# Analyse de sensibilité en programmation mathématique

**Khadra NACHI**
Université d'Es-Sénia, Oran
Faculté des sciences, Département de Mathématiques
BP 1524, El-M'naouer
nachikhadra@yahoo.fr

**Résumé :** Nous présentons dans cette note quelques principaux résultats de stabilité et de sensibilité dans un problème d'optimisation paramètrée. Nous donnons des propriétés topologiques des solutions primales et duales ainsi que de la fonction de performance. Les questions de différentiablité sont aussi examinées.

## 1 Introduction

Les questions de sensibilité en programmation mathématique non linéaire pour des problèmes paramétrés ont retenu l'attention des mathématiciens depuis de nombreuses années. Des résultats très divers et complèmentaires ont été établis. Plus particulièrement, le résultat fondamental de ces travaux est l'obtention d'une représentation lipschitzienne et de sa différentiabilité directionnelle (par rapport aux paramétres) des solutions optimales du problème de minimisation d'une fonction paramétrée soumises à des contraintes elles-mêmes paramétrées.

Notons que le problème standart en dimension finie (avec un nombre fini de contraintes égalités-inégalités) a été étudié par Fiacco [12], Cornet-Laroque [8], Bergounioux [6], Bertsekas [7] qui ont démontré la différentiabilité des points stationnaires (i.e. solutions du système de Kuhn-Tucker) et des multiplicateurs de Lagranges associés. L'utilisation du théorème des fonctions implicites est à la base de ces résultats. Pour cela, des hypothèses de "complémentarité stricte" et "d'indépendance linéaire" (des gradients des contraintes actives ou saturées) sont supposés satisfaites ainsi qu'une condition du second ordre.

Les propriétés de différentiabilité de la valeur optimale ont été étudiées par de nombreux auteurs dont principalement Auslender-Cominetti [4], Rockafellar ([20], [21], [22]), Shapiro ([23], [24]).

Dans le cadre général d'un problème de programmation mathématique posé en dimension infinie, l'étude de la sensibilité a connu un développement très important en surmonttant plusieurs difficultées liées notamment à des propriétés de compacité et aussi à la forme même des contraintes. Sur cet aspect, on pourra consulter de nombreux travaux, citons, par exemple, Alt ([1], [2], [3]), Barbet [5], Dontchev-Hager ([9]), Dontchev-Rockafellar [10], Janin [13], Penot ([18], [19]),...

Nous présentons dans ce travail quelques résultats de sensibilté établis dans ([17]) où la condition du second ordre et la condition de régularité du domaine jouent un rôle crucial. Plus précisément, nous montrons l'existence d'une représentation continûment différentiable (par rapport aux paramètres) des solutions optimales (primales et duales) d'un problème d'optimisation paramétré. Une estimation des premières variations des solutions et de la fonction de performance (fonction valeur) est aussi donnée.

## 2 Existence d'un champ optimal $C^1$

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre fonctionnel suivant : Soient $X$ et $E$ des espaces de Banach; soit $\Lambda$ espace vectoriel normé. Et soient les fonctions $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $g : X \times \Lambda \to E$ et $h := (h_i)_{i=1,...s} : X \times \Lambda \to \mathbb{R}^s$.

On considère, pour tout paramètre $\lambda \in \Lambda$, le problème de programmation mathématique qui consiste à trouver $x_\lambda \in X$ satisfaisant :

$$g(x_\lambda, \lambda) = 0,\ \ h(x_\lambda, \lambda) \leq 0 \text{ et } f(x_\lambda, \lambda) = \min f(x, \lambda).$$

Le but général est d'étudier la dépendance du paramètre $\lambda$ des solutions éventuelles du problème $P(\lambda)$ formulé ci-dessous lorsque $\lambda$ varie au voisinage d'une valeur $\lambda_0$ donnée;

$$P(\lambda) \qquad \left\{ \inf_{x \in D_\lambda} f(x, \lambda) \right.$$

où $D_\lambda := \{x \in X : g(x, \lambda) = 0 \text{ et } h_i(x, \lambda) \leq 0 \ (i = 1, ...s)\}$.

L'objectif est aussi d'obtenir des résultats de sensibilité, i.e. de différentiabilité (resp. différentiabilité directionnelle) par rapport au paramètre de la solution optimale et de son multiplicateur de Lagrange associé.

Introduisons le lagrangien classique associé à $P(\lambda)$ :

$L : X \times E^* \times \mathbb{R}^s \times \Lambda \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, p, q, \lambda) \in X \times E^* \times \mathbb{R}^s \times \Lambda$

$$L(x, p, q, \lambda) := f(x, \lambda) + \langle p, g(x, \lambda) \rangle_{E,E^*} + (q \mid h(x, \lambda))_{\mathbb{R}^s},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E,E^*}$ est le crochet de dualité entre $E$ et $E^*$, $(\cdot \mid \cdot)_{\mathbb{R}^s}$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^s$.

Notre étude a été faite sous les hypothèses générales suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ : [Existence d'une solution]

Le problème $P(0)$ admet une solution locale en $\overline{x}$,

$(\mathcal{H}_2)$ : [Régularité des données]

Les fonctions $f$, $g$, $(h_i)_{i=1,...s}$ sont de classe $C^2$ au voisinage de $(\overline{x}, 0)$,

$(\mathcal{H}_3)$ : [Qualification des contraintes]

$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} g'_x(\overline{x}, 0) \\ \overline{h}'_x(\overline{x}, 0) \end{bmatrix} = E \times \mathbb{R}^m$ où $\overline{h} := (h_i)_{i=1,...m}$ avec $m := cardI(\overline{x})$ et

$I(\overline{x}) := \{i \in \{1, ...s\} : h_i(\overline{x}, 0) = 0\}$ : Ensemble des indices des contraintes actives (pour simplification d'écriture, on omet le dépendance en $\lambda$).

$(\mathcal{H}_4)$ : [Condition du second ordre]

$\exists(\overline{p}, \overline{q}) \in K.T(\overline{x})$ tel que $L''_x(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q}, 0)$ est $\alpha-$coercif sur $Ker\begin{bmatrix} g'_x(\overline{x}, 0) \\ \overline{h}'_x(\overline{x}, 0) \end{bmatrix}$ i.e.

$$\langle v, L''_x(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q}, 0)v \rangle_{X,X^*} \geq \alpha \left\| v \right\|^2 \ \ \forall v \in Ker\begin{bmatrix} g'_x(\overline{x}, 0) \\ \overline{h}'_x(\overline{x}, 0) \end{bmatrix}.$$

$(\mathcal{H}_5)$ : [Stricte-complémentarité]

$\overline{q_i} \gneqq 0 \qquad \forall i \in I(\overline{x}).$

Notons que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ (Karush-Kuhn-Tucker [14]) assurent l'existence d'un multiplicateur de Lagrange (ou d'un état adjoint) $(\overline{p}, \overline{q}) \in E^* \times \mathbb{R}^s_+$ tel que le système suivant soit satisfait :

$$KKT(\overline{x}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} L'_x(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q}, 0) & = & 0, \\ g(\overline{x}, 0) & = & 0, \\ (\overline{q} \mid h(\overline{x}, 0))_{\mathbb{R}^s} & = & 0,\ h(\overline{x}, 0) \leq 0,\ \overline{q} \geq 0. \end{array} \right.$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ permet aussi de montrer que l'état adjoint est unique. On reconnait aussi les conditions suffisantes du second ordre de minimalité locale (le système ci-dessus et l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$; voir Maurer-Zowe [15]) : $\overline{x}$ est assurément minimum local strict de $f(\cdot, 0)$ sur $D_0$ ou une solution locale stricte de $P(0)$ dans le sens suivant :

Un point $\overline{x}$ est une solution locale stricte d'un problème d'optimisation $(P)$ de type $\inf\limits_{x \in D} f(x)$ si

$$\exists V \in \mathcal{V}(\overline{x}), \forall x \in V \cap D\ (x \neq \overline{x}) : f(\overline{x}) < f(x).$$

Enfin, grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_5)$, le système $KKT(\overline{x})$ ci-dessus se réduit à un système d'égalités seulement.

Sous les hypothèses précédentes, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 1** *il existe $W \in \mathcal{V}(0)$ dans $\Lambda$, $U \times V \in \mathcal{V}(\overline{x}, \overline{p}, \overline{q})$ dans $X \times E^* \times \mathbb{R}^s$ et une fonction $z(\cdot) := (x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) : W \to U \times V$ de classe $C^1$ tels que :*
*a) $z(0) = (\overline{x}, \overline{p}, \overline{q})$.*
*b) $\forall \lambda \in W$, $(x(\lambda), p(\lambda), q(\lambda))$ satisfait le système de Karush-Kuhn-Tucker.*

Démonstration : La preuve fera usage du théorème des fonctions implicites, nous allons donc exhiber une application satisfaisant les conditions d'application.
Posons $Z := X \times E^* \times \mathbb{R}^s$, $\overline{z} := (\overline{x}, \overline{p}, \overline{q})$.
Considérons l'application $\Psi : Z \times \Lambda \to X^* \times E \times \mathbb{R}^s$ telle que

$$\Psi(z, \lambda) := \left( L'_x(x, p, q, \lambda), g(x, \lambda), q_1 h_1(x, \lambda), ...., q_s h_s(x, \lambda) \right).$$

Comme $(\overline{p}, \overline{q}) \in K.T(\overline{x})$, on a $\Psi(\overline{z}, 0) = 0$, de plus, d'après la régularité des données, il est clair que $\Psi$ est de classe $C^1$ au voisinage de $(\overline{z}, 0)$ et que :

$$\Psi'_z(\overline{z}, 0) = \left[ \begin{array}{ccc} L''_x(\overline{z}, 0) & g'^*_x(\overline{x}, 0) & h'^*_x(\overline{x}, 0) \\ g'_x(\overline{x}, 0) & 0 & 0 \\ \overline{q} h'_x(\overline{x}, 0) & 0 & diag(h_i(\overline{x}, 0))_{i=1,..s} \end{array} \right].$$

D'autre part, $\Psi'_z(\overline{z}, 0)$ est inversible :
Grâce aux hypothèses $(\mathcal{H}_3)$, $(\mathcal{H}_4)$ et $(\mathcal{H}_5)$, on montre facilement l'injection de $\Psi'_z(\overline{z}, 0)$. En effet, soit $(v, p, q) \in Z$ tel que $\Psi'_z(\overline{z}, 0)(v, p, q) = 0$.
Notons par $I := I(\overline{x}) = \{i \in \{1, ...s\} : h_i(\overline{x}, 0) = 0, \overline{q}_i > 0\}$,
$J := \{i \in \{1, ...s\} : h_i(\overline{x}, 0) < 0\}$ et $K := \{i \in \{1, ...s\} : h_i(\overline{x}, 0) = 0, \overline{q}_i = 0\}$. D'où, d'après $(\mathcal{H}_5)$, l'ensemble $K$ est vide et $I \cup J = \{1, ...s\}$. On obtient donc le système d'égalités suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} L''_x(\overline{z}, 0)v + g'^*_x(\overline{x}, 0)p + h'^*_x(\overline{x}, 0)q & = & 0, & \\ g'_x(\overline{x}, 0)v & = & 0, & \\ \overline{q}_i h'_{ix}(\overline{x}, 0)v & = & 0, & i \in I \\ h_i(\overline{x}, 0)q_i & = & 0, & i \in J. \end{array} \right.$$

On en déduit que $v \in Ker \begin{bmatrix} g'_x(\overline{x},0) \\ \overline{h}'_x(\overline{x},0) \end{bmatrix}$ et que $q = (q_I, 0_J)$.

La première équation donne alors $\langle v, L''_x(\overline{z},0)v\rangle_{X,X^*} = 0$ et l'hypothèse de second ordre permet de conclure que $v = 0$. Et donc

$$\begin{pmatrix} p \\ q_I \end{pmatrix} \in Ker \begin{pmatrix} g'^*_x(\overline{x},0) & \bar{h}'^*_x(\overline{x},0) \end{pmatrix} = \{0\}$$

par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$. On conclut l'injection de l'opérateur $\Psi'_z(\overline{z},0)$.

Soit maintenant $(x^*, y, \alpha) \in X^* \times E \times \mathbb{R}^s$, l'étude de la surjection revient à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} L''_x(\overline{z},0)v + g'^*_x(\overline{x},0)p + h'^*_x(\overline{x},0)q & = & x^*, \\ g'_x(\overline{x},0)v & = & y, \\ \overline{q}_i h'_{ix}(\overline{x},0)v & = & \alpha_i, \quad i \in I \\ h_j(\overline{x},0)q_j & = & \alpha_j, \quad j \in J. \end{cases}$$

Comme $h_j(\overline{x},0) < 0 \ \forall \ j \in J$, de la dernière équation on a : $q_j = \dfrac{\alpha_j}{h_j(\overline{x},0)}$.

Considérons alors le système :

$$(S) \qquad \begin{cases} L''_x(\overline{z},0)v + g'^*_x(\overline{x},0)p + \bar{h}'^*_x(\overline{x},0)q_I & = & x^* - \sum\limits_{j\in J} \bar{h}'^*_{jx}(\overline{x},0)q_j, \\ g'_x(\overline{x},0)v & = & y, \\ \bar{h}'_x(\overline{x},0)v & = & \beta_I := (\frac{\alpha_i}{\overline{q}_i})_{i\in I} \end{cases}$$

D'après la surjection de l'opérateur $B_0 := \begin{bmatrix} g'_x(\overline{x},0) \\ \overline{h}'_x(\overline{x},0) \end{bmatrix} : X \to E \times \mathbb{R}^m$, il existe un vecteur $w \in X$ satisfaisant les équations suivantes :

$$\begin{cases} g'_x(\overline{x},0)w & = & y, \\ \bar{h}'_x(\overline{x},0)w & = & \beta_I. \end{cases}$$

Donc

$$\forall v \in KerB_0 : \begin{cases} g'_x(\overline{x},0)(v+w) & = & y, \\ \bar{h}'_x(\overline{x},0)(v+w) & = & \beta_I. \end{cases}$$

Ainsi la résolution du système $(S)$ revient à résoudre dans $KerB_0 \times E^* \times \mathbb{R}^m$, l'équation suivante :

$$L''_x(\overline{z},0)v + g'^*_x(\overline{x},0)p + \bar{h}'^*_x(\overline{x},0)q_I = u^*$$

où $u^* := x^* - \sum\limits_{j\in J} \bar{h}'^*_{jx}(\overline{x},0)q_j - L''_x(\overline{z},0)w \in X^*$.

D'autre part, grâce à l'hypothèse de coercivité, on peut définir sur $KerB_0$ un produit scalaire en posant :

$$(u \mid v)_{KerB_0} := \langle u, L''_x(\overline{z},0)v\rangle_{X,X^*}, \forall u, v \in KerB_0.$$

De plus, il est facile de montrer que ce produit scalaire induit une norme hilbertienne sur $KerB_0$ notée $\|\cdot\|_{KerB_0}$ (voir [16]).

Comme $u^*_{|KerB_0}$ est une forme linéaire continue sur $KerB_0$ car pour tout $v \in KerB_0$ on a

$$|u^*(v)| \leq \|u^*\|_{X^*} \|v\|_X \,,$$

et d'après $(\mathcal{H}_4)$,

$$|u^*(v)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|u^*\|_{X^*} \|v\|_{KerB_0} \,.$$

Ainsi, le théorème de Riez assure que :

$$\exists ! \zeta \in KerB_0, \forall v \in KerB_0 : u^*(v) = (v \mid \zeta)_{KerB_0} \,.$$

D'où

$$\forall v \in KerB_0 : \langle v, u^* - L''_x(\overline{z}, 0)\zeta \rangle_{X,X^*} = 0.$$

On en déduit que $u^* - L''_x(\overline{z}, 0)\zeta \in \operatorname{Im} B_0^*$, i.e. :

$$\exists (p, q_I) \in E^* \times \mathbb{R}^m : u^* - L''_x(\overline{z}, 0)\zeta = g'^*_x(\overline{x}, 0)p + \bar{h}'^*_x(\overline{x}, 0)q_I.$$

Ce qui permet de conclure la surjection de $\Psi'_z(\overline{z}, 0)$.
$\Psi'_z(\overline{z}, 0)$ est donc un homéomorphisme d'après le théorème de Banach.

Le théorème des fonctions implicites affirme donc que l'équation $\Psi(z, \lambda) = 0$ admet une solution au voisinage de $(\overline{z}, 0)$. Plus précisément, il existe des voisinages $W \in \mathcal{V}(0)$, $U \times V \in \mathcal{V}(\overline{z})$ et il existe une fonction $z(\cdot) := (x(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)) : W \to U \times V$ de classe $C^1$ tels que :

*a)* $x(0) = \overline{x}$, $p(0) = \overline{p}$, $q(0) = \overline{q}$.

*b)* $\Psi(z(\lambda), \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in W$, i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L'_x(z(\lambda), \lambda) & = & 0, \\ g(x(\lambda), \lambda) & = & 0, \\ q_i(\lambda) h_i(x(\lambda), \lambda) & = & 0, \quad i = 1, ...s. \end{array} \right. \tag{1}$$

De plus, par la continuité en $\lambda = 0$, on a $q_i(\lambda) \geq 0$ et $h_i(x(\lambda), \lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda$ très petit et $i = 1, ...s$.

Par conséquent, $(x(\lambda), p(\lambda), q(\lambda))$ satisfait le système de Kuhn-Tucker au voisinage de $\lambda = 0$. $\square$

Il existe donc un champ de Kuhn-Tucker continûment différentiable au voisinage du paramétre $\lambda = 0$. Le résultat suivant montre que ce champ est, en fait, optimal :

**Théorème 2** *Sous les mêmes hypothèses, il existe un voisinage de* $0$*, noté* $W$*, tel que pour tout* $\lambda \in W$*,* $x(\lambda)$ *est une solution locale stricte du problème* $P(\lambda)$ *et* $(p(\lambda), q(\lambda))$ *est l'unique état adjoint associé.*

Démonstration : Il s'agit de vérifier les conditions d'optimalité du second ordre. Pour cela, il suffit de montrer que :

**(a)** il existe $\beta > 0$ tel que

$$\langle v, L''_x(z(\lambda), \lambda)v \rangle_{X,X^*} \geq \beta \|v\|^2 \;\; \forall v \in KerB_\lambda, \forall \lambda \in W.$$

et

**(b)** la condition de qualification des contraintes reste satisfaite au voisinage de $\lambda = 0$, i.e. que l'opérateur $B_\lambda := \left[ \begin{array}{c} g'_x(x(\lambda), \lambda) \\ \overline{h}'_x(x(\lambda), \lambda) \end{array} \right]$ est surjectif pour tout $\lambda$ dans un certain voisinage $W$ de 0.

**Pour le point (a)** : Comme l'application $\lambda \to A_\lambda := L''_x(z(\lambda),\lambda)$ est continue en 0 alors , en utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$, pour tout $\lambda$ dans un certain voisinage $W$ de 0, on a $(\alpha' := \frac{\alpha}{2})$

$$\langle v, A_\lambda v\rangle_{X,X^*} \geq \alpha' \|v\|^2 \ \ \forall v \in KerB_0. \tag{2}$$

Soit, maintenant, $v \in KerB_\lambda$. L'opérateur, $B_0 : X \to E \times \mathbb{R}^m$ étant linéaire continu surjectif alors , d'après le principe de l'application ouverte la multi-application $B_0^{-1}$ est lipschitzienne, i.e. il existe une constante $l > 0$ telle que et pour tout $w, w' \in E \times \mathbb{R}^m$ :

$$B_0^{-1}w \subset B_0^{-1}w' + l\,\|w - w'\|\,\mathcal{B}_X, \tag{3}$$

où $\mathcal{B}_X$ est la boule unité dans $X$.

En particulier, pour $w := B_0 v$ et $w' := B_\lambda v$, alors comme $v \in B_0^{-1}(B_0 v)$ il existe $\bar{v} \in X$ tel que $B_0\bar{v} = B_\lambda v = 0$ et tel que

$$\|\bar{v} - v\| \leq l\,\|B_0 - B_\lambda\|\,\|v\|,$$

l'inégalité triangulaire donne alors un encadrement de $\|\bar{v}\|$; en effet :

$$(1 - l\,\|B_0 - B_\lambda\|)\,\|v\| \leq \|\bar{v}\| \leq (1 + l\,\|B_0 - B_\lambda\|)\,\|v\|.$$

Posons $w := \bar{v} - v$ donc $v = \bar{v} - w$ avec $\bar{v} \in KerB_0$. D'après (2), il vient

$$\begin{aligned}\langle v, A_\lambda v\rangle_{X,X^*} &\geq \alpha' \|\bar{v}\|^2 - 2\langle w, A_\lambda \bar{v}\rangle_{X,X^*} + \langle w, A_\lambda w\rangle_{X,X^*} \\ &\geq \alpha' \|\bar{v}\|^2 - 2\|A_\lambda\|\,\|\bar{v}\|\,\|w\| - \|A_\lambda\|\,\|w\|^2\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité bien connue :

$$2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}b^2,\ \forall \delta \in \mathbb{R}_+^*,$$

pour $\delta_0 := \dfrac{\alpha'}{2}$ alors

$$\langle v, A_\lambda v\rangle_{X,X^*} \geq (\alpha' - \delta_0)\,\|\bar{v}\|^2 - (1 + \frac{1}{\delta_0})\,\|A_\lambda\|\,\|w\|^2 \tag{4}$$

Soit, maintenant, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, en utilisant la continuité en 0, il existe $W$ un voisinage de 0 et il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\|A_\lambda\| \leq c \text{ et } l\,\|B_0 - B_\lambda\| \leq \min(\theta, \frac{\theta}{c}(1 + \frac{1}{\delta_0})^{-\frac{1}{2}}(\alpha' - \delta_0)^{\frac{1}{2}}).$$

Donc l'inégalité (4) donne :

$$\begin{aligned}\langle v, A_\lambda v\rangle_{X,X^*} &\geq ((\alpha' - \delta_0)(1 - l\,\|B_0 - B_\lambda\|)^2 \\ &\quad - (1 + \frac{1}{\delta_0})\,\|A_\lambda\|^2\, l^2\,\|B_0 - B_\lambda\|^2)\,\|v\|^2 \\ &\geq (\alpha' - \delta_0)((1-\theta)^2 - \theta^2)\,\|v\|^2 \\ &\geq \frac{\alpha'}{2}(1 - 2\theta)\,\|v\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $\beta := \dfrac{\alpha'}{2}(1 - 2\theta) > 0$ telle que pour tout $\lambda \in W$, $A_\lambda$ est $\beta$-coercif sur $KerB_\lambda$. Ce qui achève la preuve du point **(a)**.

En conclusion, $x(\lambda)$ est solution locale stricte de $P(\lambda)$ $(\lambda \in W)$.

**Pour le point (b)** : Toujours par la continuité de l'application $\lambda \to B_\lambda \in \mathcal{L}(X,E \times \mathbb{R}^m)$ en $\lambda = 0$, pour $\varepsilon_0 > 0$ fixé, il existe un voisinage de 0, noté $W$ tel que pour tout $\lambda \in W$ :

$$\exists \varepsilon_\lambda \in \mathcal{L}(X,E \times \mathbb{R}^m) : \varepsilon_\lambda := B_\lambda - B_0 \text{ avec } \|\varepsilon_\lambda\|_{\mathcal{L}(X,E\times\mathbb{R}^m)} \leq \varepsilon_0. \tag{5}$$

D'autre part, $B_0$ est surjectif, pour tout $x \in X$, il existe $x_\lambda \in X$ satisfaisant $\varepsilon_\lambda(x) = B_0 x_\lambda$, *i.e.* $B_\lambda x = B_0(x + x_\lambda)$ et tel que $\|B_0 x_\lambda\| \leq \varepsilon_0 \|x\|$ . Ainsi, pour tout $\lambda \in W$, il vient

$$\forall x \in X, \exists x_\lambda \in X : B_\lambda(x - x_\lambda) = B_0(x). \tag{6}$$

Notre but est de montrer que, pour tout $\lambda \in W$, $B_\lambda$ est surjectif. Soit alors $y \in E \times \mathbb{R}^m$, il existe donc un vecteur $x \in X$ tel que $B_0 x = y$. D'après la propriété (6), il existe $x_\lambda \in X : B_\lambda(x - x_\lambda) = B_0(x) = y$. D'où la surjection de l'opérateur $B_\lambda$ pour $\lambda$ voisin de 0.

En conséquence, $(p(\lambda), q(\lambda))$ est l'unique multiplicateur de Lagrange (ou état adjoint) associé à la solution $x(\lambda)$ pour tout paramétre $\lambda$ dans un certain voisinage $W$ de 0. D'où le théorème. $\square$

# 3 Estimation des premières variations

Le champ optimal étant continûment différentiable au voisinage de la perturbation nulle et satisfait, pour tout $\lambda \in W$, les égalités dans (1), nous pouvons alors donner l'expression de sa dérivée en $\lambda = 0$. Nous déduisons aussi une approximation d'ordre 1 de la solution et de son multiplicateur au voisinage de $\lambda = 0$. En effet, on a :

**Corollaire 1** *Sous les mêmes hypothèses, on a*

(*a*) $\begin{bmatrix} x'_\lambda(0) \\ p'_\lambda(0) \\ q'_{I\lambda}(0) \end{bmatrix} = -M^{-1}N : \Lambda \to X \times E^* \times R^m$ *et* $q'_{J\lambda}(0) = 0.$

(*b*) $\begin{bmatrix} x(\lambda) \\ p(\lambda) \\ q_I(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} \\ \bar{q}_I \end{bmatrix} - M^{-1}N(\lambda) + o(\lambda).$

(*c*) *la fonction valeur* $v(\cdot) : W \to \mathbb{R}$ *telle que* $v(\lambda) := f(x(\lambda), \lambda)$ *est de classe* $C^1$ *et* $v'_\lambda(0) = L'_\lambda(\overline{z}, 0)$.

Avec :

$$M := \begin{bmatrix} L''_x(\overline{z},0) & g'^*_x(\overline{x},0) & \bar{h}'^*_x(\overline{x},0) \\ g'_x(\overline{x},0) & 0 & 0 \\ \bar{h}'_x(\overline{x},0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N := \begin{bmatrix} L''_{\lambda,x}(\overline{z},0) \\ g'_\lambda(\overline{x},0) \\ \bar{h}'_\lambda(\overline{x},0) \end{bmatrix}.$$

Démonstration : Comme pour tout $\lambda \in W$, on a le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} L'_x(x(\lambda), p(\lambda), q(\lambda), \lambda) & = & 0 & \\ g(x(\lambda), \lambda) & = & 0 & \\ h_i(x(\lambda), \lambda) & = & 0 & i \in I \\ q_j(\lambda) & = & 0 & j \in J \end{cases}$$

Par différentiation par rapport au paramétre, on obtient :

$$\begin{cases} L''_x(\overline{z},0)\cdot x'_\lambda(0) + L''_{p,x}(\overline{z},0)\cdot p'_\lambda(0) + L''_{q,x}(\overline{z},0)\cdot q'_\lambda(0) & = & -L''_{\lambda,x}(\overline{z},0) \\ g'_x(\overline{x},0)\cdot x'_\lambda(0) & = & -g'_\lambda(\overline{x},0) \\ h'_{ix}(\overline{x},0)\cdot x'_\lambda(0) & = & -h'_{i\lambda}(\overline{x},0) \\ q'_{j\lambda}(0) & = & 0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{bmatrix} x'_\lambda(0) \\ p'(0) \\ q'_I(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L''_x(\overline{z},0) & g'^*_x(\overline{x},0) & \overline{h}'^*_x(\overline{x},0) \\ g'_x(\overline{x},0) & 0 & 0 \\ \overline{h}'_x(\overline{x},0) & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L''_{\lambda,x}(\overline{z},0) \\ g'_\lambda(\overline{x},0) \\ \overline{h}'_\lambda(\overline{x},0) \end{bmatrix}.$$

Ce qui permet d'obtenir les expressions données dans $(a)$ et de déduire $(b)$.
D'autre part, la fonction valeur $v(\cdot) : W \to \mathbb{R}$ telle que $v(\lambda) := f(x(\lambda),\lambda)$ est de classe $C^1$ et on a $v(\lambda) = L(x(\lambda), p(\lambda), q(\lambda), \lambda)$. D'où $v'_\lambda(0) = L'_\lambda(\overline{z},0)$ car :

$$\begin{cases} L'_x(\overline{z},0) & = & 0 & & \\ L'_p(\overline{z},0) & = & g(\overline{x},0) & = & 0 \\ L'_{Iq}(\overline{z},0) & = & \overline{h}(\overline{x},0) & = & 0 \\ L'_{Jq}(\overline{z},0) & = & -\frac{\overline{q}_J}{c} & = & 0. \end{cases}$$

□

# References


[1] Alt, W. (1989) Stability of solutions for a class of nonlinear cone constrained optimization problems, part 1 : basic theory, Numerical Functional Analysis and Optimization 10, 1053-1064.

[2] Alt, W. (1989) Stability of solutions for a class of nonlinear cone constrained optimization problems, part 2 : application to parameter estimation, Numerical Functional Analysis and Optimization 10, 1065-1076.

[3] Alt, W. (1983) Lipschitzian perturbations of infinite optimization problems, Mathematical Programming with Data Pertubations, Ed. A. V. Fiacco, 7-21.

[4] Auslender, A. and Cominetti, R. (1990) First and second order sensitivity analysis of nonlinear programs under directional constraint qualification conditions, Optimization 21, 3, 351-363.

[5] Barbet, L. (1992) Etude de sensibilité différentielle dans un problème d'optimisation paramétré avec contraintes en dimension infinie. Thèse de Doctorat. Université de Poitiers.

[6] Bergounioux, M. (1985) Analyse de sensibilité d'un problème paramétré en optimisation. Etude globale et locale des variations d'une solutions. Thèse de Doctorat du $3^{ième}$ cycle. Université des sciences et techniques de Lille.

[7] Bertsekas, D.P. Constrained optimization and lagrange multiplier methods. Computer science and applied mathematics. A serie of monographs and textbooks. Ed : Werner Rheinboldt. University of Pittsburgh.

[8] Cornet, B. and Laroque, G. (1987) Lipschitz properties of solutions. Mathematical Programming Journal of optimazation Theory and Applications. Vol 53, N° 3, June.

[9] Dontchev, A.L. and Hager, W.W (1998) Lipshitzian stability for state contrained nonlinear optimal control. SIAM J. Control Opt. 36 (2), 698-718.

[10] Dontchev, A.L. and Rockafellar, R.T. (1997) Characterizations of Lipshitzian stability in nonlinear programming. In: A. Fiacco, ed., Mathematical programming with data perturbations. 17th symposium, George Washington University, Washington, DC, USA, May 1995. New York, NY: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. 195, 65-82.

[11] Fiacco, A.V. (1976) Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods. Mathematical Programming 10, 287-311.

[12] Fiacco, A.V. Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming. Academic Press (1983).

[13] Janin, R. (1984) Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming. Mathematical Programming 21, 110-126.

[14] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (1951) Nonlinear programming in proceedings of the second Barkeley symposium on mathematical statistics and probability. J. Neyman. university of California. Press. Barkeley, 481-492.

[15] Maurer, H. and Zowe, J. (1979) First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. Math. Programming 16, 98-110.

[16] Nachi, K. (1991) Dualité non convexe et analyse de sensibilité en dimension infinie. Thèse de Magister. Université d'Oran.

[17] Nachi, K. (2007) Thèse de Doctorat d'Etat. Université d'Oran.

[18] Penot, J.-P. (1984) Differentiability of relations and differential stability of perturbed optimization problems. SIAM J. of Control and Optimization 22, 529-551.

[19] Penot, J.-P. (2004) Differentiability properties of optimal value functions. Canad. J. Math. 56 (4), 825-842.

[20] Rockafellar, R.T. (1982) Lagrange multipliers and subderivatives of optimal value functions in nonlinear programming. Math. Progr. St. 17, 28-66.

[21] Rockafellar, R.T. (1982) Augmented Lagrangians and marginal values in parametrized optimization problems. Wierzbicki, A. Ed. Generalized Lagrangian methods in optimization. Pergamon Press, New York.

[22] Rockafellar, R.T. (1984) Directional differentiability of optimal value function in nonlinear programming problems. Math. Progr. St. 21, 213-226.

[23] Shapiro, A. (1985) Second order sensitivity analysis and asymptotic theory of parametrized nonlinear programs. Math. Progr 33, 280-299.

[24] Shapiro, A. (1988) Sensitivity analysis of nonlinear programs and differentiability properties of metric projections. SIAM J. of Control and Optim. 26, 628-645.