APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L'ESTIMATION DES PLUIES MOYENNE SUR LES BASSINS VERSANTS

ABBANI Said, Département de Génie civil et hydraulique, Université de Ouargla

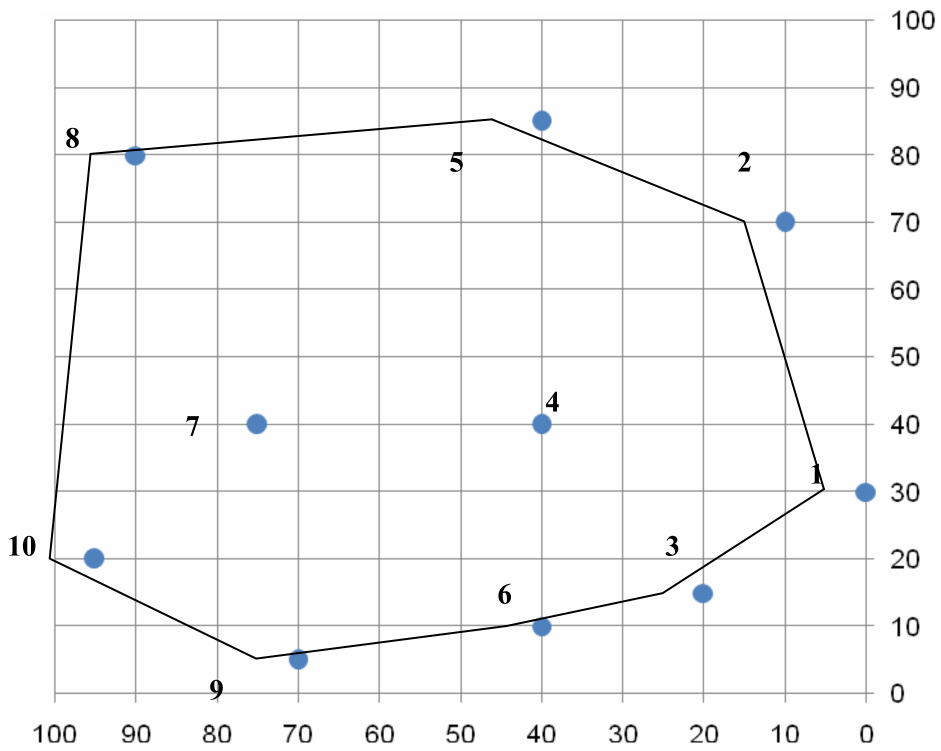
INTRODUCTION

Il existe plusieurs méthodes de détermination de la pluie moyenne sur les bassins versants. Parmi ces méthodes on trouve celle des éléments finis, qui repose sur la discrétisation du basin versant en éléments finis ayant comme sommets les stations de précipitations. L'utilisation de cette méthode requiert :

- la la construction des fonctions d'interpolation pour l'approximation de la fonction hauteur des précipitations, ainsi que les coordonnées géométriques des éléments.
- l'utilisation de la méthode de Gauss pour calculer numériquement l'intégrale numérique dans l'intervalle [-1,+1].

DONNEES DU BASSIN VERSANT

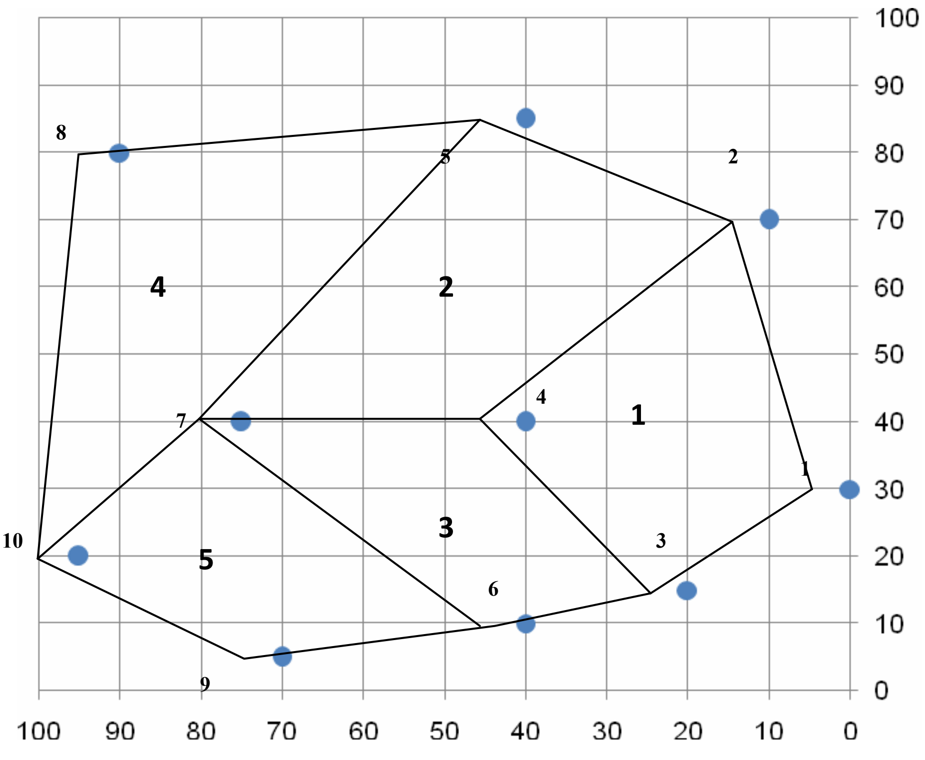
Pour évaluer la quantité d'eau moyenne totale tombée sur le bassin représenté ci-après, a partir des mesures obtenues par des pluviomètres placés en certains points du basin appelés nœuds. Les coordonnées de ces nœuds sont connues ainsi que les hauteurs de précipitations (voir tableau ci-après).



Noeud i	Xi(km)	yi(km)	qi(cm)
1	00	30	4.00
2	10	70	3.00
3	20	15	5.40
4	40	40	6.00
5	40	85	8.50
6	40	10	5.00
7	75	40	8.00
8	90	80	5.00
9	70	05	6.00
10	95	20	5.00

DISCRETISATION DU BASSIN

Pour les problèmes bidimensionnels on utilise des éléments triangulaires ou des éléments quadrilatéraux. Pour ce problème on va utiliser des éléments quadrilatéraux linéaires. Voir figure ci-après



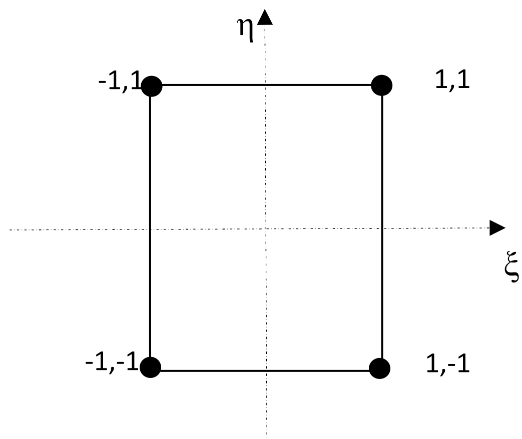
CONNECTIVITE DES ELEMENTS

élément	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4
1	1	3	4	2
2	4	7	5	2
3	3	6	7	4
4	7	10	8	5
5	6	9	10	7

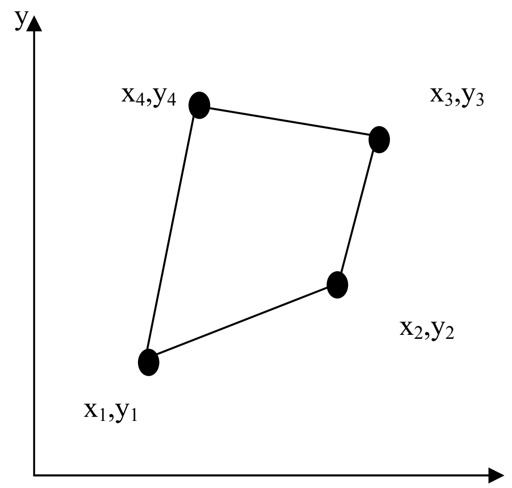
TRANSFORMATION GEOMETRIQUE

Les coordonnées (x,y) d'un point de l'élément réel sont définies en fonction des coordonnées nodales de l'élément ainsi que des coordonnées (ξ,η) du point correspondant de l'élément de référence.

Pour la transformation géométrique des coordonnées des éléments on va utilisé les mêmes fonctions nodales $N_i(\xi,\eta)$ (élément iso paramétrique).



Elément de référence



Elément réel

$$X(\xi,\eta) = [\ N_1(\xi,\eta)\ \ N_2(\xi,\eta)\ \ N_3(\xi,\eta)\ \ N_4(\xi,\eta)\ ] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$Y(\xi,\eta) = [\ N_1(\xi,\eta)\ \ N_2(\xi,\eta)\ \ N_3(\xi,\eta)\ \ N_4(\xi,\eta)\ ] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Les fonctions nodales pour les éléments quadrilatéraux linéaires sont les suivantes:

$N_1(\xi,\eta)=1/4(1 - \xi - \eta + \xi\eta)$

$N_2(\xi,\eta)=1/4(1 + \xi - \eta - \xi\eta)$

$N_3(\xi,\eta)=1/4(1 + \xi + \eta + \xi\eta)$

$N_4(\xi,\eta)=1/4(1 - \xi + \eta - \xi\eta)$

Le Jacobien de transformation est donné par

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

CALCUL DU VOLUME D'EAU MOYEN TOTAL

La quantité d'eau moyenne totale tombée sur chaque élément du basin est:

$Q_e = \int_{Ae} q(x,y)\, dA$

q(x,y) : fonction inconnue qui représente l'intensité de pluie, pour la construire on va utilisé l'approximation par éléments finis.

Pour l'élément quadrilatère linéaire la fonction approchée exprimée en coordonnées paramétriques (ξ,η) est la suivante:

$$q(\xi,\eta) = [\ N_1(\xi,\eta)\ \ N_2(\xi,\eta)\ \ N_3(\xi,\eta)\ \ N_4(\xi,\eta)\ ] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$$Q_e = \int_{Ae} q(x,y)\, dA = \int\int q(\xi,\eta)\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta$$

On remplaçons q(ξ,η) par la fonction approchée, et on utilisons la méthode de Gauss pour intégrer numériquement la fonction q dans l'intervalle [-1,+1]

on obtiens:

$$Q_e = \sum\sum w_i w_j\ [\ N_1(\xi_i,\eta_j)\ \ N_2(\xi_i,\eta_j)\ \ N_3(\xi_i,\eta_j)\ \ N_4(\xi_i,\eta_j)\ ] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \det[J(\xi_i,\eta_j)]$$

les ξ_i, (η_j) sont solutions du polynôme de Legendre d'ordre r

$P_r(\xi) = 0$

Dèfini par: $P_0(\xi) = 1$

$P_1(\xi) = \xi$

.

.

$P_k(\xi) = ((2k-1)/k).\xi.P_{k-1}(\xi) - ((k-1)/k).P_{k-2}(\xi)$ k= 1,2,….,r

w_i et w_j représentes les poids d'intégration de la méthode de Gauss qui sont donnés par:

$w_i = 2(1- \xi_i^2)/(r.\ P_{r-1}(\xi_i))^2$ i= 1,2,…,r

pour un polynôme de Legendre d'ordre r=2

$P_2 = (3/2)\ \xi^2 -1/2$

$\xi_i = \pm 1/\sqrt{3}$

$w_1 = w_2 = 1$

La quantité d'eau totale tombée sur le basin :

$$Q_t = \sum Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 361304166.67\ m^3$$

CONCLUSION

La méthode des éléments finis est flexible, elle permit de créer des stations virtuelles. Elle est programmable, On peut aussi augmenter la précision des calculs par l'introduction des nœuds internes. Ainsi que, on peut inclure l'effet de variation des précipitations avec l'altitude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMAR Khennane, " Méthode des éléments finis énoncé des principes de base", OPU Alger, 1997

[2] ,"Précipitation : analyse et mesure"