

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du
DIPLÔME DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et Statistique

Présenté par :

MECHERI Khadidja

Application de la Méthodologie de
Box-Jenkins sur la série du nombre des
séances d'hémodialyse

Soutenu publiquement le : mai 2016

Devant le jury composé de :

Mr. BOUSAAD Abdelmalek. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
M ^{elle} . SAIDANE Hadda. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
M ^{elle} . ARBIA Hanane. Université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	i
Table des figures	ii
Notations et abreviations	iii
Introduction	1
1 L'établissement public hospitalier d'Adrar	2
1.1 Définition du centre Hospitalier d'Adrar	2
1.2 Les principaux services de centre hospitalier d'Adrar	2
1.3 Répartition administratif de centre hospitalier d'Adrar et ses services	3
1.4 Explication des services organisateurs de l'hôpital	4
1.4.1 La direction régional de gestion des utiles	4
1.4.2 Service économique	4
1.4.3 Services sanitaire	5
1.4.4 Services archives	5
1.5 Informations sur l'hémodialyse	5
2 Préliminaires	7
2.1 Série chronologique	7
2.1.1 Exemples des séries temporelles	7
2.2 Composantes d'une série temporelle	9
2.3 Test de détection de la saisonnalité et de la tendance	9
2.3.1 Analyse de la variance et test de Fisher	10
2.4 Notion d'opérateur de retard L et de différenciation Δ	13
2.4.1 Propriétés de l'opérateur retard	14
2.4.2 Inversion d'opérateurs polynomial	14
2.5 Processus bruit blanc	15
2.6 Stationnarité	16

2.7	Non stationnarité	16
2.8	Théorème de Wold	19
2.9	Série linéaire	20
2.10	Autocovariance et Autocorrélation	20
2.11	La fonction d'autocorrélation partielle	21
2.12	Graphiques pour les séries temporelles	22
3	Les modèles d'une série chronologique	23
3.1	Modèle autorégressifs d'ordre p	23
3.1.1	La stationnarité	24
3.1.2	Autocorrélation d'un $AR(p)$	24
3.1.3	Estimation	26
3.1.4	Fonction d'autocorrélation partielle $\tau(k)$	27
3.2	Modèle moyenne mobile d'ordre q	30
3.2.1	Autocorrélations d'un $MA(q)$	31
3.2.2	Conditions de stationnarité et d'inversibilité pour $AR(p)$ et $MA(q)$	34
3.3	Modèle autorégressif moyenne mobile $ARMA(p, q)$	35
3.3.1	La stationnarité	36
3.3.2	Autocorrélation simple et partielle d'un $ARMA(p, q)$	36
3.4	Modèle Autorégressif moyenne mobile intégré $ARIMA(p, d, q)$	38
3.5	Méthode de Box et Jenkins	39
3.5.1	Identification du modèle	39
3.5.2	Estimation des paramètres d'un modèle $ARIMA$	42
3.5.3	Validation du modèle	43
3.5.4	La prévision	45
4	Application de la méthode de Box-Jenkins	47
4.1	Etude de la stationnarité	48
4.2	Stationnarisation de la série	52
4.2.1	Modélisation de la série ddialyse	53
4.2.2	Prévision	62
	Conclusion générale	63
	Bibliographie	64

Dédicace

C'est avec un très grand plaisir que je dédie ce modeste travail aux personnes les plus chères au monde :

A mes chers parents, ma première maîtresse, ma chère mère et mon cher père Tahar qui m'ont permis de continuer mes études dans les meilleures conditions et qui m'ont appris à ne jamais baisser les bras.

*Je dédie aussi cette modeste réalisation à :
Mes très chères soeurs Somia, Zineb, Hiba, et la petite Aya.
Mon petite ange, mon cher frère Mohamed Al Amine.*

Je n'oublie pas ma grand-mère Nadjia, mes tantes et ses enfants, à mes oncles et à toute la famille MECHERI.

A mon encadreur ARBIA Hanane, en espérant qu'elle trouve dans ce travail le témoignage de ma profonde gratitude.

A tout mes enseignants de l'université d'Adrar et de l'université de Kasdi Merbah sans exception.

A tous mes collègues surtout du lycée Masrouk et à mes élèves.

A tout ceux qui m'aiment, m'aident, m'encouragent, m'ont aidé et qui m'aident toujours pour continuer sur la bonne voie.

Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout *ALLAH* qui m'a donné le courage, la volonté et la patience pour continuer mes études et pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma promotrice *ARBIA Hanane* sous sa direction j'ai eu le plaisir de travailler grâce à ces conseils, ses critiques constructives.

Je tiens à remercier, particulièrement, *Mr. GASMI Laid* de l'université d'Adrar qui n'a jamais cessé de me soutenir, pour l'aide qu'il m'a procurée et pour ses précieux conseils.

Un grand merci à *Mr. MEDIANI*, et à *Mr. KOHILI Mohamed* de l'université d'Adrar pour le temps et l'aide qu'ils m'ont procuré.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à *M^{elle}. SAIDANE Hadda* et *Mr. Boussaad Abdelmalik* qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Enfin, je remercie tous ceux, qui de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce mémoire.

Table des figures

1.1	Organigramme de l'hôpital d'Adrar	6
2.1	Population française en millions d'habitants	8
2.2	Population des Etats Unis en millions d'habitants	8
3.1	Stratégie simplifiée des tests de racine unitaire.	41
4.1	Représentation graphique de la série brute	48
4.2	Représentation graphique de la série stationnaire	54
4.3	Autocorrélogramme des résidus du modèle MA(1)	58
4.4	Autocorrélogramme des résidus du modèle ARMA(2,1)	59
4.5	Autocorrélogramme des résidus du modèle ARMA(5,1)	60
4.6	Normalité des résidus du modèle MA(1)	61

Notations et abriviations

ADF	Test de Dickey Fuller Augmenté
AIC	Critère d'information d'Akaike.
ARIMA	Autorégressif moyenne mobile intégré
ARMA	Autorégressif moyenne mobile
BB	Bruit blanc
BIC	Critère d'information bayésien
BJ	Quantité de Jarque-Bera
Cov	Covariance
Ds	Non stationnarité stochastique
E	Espérance
FAC	Fonction d'autocorrélation
FACP	Fonction d'autocorrélation partielle
MA	Moyenne mobile
MAE	Erreur absolue moyenne
MAPE	Ecart absolu moyen en pourcentage
MSE	Erreur quadratique moyenne
RMSE	Racine carrée de l'erreur quadratique moyenne
TS	Non stationnarité déterministe

Introduction

La théorie des séries temporelles est appliquée de nos jours dans des domaines aussi variés que l'économétrie, la médecine...etc. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un phénomène, dans le but de décrire, expliquer, puis prévoir ce phénomène dans le futur.

Les séries temporelles sont considérées à tort comme étant une branche exclusive de l'économétrie, cette dernière est une discipline qui est relativement jeune alors que les séries temporelles ont été utilisées bien avant, par exemple : en astronomie et en météorologie.

Ce mémoire est partagé en deux parties ; la première est constituée de trois chapitres, le premier expose l'établissement public hospitalier d'Adrar, le second est consacré pour les préliminaires où nous mentionnons quelques rappels sur les séries temporelles et leurs caractéristiques, outils les très importants, et dans le troisième chapitre, nous présentons différentes classes de modèles : AR , MA , $ARMA$ et $ARIMA$ en étudiant leurs propriétés (la stationnarité, les fonctions d'autocorrélation simples et partielles,...) et la deuxième partie de ce chapitre traite la méthode de Box-Jenkins et leurs quatre étapes, notons que l'ouvrage de Box-Jenkins "Time series analysis, forecasting and control" publié en 1970 a proposé une démarche de prévision pour les séries univariées, fondée sur l'utilisation de modèles $ARIMA$.

Dans la deuxième partie, nous avons vu une application de la méthodologie de Box-Jenkins sur des données réelles pour obtenir le meilleur modèle qui représente cette série afin de faire la prévision.

Chapitre 1

L'établissement public hospitalier d'Adrar

1.1 Définition du centre Hospitalier d'Adrar

L'hôpital "Ben Sina" à Adrar est construite le 12/12/1975. Il est Situé au centre de la wilaya, c'est une institution public qui prend en charge les personnes selon leurs besoins : urgence, analyses, les soins préventifs, sensibilisation médicale.

L'hôpital est à la disponibilité de 102160 personnes, ayant un espace de 49860 km^2 . Il subvient au besoin de 3 daïra, 8 communes.

L'hôpital "Ben Sina" ayant un personnel de 729 personnes : 6 personnes responsable, 50 personnes administratifs, 226 agents administratifs, 25 médecins spécialistes, 70 médecins généralistes, 5 psycologues, 12 dentistes, 408 para-médical, 3 pharmaciens, 22 agents de sécurités.

Il se compose de 12 départements et 27 unités interieurs et exterieurs. Il contient 284 lits répartis selon les besoins des services : Services médical Hommes, Services médical Femmes, Services médical chirurgical, Services médical des Urgences, Services médical des Analyses, Services médical Pediatrie et maternel, Services médical de maternité, services médical d'hémodialyse.

1.2 Les principaux services de centre hospitalier d'Adrar

L'hôpital d'Adrar contient quatre blocs principaux :

a) Bloc des soins :

- Offre des soins d'urgences.
- Les soins préventifs.
- Les visites général.
- b) Centre générales et spéciales :
 - Consultations généraux et spécialisés.
 - Radio et analyses.
 - Soins préventifs.
- c) Polyclinique multiservices :
 - Nouveaux équipement au services des citoyens.
 - Les soins préventifs et principales.
 - Prise en charge totale au service de pédiatrie.
 - Opérations dentaires.
 - Radio et analyses.
 - Entretien général.
- d) Centre de protection maternel et de pédiatrie :
 - Protection et suivi des mères enceintes.
 - Suivi des vaccins d'enfants.

1.3 Répartition administratif de centre hospitalier d'Adrar et ses services

Il est composé de trois unités :

1. Etablissement d'activités sanitaires : Dirige toutes centres médicales et organise les programmes de sensibilisation médicales pour l'entretien.
2. Etablissement économique : Dirige l'équipement de l'hospital comme la nourriture, les machines médicales, étude de la situation financière de l'établissement selon les services économiques. En plus de la gestion des salaires et budget de toutes l'équipement.
3. Service personnel (employeurs) : Prend en charge les employeurs et leurs conditions de travail.

Ses taches prend en charge toutes les besoin des habitants :

- Organise et prévoit les soins.
- Applique le programme préventif.

- Applique les programmes national et régional de santé pour les habitants.
- Joue un rôle important dans le développement environnemental, la protection dans les service d'hygiène et des fleaux sociaux.

1.4 Explication des services organisateurs de l'hôpital

L'hôpital se compose de quatre services : La direction régional de la gestion des utiles médicaux, service économique, service sanitaire, service des archives.

1.4.1 La direction régional de gestion des utiles

Se compose de :

- a) Bureau gestionnaire de ressource humaine : il s'intéresse au service des employeurs des leurs recrutement, ses droits, ses obligations, sa sécurité sociale pendant son travail jusqu'à la fin de son recrutement.
- b) Bureau d'étude et de comptabilité : Soins complet du patient, compris toutes exigence de confort.

1.4.2 Service économique

Il définit un planning annuel des travaux générales; entretiens, équipement, materiel, construction et assurances globales.

Ce service se compose de neuf bureaux principeux :

- *Bureau de comptabilité et finance* : Enregistre toute entrée et sortie a caractère matériel ou financière telle que les salaires.
- *Bureau comptabilité et de convention* : S'occupe d'imprimer les bons de commandes pour l'ensemble des services, ainsi que la situation financière mensuel, trimestriel et annuel.
- *Bureau financier* : S'occupe de toute ce qu'est relatif au finance.
- *Bureau d'achat* : Se charge des besoins financiers de l'entreprise.
- *Bureau de la gestion des magasins ou moyens généraux* : Suivi des atelier de couture et buandrie.
- *La cuisine* : S'occupe de la restauration équilibrée des patients et des personnels.
- *Bureau de budget et comptabilité* : C'est la gestion de toutes dépense et achats, préparation des budgets annuel chaque fin d'année.

1.4.3 Services sanitaire

C'est la direction principale de toutes les services, il contient trois bureaux :

- *Bureau de reception des malades* : Il établis une fiche technique en indiquant toutes informations concernant le patient jusqu'à sa sortie ou décès.
- *Bureau de subdivisions sanitaire et prevention* : C'est un service d'accompagnement, de suivi et de coordination avec toutes service sanitaire constituée en huit secteurs : Adrar, Bouda, Temantit, Tsabit, Adgha, Fenoughil, Tamest.
- *Bureau des services hospitaliers* : C'est un bureau qui s'occupe des tout services et divisions relatif aux malades et contient dix services divisionnaire (urgence, chirurgie, médecins générales, la médecine hospitaliaire des internes, bloc opératoire, labo, maternité, pharmacie, pédiatrie, radio...).

1.4.4 Services archives

S'intéresse a conservation et organisation des dossiers. Archives de la direction, subdivision, les services et les bureaux au niveau du secteur sanitaire de toute la Wilaya.

1.5 Informations sur l'hémodialyse

L'insuffisance rénale : on parle de l'insuffisance rénale lorsque 50% des néphrons sont détruits. Les conséquences sont :

1. Signes Biologiques : Augmentation dans le sang : Urée + créatinine, potassium, sodium, phosphore et diminution de : calcium, globules rouges (anémie).
2. Signes cliniques : Troubles cardiaques, hypertension artérielle, diminution des performances physiques, intellectuelles.

Lorsque les reins ne fonctionnent plus correctement, ils ne peuvent plus remplir leurs fonctions. Une des fonctions des reins est l'épuration. Les reins débarrassent des déchets et des éléments chimiques dont l'organisme n'avez pas besoin.

En hémodialyse, un rein artificiel (hémodialyseur) est utilise pour éliminer les déchets ainsi que les éléments chimiques et le liquide en excès dans le sang.

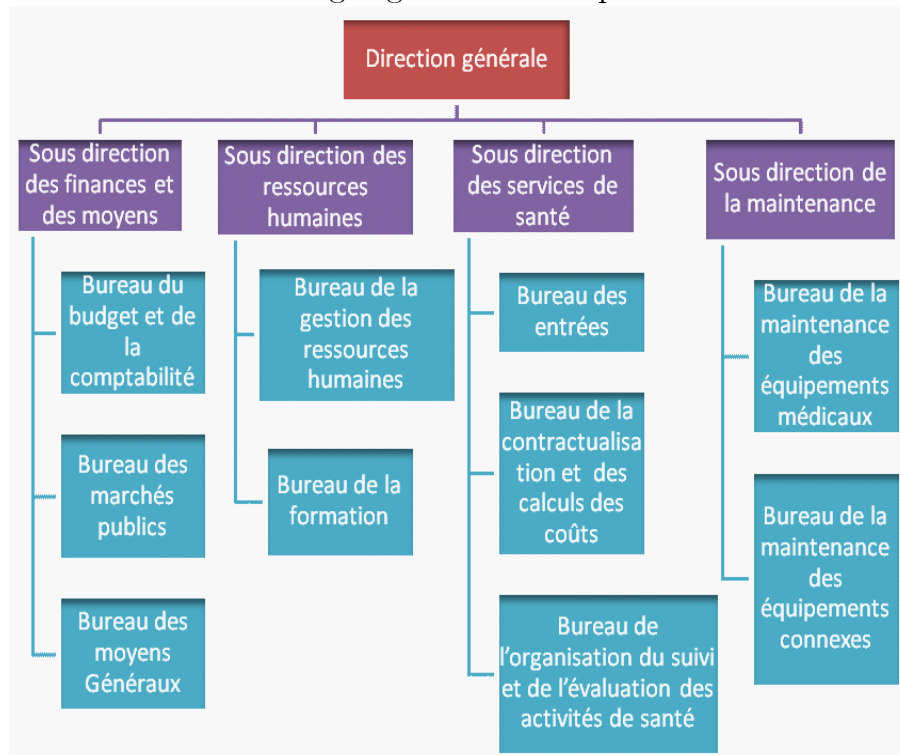
Définition 1.5.1 *L'hémodialyse est le traitement extra-corporel du sang à l'aide d'un rein artificiel. Elle consiste en un échange entre le sang du patient et une solution voisine du plasma. cette technique met en oeuvre :*

1. Une circulation extra corporelle (lignes à sang).
2. Une machine de dialyse (générateur).
3. Un dialyseur ou rein artificiel.

Le principe est de mettre en contact le sang du patient avec un liquide de composition déterminée (le dialysat) à travers une membrane semi perméable (rein artificiel), afin de retirer l'eau en excès et les substances de petites tailles (urée, phosphore,...).

La séance d'hémodialyse est une séance varie de 3 à 5 heures et cette séance a lieu en moyenne 3 fois/semaine.

FIG. 1.1 – Organigramme de l'hôpital d'Adrar



Chapitre 2

Préliminaires

On donne dans ce qui suit certaines notations et définitions dont on aura besoin dans les chapitres suivants.

2.1 Série chronologique

L'étude des séries temporelles, correspond à l'analyse statistique d'observations régulièrement espacées dans le temps. Elles ont été utilisées en divers domaines : en astronomie, en météorologie, en théorie du signal, ...etc [9], [13], [23].

Définition 2.1.1 *La série chronologique est un ensemble des observations d'une variable statistique faites à un intervalle régulier (année, trimestre, mois, jour,...).*

Alors une série chronologique est constituée par une suite ordonnée d'observations d'une grandeur du temps d'un même phénomène à des dates différentes (par exemple la température moyenne journalière en un lieu donné, le prix du baril de pétrole chaque jour,...). Les dates sont souvent équidistantes (séries mensuelles, trimestrielles ou annuelles) sauf dans quelques cas (par exemple les données journalières en économie ne sont pas toujours disponibles les jours non ouvrables). L'étude d'une série chronologique $\{X_t, t = 1, \dots, T\}$ consiste à dissocier les différents mouvements qui la composent et à l'analyser. La représentation graphique s'impose en début d'analyse de toute chronique afin de faire apparaître les éléments fondamentaux.

2.1.1 Exemples des séries temporelles

Nous allons voir quelques séries et considérer leurs chronogrammes.

Exemple 2.1.1 *Les populations de la France et des Etats-Unis, en millions d'habitants*

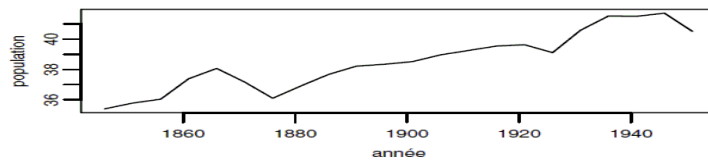


FIG. 2.1 – Population française en millions d'habitants

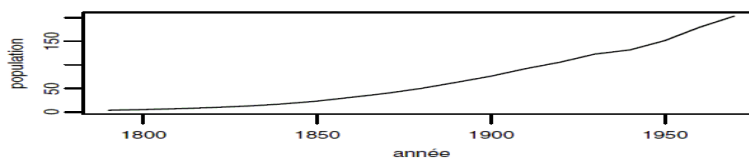


FIG. 2.2 – Population des Etats Unis en millions d'habitants

Les démographes peuvent-être intéressés par la prévision de la population à 10 ans, à 20 ans.

2.2 Composantes d'une série temporelle

Cette décomposition est fait en fonction des quatres éléments suivants [9], [17] :

- a. **Tendance** (T_t) : La tendance à long terme ou trend est le facteur représentant l'évolution à long terme d'un phénomène et traduit l'aspect générale de la série, par exemple : croissance de la consommation d'électricité, diminution de la population rurale. La tendance prend plusieurs forme :
 1. *Tendance linéaire* : $T_t = a + bt$.
 2. *Tendance quadratique* : $T_t = a + bt + ct^2$.
 3. *Tendance polynomiale d'ordre q* : $T_t = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_qt^q$.
 4. *Tendance logistique* : $T_t = \frac{c}{1+be^{-at}}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
- b. **Cycle** (C_t) : C'est une succession de mouvement persistant des variations de mouvement ascendant (période de prospérité) et de mouvement descendant (période de dépression). Pour de longues séries, un mouvement cyclique peut se superposer à la tendance.
- c. **Saisonnalité** (S_t) : Le facteur saisonnier, noté S_t , se répète à un intervalles de temps égaux avec une forme à peu près constante. Il peut être dû au rythme des saisons ou à des facteur humains. Si p désigne la période du mouvement saisonnier : $S_t = S_{t+p}$, le facteur saisonnier est totalement déterminé par p coefficients saisonniers. Il s'agit de la présence ou non d'un effet périodique.
- d. **Résidu** (ε_t) : Constitue la partie non expliquée par la tendance, le cycle ou la saisonnalité. Elle résultante de fluctuations irrégulières, en particulier accidentelles, dont le caractère est exceptionnel et imprévisible (catastrophes naturelles, grèves, guerres...) dues à des facteurs perturbateurs non permanents.

2.3 Test de détection de la saisonnalité et de la tendance

L'examen visuel du graphique ne permet pas toujours de déterminer avec certitude l'existence d'une saisonnalité [6].

2.3.1 Analyse de la variance et test de Fisher

Le test de Fisher à partir de l'analyse de la variance permet de pallier l'inconvénient précédent.

Soit

N : le nombre d'années, p le nombre d'observations (la périodicité) dans l'année (trimestre $p = 4$, mois $p = 12$, etc).

X_{ij} : la valeur de la chronique pour la $i^{\text{ème}}$ année ($i=1, \dots, N$) et la $j^{\text{ème}}$ période ($j=1, \dots, p$). Deux effets absents sont testés contre deux effets significativement présents :

1. Si l'effet période est significatif, la série est saisonnière.
2. Si l'effet année est significatif, la série est affectée d'une tendance.

Le déroulement du test est le suivant :

- a. Calcul de la variance totale du tableau. Soit S_T la somme totale des carrés :

$$S_T = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2,$$

avec $\bar{X}_{..} = \frac{1}{N \times p} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p X_{ij}$: moyenne générale de la chronique sur les $N \times p$ observations.

$$\bar{X}_{i.} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p X_{ij} : \text{moyenne de l'année } i.$$

$$\bar{X}_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} : \text{moyenne de la période } j.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S_T &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_i + \bar{X}_i - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..} - \bar{X}_{..} - \bar{X}_{..})^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p [(\bar{X}_i - \bar{X}_{..}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2 \\
 &= p \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2 + N \sum_{j=1}^p (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2 \\
 S_T &= S_A \text{ (année)} + S_p \text{ (période)} + S_R \text{ (résidus)}.
 \end{aligned}$$

Années \ périodes	1	.	.	.	j	.	.	.	p	Moyennes années
1	X_{11}				X_{1j}				X_{1p}	
.	.								.	
.	.								.	
i	X_{i1}	.	.	.	X_{ij}	.	.	.	X_{ip}	$\bar{X}_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p X_{ij}$
.	.									
.	.									
.	.									
N	X_{N1}	.	.	.	X_{Nj}	.	.	.	X_{Np}	
Moyennes périodes					$\bar{X}_{.j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij}$					$\bar{X}_{..} = \frac{1}{N \times p} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N X_{ij}$

TAB. 2.1 – Calculs des moyennes par année et par période

Somme des carrés	degré de liberté	désignation	variance
$S_p = N \sum_{j=1}^p (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2$	$p - 1$	variance périodes	$V_p = \frac{S_p}{p-1}$
$S_A = p \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2$	$N - 1$	variance année	$V_A = \frac{S_A}{N-1}$
$S_R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2$	$(p - 1)(N - 1)$	variance résidu	$V_R = \frac{S_R}{(p-1)(N-1)}$
S_T	$N \times p - 1$	variance totale	$V_T = \frac{S_T}{N \times p - 1}$

TAB. 2.2 – Analyse de la variance pour détecter une saisonnalité et/ou une tendance

Nous utilisons les résultats du tableau précédente pour effectuer l'analyse de la variance de la série. A partir de ce tableau, nous pouvons construire les tests d'hypothèses.

- b. Test de l'influence du facteur colonne (période, mois ou trimestre; H_0 : pas d'influence). Fisher empirique $F_c = \frac{V_p}{V_R}$ que l'on compare au Fisher lu dans la table : F_{V_1, V_2}^α à $V_1 = p - 1$ et $V_2 = (N - 1)(p - 1)$ degrés de liberté. Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu dans la table, on rejette l'hypothèse H_0 , la série est saisonnière.
- c. Test de l'influence du facteur ligne (année; H_0 : pas d'influence). Fisher empirique $F_c = \frac{V_A}{V_R}$ que l'on compare au Fisher lu dans la table : F_{V_3, V_2}^α à $V_3 = N - 1$ et $V_2 = (N - 1)(p - 1)$ degrés de liberté. Si le Fisher empirique est supérieur au Fisher lu, on rejette l'hypothèse H_0 , la série est donc affectée d'une tendance.

Exemple 2.3.1 *Test de détection de la saisonnalité et de la tendance à partir des données du tableau ($p = 4$ et $N = 3$)*

dates	T_1	T_2	T_3	T_4	\bar{X}_i
1994	1248	1392	1057	3159	1714
1995	891	1065	1118	2934	1502
1996	1138	1456	1224	3090	1727
$\bar{X}_{.j}$	1092.33	1304.33	1133	3061	$\bar{X}_{..}=1647.67$

TAB. 2.3 – Ventes trimestrielles

- a. Test de saisonnalité : $F_c = \frac{S_p/3}{S_R/6} = 237.14$ que l'on compare à $F_{3;6}^{0.05} = 4.76$. La série est donc saisonnière.
- b. Test de tendance : $F_c = \frac{S_A/2}{S_R/6} = 5.63$ que l'on compare à $F_{2;6}^{0.05} = 5.14$, l'hypothèse H_0 est rejetée ; la chronique est affectée d'une tendance.

2.4 Notion d'opérateur de retard L et de différenciation Δ

La manipulation pratique ou théorique des séries temporelles se trouve considérablement simplifiée par l'usage de l'opération retard (Lag operator). Dans l'analyse des séries temporelles, l'opérateur retard, noté L , est l'opérateur qui, à tout élément d'une série temporelle, associe l'observation précédente [16].

Définition 2.4.1 On appellera opérateur retard L , l'opérateur linéaire définie par :

$$L : X_t \rightarrow L(X_t) = LX_t = X_{t-1},$$

et opérateur avancé F , défini par :

$$F : X_t \rightarrow F(X_t) = FX_t = X_{t+1}.$$

Avec la convention : $L^0 = I$ (opérateur identité) et on notera que :

$$L^p X_t = X_{t-p}.$$

On a également :

$$\begin{aligned} L^q X_t &= X_{t-q} \text{ et } F^q X_t = X_{t+q}, \\ L^{-q} X_t &= F^q X_t = X_{t+q}. \end{aligned}$$

Définition 2.4.2 Notons Δ l'opérateur de différenciation défini par :

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \forall t \geq 2.$$

Définition 2.4.3 On peut définir l'opérateur linéaire de différenciation d'ordre k par la formule de récurrence :

$$\Delta^{(k)} X_t = \Delta(\Delta^{(k-1)} X_t).$$

L'opérateur retard simplifie grandement l'écriture des équation relatives aux séries. Il permet d'écrire une équation de récurrence comme un polynôme de l'opérateur retard appliqué à une séries.

2.4.1 Propriétés de l'opérateur retard

Examinons les propriétés de l'opérateur L :

1. $La = a$, l'opérateur d'une constante a est une constante.
2. $L^0 X_t = X_t$.
3. $(1 - L)^2 X_t \neq (1 - L^2) X_t$ en effet :

$$(1 - L)^2 X_t = (1 - 2L + L^2) X_t = X_t - 2X_{t-2} + X_{t-2} \neq X_t - X_{t-2}.$$

4. $(L^i + L^j) X_t = L^i X_t + L^j X_t = X_{t-i} + X_{t-j}$.
5. $L^i (L^j X_t) = L^i X_{t-j} = X_{t-i-j}$, de même $L^i (L^j X_t) = L^{i+j} X_t = X_{t-i-j}$.
6. $L^{-i} X_t = X_{t+i}$.
7. Si $|a| < 1$ la somme infinie $(1 + aL + a^2 L^2 + a^3 L^3 + \dots) X_t = \frac{X_t}{(1-aL)}$.

2.4.2 Inversion d'opérateurs polynomial

Considérons l'opérateur :

$$\Phi(L) = \sum_{i=0}^p \phi_i L^i = I + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p,$$

où les ϕ_i sont des nombres réels avec $\phi_0 = 1$. Nous avons besoin de définir l'inverse d'un tel opérateur. On a la décomposition :

$$\Phi(L) = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i L),$$

où $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_p^{-1}$ sont les racines du polynôme Φ . Un opérateur du type $1 - \lambda L$ est inversible si et seulement si $|\lambda| \neq 1$. On a plus précisément

$$(1 - \lambda L)^{-1} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i L^i & \text{si } |\lambda| < 1, \\ -\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^{-i} L^{-i} & \text{si } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Lorsque toutes les racines de Φ sont de module différent de 1, on a :

$$\Phi(L)^{-1} = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i L)^{-1}$$

Proposition 2.4.1 *L'opérateur $\Phi(L)$ est inversible si et seulement si toutes les racines de Φ ont un module différent de 1. Dans ce cas*

$$\Phi(L)^{-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j L^j,$$

Où $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < +\infty$. On a $\psi_j = 0$ pour tout $j < 0$.

2.5 Processus bruit blanc

Définition 2.5.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in I\}$ toutes définies sur (Ω, A, P) [23].*

I est un ensemble qui représentera \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .

Définition 2.5.2 *Le processus ε_t est un bruit blanc faible s'il existe σ^2 telle que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t) = 0 \text{ pour tout } t, \\ \text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \text{ pour tout } t, \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0 \text{ pour tout } t \text{ et } h \neq 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse d'indépendance des variables aux différentes dates permet toutefois de définir un bruit blanc fort.

Définition 2.5.3 *Le processus ε_t est un bruit blanc fort si*

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varepsilon_t) = 0 \text{ et } \text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \text{ pour tout } t, \\ L(\varepsilon_t) = L(\varepsilon_{t-h}) \text{ pour tout } t \text{ et } h, \\ \varepsilon_t \text{ et } \varepsilon_{t-h} \text{ sont indépendantes pour tout } t \text{ et pour tout } h \neq 0. \end{array} \right.$$

2.6 Stationnarité

La stationnarité joue un rôle central dans la théorie des séries chronologique. En statistique, deux notions sont généralement considérés : la première notion de stationnarité peut se définir de façon forte par une stabilité en loi du processus [9], [16].

Définition 2.6.1 *Un processus (X_t) est stationnaire au sens fort si pour tous $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tel que $t_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, n$ et $h \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité en loi :*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{L}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

Ainsi un processus aléatoire est strictement stationnaire si toutes ses caractéristiques, c'est-à-dire tous ses moments, sont invariants pour tout changement de l'origine du temps, cette notion revient à dire que la loi temporelle est invariante en temps.

Cette définition toutefois peut être affaiblie donc on dit que le processus est stationnaire au second ordre.

Définition 2.6.2 *Un processus (X_t) est stationnaire au second ordre si :*

1. Pour tout t , $E(X_t^2) < +\infty$.
2. Pour tout t , $E(X_t) = \mu$.
3. Pour tout t et pour tout h , $\gamma(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h})$, indépendante de t .

2.7 Non stationnarité

La classe des processus non stationnaire est relativement vaste, il existe différents types de non stationnarité, on présente deux classes des processus non stationnaires : les processus *TS* et *DS* [6].

Définition 2.7.1 *(X_t) est un processus non stationnaire de type TS s'il peut s'écrire sous la forme :*

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

où $f(t)$ est une fonction polynômiale du temps, linéaire ou non linéaire et (ε_t) est un processus stationnaire.

Le processus TS est le plus simple (et le plus répandu) est représenté par une fonction polynômiale de degré 1. Le processus TS porte alors le nom de linéaire et s'écrit :

$$X_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t.$$

Si ε_t est un bruit blanc (gaussien ou non), les caractéristiques de ces processus sont alors :

$$\begin{cases} E(X_t) = a_0 + a_1 t + E(\varepsilon_t) = a_0 + a_1 t, \\ Var(X_t) = 0 + Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, \\ cov(X_t, X_s) = 0 \text{ pour } t \neq s. \end{cases}$$

Ce processus TS est non stationnaire car $E(X_t)$ dépend du temps. La chronique retrouve son mouvement de long terme qui est ici la droite de la tendance.

Définition 2.7.2 (X_t) est un processus non stationnaire de type DS, ou intégré d'ordre d , noté $I(d)$, si la processus obtenu après " d " différenciation est stationnaire.

$$Z_t = (1 - L)^d X_t = \Delta^d X_t,$$

est stationnaire.

Donc, la définition des processus DS repose sur la présence des racines unitaires.

Définition 2.7.3 Les processus DS sont des processus que l'on peut rendre stationnaires par l'utilisation d'un filtre aux différences :

$$(1 - L)X_t = \beta + \varepsilon_t,$$

où ε_t est un processus stationnaire, β est une constante réelle.

Le processus de première ordre s'écrit :

$$(1 - L)X_t = \beta + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t.$$

La constante β dans le processus DS permet de définir deux processus différents :

1. $\beta = 0$: le processus DS est dit sans dérive, il s'écrit

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Comme ε_t est un bruit blanc. Pour étudier les caractéristiques de ce modèle, écrivons-le sous sa forme développée :

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Si le premier terme de la série est X_0 , le modèle s'écrit :

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i.$$

Les caractéristiques de ce processus sont (en supposant X_0 certain) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_t) = X_0, \\ Var(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2, \\ cov(X_t, X_s) = \sigma_\varepsilon^2 \min(t, s) \text{ si } t \neq s. \end{array} \right.$$

Pour stationnariser ce modèle, il suffit d'appliquer l'opérateur de différenciation :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - L) X_t = \varepsilon_t.$$

2. $\beta \neq 0$: le processus nommé processus DS avec dérive. Il s'écrit :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t,$$

sa forme équivalente est :

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \\ &= X_{t-2} + 2\beta + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-3} + 3\beta + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Si la valeur d'origine X_0 connue, on a alors :

$$X_t = X_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i.$$

Les caractéristiques de ce processus sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_t) = X_0 + \beta t, \\ Var(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2, \\ cov(X_t, X_s) = \sigma_\varepsilon^2 \min(t, s) \text{ si } t \neq s. \end{array} \right.$$

La stationnarisation de ce processus est réalisé en utilisant l'opérateur de différenciation premières :

$$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1 - L) X_t = \beta + \varepsilon_t.$$

Soit en employant la forme développée :

$$X_t = X_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \text{ et en calculant : } X_{t-1} = X_0 + \beta(t-1) + \sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i.$$

$$\text{On a : } X_t - X_{t-1} = (1 - L) X_t = \beta + \varepsilon_t.$$

2.8 Théorème de Wold

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus centré et stationnaire au second ordre , alors on a la décomposition [6] :

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + V_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Où :

1. $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j^2 < +\infty$.
2. $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est le bruit blanc de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.
3. $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus déterministe.
4. $Cov(\varepsilon_t, V_s) = 0, \forall s, t \in \mathbb{Z}$.

Ce résultat informatif est peu utile en pratique car les coefficients ψ_j sont inconnus, nous verrons que certaines modélisations font intervenir une infinité de terme.

Enfin, le processus X_t peut être réécrit en utilisant l'opérateur de retard L , On aura dans le cas réel ($V_t = 0$) :

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \\ X_t &= \varepsilon_t + \psi_1 L \varepsilon_t + \psi_2 L^2 \varepsilon_t + \dots \\ X_t &= (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) \varepsilon_t, \end{aligned}$$

alors

$$X_t = \psi(L) \varepsilon_t.$$

2.9 Série linéaire

Définition 2.9.1 Une série X_t est dite linéaire si elle peut s'écrire :

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i},$$

où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\psi_0 = 1$ et la suite (ψ_i) est absolument sommable, c'est-à-dire $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\psi_i| < \infty$.

Une série X_t est dite linéaire et causale si elle est linéaire avec $\psi_i = 0$, $i < 0$:

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}.$$

On admettra qu'une série linéaire est stationnaire. L'étude des séries non causales conduit à des résultats non intuitifs difficilement utilisables.

2.10 Autocovariance et Autocorrélation

Définition 2.10.1 Pour une série stationnaire (X_t) , on définit la fonction d'autocovariance, pour tout t par [5] :

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \text{cov}(X_t, X_{t-h}) \\ &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}). \end{aligned}$$

Remarque 2.10.1 La fonction $\gamma_X(h)$ est paire i.e : $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$.

Définition 2.10.2 Pour une série stationnaire (X_t) , la fonction d'autocorrélation (FAC) est la fonction notée ρ_X qui mesure la corrélation de la série avec elle-même décalée de h périodes, sa formule est la suivante, pour tout t :

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \text{corr}(X_t, X_{t-h}) \\ &= \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{\text{var}(X_t)}\sqrt{\text{var}(X_{t-h})}} \\ &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}.\end{aligned}$$

Cette fonction $\rho_X(\cdot)$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, et $\rho_X(0) = 1$.

Définition 2.10.3 La matrice d'autocorrélation du vecteur $(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ est :

$$R(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-3) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.11 La fonction d'autocorrélation partielle

Nous pouvons définir l'autocorrélation partielle de retard h comme le coefficient de corrélation partielle entre X_t et X_{t-h} , c'est -à-dire comme étant la corrélation entre X_t et X_{t-h} l'influence des autres variables décalées de h périodes $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1})$ ayant été retirée.

En reprenant les notations de la partie précédente, on introduit la matrice $R^*(h)$ obtenue on remplaçant la dernière colonne de $R(h)$ par le vecteur $(\rho(1), \dots, \rho(h))$

$$R^*(h) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-3) & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-4) & \rho(3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \rho(h-3) & \rho(h-4) & \rho(h-5) & \dots & \rho(1) & \rho(h-2) \\ \rho(h-2) & \rho(h-3) & \rho(h-4) & \dots & 1 & \rho(h-1) \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-3) & \dots & \rho(1) & \rho(h) \end{pmatrix}$$

On définit la fonction d'autocorrélation partielle :

$$\Psi_X(h) = \frac{|R^*(h)|}{|R(h)|} \text{ pour tout } h.$$

2.12 Graphiques pour les séries temporelles

Chronogramme : L'étude d'une série temporelle commence par l'examen de son chronogramme. Il en donne une vue d'ensemble, montre certains aspects, comme d'éventuelles ruptures, un changement dans la dynamique de la série.

Corrélogramme : Un corrélogramme est la représentation graphique de la fonction d'autocorrélation, qui est un concept lié à celui de corrélation il s'agit non pas d'un calcul entre deux chroniques différentes mais entre la série et elle-même à différents décalages dans le temps permettant de déceler des liaisons internes à la série.

Chapitre 3

Les modèles d'une série chronologique

Les modèles *ARIMA* permettent de combiner trois types de processus temporels : les processus autorégressifs (*AR*), les processus moyenne mobile (*MA*) et les processus intégrés (*I*). Dans le cas général, un modèle *ARIMA*(p, d, q) est une combinaison de ces trois types de processus, p , d et q désignant respectivement l'ordre du processus autorégressif, l'ordre d'intégration et l'ordre de la moyenne mobile. Ces différents modèles seront décrits dans ce qui suit.

3.1 Modèle autorégressifs d'ordre p

On exprime souvent l'évolution d'une série en fonction de son passé. Les modèles autorégressifs sont les modèles les plus explicites pour exprimer cette dépendance, nous supposons que ε_t est indépendant de $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$ [8], [23].

Définition 3.1.1 *Le modèle X_t est un modèle autorégressif d'ordre p noté AR(p), s'il satisfait à l'équation*

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, p, \\ \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma^2), \\ \phi_p \neq 0. \end{array} \right.$$

On peut donc écrire

$$\Phi_p(L)X_t = c + \varepsilon_t,$$

où

$$\Phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p.$$

3.1.1 La stationnarité

Le modèle $AR(p)$ est stationnaire si toutes les racines de $\Phi(L)$ soient à l'extérieur du cercle unité i.e : les racine de $\Phi(L)$ en leur module supérieures à 1 [12], [23].

Supposons que $p = 2$. Appelons s_1 et s_2 les racines réelles ou complexes de

$$1 - \phi_1 Z - \phi_2 Z^2 = \left(1 - \frac{Z}{s_1}\right)\left(1 - \frac{Z}{s_2}\right),$$

et on voit que le développement en série de $1 - \phi_1 Z - \phi_2 Z^2$ est possible si les racines de ce polynôme sont en module strictement supérieures à 1. Dans ce cas X_t est stationnaire, de moyenne $\mu = c/(1 - \phi_1 - \phi_2)$.

Remarque 3.1.1 *En toute généralité, un processus $AR(p)$ vérifié une relation de la forme $\Phi(L)X_t = c + \varepsilon_t$ où c est une terme constante. De cette forme générale, il est possible de se ramener à $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$ par une simple translation : il suffit de considerer non pas X_t mais $Y_t = X_t - \mu$ (μ correspond ici à l'espérance de X_t).*

3.1.2 Autocorrélation d'un $AR(p)$

La fonction d'autocovariance :

$$\gamma(k) = E(X_t X_{t+k}) = E(X_t X_{t-k}).$$

On préfère travailler avec la forme $E(X_t X_{t-k})$, car les ε_t sont non-corrélés avec les X_{t-k} , $k > 0$. On a

$$X_t X_{t-k} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-k} + \varepsilon_t X_{t-k}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \dots + \phi_p \gamma(k-p) + E(\varepsilon_t X_{t-k}), \quad k > 0.\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\gamma(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma(k-j), \quad k > 0.$$

En divisant l'égalité par $\gamma(0)$, on obtient

$$\rho(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(k-j), \quad k > 0.$$

Calcul de $\gamma(0)$

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \sigma_X^2 = E(X_t^2) \\ &= E(X_t(\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t)) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p) + E(X_t \varepsilon_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \dots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

On divise les deux membres par $\gamma(0)$, on obtient

$$\gamma(0) = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1 \rho(1) - \dots - \phi_p \rho(p)}.$$

3.1.3 Estimation

Pour estimer les coefficients ϕ_j , on introduit les équations de Yule Walker. On écrit l'équation aux différences $\rho(k) = \sum_{j=1}^p \phi_j \rho(k-j)$ ($k = 1, \dots, p$) sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \phi_1 \rho(0) + \phi_2 \rho(1) + \dots + \phi_p \rho(p-1) = \rho(1), & k = 1 \\ \phi_1 \rho(1) + \phi_2 \rho(0) + \dots + \phi_p \rho(p-2) = \rho(2), & k = 2 \\ \vdots \\ \phi_1 \rho(p-1) + \phi_2 \rho(p-2) + \dots + \phi_p \rho(0) = \rho(p), & k = p \end{cases}$$

Soient R_p la matrice du système

$$R_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(p-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(p-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \rho(p-3) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi' &= (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p), \\ \rho' &= (\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(p)). \end{aligned}$$

Les équations de Yule Walker s'écrivent

$$R_p \phi' = \rho',$$

d'où

$$\phi' = R_p^{-1} \rho'.$$

Les ϕ_j s'obtiennent donc uniquement à partir des $\rho(j)$, ce qui permet d'obtenir une estimation des ϕ_j , à l'aide des $\hat{\rho}(j)$ ($j = 1, \dots, p$)

$$\hat{\phi}' = \hat{R}_p^{-1} \hat{\rho}'.$$

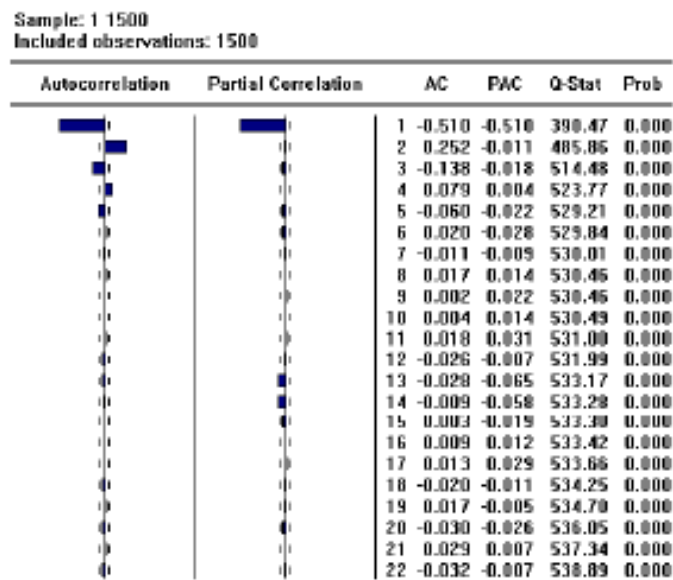
3.1.4 Fonction d'autocorrélation partielle $\tau(k)$

Dans un modèle autoregressif d'ordre p , il est possible de montrer que :

$$\tau(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \rho(1) & \text{si } k = 1 \\ \phi_p & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}$$

Dans la pratique, on dispose d'un corrélogramme partiel estimé $\hat{\tau}(k)$. Pour les modèles $AR(p)$ les corrélogrammes partiels $\hat{\tau}(k)$ sont nulles pour tout $k > p$.

Exemple 3.1.1 *Le corrélogramme d'un modèle $AR(1)$, avec $\phi = -0.5$.*



Exemple 3.1.2 *Le corrélogramme d'un modèle AR(1), avec $\phi = 0.2$.*

Sample: 1 1500
Included observations: 1500

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.181	0.181	49.418	0.000
		2 0.022	-0.011	50.138	0.000
		3 -0.005	-0.007	50.170	0.000
		4 -0.009	-0.007	50.289	0.000
		5 -0.036	-0.034	52.207	0.000
		6 -0.017	-0.005	52.644	0.000
		7 0.008	0.013	52.753	0.000
		8 0.026	0.023	53.805	0.000
		9 0.025	0.016	54.778	0.000
		10 0.024	0.016	55.645	0.000
		11 0.009	0.001	55.759	0.000
		12 -0.061	-0.064	61.111	0.000
		13 -0.085	-0.063	72.326	0.000
		14 -0.043	-0.015	75.180	0.000
		15 0.002	0.015	75.189	0.000
		16 0.028	0.026	76.418	0.000
		17 0.018	0.003	76.887	0.000
		18 -0.011	-0.024	77.004	0.000
		19 -0.010	-0.008	77.244	0.000
		20 -0.019	-0.014	77.821	0.000
		21 0.003	0.017	77.837	0.000
		22 -0.009	-0.005	77.950	0.000

Le tableau suivant illustre les propriétés des fonctions d'autocorrélation simple et partielle du modèle AR [11], [16] :

Processus	Fonction autocorrélation simple	Fonction autocorrélation partielle
AR(1)	Décroissance exponentielle ($\phi_1 > 0$) ou sinusoïdale amortie ($\phi_1 < 0$).	Pic significatif pour le premier retard : positif si $\phi_1 > 0$ et négatif si $\phi_1 < 0$. Les autres coefficients nuls pour des retards >1 .
AR(2)	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale selon les signes de ϕ_1 et ϕ_2 .	Pics significatifs pour le premier et second retards. Les autres coefficients sont nuls pour des retards >2
AR(p)	Décroissance exponentielle et/ou sinusoïdale.	Pics significatifs pour les p premiers retards. les autres coefficients sont nuls pour des retards $>p$.

TAB. 3.1 – Configuration théorique de FAC et FACP

Exemple 3.1.3 *Considérons le modèle Autorégressif d'ordre 1 :*

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{avec } \varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (3.1)$$

où c et ϕ sont des constantes. Si on utilise cette équation en remplaçant t par $t - 1$, obtenons $X_{t-1} = \phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$, par substitution de cette dernière équation dans l'originale équation, on a

$$\begin{aligned} X_t &= c + \phi(\phi X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\ &= c + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 X_{t-2}. \end{aligned}$$

Et par substitutions successives, on obtient

$$X_t = c(1 + \phi + \dots + \phi^{k-1}) + \phi^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

Si $|\phi| < 1$ on peut représenter X_t par :

$$X_t = \frac{c}{1 - \phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

Dans ce cas X_t est une série linéaire . Observons que cette écriture s'obtient aussi directement à l'aide de l'opérateur de retard.

En effet, l'équation (3.1) s'écrit

$$(1 - \phi L)X_t = c + \varepsilon_t.$$

Supposons que $|\phi| < 1$, nous avons évidemment que $\phi \neq 1$ et donc

$$X_t = \frac{c}{1 - \phi L} + \frac{1}{1 - \phi L} \varepsilon_t.$$

Ensuite, comme $|\phi| < 1$ on peut effectuer le développement en série

$$\frac{1}{1 - \phi L} = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots$$

Et par ailleurs, $c/(1 - \phi L) = c/(1 - \phi)$, donc

$$X_t = \frac{c}{1 - \phi} + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots,$$

est stationnaire, de moyenne : $E(X_t) = \mu = c/(1 - \phi)$.

3.2 Modèle moyenne mobile d'ordre q

Définition 3.2.1 On appelle modèle moyenne mobile d'ordre q, noté MA(q), un modèle stationnaire X_t vérifiant une relation du type [12], [23] :

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z},$$

où les θ_i sont des réels, $\theta_q \neq 0$ et $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Introduisant l'opérateur moyenne mobile :

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q.$$

On peut noter de façon équivalente :

$$X_t = \mu + \Theta(L) \varepsilon_t.$$

Un MA(q) est toujours stationnaire quelles que soient les valeurs de θ , il est de moyenne μ .

Propriété 3.2.1 Un MA(q) est inversible si les racines de

$$1 - \theta_1 Z - \theta_2 Z^2 - \dots - \theta_q Z^q = 0,$$

sont en module strictement supérieures à 1.

Remarque 3.2.1 Si $X_t \sim MA(q)$, alors X_t est stationnaire.

Nous considérons dans ce qui suit que le modèle Moyenne Mobile est centré.

3.2.1 Autocorrélations d'un $MA(q)$

Les autocorrélations des modèles $MA(q)$ est :

$$\gamma(h) = E(X_t X_{t+h}).$$

Ce qui est plus adéquat ici, car il y a non-corrélation des ε_t avec le futur.

La fonction d'autocovariance est donné par :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(X_t X_{t+h}) \\ &= E((\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t+h} - \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+h-q})) \\ &= \begin{cases} (-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_q \theta_{h+q}) \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } 1 \leq h \leq q, \\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $h = 0$

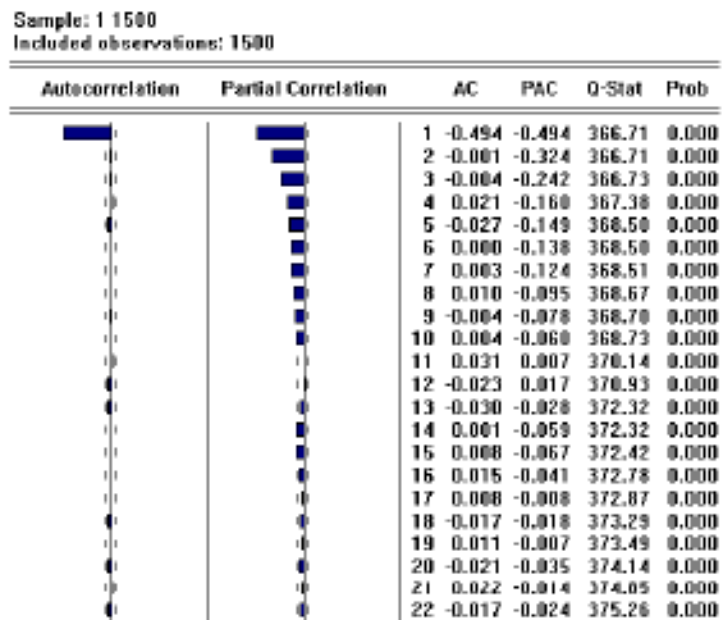
$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2.$$

La fonction d'autocorrélation :

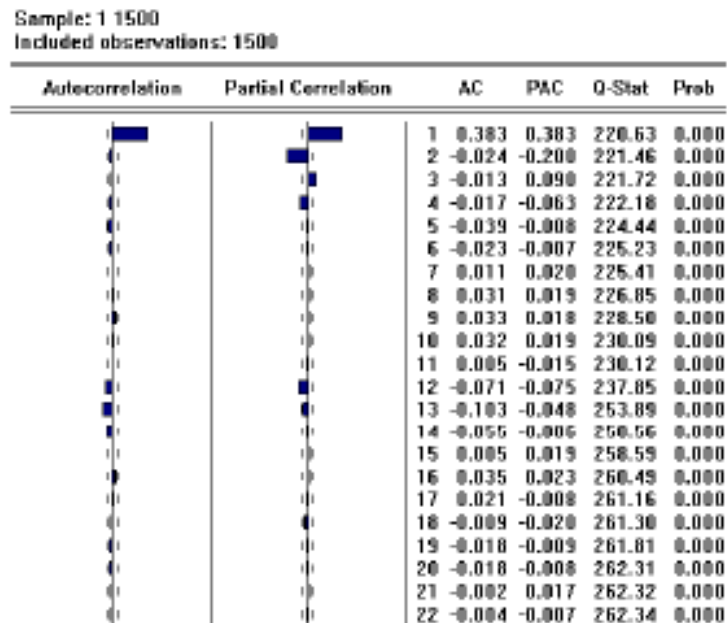
$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \frac{-\theta_h + \theta_1 \theta_{h+1} + \dots + \theta_q \theta_{h+q}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{si } 0 < h \leq q, \\ 0 & \text{si } h > q. \end{cases}$$

Remarque 3.2.2 Dans les modèles $MA(q)$, les corrélogrammes $\rho(h)$ sont nulles pour tout $h > q$.

Exemple 3.2.2 *Le corrélogramme d'un modèle MA(1), avec $\theta = -0.85$*



Exemple 3.2.3 *Le corrélogramme d'un modèle MA(1), avec $\theta = 0.5$*



Le tableau suivante illustre les propriétés des fonctions d'autocorrélation simple et partielle du modèle *MA* [11], [16] :

Processus	Fonction autocorrélation simple	Fonction autocorrélation partielle
MA(1)	Pic significatif pour le premier retard : positif si $\theta_1 > 0$ et négatif si $\theta_1 < 0$. Les autres coefficients sont nuls pour des retards >1	Décroissance exponentielle ($\theta_1 < 0$) ou sinusoïdale amortie ($\theta_1 > 0$).
MA(2)	Pic significatifs pour le premier et le second retards. Les autres coefficients sont nuls pour des retards >2 .	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale selon les signes de θ_1 et θ_2 .
MA(q)	Pic significatifs pour les q premiers retards. Les autres coefficients nuls pour des retards $>q$.	Décroissance exponentielle et/ou sinusoïdale.

TAB. 3.2 – Configuration théorique de FAC et FACP

Exemple 3.2.4 Soit le modèle Moyenne Mobile d'ordre 1 :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},$$

il est clair que $E(X_t) = 0$ et $\text{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2)$, donc

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-1}) &= \text{cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}) \\ &= \text{cov}(-\theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) \\ &= -\theta\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t, X_{t-2}) &= \text{cov}(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = 0, \forall k \succeq 2$.

Alors pour un modèle MA(1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_t) = 0, \\ \gamma(0) = \text{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta^2), \\ \gamma(1) = -\theta\sigma_\varepsilon^2, \\ \rho(1) = -\theta/(1 + \theta^2), \\ \gamma(k) = \rho(k) = 0 \text{ pour } k \succeq 2. \end{array} \right.$$

3.2.2 Conditions de stationnarité et d'inversibilité pour AR(p) et MA(q)

1. Un processus AR est toujours inversible. Il est stationnaire lorsque les racines de $\Phi(L)$ en module strictement supérieure à 1.
2. Un processus MA est toujours stationnaire. Il est inversible si les racines de $\Theta(L)$ sont en module strictement supérieure à 1.

Nous pouvons maintenant combiner les deux modèles, moyenne mobile et autorégressif.

3.3 Modèle autorégressif moyenne mobile $ARMA(p, q)$

Définition 3.3.1 On appelle modèle autorégressif moyenne mobile, le modèle $ARMA(p, q)$ vérifiant une relation du type [6] :

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = c + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

où ε_t est un bruit blanc centré de variance σ_ε^2 et c constante arbitraire, $\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ et les polynômes $\Phi(L)$ et $\Theta(L)$ n'ont pas de racines communes.

L'équation (3.2) est équivalente à l'écriture :

$$\Phi(L)X_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t,$$

où

$$\begin{cases} \Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q, \\ \Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p. \end{cases}$$

On supposera que les polynômes Φ et Θ ont de racines en module strictement supérieur à 1 et n'ont pas de racine commune, et de plus le degré de Φ et Θ sont p et q respectivement, on dira dans ce cas que cette écriture est la forme minimale [23].

Par un calcul identique à celui fait pour un $AR(p)$, on obtient que $\mu = E(X_t)$ vérifie :

$$(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)\mu = c.$$

Par la stationnarité,

$$1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p \neq 0,$$

et

$$\mu = c / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p).$$

Ainsi peut encore s'écrire :

$$X_t = \mu + \frac{1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p} \varepsilon_t.$$

On peut alors écrire la représentation :

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}, \quad \psi_0 = 1.$$

et aussi la représentation :

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Par ailleurs, X_t est inversible si les racines de $\Theta(L)$ sont en module strictement supérieures à 1.

3.3.1 La stationnarité

Ce modèle est stationnaire si toutes les racines de $\Phi(z)$ en module supérieur à 1.

3.3.2 Autocorrélation simple et partielle d'un $ARMA(p, q)$

Autocorrélation simple : L'autocovariance vaut [6] :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= E\left(\left(\sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right) X_{t-k}\right). \end{aligned}$$

L'autocovariance croisée entre X_{t-k} et ε_t est :

$$\gamma_{X\varepsilon}(k) = E(\varepsilon_t X_{t-k}).$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \sum_{i=1}^p \phi_i E(X_{t-i} X_{t-k}) - \sum_{j=1}^q \theta_j E(\varepsilon_{t-j} X_{t-k}) + \gamma_{X\varepsilon}(k) \\ &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(k-i) - \sum_{j=1}^q \theta_j \gamma_{X\varepsilon}(k-j) + \gamma_{X\varepsilon}(k), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E(X_t \varepsilon_t) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}\right) \varepsilon_t\right) \\ &= E(\varepsilon_t \varepsilon_t) \\ &= \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

ε_t n'est pas corrélé avec le passé

$$\begin{cases} \gamma_{X\varepsilon}(k) = 0 & \text{si } k > 0, \\ \gamma_{X\varepsilon}(k) = \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k = 0, \\ \gamma_{X\varepsilon}(k) \neq 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

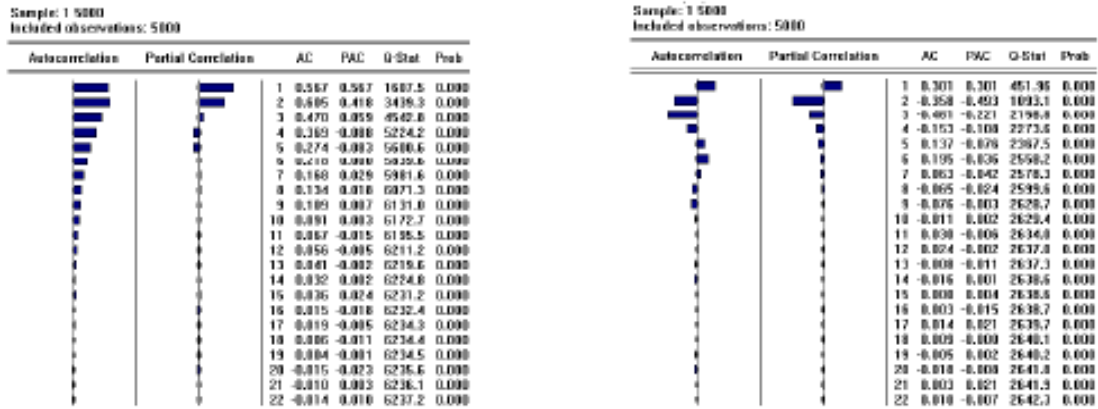
Remarque 3.3.1 La fonction $\gamma_{X\varepsilon}(k)$ n'est pas paire.

Si $k > q$, tous les $\gamma_{X\varepsilon}(k) = 0$, et on a :

$$\begin{cases} \gamma(k) = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma(k-i), \\ \rho(k) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho(k-i). \end{cases}$$

Pour un $ARMA(p, q)$, la structure d'autocorrélation ne suit pas un schéma connu jusqu'au délai q mais ensuite le comportement est le même que celui d'un $AR(p)$.

Exemple 3.3.1 Les corrélogrammes du modèle ARMA(2,1), ARMA(1,2) respectivement de gauche à droite :



Autocorrélations partielles : pour $k \leq p$, il n'y a pas de schéma bien précis. Pour $k \geq p$, on retrouve le même comportement que pour un $MA(q)$.

Le tableau suivant illustre les propriétés des fonctions d'autocorrélation simple et partielle du modèle ARMA [11], [16] :

Type de modèle	Configuration typique d'une FAC	Configuration typique d'une FACP
ARMA(1,1)	Décroissance géométrique à partir du premier retards, le signe est déterminé par $\theta_1 - \phi_1$.	Décroissance exponentielle $\phi_1 > 0$ ou sinusoïdale amortie $\phi_1 < 0$.
ARMA(p,q)	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie tronquée après (q-p) retards.	Décroissance exponentielle ou sinusoïdale amortie tronquée après (q-p) retards.

TAB. 3.3 – Configuration théorique de FAC et FACP pour modèle ARMA

3.4 Modèle Autorégressif moyenne mobile intégré ARIMA(p, d, q)

Lorsque l'on a une série (X_t) à non stationnarité, il convient de la modéliser à l'aide d'un modèle ARIMA(p,d,q) où d désigne l'ordre de différenciation (ou d'intégration) [2], [15].

Définition 3.4.1 (X_t) est un modèle autorégressif moyenne mobile intégré stationnaire noté $ARIMA(p,d,q)$ s'il admet la représentation :

$$\Phi(L)\Delta^d X_t = \Theta(L)\varepsilon_t.$$

Où

$$\begin{cases} \Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p, & \phi_p \neq 0, \\ \Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q, & \theta_q \neq 0. \end{cases}$$

La série (X_t) est une série non stationnaire alors que la série $Y_t = \Delta^d X_t$ est une série stationnaire. Estimer les paramètres du processus $ARIMA(p,d,q)$ pour la série (X_t) non stationnaire revient à estimer les coefficients du processus $ARMA(p,q)$ pour la série (Y_t) stationnaire.

3.5 Méthode de Box et Jenkins

La méthodologie de Box et Jenkins permet de déterminer le modèle $ARIMA$ adéquat pour la modélisation d'une série chronologique, donc il s'agit de construire un modèle restituant le mieux possible le comportement d'une série temporelle. Cette méthodologie suggère quatre étapes : l'identification, l'estimation, la validation et la prévision du modèle [2], [5], [9].

3.5.1 Identification du modèle

L'identification consiste à spécifier les trois paramètres p , d , q du modèle $ARIMA(p,d,q)$. La stationnarité du modèle est d'abord testée par étude graphique, de corrélogramme et test de dickey fuller augmenté. Si la série n'est pas stationnaire, il convient de la transformer stationnaire. L'ordre d'intégration " d " est le nombre de fois que la série initiale a été différenciée pour obtenir la stationnarité. Les autocorrélations et les autocorrélations partielles permettent d'estimer les ordres p et q pour les modèles AR et MA :

1. Les autocorrélations partielles sont nulles au delà de l'ordre p .
2. Les autocorrélations sont nulles au delà de l'ordre q .

Test de Dickey Fuller simple : Dickey et Fuller sont les premiers à fournir un ensemble d'outils statistiques formels pour détecter la présence d'une racine unitaire dans un processus autorégressif du premier ordre, ce test permet de tester l'hypothèse

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Le modèle a une racine unitaire,} \\ H_1 : \text{le modèle n'a pas de racine unitaire.} \end{array} \right.$$

Ce test est regroupée en 4 cas :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha = 0 \text{ et } \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha \neq 0 \text{ et } \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \rho = 1.$$

Test de Dickey Fuller augmenté : Dickey et Fuller en 1981 étendent ensuite cette procédure de test à des processus autorégressifs d'ordre p , il s'agit alors des tests *ADF* «Augmented Dickey-Fuller ».

Ce test permet de tester

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Le modèle a une racine unitaire,} \\ H_1 : \text{le modèle n'a pas de racine unitaire.} \end{array} \right.$$

Ce test peuvent être regroupés en 4 cas :

$$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad H_0 : \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha = 0 \text{ et } \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha \neq 0 \text{ et } \rho = 1,$$

$$y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \varepsilon_t \quad H_0 : \alpha = 0, \beta = 0 \text{ et } \rho = 1.$$

Pour simplifier, on écrira :

$$\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{avec } \phi = \rho - 1 \quad \text{"Modèle[1]"},$$

$$\Delta y_t = \alpha + \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{"Modèle[2]"},$$

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad \text{"Modèle[3]"}.$$

Nous pouvons résumer la stratégie d'*ADF* à partir de schéma suivant :

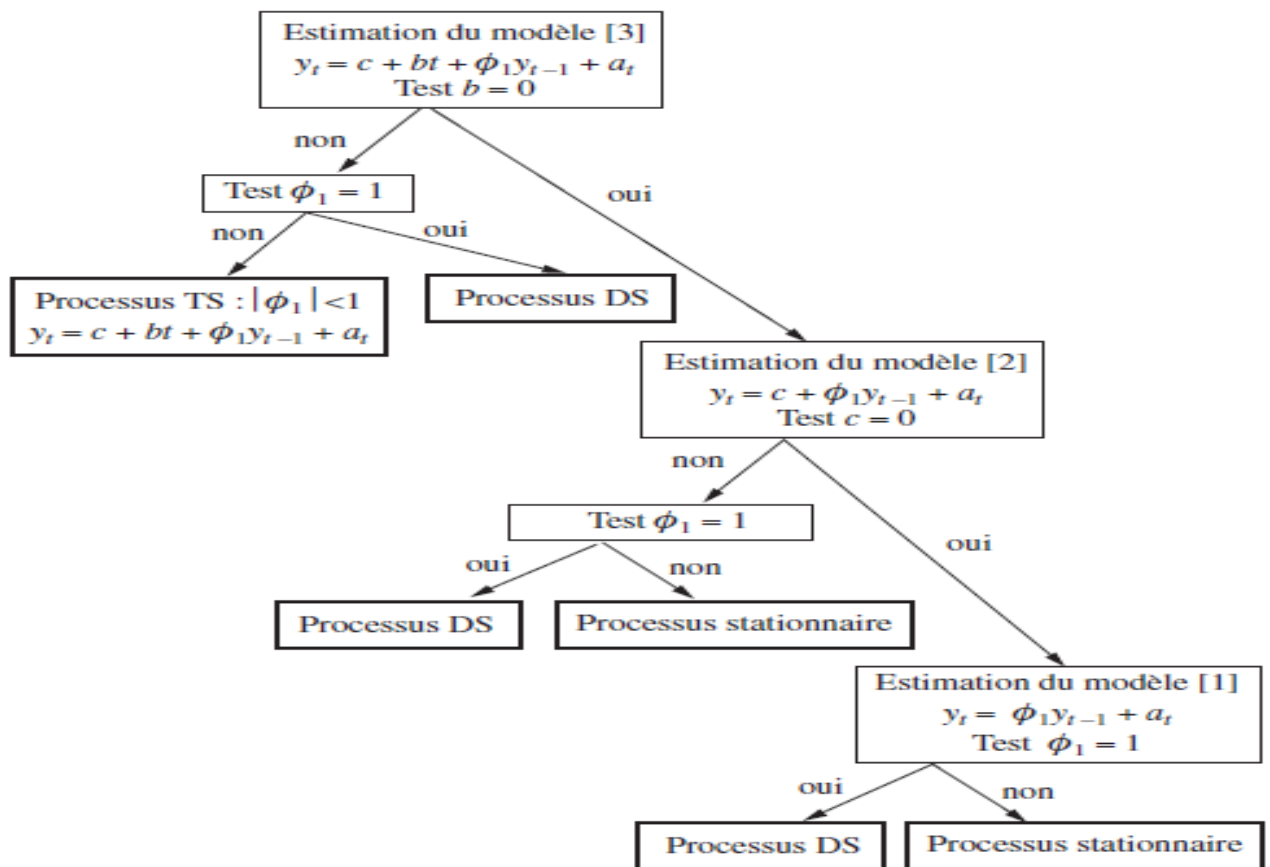


FIG. 3.1 – Stratégie simplifiée des tests de racine unitaire.

3.5.2 Estimation des paramètres d'un modèle *ARIMA*

L'estimation des paramètres d'un modèle *ARIMA*(p, d, q) lorsque p, d, q sont supposés connus peut se réaliser par différentes méthodes dans le domaine temporel, et parmi ces méthodes on a :

1. Maximum de vraisemblance.
2. Dans le cas $q = 0$, on utilise les équations de Yule Walker.

Plusieurs logicielles informatiques impliment ces méthodes d'estimation d'un modèle *ARIMA* (Eviews, Spss,...), notamment les méthodes du maximum de vraisemblance.

Critères de choix des modèles

Souvent il n'est pas facile de déterminer un modèle unique [16]. Le modèle qui est finalement choisi est celui qui minimise l'un des critères à partir de T observations.

Critère standard

1. L'erreur absolue moyenne (Mean Absolute Error) :

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t|.$$

2. L'erreur quadratique moyenne (Mean Squared Error) :

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2.$$

3. La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2}.$$

4. Ecart absolu moyen en pourcentage (Mean Absolute Percent Error) :

$$MAPE = \frac{100}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{\varepsilon_t}{X_t} \right|.$$

Plus la valeur de ces critères est faible, plus le modèle estimé est proche des observations.

Critère d'information

1. Akaike (1969) :

$$AIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2\frac{p+q}{T}.$$

2. Schwarz (1977) :

$$BIC(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + (p+q)\frac{\log T}{T}.$$

3. Hannan_Quinn(1979) :

$$\varphi(p, q) = \log(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + (p+q)c\frac{\log(\log T)}{T}, \text{ avec } c > 2.$$

3.5.3 Validation du modèle

Après avoir estimé les différents modèles *ARIMA*, il convient à présent de valider ces modèles, en servant d'une part, des tests de significativité des paramètres pour les coefficients et d'autre part, d'une analyse sur les résidus estimés.

Significativité des paramètres

Les coefficients du modèle doivent être significativement différent de zéro, pour ce faire on utilise le test classique de student.

On rejette l'hypothèse nulle $H_0 : \theta_j = 0$, si $|tc| \succ |\mathcal{T}_{T-q}^\alpha|$, où $|tc| = \left| \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}_\theta} \right|$.

Remarque 3.5.1 *Si l'on montre que l'un ou plusieurs paramètres du modèle ne sont pas significativement différents de 0, on estime à nouveau le modèle.*

Validation de l'hypothèse de bruit blanc des résidus

Pour que les modèles obtenues soient valides, il convient de vérifier que les résidus estimés suivent bien un bruit blanc.

Test de bruit blanc

Ce test repose sur l'absence de la fonction d'autocorrelation d'un bruit blanc.

Il existe plusieurs tests d'absence d'autocorrélation, ces tests regroupent en deux groupes : les tests paramétriques et non paramétrique, on s'intéresse au test paramétrique de Box Pièce.

Statistique de Box Pièce :

Le test de Box Pièce permet d'identifier les processus de bruit blanc. Cette statistique permet de tester $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$, pour tout h ($\rho(h) = 0, \forall h$). Ce test s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0, \\ H_1 : \text{Il existe } i \text{ tel que } \rho(i) \neq 0. \end{array} \right.$$

Pour effectuer ce test, on utilise la statistique de Box et Pièce Q , donnée par :

$$Q = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}^2(k).$$

Où h est le nombre de retards, T est le nombre d'observations et $\hat{\rho}(k)$ l'autocorrélation empirique.

Asymptotiquement, Q suit un χ^2 à h degré de liberté. Nous rejetons l'hypothèse de bruit blanc au seuil h si Q est supérieure au quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du χ^2 à h degré de liberté.

Les tests de normalité :

En utilisant le test de Bera and Jarque, basé sur le skewness (coefficient d'asymétrie de la distribution) et la kurtosis (aplatissement des queues).

En notant μ_k le moment d'ordre k de la distribution

$$\mu_k = E((X - E(X))^k).$$

On appelle Skewness le coefficient

$$s = \mu_3 / \mu_2^{3/2},$$

et la Kurtosis

$$k = \mu_4 / \mu_2^2.$$

Le test de Bera and Jarque repose sur le fait que, si la distribution suit une loi normale. Alors la quantité

$$BJ = \frac{T}{6}s^2 + \frac{T}{24}(k-3)^2,$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 à 2 degrés de liberté. Si $BJ \geq \chi_{1-\alpha}^2(2)$ on rejette l'hypothèse H_0 de normalité des résidus au seuil α .

3.5.4 La prévision

C'est la dernière étape de la méthodologie de Box and Jenkins.

Etant donné une série stationnaire, observée entre 1 et T , on cherche à faire de la prévision à horizon h , et donc de prévoir X_{T+1}, \dots, X_{T+h} .

Il s'agit de calculer les prévisions optimales du modèle *ARIMA* estimé, à savoir $X_T(h)$ la prévision de X_{T+h} sachant l'ensemble d'information disponible en T , noté

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

Prévision d'un modèle AR(p)

Le modèle s'écrit :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

La prévision optimale à la date $T+1$, faite à la date T est

$$\hat{X}_{T+1} = E(X_{T+1}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

Donc

$$\hat{X}_{T+1} = \phi_1 X_T + \dots + \phi_p X_{T+1-p}.$$

De façons analogue

$$X_{T+h} = \phi_1 X_{T+h-1} + \dots + \phi_p X_{T+h-p} + \varepsilon_{T+h}.$$

Donc

$$\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}/X_T, X_{T-1}, \dots, X_1).$$

De façons réccursive

$$\hat{X}_{T+h} = \begin{cases} \phi_1 \hat{X}_{T+h-1} + \dots + \phi_{h-1} \hat{X}_{T+1} + \phi_h X_T + \dots + \phi_p X_{T+h-p} & \text{pour } h \leq p, \\ \phi_1 \hat{X}_{T+h-1} + \dots + \phi_p \hat{X}_{T+h-p} & \text{pour } h > p. \end{cases}$$

Prévision d'un modèle MA(q)

Soit le modèle $MA(q)$

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \Theta(L)\varepsilon_t.$$

La prévision optimale à la date $T + 1$ est

$$\hat{X}_{T+1} = \theta_1 \varepsilon_T + \dots + \theta_q \varepsilon_{T+1-q}.$$

De façon analogue

$$\hat{X}_{T+h} = \begin{cases} \theta_h \hat{X}_T + \dots + \theta_q \hat{X}_{T+h-q} & \text{pour } h \leq q, \\ 0 & \text{pour } h > q. \end{cases}$$

Prévision d'un modèle ARMA(p,q)

(X_t) est un $ARMA(p,q)$, alors :

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

Donc

$$X_{T+h} = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{T+h-i} + \varepsilon_{T+h} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{T+h-j}.$$

On a alors

$$\hat{X}_{T+h} = \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{X}_{T+h-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{T+h-j}.$$

Où

$$\hat{\varepsilon}_{T+h-j} = \begin{cases} 0 & \text{si } h > j, \\ \varepsilon_{T+h-j} & \text{si } h \leq j. \end{cases}$$

Chapitre 4

Application de la méthode de Box-Jenkins

Nous intéressons à appliquer la méthode de Box-Jenkins sur des données réelles notée "dialyse" qui représente le nombre des séances d'hémodialyse tirée de l'hôpital Ibn Sina d'Adrar, les données considérées sont mensuelles et la période retenue pour l'étude est de janvier 2011 à août 2015.

Mois\ Années	2011	2012	2013	2014	2015
janvier	582	606	776	875	890
février	510	555	709	786	828
mars	573	588	769	912	926
avril	417	623	729	992	936
mai	545	673	651	871	890
juin	625	638	749	901	916
juillet	656	706	771	925	900
août	554	619	744	854	892
septembre	545	661	758	911	
octobre	593	707	777	911	
novembre	529	707	730	867	
décembre	592	738	778	959	

TAB. 4.1 – Nombre des séances d'hémodialyse.

Avant de construire le modèle de prévision, nous commençons par l'analyse de graphique de la série puis l'analyse de la stationnarité à l'aide du test de racine unitaire ADF.

4.1 Etude de la stationnarité

Le graphe de la série dialyse montre que la série est non stationnaire :

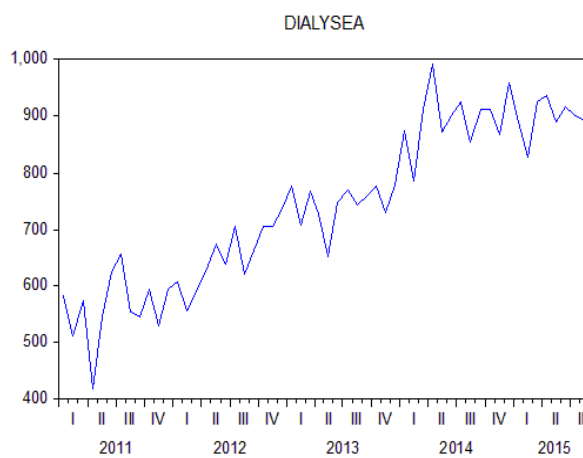


FIG. 4.1 – Représentation graphique de la série brute

On utilise aussi le test de racine unitaire (test ADF) pour confirmer la non stationnarité :

Modèle sans tendance et avec constante :

Null Hypothesis: DIALYSEA has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.879765	0.7871
Test critical values:		
1% level	-3.560019	
5% level	-2.917650	
10% level	-2.596689	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DIALYSEA)
 Method: Least Squares
 Date: 11/27/15 Time: 20:04
 Sample (adjusted): 2011M04 2015M08
 Included observations: 53 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DIALYSEA(-1)	-0.049703	0.056496	-0.879765	0.3833
D(DIALYSEA(-1))	-0.558372	0.131099	-4.259162	0.0001
D(DIALYSEA(-2))	-0.423320	0.126826	-3.337808	0.0016
C	49.78282	42.36848	1.174997	0.2457

R-squared	0.340346	Mean dependent var	6.018868
Adjusted R-squared	0.299959	S.D. dependent var	65.31330
S.E. of regression	54.64661	Akaike info criterion	10.91212
Sum squared resid	146326.4	Schwarz criterion	11.06082
Log likelihood	-285.1713	Hannan-Quinn criter.	10.96931
F-statistic	8.427132	Durbin-Watson stat	1.742329
Prob(F-statistic)	0.000128		

La série a une racine unitaire car la p-value > 0.05 , la constante est non significative (la probabilité critique affectées à la constante est supérieurs à 0.05).

Modèle avec tendance et avec constante :

Null Hypothesis: DIALYSEA has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.765813	0.2161
Test critical values:		
1% level	-4.144584	
5% level	-3.498692	
10% level	-3.178578	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DIALYSEA)
 Method: Least Squares
 Date: 12/06/15 Time: 21:41
 Sample (adjusted): 2011M05 2015M08
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DIALYSEA(-1)	-0.615957	0.222704	-2.765813	0.0081
D(DIALYSEA(-1))	-0.087340	0.209541	-0.416814	0.6788
D(DIALYSEA(-2))	-0.164605	0.173613	-0.948116	0.3480
D(DIALYSEA(-3))	0.174652	0.132283	1.320286	0.1933
C	330.1803	109.0702	3.027227	0.0040
@TREND("2011M01")	4.751119	1.948922	2.437820	0.0187

R-squared	0.484092	Mean dependent var	9.134615
Adjusted R-squared	0.428015	S.D. dependent var	61.84548
S.E. of regression	46.77356	Akaike info criterion	10.63668
Sum squared resid	100637.2	Schwarz criterion	10.86182
Log likelihood	-270.5537	Hannan-Quinn criter.	10.72299
F-statistic	8.632628	Durbin-Watson stat	1.802175
Prob(F-statistic)	0.000008		

La série a une racine unitaire (la p-value > 0.05), la tendance et la constante sont significative (la probabilité critique < 0.05).

Modèle sans tendance et sans constante :

Null Hypothesis: DIALYSEA has a unit root
 Exogenous: None
 Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	1.523387	0.9671
Test critical values:		
1% level	-2.609324	
5% level	-1.947119	
10% level	-1.612867	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DIALYSEA)
 Method: Least Squares
 Date: 12/01/15 Time: 15:59
 Sample (adjusted): 2011M04 2015M08
 Included observations: 53 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DIALYSEA(-1)	0.015590	0.010233	1.523387	0.1340
D(DIALYSEA(-1))	-0.592270	0.128371	-4.613741	0.0000
D(DIALYSEA(-2))	-0.442216	0.126280	-3.501870	0.0010

R-squared	0.321760	Mean dependent var	6.018868
Adjusted R-squared	0.294630	S.D. dependent var	65.31330
S.E. of regression	54.85421	Akaike info criterion	10.90217
Sum squared resid	150449.2	Schwarz criterion	11.01370
Log likelihood	-285.9076	Hannan-Quinn criter.	10.94506
Durbin-Watson stat	1.752225		

La série à une racine unitaire ($p\text{-value} > 0.05$).

D'après ce qu'on a vu précédemment, la série dialyse est non stationnaire.

4.2 Stationnarisation de la série

On estime les coefficients de la tendance de la série dialyse puis on l'élimine, on obtient une nouvelle série nommée tdialyse.

Pour confirmer l'élimination de la tendance on utilise autre fois le test ADF.

Null Hypothesis: TDIALYSE has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.765813	0.2161
Test critical values:		
1% level	-4.144584	
5% level	-3.498692	
10% level	-3.178578	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(TDIALYSE)
 Method: Least Squares
 Date: 12/01/15 Time: 16:34
 Sample (adjusted): 2011M05 2015M08
 Included observations: 52 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
TDIALYSE(-1)	-0.615957	0.222704	-2.765813	0.0081
D(TDIALYSE(-1))	-0.087340	0.209541	-0.416814	0.6788
D(TDIALYSE(-2))	-0.164605	0.173613	-0.948116	0.3480
D(TDIALYSE(-3))	0.174652	0.132283	1.320286	0.1933
C	7.803956	14.53299	0.536982	0.5939
@TREND("2011M01")	-0.230613	0.443671	-0.519785	0.6057
R-squared	0.484092	Mean dependent var		1.046816
Adjusted R-squared	0.428015	S.D. dependent var		61.84548
S.E. of regression	46.77356	Akaike info criterion		10.63668
Sum squared resid	100637.2	Schwarz criterion		10.86182
Log likelihood	-270.5537	Hannan-Quinn criter.		10.72299
F-statistic	8.632628	Durbin-Watson stat		1.802175
Prob(F-statistic)	0.000008			

La tendance et la constante sont non significative, en outre la série a un racine unitaire.

Pour enlever la racine unitaire, on propose d'étudier la série *ddialyse*

$$ddialyse = tdialyse - tdialyse(-1).$$

Null Hypothesis: DDIALYSE has a unit root
 Exogenous: Constant, Linear Trend
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.492692	0.0000
Test critical values:		
1% level	-4.140858	
5% level	-3.496960	
10% level	-3.177579	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
 Dependent Variable: D(DDIALYSE)
 Method: Least Squares
 Date: 12/01/15 Time: 16:25
 Sample (adjusted): 2011M04 2015M08
 Included observations: 53 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DDIALYSE(-1)	-2.029392	0.213785	-9.492692	0.0000
D(DDIALYSE(-1))	0.440810	0.126162	3.494010	0.0010
C	0.284603	16.21290	0.017554	0.9861
@TREND("2011M01")	-0.123105	0.494563	-0.248916	0.8045

R-squared	0.763240	Mean dependent var	-1.339623
Adjusted R-squared	0.748744	S.D. dependent var	109.8080
S.E. of regression	55.04172	Akaike info criterion	10.92653
Sum squared resid	148450.0	Schwarz criterion	11.07523
Log likelihood	-285.5531	Hannan-Quinn criter.	10.98372
F-statistic	52.65352	Durbin-Watson stat	1.753567
Prob(F-statistic)	0.000000		

D'après le test ADF, on rejette l'hypothèse de présence de racine unitaire, ce qui affirme que la série obtenue est une série stationnaire ($p\text{-value} < 0.05$).

Graphique de la série stationnaire :

On remarque que la série fluctue autour d'une moyenne constante.

4.2.1 Modélisation de la série *ddialyse*

La série *ddialyse* est stationnaire, on cherche un modèle $ARMA(p, q)$ qui représente cette série. Pour identifier le processus qui représente au mieux notre série, on examine les autocorrelation simples (pour déterminer le nombre de retards de MA) et partielles (pour déterminer le nombre de retard d'un processus AR)

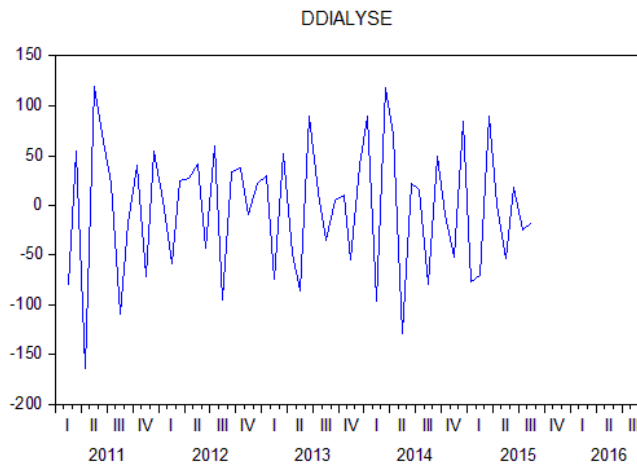


FIG. 4.2 – Représentation graphique de la série stationnaire

Corrélogramme de la série stationnaire

L'examen de ce corrélogramme montre qu'il existe des pics important pour le terme AR et le terme MA .

Estimation de modèles ARMA

Après l'estimation des différents modèles, l'analyse de la significativité des coefficients nous conduisons à conserver les trois modèles ci après. Seuls les modèles dont les résidus sont de bruit blancs seront validés.

$$* \text{ MA}(1) \quad : \text{ ddialyse}_t = \varepsilon_t + 0.766853\varepsilon_{t-1}.$$

$$* \text{ ARMA}(2,1) \quad : \text{ ddialyse}_t = -0.118675\text{ddialyse}_{t-2} + \varepsilon_t + 0.702739\varepsilon_{t-1}.$$

$$* \text{ ARMA}(5,1) \quad : \text{ ddialyse}_t = -0.086893\text{ddialyse}_{t-5} + \varepsilon_t + 0.748073\varepsilon_{t-1}.$$

L'estimation de ces trois modèles avec Eviews est dans les tableaux suivants

Date: 12/02/15 Time: 20:51
Sample: 2011M01 2016M08
Included observations: 55

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.40...	-0.40...	9.7283	0.002
		2 -0.19...	-0.43...	12.048	0.002
		3 0.327	0.045	18.476	0.000
		4 -0.22...	-0.15...	21.556	0.000
		5 -0.15...	-0.29...	22.990	0.000
		6 0.348	0.038	30.716	0.000
		7 -0.13...	0.042	31.831	0.000
		8 -0.16...	-0.10...	33.746	0.000
		9 0.327	0.120	41.024	0.000
		1... -0.21...	-0.03...	44.121	0.000
		1... -0.13...	-0.10...	45.373	0.000
		1... 0.327	0.080	53.149	0.000
		1... -0.24...	-0.11...	57.615	0.000
		1... -0.03...	-0.05...	57.731	0.000
		1... 0.200	-0.09...	60.868	0.000
		1... -0.10...	0.016	61.669	0.000
		1... -0.11...	-0.06...	62.674	0.000
		1... 0.297	0.125	70.171	0.000
		1... -0.25...	-0.08...	75.925	0.000
		2... -0.00...	0.029	75.928	0.000
		2... 0.205	0.001	79.805	0.000
		2... -0.13...	0.097	81.457	0.000
		2... -0.13...	-0.15...	83.246	0.000
		2... 0.234	-0.05...	88.805	0.000

Modèle MA(1)

Modèle ARMA(2,1)

Dependent Variable: DDIALYSE
 Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
 Date: 12/02/15 Time: 19:29
 Sample: 2011M02 2015M08
 Included observations: 55
 Convergence achieved after 10 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.766853	0.122120	-6.279519	0.0000
SIGMASQ	2790.431	474.8737	5.876154	0.0000
R-squared	0.336039	Mean dependent var		-2.451435
Adjusted R-squared	0.323512	S.D. dependent var		65.42577
S.E. of regression	53.81199	Akaike info criterion		10.86068
Sum squared resid	153473.7	Schwarz criterion		10.93367
Log likelihood	-296.6687	Hannan-Quinn criter.		10.88891
Durbin-Watson stat	1.846024			
Inverted MA Roots	.77			

Dependent Variable: DDIALYSE
 Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
 Date: 12/02/15 Time: 19:34
 Sample: 2011M02 2015M08
 Included observations: 55
 Convergence achieved after 25 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	-0.118675	0.140752	-0.843152	0.4030
MA(1)	-0.702739	0.126415	-5.558999	0.0000
SIGMASQ	2767.980	478.2799	5.787363	0.0000
R-squared	0.341381	Mean dependent var		-2.451435
Adjusted R-squared	0.316050	S.D. dependent var		65.42577
S.E. of regression	54.10795	Akaike info criterion		10.88781
Sum squared resid	152238.9	Schwarz criterion		10.99730
Log likelihood	-296.4147	Hannan-Quinn criter.		10.93015
Durbin-Watson stat	1.917330			
Inverted AR Roots	-.00+.34i	-.00-.34i		
Inverted MA Roots	.70			

Modèle ARMA(5,1)

Dependent Variable: DDIALYSE
Method: ARMA Maximum Likelihood (OPG - BHHH)
Date: 12/02/15 Time: 18:44
Sample: 2011M02 2015M08
Included observations: 55
Convergence achieved after 26 iterations
Coefficient covariance computed using outer product of gradients

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(5)	-0.086893	0.156642	-0.554724	0.5815
MA(1)	-0.748073	0.127247	-5.878896	0.0000
SIGMASQ	2772.746	505.1803	5.488628	0.0000
R-squared	0.340247	Mean dependent var		-2.451435
Adjusted R-squared	0.314872	S.D. dependent var		65.42577
S.E. of regression	54.15453	Akaike info criterion		10.89089
Sum squared resid	152501.1	Schwarz criterion		11.00039
Log likelihood	-296.4996	Hannan-Quinn criter.		10.93324
Durbin-Watson stat	1.858973			
Inverted AR Roots	.50+.36i	.50-.36i	-.19-.58i	-.19+.58i
	-.61			
Inverted MA Roots	.75			

Test d'autocorrélation

Les résidus des trois modèles ont les autocorrélogrammes suivants

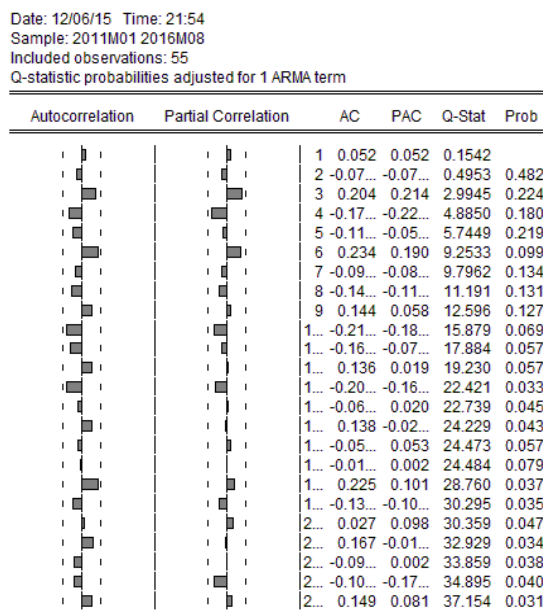


FIG. 4.3 – Autocorrélogramme des résidus du modèle MA(1)

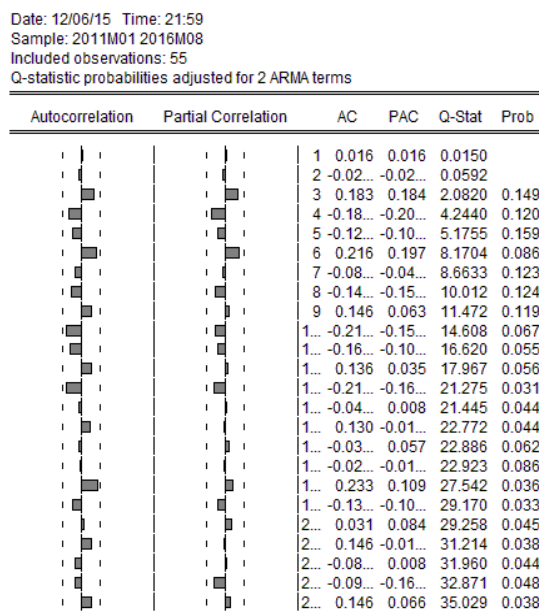


FIG. 4.4 – Autocorrélogramme des résidus du modèle ARMA(2,1)

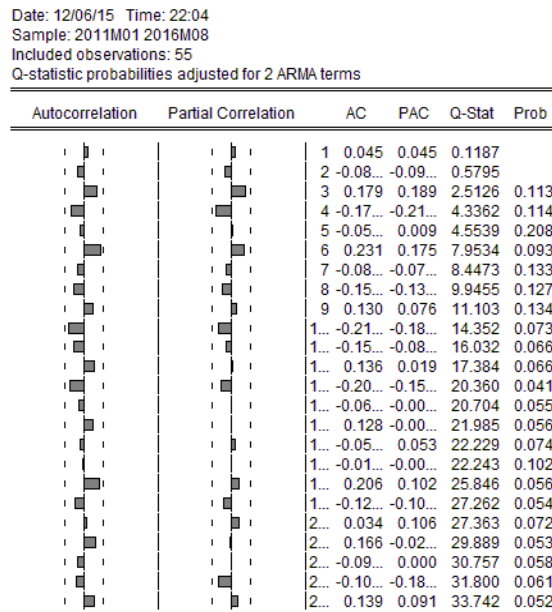


FIG. 4.5 – Autocorrélogramme des résidus du modèle ARMA(5,1)

On remarque qu'il y a absence des pics dans les trois autocorrélogrammes *i.e.* : il y a absence d'autocorrélation des erreurs ce qui montre que les trois modèles sont significatifs, donc l'hypothèse de bruit blanc des résidus est validée. Cependant, pour choisir le modèle à retenir pour la prévision, nous allons recourir aux critères d'information. Ces critères permettent d'évaluer la qualité d'un modèle.

Critères d'information

Modèle	AIC	BIC
MA(1)	10.86086	10.93367
ARMA(2,1)	10.88781	10.99730
ARMA(5,1)	10.89089	11.00039

TAB. 4.2 – Critères d'information pour les trois modèles

D'après ces critères, il ressort que le modèle MA(1) dispose d'une qualité supérieure car les critères d'information de ce modèle sont minimales.

Test de normalité pour les résidus du modèle MA(1)

On veut tester la normalité des résidus du modèle MA(1) :

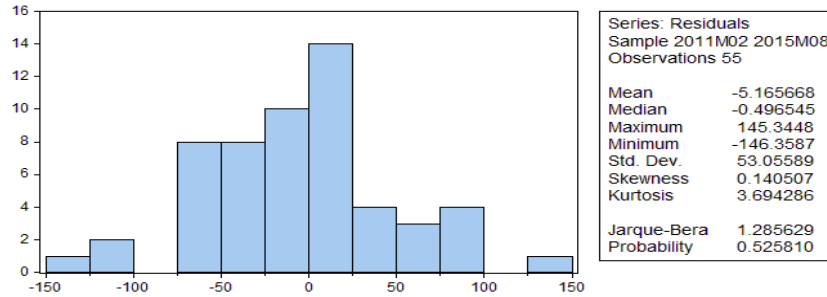


FIG. 4.6 – Normalité des résidus du modèle MA(1)

La statistique $BJ < \chi^2_{1-\alpha}(2)$ ($1.285629 < 5.991$) avec $\alpha = 0.05$, alors on accepte l'hypothèse H_0 de normalité des résidus au seuil α du modèle MA(1).

Test de student des paramètres

Ce test consiste à vérifier que le paramètre du modèle qui a été estimé est statistiquement différent de 0, le modèle MA(1) s'écrit sous la forme :

$$ddialyse_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1},$$

les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 0, \text{ le coefficient est non significatif.} \\ H_1 : \theta \neq 0, \text{ le coefficient est significatif.} \end{cases}$$

Ainsi, pour $\alpha = 0.05$, le paramètre du modèle θ est statistiquement différent de zéro car on accepte H_1 ($|tc| > |\mathcal{T}_{T-q}^\alpha|$), sachant que : $|tc| = \left| \frac{\hat{\theta}}{\hat{\sigma}_\theta} \right| \simeq |-6.2795|$ et $\mathcal{T}_{T-q}^\alpha = \mathcal{T}_{55}^{0.05} = 2.0003$ (T désigne le nombre des observations).

Donc le paramètre θ estimé est statistiquement significatif.

On peut alors tenter de modéliser la série à l'aide d'un modèle moyenne mobile d'ordre 1 pour faire la prévision.

4.2.2 Prévision

Sous EViews, nous obtenons les prévisions suivantes sur 8 mois.

Mois (année 2015)	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
Prévisions	927	957	935	980
IC (95%)	[903, 936]	[942, 977]	[921, 956]	[963, 991]
Mois (année 2016)	Janvier	Février	Mars	Avril
Prévisions	943	997	951	955
IC (95%)	[920, 968]	[980, 1015]	[923, 979]	[948, 987]

TAB. 4.3 – Prévision

Conclusion

Notre travail est basé sur l'application de la méthode de Box-Jenkins sur des données réelles qui représentent le nombre de séances d'hémodialyse afin de prévoir, en utilisant les modèles *ARIMA*, à l'aide de test d'ADF, les autocorrélation, les autocorrélation partiels et les critères d'information notamment AIC et BIC.

On peut conclure à des valeurs prévisionnelles et des résultats satisfaisants et homogènes qui nous conforte dans notre conviction que la méthode utilisée est la plus adéquate pour effectuer notre étude.

Bibliographie

- [1] Agung, I.G.N (2009). Time Series Data Analysis Using Eviews, John Wiley & Sons. Singapore.
- [2] Asteriou, D. et HallS.G. (2006). Applied Econometrics A Modern Approach Using Eviews and Microfit. Palgrave Macmillan, New York.
- [3] Bosq, D. et Lectoutre J.P. (1992). Théorie de l'estimation fonctionnelle. Economica, Paris.
- [4] Bosq, D. et Lectoutre, J.P. (2000). Analyse et prévision des séries chronologique. Masson.
- [5] Bourbonnais, R. (2015). Econometrie : Cours et exercices corrigés, 9^{ème} Edition. Dunod, Paris.
- [6] Bourbonnais, R. Terraza, M. (2004). Analyse des séries Temporelles. Dunod, Paris.
- [7] Box, G.E.P., Jenkins, G.M. et Reinsel, G.C. (2008). Time Series Analysis, Forecasting and Control, Fourth Edition. WILEY, New Jersey.
- [8] Brouks, CH. (2008). Introductory Econometrics for Finance, Third Edition. Cambridge University Press, New Yourk.
- [9] Charpentier, A. (2004). Cours des séries temporelles. Théorie et Applications. Université de Paris.
- [10] Clement, M. P., & Hendry, D. F. (1998). Forecasting economic times series. Cambridge University Press.
- [11] Damodar N. Gujarati, (2004). Econométrie, de boeck. Belgique.
- [12] D.Cryer, J., Chan, k.S., (2008). Time Series Analysis With Applications in R, Second Edition. Springer, New York.
- [13] Dufour, J., (1998). TECHNIQUES DE SÉRIES CHRONOLOGIQUES.
- [14] Dufour, J., (2003). Histoire de l'analyse des séries chronologiques.
- [15] Enders, W., Applied Econometric Time Series, Iowa State University, JOHN WILEY and Sons.

-
- [16] Gasmi, L., (2014). Mémoire de Magister : Application des AGs pour la détermination des paramètres du modèle de séries chronologiques. Université de Béchar.
 - [17] Goldfarb, B., Pardoux, c., (2011). Introduction à la methode Statistique, Statistique et probabilites, Cours et exercices corriges, 6 Edition. DUNOD, Paris.
 - [18] Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1995). Séries Temporelles et Modèles Dynamiques.
 - [19] Gujarati, D. (2004). Econométrie, de boeck. Belgique.
 - [20] Gujaraty, D. (2011). Econometrics Example, McGraw-Hill, USA.
 - [21] Tenenhaus, M. (2007). Statistique ; Méthodes pour décrire, expliquer et prévoir. Dunod, Paris.
 - [22] Woodward, W. A. et Gray, H. L. (1996). On the relationship between the S-array , and the box-jenkins method of ARMA model identification, journal of Américan Statistical Association, vol 76, n°375.
 - [23] Yves, A. (2011). Series temporelles avec R Methodes et cas, Springer-Verlang, France.
 - [24] Zou, H.et Yang, Y. (2004). Combining time series models for forecasting. International Journal of Forecasting, 20, 69-84.