربة إذا كانت كل عناصر المصفوفة ذات العناصر $w_j, k(x_i, x_j)$ نظيمها أقل من الواحد.

المشكلة التي تطرح في المخطط (28)، وهذا هو القول الحق القيمة الحقيقة $\varphi(0)$.

$$\varphi_i^{(m)} = g_i + \sum_{j=1}^{n} w_j k(x_i, x_j)\varphi_j^{m-1}$$

$$\varphi_{i,2n}^{(0)} = g(x_{i,2n}) + \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} k(x_{i,2n}, x_{j,n}) \varphi_{j,n}$$

$$\varphi_{i,2n} = g(x_{i,2n}) + \sum_{j=1}^{2n} w_{j,2n} k(x_{i,2n}, x_{j,2n}) \varphi_{j,2n}$$

$$\varphi_{i,2n}^{(m)} = g(x_{i,2n}) + \sum_{j=1}^{2n} w_{j,2n} k(x_{i,2n}, x_{j,2n}) \varphi_{j,2n}^{(m-1)}$$

II.3.2.2.طريقة التكيف

لتكن المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(x، t)\varphi(t)dt \quad ، \quad a < x < b \qquad (82)$$

حيث k و g دالتان معلومتان.

و تكون $\varphi(x)$ دالة مجهولة حيث $x \in [a , b]$.

نقسم المجال بتقسيمات متساوية $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_n = b$،

حيث تكون $h = x_{i+1} - x_i$

حسب طريقة شبه المنحرف في حساب التكاملات البسيطة.

نكتب ما يلي :

$$\int_a^b k(x، t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2} [k_i(x)\varphi_i(x) + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}(x)] - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha h^3$$

حيث أن:

$$\alpha \leq max \left|\frac{\partial}{\partial t^2}\left(k(x، t)\varphi(t)\right)\right| \quad ، \quad k(x، x_i) = k_i(x)، \ \varphi_i = \varphi_i(x)$$

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h}{2} [k_i(x)\varphi_i + k_{i+1}(x)\varphi_{i+1}] \qquad (83)$$

$$(I - KD)\Phi = G \qquad (84)$$

حيث أن G و Φ شعاعان معرفان

$$D_{ii} = \frac{1}{2} \times \begin{cases} x_2 - x_1 & , i = 1 \\ x_n - x_{n-1} & , i = n \\ x_{i+1} - x_i & , 1 < i < n \end{cases}$$

$$\varphi_j^{(i+1)} = \frac{1}{Q_{jj}} (g_j - \sum_{i=1}^{j-1} Q_{jl}\varphi_l^{(i+1)} - \sum_{l=j+1}^{N} Q_{jl}\varphi_l^{(i)})، \ i = 0,1,2 \ldots, \qquad (85)$$

$Q = (I - KD)$ و التطبيقي الخطي $\Phi^{(0)} = G$ اذن الحل.

لدينا $[x_j - x_{j+1}]$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |\varphi'(x)| \leq \delta(max_i|\Phi_i|, \ j = 1,2, \ldots, -1) \quad \text{حيث} \quad \delta < 1$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |\varphi''(x)|\, dx \leq \gamma(max_i \left|\frac{dy}{dx}\right|, \ j = 1,2, \ldots, -1) \quad \text{حيث} \quad \gamma < 1$$

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(x، t)\varphi(t)dt \ ، \quad a \leq x \leq b \qquad (86)$$

نشتق المعادلة

$$\varphi'(x) = g'(x) + \int_a^b k_{xx}(x، t)\varphi(t)dt \ ، \quad a \leq x \leq b \qquad (87)$$

الفصل الثالث

حل المعادلات تكاملية (تطبيق)

III.1.الحل العددي للمعادلات التكاملية (تطبيق عددي)

مقدمة :

في هذا الفصل التطبيقي سنقوم بحل المعادلات التكاملية لفولتيرا و فريد هولم، باستعمال الطرق العددية التي عرضنها في الفصل الثاني و نقدم تفسير النتائج .

III.1.التطبيقات الخاصة بمعادلة فولتيرا

تنبيه: الحسابات مأخودة من مرجع أعتمد على الموقع:

NAGFortan Library Routine Documeut/Code:DO5ABF.

Sofit wer informer.com.

- **الأمثلة العددية:**

- **مثال 1:** نعتبر المعادلة معرفة كما يلي:

$$\varphi(x) = 2 - e^{x+1} + \int_{-1}^{x} e^{x-t}\varphi(t)dt \qquad (88)$$

الحل التام: $\varphi^* = 1$

لتطبيق الطريقتين السابقتين: شبه المنحرف والتكيف، نحصل على قيم الخطأ $e_j = \left|\varphi_j - \varphi^*{}_j\right|$

في الجدول الأخطاء التالي:

	h = 0.1		***h = 0.05***		***h = 0.025***	
	trapèzes	***Adaptative***	***Trapèzes***	***Adaptative***	***Trapèzes***	***Adaptative***
-1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	2.049D-4	1.295D-4	5.123D-5	2.590D-4	1.280D-5	6.477D-5
-0.6	5.106D-4	7.022D-4	1.276D-4	1.748D-4	3.191D-5	4.455D-5
-0.4	9.688D-4	1.748D-4	2.416D-4	4.913D-5	6.042D-5	1.440D-5
-0.2	1.647D-3	6.134D-4	4.118D-4	1.384D-4	1.029D-4	3.059D-5
0.0	2.663D-3	1.789D-3	6.655D-4	4.181D-4	1.663D-4	9.771D-5
0.2	4.178D-3	3.544D-3	1.044D-3	8.356D-4	2.610D-4	1.978D-4
0.4	6.439D-3	6.162D-3	1.609D-3	1.458D-3	4.022D-4	3.472D-4
0.6	9.813D-3	1.006D-2	2.451D-3	2.387D-3	6.128D-4	5.701D-4
0.8	1.484D-2	1.859D-2	3.709D-3	3.773D-3	9.270D-4	9.025D-4
1.0	2.235D-2	2.459D-2	5.584D-3	5.841D-3	1.395D-3	1.398D-3

حيث نرمز : $D-m = 10^{-m}$ و $m \in \mathbb{N}$

الجدول1:

نتائج المثال 1 قيم الأخطاء المتحصل عليها حسب الطريقتين - شبه المنحرف والتكيف -

الهدف من هذه الطريقة هو معرفة مدى فعاليتها.

طريقة سمبسون

نأخذ المثال السابق نفسه، الجدول التالي حسب طريقة سمبسون

x	***h = 0.1***	***h = 0.05***	***h = 0.025***
-1.0	0.000	0.000	0.000
-0.8	1.375D-7	8.552D-9	5.329D-10
-0.6	3.433D-7	2.132D-8	1.327D-9
-0.4	6.512D-7	4.038D-8	2.521D-9
-0.2	1.111D-6	6.884D-8	4.292D-9
0.0	1.800D-6	1.113D-7	9.939D-8
0.2	2.830D-6	1.747D-7	1.088D-8
0.4	4.372D-6	2.694D-7	1.678D-8
0.6	6.678D-6	4.107D-7	2.556D-8
0.8	1.012D-5	6.216D-7	3.867D-8
1.0	1.528D-5	9.366D-7	5.828D-8

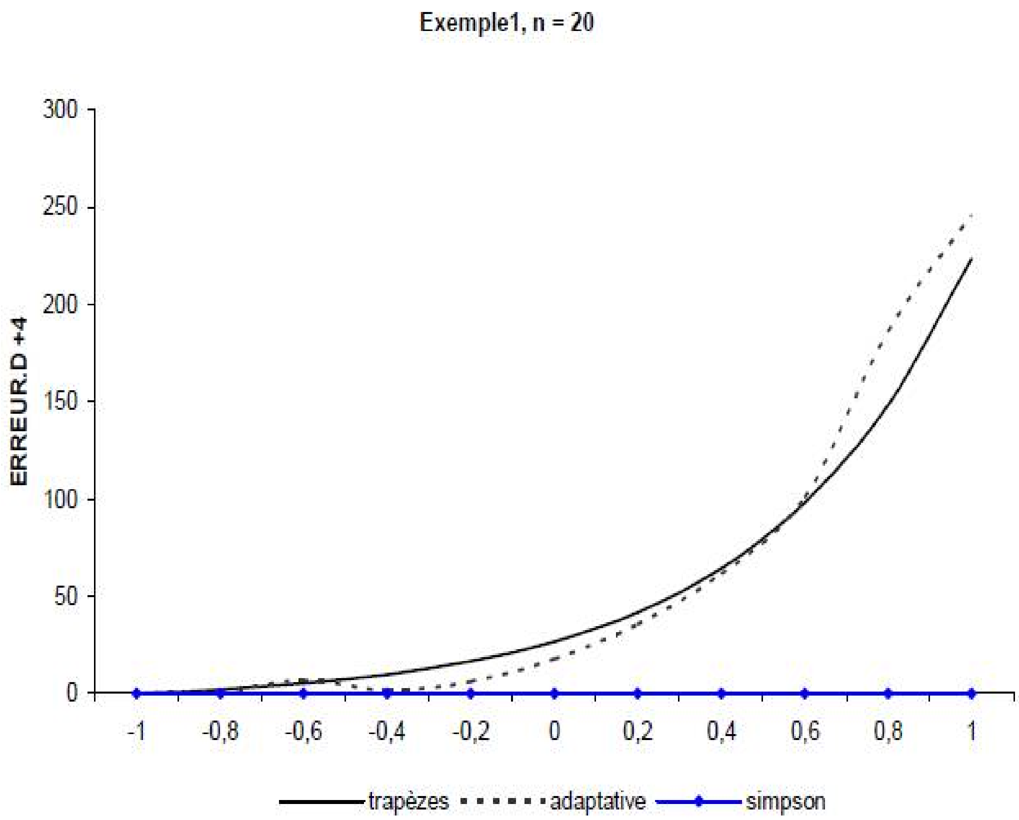
الجدول الثاني. مثال 1: قيمة الخطأ $e_{2j} = \left|\varphi_{2j} - \varphi^*(x_{2j})\right|$

تحصلنا على هذه النتائج باستعمال طريقة سمبسون.

III.2.1. المقارنة بين الطرق الثلاث:

في هذه الفقرة، نقارن بين الطرق الثلاث، و نفسر النتائج.

تفسير نتائج المثال الأول كما هو موضح في الرسم



n : nombre de subdivisions

Schéma 1. Exemple1

(Variations de l'erreur pour les trois méthodes)

مثال 2: نعتبر المعادلة التالية :

$$\varphi(x) = \sin(wx) + \cos(wx)/w - \cos(w)/w + \int_{-1}^{x} \varphi(t)dt \qquad (89)$$

الحل التام هذه المعادلة هو $\varphi^*(x) = \sin(wx)$، حيث w هو ثابت معلوم.

من هذا المثال، نتحصل على النتائج الموضحة في التخطيطي التالي:

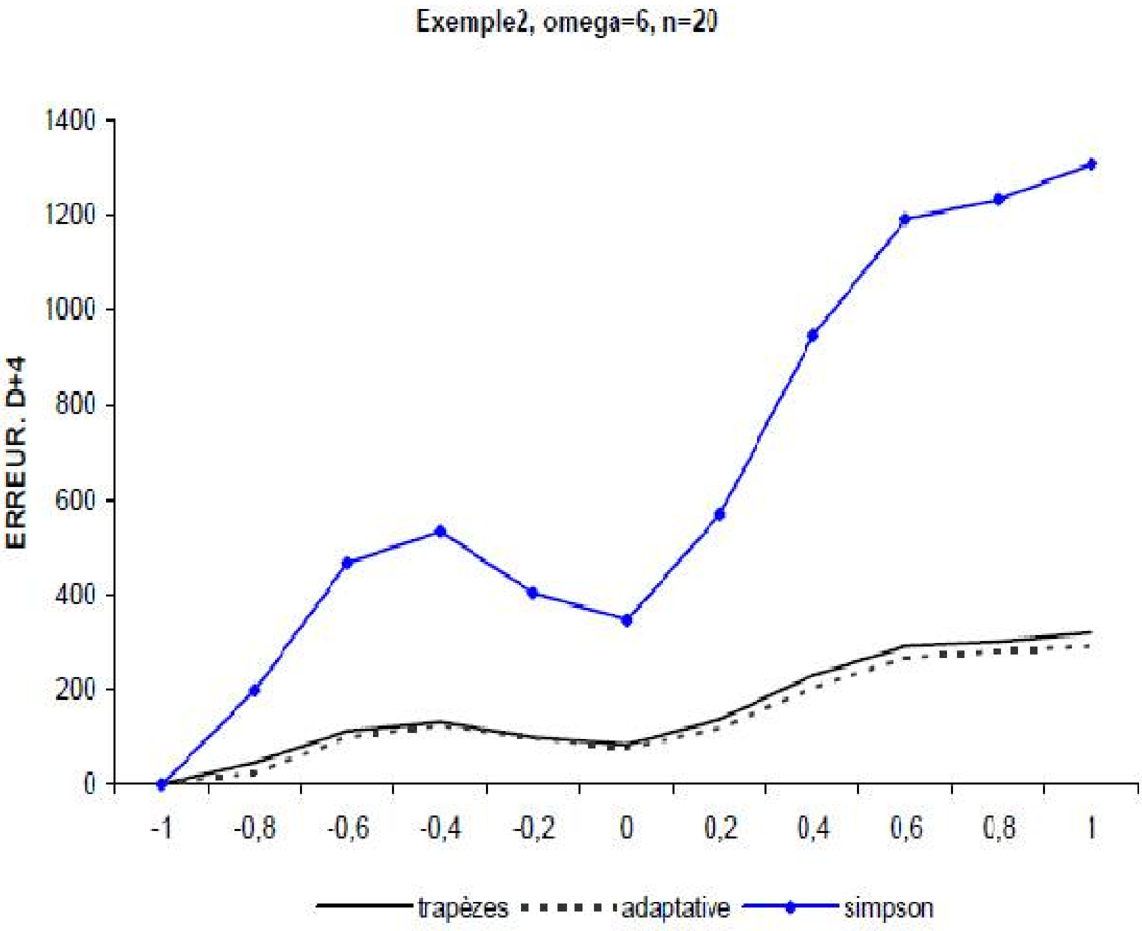


Schéma 2. Exemple 2

مثال 3: نعتبر المعادلة معرفة كما يلي:

$$\varphi(x) = -\frac{x^6}{30} + x^4 - \frac{x}{5} - \frac{1}{6} + \int_{-1}^{x}(x-t)\varphi(t)dt \qquad (90)$$

الحل التام هذه المعادلة: $\varphi^*(x) = x^4$

من هذا المثال، نتحصل على النتائج الموضحة في التخطيطي التالي:

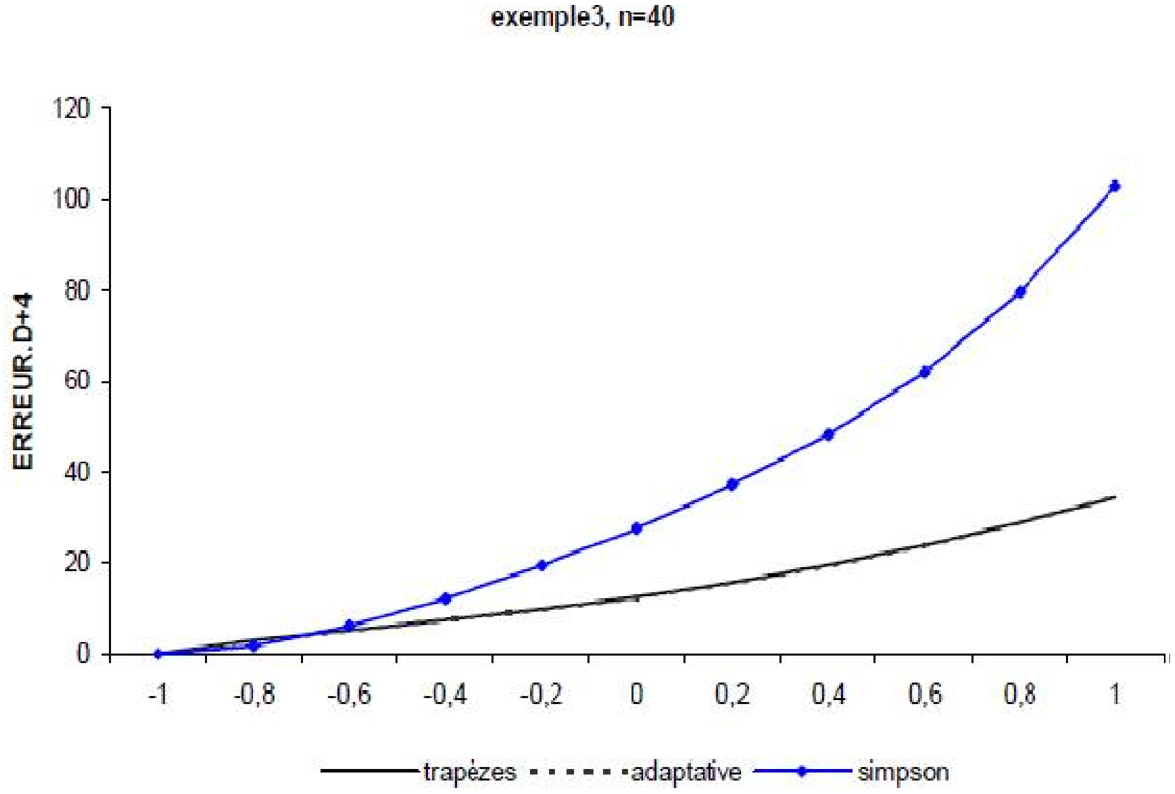


Schéma 3. Exemple 3

مثال 4: نعتبر المعادلة الأتية:

$$\varphi(x) = e^{xw} + \frac{(x+1)}{we^{w}} - \frac{(e^{wx} - e^{-w})}{w^2} + \int_{-1}^{x}(x-t)\varphi(t)dt \qquad (91)$$

الحل التام هذه المعادلة: $\varphi^*(x) = e^{wx}$

من هذا المثال، نتحصل على النتائج الموضحة في التخطيطي التالي:

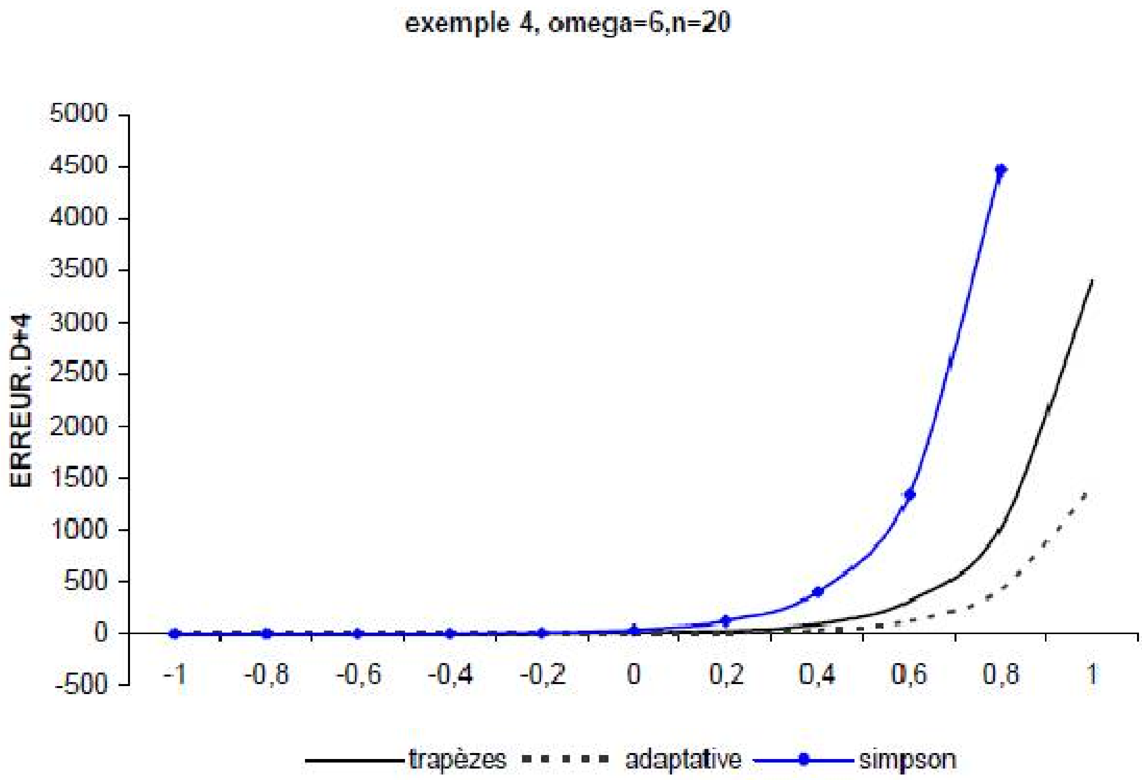


Schéma 4. Exemple 4

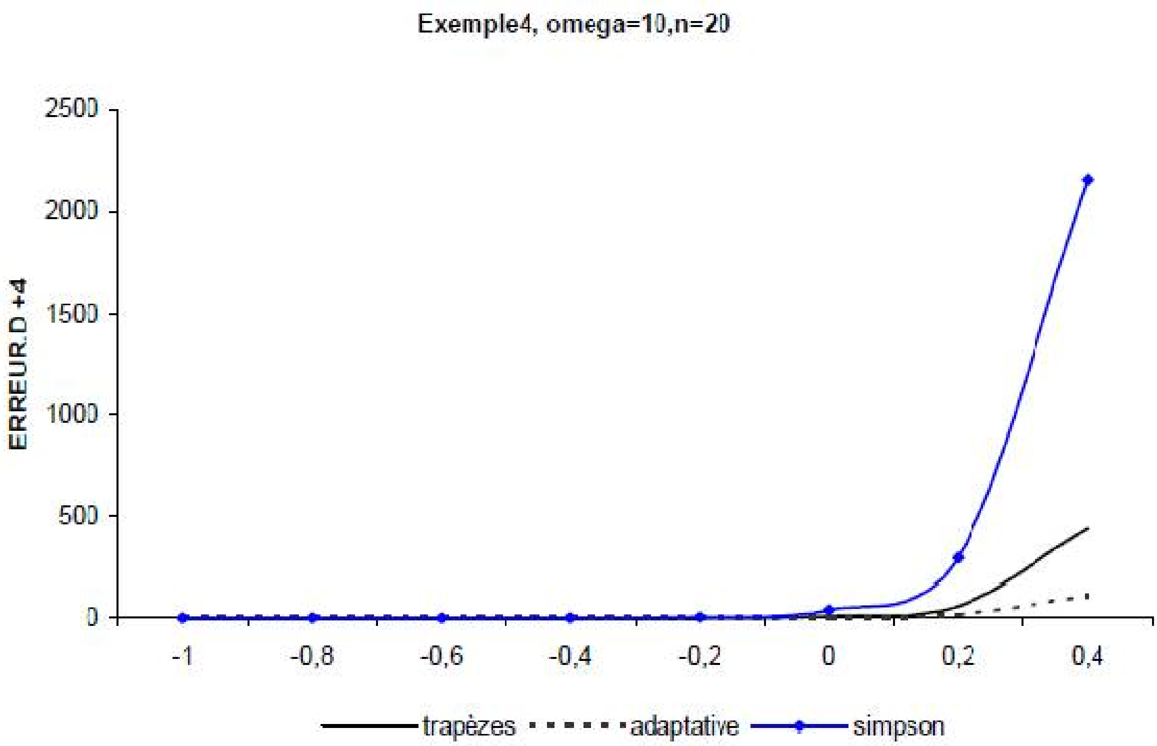


Schéma 5. Exemple 4

III.2. التطبيقات الخاصة بمعادلة فريد هولم:

مثال1: لتكن المعادلة الاتية:

$$\varphi(x) = e^{-10(x-0.5)^2} + \int_0^1 (x-0.5)(t-0.5)\varphi(t)dt \qquad (92)$$

الحل التام هو الدالة : $\varphi^*(x) = e^{-10(x-0.5)^2}$

و بالنسبة لتجزئة ذات $N = 40$ بعد التكرار 4 نتحصل على النتائج الاتية:

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$e\times D+4$	2.141	1.606	1.070	0.535	0.000	0.535	1.070	1.606	1.141	2.670

الجدول (3) يوضح نتائج المثال (5)

مثال2: لتكن المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) - \int_0^1 log|x-t|\varphi(t)dt = g(x) \qquad (93)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 10 ، x \in [0, 0.2] \\ 100x - 10، x \in [0.2, 0.3] \\ 20، x \in [0.3, 0.5] \\ -70x + 55، x \in [0.5, 0.6] \\ 13، x \in [0.6, 1] \end{cases}$$

		C	Erreur
40	0.9	4	0.3393D-02
40	0.5	4	0.6364D-02
40	0.1	4	0.6364D-02
40	0.9	10	0.3393D-02
40	0.5	10	0.6364D-02
40	0.1	10	0.6364D-02

مثال3: لتكن المعادلة التكاملية:

$$\varphi(x) - \int_0^1 |x-t|^{-\alpha}\varphi(t)dt = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+2x)\sqrt{1-x} \qquad (94)$$

حيث ان الحل التام هو $\varphi(x) = x$ و $\alpha = \frac{1}{2}$

		C	Erreur
5	0.9	4	0.2503 D- 13
5	0.5	4	0.2646 D- 13
5	0.1	4	0.2297 D- 13
5	0.9	10	0.2817 D- 13
5	0.5	10	0.2687 D- 13
5	0.1	10	0.2027 D- 13

الـــــــمــلاحـــــــق

ثانياً: قاعدة سمبسون Simpson's rule

في هذه القاعدة تُقسم الفترة $[a,b]$ إلىٰ عدد زوجي من الفترات الجزئية المتساوية أي أنّ n عدد زوجي ونص قاعدة سمبسون :

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\{\ f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots+4f(a+(n-1)h)+f(b)\ \}$$

مثال (٢) جد قيمة التكامل ادناه باستعمال قاعدة سمبسون عندما $n=6$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \cong \frac{1/6}{3}\Big\{\ f(0)+4f\left(0+\frac{1}{6}\right)+2f\left(0+\frac{2}{6}\right)$$
$$+4f\left(0+\frac{3}{6}\right)+2f\left(0+\frac{4}{6}\right)+4f\left(0+\frac{5}{6}\right)+f(1)\ \Big\}$$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \cong \frac{1}{18}\left\{e^{\sqrt{0}}+4e^{\sqrt{\frac{1}{6}}}+2e^{\sqrt{\frac{1}{3}}}+4e^{\sqrt{\frac{1}{2}}}+2e^{\sqrt{\frac{2}{3}}}+4e^{\sqrt{\frac{5}{6}}}+e^{\sqrt{1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{18}(1+4\times\ 1.5042+2\times\ 1.7813+4\times\ 2.0281+2\times\ 2.2626+4\times 2.4915$$
$$+\ \ 2.7183)$$
$$=\ 1.9945$$

مثال (٣) جد قيمة التكامل ادناه باستعمال

(a) قاعدة شبه المنحرف عندما $n=5$

(b) قاعدة سمبسون عندما $n=6$

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$$

$$(a)\qquad h=\frac{\frac{\pi^2}{4}-0}{5}=\frac{\pi^2}{20}$$

الطرق العددية لحساب التكاملات المحددة

Numerical methods for evaluating Definite integrals

هناك عدة طرق عددية لإيجاد القيمة التقريبية للتكاملات المحددة نعتمد عليها في الحالات :

١. عند استحالة إيجاد القيمة المضبوطة للتكامل كالتكامل المحدد $\int_{1}^{2} e^{x^3} dx$

٢. عندما تكون عملية إيجاد القيمة المضبوطة للتكامل ممكنة ولكن بمشقة لانّ الدالة قد تكون معقدة وتحتاج إلىٰ زمن طويل لإيجاد قيمة التكامل كالتكامل المحدد $\int_{0}^{10} \frac{dx}{9+x^4}$

٣. قد تكون مسألتنا هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم (أي أنّ الدالّة معرّفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هو الحال عند تحليل نتائج التجارب .

ومن هذه الطرق :

أولاً : قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal rule

لحساب قيمة التكامل المحدد $\int_{a}^{b} f(x)dx$ نقسم الفترة $[a,b]$ إلىٰ n من الفترات الجزئية المتساوية الطول فيكون طول كل فترة $h=\frac{b-a}{n}$ فتكون قاعدة شبه المنحرف كالآتي :

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \frac{h}{2}\{\ f(\mathrm{a})+2f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots+2f(a+(n-1)h)+f(b)\ \}}$$

مثال (١) جد قيمة التكامل ادناه باستعمال قاعدة شبه المنحرف عندما $n=4$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx \cong \frac{1}{2}(\ f(0)+2f(0+1)+2f(0+2)+2f(0+3)+f(4)\ )$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{0}+2\sqrt{1}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{4})=\frac{1}{2}(4+2\times 1.4142+2\times 1.7321)=5.1463$$

التكامل العددي numerical integrals

١/ طريقة شبه المنحرف trapezoidal method

لتكن f دالة معرفة على الفترة [a,b] ونريد ان نقدر قيمة التكامل لهذه الدالة على الفترة [a,b] .

سوف نستخدم صيغة نيوتن التقدمية ونكاملها على الفترة [a,b] حيث h=(b-a)/n بالشكل التالي

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx = h\int_0^1 \left[f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\ \Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\ \Delta^3 f_0\ \ldots\ldots \right] dm$$

$$= h\left[mf_0 + \frac{m^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{6}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots\ldots \right]$$

اي انه اذا اخذنا b=1 , a=0 يكون

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\ \left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \left(\frac{1}{12}\right)\Delta^2 f_0 - \left(\frac{1}{24}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots\ldots \right]$$

في المتسلسلة الاخيرة اذا اهملنا الحدود في الفروقات الثانية وما بعدها نحصل على الصيغة التالية :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\ [f_0 + f_1]$$

وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي .

ان قيمة خطا البتر فيها يساوي

$$T = \frac{-h}{12}\ \Delta^2 f_0 + \cdots\ldots\ldots = \frac{-h^3}{12}\ f''(\theta),\ \ \theta \in (x_0\,, x_1\ )$$

واعتماده على المشتقة للدالة f يعني ان طريقة شبه المنحرف تعطي نتيجة خالية من خطا البتر عندما تكون الدالة f عبارة عن متعددة حدود بدرجة 1 او اقل .

عند تعميم الصيغة السابقة على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ نحصل عل

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\ [f_{i-1} + f_i\ ]$$

و بذلك تصبح الصيغة بالشكل التالي:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f_{i-1} + f_i\,] = \frac{h}{2}\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots \dots \dots + f_n)$$

مثال : استخدم صيغة شبه المنحرف لايجاد قيمة التكامل للدالة f(x)=$\sqrt{x}$ حيث a=1 and b= 1.30
بحيث ان h=0.05

X=1 , 1.5 , 1.10 ,1.15 ,1.20 ,1.25 ,1.30

F(x)= 1 , 1.02470, 1.04881,1.07238,1.09544, 1.11803, 1.14017

$$\int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\, dx = \frac{0.05}{2}\,[1 + 2(1.02470) + 2(1.04881) + \cdots . +1.14017] = 0.32147$$

مثال: استخدم صيغة شبه المنحرف لحساب التكاملات الاتية:

$$1 - \int_{0}^{1} x^{2}\, dx \quad , \quad n = 4$$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$ dx , n=3

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx \cong \frac{\pi^2}{40}\left(\sin 0 + 2\sin\sqrt{0+\frac{\pi^2}{20}} + 2\sin\sqrt{0+\frac{2\pi^2}{20}} + 2\sin\sqrt{0+\frac{3\pi^2}{20}}\right.$$

الفضاء الشعاعي الناظمي

تعريف :

نسمي فضاءا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$ حيث X فضاء شعاعي على الحقل K ، حيث K أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ، و $\|.\|$ تطبيق من X نحو $\mathbb{R}_+$ يحقق الشروط التالية:

$$X \to \mathbb{R}_+$$

$$x \to \|x\|$$

- $0 = \|x\| \Leftrightarrow x = 0$ ، $\forall x \in X$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ، $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ، $\forall x \in X$
- $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$ (المتباينة المثلثية) $\forall x, y \in X$.

الرمز $\|.\|$ يسمى النظيم، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

النظيم الأعظمي :

1. $\|x\|_\infty = max_I |x_i|_{1\leq i\leq n}$
2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
3. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

النظيم المصفوفي = النظيم الشعاعي زائد

$$A\,.\,B \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \|A * B\| \leq \|A\|\|B\|$$

1. $\|A_C\| = max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ نظيم العمود
2. $\|A_R\| = max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ نظيم السطر
3. $\|A_T\| = n \times max_{1\leq ij\leq n} |a_{ij}|$ النظيم الكلي
4. $\|A_F\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}$

مثال :
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. $\|A_C\| = \max_{1\le j\le n}(13,3,14) = 14$

2. $\|A_R\| = \max_{1\le i\le n}(5,10,15) = 15$

3. $\|A_T\| = 3 \times \max_{1\le ij\le n}|a_{ij}| = 38 = 24$

4. $\|A_F\| = \sqrt{17+38+101} = \sqrt{156}$

نقول أن نظيم مصفوفي مع نظيم شعاعي إذا

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \|A\,x\| \le \|A\|\|x\|$$

المراجع والمصادر

● **المراجع و المصادر باللغة العربية**

[1] أ . كولموغوروف ، فومين ، في نظرية التوابع و في التحليل التابعي ـ تعريب أبو بكر خالد سعد الله د . م . ج 1987.

● **المراجع و المصادر باللغة الفرنسة**

[2] J.L. Massea ,J.J .Schaffer; Linear Differenti al Equations and Functions Spqces , NeW YorK,1966.

[3] Daniel Lignon ,Françoise Mazat G as tarriet et Jean-Louis Poss.:Méthodes numériques et géométrie, ENSAM,2002 66

[4] Francis ,Hirsch et Gilles ,Lacombe. Elémentsd. Analyse fonctionnelle, deuxième édition, Dunoud, Paris,1999

● **المراجع و المصادر بالانجليزية**

[5] Anna mar iaPalamara Or si: Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels, Mathematics of computation, Italy, Mathematics of Computation, July 1996 , p1201-1212.

[6] M . A. Abdou On the solution of linear and nonlinear integral equation, Applied Mathematics and Computation146(2003)857-871.

[7]Beni . Neta and Paul Nelson. Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, Texas79409,Lubbock, 1984.

[8] Beni. Neta. Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of th second kind, Part I. Regular kernels, Applied Math ematcs and Computation,21,1987,171-184.

[9] Beni . Neta. Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, Part II. Singular kernels, A.Gera soulis and R. Vichnev et sky, Eds,1984 ,pp.68-72

[10]J. Bana´s and K .Sadarangani. Solvability of Volterra Stieltjes operator integral equation sand their applications, Computers and Mathematics with Applications41 (2001)1535-1544.

[11] D .Clark. Generalization of an in equality of G ronw all Reid, J. Approx. The ory, 1989

[12]Jan Mar the d al Rasmussen. Compactl in ear operators and Krylov subs pace methods, Kgs.Lyngby,February,2001 http://www.imm.dtu.dk/jmr

[13]Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique et équations di érentielles, Presses Uni vers itaires de Grenoble,1994.

[14]Joshua H. Gordis and Beni, Neta. Anad aptive method for the numerical solution of Volterra integral equations, Nava lPostgra duate School,Montrey,CA93943 http://www.math.nps.navy.mil/bneta.

[15]Jacques ,Rappaz et Marco, Picasso. Introduction àl. analyse numérique, Press polyte chniques et Universitaires Romandes, Lausanne,1998.

[16] M .Krasnov ,A. Kisselev G. Makarenko:Equations integrals problems etexer-cices, EditionMIR,Moscou,1977.

[17] Kress ,Rainer.: Linear integral equations, Second edition ,Springer ,Göttingen, October1998

[18]W. Mydlarczy k. A nonlinear Abel equation on the whole line, Nonlinear Analysis 45(2001)273-279,Poland,1999.

الملخص:

في هذه البحث نهتم بالحلول العددية لبعض المعادلات التكاملية نظرا لاستعمالها الواسع في عدة مجالات منها الفيزياء والهندسة مثل الكهرباء الساكنة، ومشاكل النقل للجسيمات في الفيزياء الفلكية ونظرية المفاعلات.

و بعد تصنيف هذه المعادلات التكاملية قمنا باختبار بعض الطرق العددية للمعادلات المشار اليها. هذه الطرق هي :شبه المنحرف وسمبسون، طريقة التكيف المعادلات التكاملية لفولتيرا - فريد هولم.

بعض الأمثلة نفذت باستخدام هذه الطرق العددية لحل معادلة فولتيرا – فريد هولم التكاملية من النوع الثاني.

Summary:

In this research care about numerical solutions of integral equations given some broad for use in several areas, including physics and engineering , such as static electricity, and transport problems in particle astrophysics and theoretical reactors.

After classification of these integral equations We tested some numerical methods for equations referred to . These methods are: trapezoidal and Simpson , a way to adapt to Volterra integral equations - Fred Holm .

Some examples are carried out using these numerical methods to solve the Volterra equation - Fred Holm integral type II .

Résumé :

Dans cette recherche, les soins sur les solutions numériques des équations intégrales donné une certaine large pour une utilisation dans plusieurs domaines , y compris la physique et de l'ingénierie , tels que l'électricité statique , et les problèmes de transport dans l'astrophysique des particules et des réacteurs théoriques .

Après classification de ces équations intégrales Nous avons testé quelques méthodes numériques pour les équations visées . Ces méthodes sont : trapézoïdale et Simpson , un moyen d' adapter aux équations intégrales de Volterra - Fred Holm .

Quelques exemples sont réalisés à l'aide de ces méthodes numériques pour résoudre l'équation de Volterra - Fred Holm intégrale de type II .