



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA



Faculté des Nouvelles Technologies de l'Information et de la
Communication

Département de l'électronique et de télécommunication

MEMOIRE MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Électronique
Spécialité : Automatique

Présenté par :

BELHAMRA Rahma

THEME

***COMMANDE FLOUE PAR INEGALITES
MATRICIELLES LINEAIRES (LMIS) A BASE DU
MODELE DE TAKAGI SUGENO***

Soutenu publiquement

Le : 09 /05/2017

Devant le jury :

Mr	MANSEUR Abdelghani	MAA	Président	UKM Ouargla
Mr	TIDJANI Zakaria	MAA	Examineur	UKM Ouargla
Mr	NASRI Najeb	MAA	Examineur	UKM Ouargla
Mr	CHEBBARA Fouad	MCA	Encadreur	UKM Ouargla
Mm	KARA Fouzia	MAA	Co-Encadreur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Premièrement, nous remercions dieu, le tout puissant, de nous avoir donné la santé et la volonté pour faire ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon promoteur Mr CHEBBARA Fouad et ma Co-Promotrice Mm KARA Fouzia pour l'implication qu'ils ont pu avoir tout au long de ce travail, leurs suivis, leurs conseils et leurs orientations.

Nos remerciements s'adressent aussi à :Mr. le président et les membres de jury d'avoir accepté de juger et évaluer notre travail .

A tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin, même par un mot d'encouragement et de gentillesse.

Rahma

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A ma mère hbibtii

A mon père

A mon mari

A ma fille

A mes frères (abdalhadi , ayoub_sanfeur)

A mes sœurs « farida et rabab et mama »

A tous mes tentes

A toute la famille « belhamra et ben zaneche et

boulouadnine »

A mes professeurs

« Ce Mémoire à vous tous »

Rahma

SOMMAIRE

Introduction générale	01
------------------------------------	-----------

CHAPITRE I : LA COMMANDE FLOUE TAKAGI-SUGENO (T-S)

I.1. Introduction	03
I.2. Définition des modèles flous Takagi Sugeno	03
I.3. Stabilisation des modèles T-S par retour de sortie	06
I.4. Obtention d'un modèle flou de T-S	07
I.4.1. Transformation d'un système non linéaire en un modèle flou de T-S.....	07
I.5. Construction de modèles T-S à partir de la méthodologie générale	11
I.6. Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous de Takagi-Sugeno	12
I.6.1. Stabilité quadratique des modèles flous de T-S	12
I.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles	13
I.6.3. Stabilisation quadratique des modèles flous de T-S	16
I.6.3. 1. Loi de commande PDC	17
I.7. Conclusion	22

CHAPITRE II : LA TECHNIQUE D'INEGALITE

MATRICIELLE LINEAIRE (LMI)

II.1. Introduction	23
II.2. Inégalités matricielles linéaires (LMIs)	23
II.2.1. Conversion des inégalités matricielles non linéaires en LMIs	24
II.2.2. Regroupement des LMIs	26

II.2.3. Régions LMIs	26
II.2.4. Problèmes classiques LMI	26
II.3. Relaxations	28
II.4. Analyses convexes	30
II.5. Réduction du nombre de contraintes LMIs.....	32
II.6. Conclusion	32

**CHAPITRE III : APPLICATION DES INEGALITES MATRICIELLES
LINEAIRES (LMI) ET DES SYSTEMES FLOUS (T-S)**

III.1. Introduction.....	33
III.2. Application	33
III.2.1 Approximation du modèle	35
III.2.2 Analyse de stabilité	35
III.2.3. Les systèmes flous de Takagi Sugeno	35
III.2.3.1 Analyse de stabilité SYSTEME/CONTROLEUR	35
III.2.3.2. Analyse de stabilité SYSTEME/OBSERVATEUR	36
III.2.3.3. Analyse de stabilité SYSTEME/ CONTROLEUR/ OBSERVATEUR	37
III.3 Conclusion	40
Conclusion générale	41
Bibliographie	42

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) :	Vue générale de la méthodologie d'identification non linéaire basée sur l'approche de clustering flou	12
Figure (I.2) :	Représentation du concept PDC.....	17
Figure (III.1) :	pendule inversé	34
Figure (III.2) :	Évolution angulaire (x_1 et \hat{x}_1).....	39
Figure (III.3) :	Évolution de la vitesse angulaire (x_2 et \hat{x}_2).....	39
Figure (III.4) :	Évolution de la commande.....	40

ABREVIATIONS ET SYMBOLES

LMI : Inégalité Matricielle Linéaire

PDC : Parallel Distributed Compensation

MFC : Modèle flou continu

MFD : Modèle flou discret

Introduction
générale

INTRODUCTION GENERALE

La logique floue qui repose sur la théorie mathématique des ensembles flous a été initiée dans les années soixante par Lotfi Zadaeh à l'université de Berkeley. L'intérêt principal de la logique floue est de permettre la représentation et le traitement de connaissances imprécises. Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que les systèmes expert, la classification de données, le traitement du signal, la gestion des bases de données, la modélisation ainsi que la commande des systèmes automatiques. La première application de la commande floue a été réalisée par Mamdani en 1974 sur un moteur à vapeur, et la première application industrielle a porté sur la commande d'un four à ciment par logique floue [Mamd 94].

Habituellement, la logique floue est exprimée par un ensemble de règles linguistiques dites règles floues, elles sont utilisées pour décrire le comportement dynamique d'un système inconnu ou mal défini. De ce point de vu, on distingue deux types principaux de systèmes flous: les systèmes flous à conclusion symbolique (systèmes flous linguistiques ou de Mamdani) et ceux à conclusion fonctionnelle (systèmes flous de Takagi-Sugeno) [Tak 85]. Dans les deux types, les prémisses des règles sont exprimées symboliquement, seule l'expression des conclusions des règles permet alors de dissocier les deux types de systèmes. Pour les systèmes flous de type T-S la partie conclusion est exprimée sous la forme d'une constante ou de manière générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrées. Les modèles flous de type Takagi-Sugeno, peuvent s'interpréter comme un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires dépendantes des variables de prémisses. Ces fonctions peuvent être obtenues par différentes méthodes, soit par identification ou par linéarisation autour d'un ensemble de points de fonctionnement, soit directement à partir d'un modèle mathématique non linéaire [Morère 01], [Chad 02]. Cette dernière est la méthode utilisée le long de ce mémoire, dans ce cas les modèles non linéaires peuvent se mettre sous la forme de modèles T-S représentant exactement le modèle non linéaire dans l'espace d'état.

La loi de commande couramment utilisée dans ce type de modèles est le retour d'état linéaire appelée PDC (Parallel Distributed Compensation) [Wang 95], [Tanaka 98]. L'analyse de la stabilité et de la stabilisation de ces modèles dans la plupart des travaux est basée

généralement sur la fonction de Lyapunov quadratique qui produit des conditions suffisantes de stabilité [Tanaka 98], qui peuvent être exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). L'avantage principal de la fonction quadratique est que la recherche d'une matrice commune et les gains de retour d'état est facile à mettre en œuvre et peut être exprimée comme un problème d'optimisation convexe en terme de LMI résolu efficacement par différentes méthodes. Cependant, les conditions de stabilité obtenues étant seulement suffisantes et assez conservatives car elles exigent la stabilité de tous les modèles locaux (sous modèles). Notre travail se focalise sur le relâchement des conditions de stabilité des systèmes flous de T-S exprimées sous forme d'LMI.

Le travail réalisé est regroupé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions de bases et aux outils utilisés le long de ce mémoire. Il présente les modèles flous de T-S, l'étude de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de T-S. Les conditions de stabilité et/ou stabilisation sont obtenues à l'aide de la fonction de Lyapunov de type quadratique et elles sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). La loi de commande utilisée dans ce cas est du type PDC.

Dans le deuxième chapitre, on présente l'outil numérique LMI, les différentes propriétés matricielles et également le problème classique utilisée dans la suite de ce mémoire.

Dans le troisième chapitre, on représente la stratégie de commande proposée qui fournit une bonne performance dans le but d'assurer que le système en boucle fermée soit stable au sens de Lyapunov. La stratégie de commande développée est validée par un exemple de simulation qui montre l'efficacité de l'estimation d'état d'une part et l'efficacité de l'approche LMI d'une autre part.

Enfin nous concluons par un bilan de notre travail.

Chapitre I

CHAPITRE I : LA COMMANDE FLOUE T-S

I.1. Introduction

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux sur la modélisation, la stabilité, et la stabilisation des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S). Nous présenterons les différentes techniques d'obtention d'un modèle T-S et donnerons une représentation des notions de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles rencontrées dans la littérature. Une loi de commande pour les modèles T-S proposés sera présentée. Cette étude permettra de positionner notre travail dans le domaine et de poser clairement le problème abordé dans ce mémoire.

I.2. Définition des modèles flous Takagi Sugeno

Le modèle de Takagi-Sugeno est décrit par un ensemble de règles floues SI-ALORS, représentant des relations locales d'entrées/sorties linéaires en différents points de fonctionnement d'un système [Tak 85]. Ces représentations locales, appelées "sous-modèles", permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour de points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état.

La particularité d'un modèle flou de T-S est que la logique floue est seulement utilisée dans la partie prémisse des règles. La partie conclusion utilise des variables numériques plutôt que des variables linguistiques et s'exprime sous la forme d'une constante ou de manière générale d'une fonction ou d'une équation différentielle dépendant des variables d'entrées.

Les modèles flous de T-S sont représentés dans l'espace d'état sous la forme continue (MFC) et discret (MFD) [Tak 85] :

a)- Modèle flou continu (MFC)

Règle i du procédé :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ ALORS } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.1})$$

Chaque équation de sortie est représentée sous la forme d'état $A_i x(t) + B_i u(t)$ appelée un "sous-modèle". A chaque règle R^i est attribué un poids $w_i(z(t))$ qui dépend du degré d'appartenance de $z_j(t)$ aux sous-ensembles flous F_j^i , et du choix de la modélisation de l'opérateur 'ET' reliant les prémisses d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z(t)) \quad (\text{I.2})$$

$F_j^i(z(t))$ est la valeur de la fonction d'appartenance z_j dans l'ensemble flou F_j^i et $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.3})$$

Les sorties finales du modèle flou de T-S sont décrites de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{array} \right. \quad (\text{I.4})$$

En posant

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (\text{I.5})$$

où

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.6})$$

Donc l'équation (I.4) peut être réécrite comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

De la même manière, le modèle flou discret est défini comme suit [Tak 85]:

b)- Modèle flou discret (MFD)

Règle i du procédé :

$$\text{SI } z_1(k) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } z_p(k) \text{ est } F_p^i \text{ Alors } \begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) \end{cases} \quad i=1,2,\dots,r \quad (\text{I.8})$$

Les sorties finales du modèle flou sont définies par :

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))\{A_i x(k) + B_i u(k)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \\ y(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))C_i x(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

En posant

$$h_i(z(k)) = \frac{w_i(z(k))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(k))} \quad (\text{I.10})$$

L'équation(I.9) peut être réécrite comme suite :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))\{A_i x(k) + B_i u(k)\} \\ y(k) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k))C_i x(k) \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Généralement, il est plus difficile de justifier le mot "flou" pour ce type de modèles. Effectivement si on peut considérer que l'approche historique consistait à utiliser des

connaissances a priori sur la commande d'un système pour les intégrer dans un régulateur, dans le cas des modèles flous de T-S, on ne retrouve pas cette philosophie. On peut simplement dire, que la représentation sous la forme d'un modèle flou de T-S, est une "astuce" permettant une réécriture du modèle non linéaire, en "reportant" les non linéarités dans la partie prémisses des règles[Morère 01].

I.3. Stabilisation des modèles TS par retour de sortie

Deux possibilités existent : le retour d'état dynamique ou l'ajout d'un observateur d'état. Dans le premier cas, la loi de commande utilisée est :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = A_z \bar{x}(t) + B_z y(t) \\ u(t) = C_z \bar{x}(t) + D_z y(t) \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Elle suppose le vecteur des prémisses $z(t)$ mesuré. Les développements techniques autour de ce type de commande, sont relativement fastidieux et ne sont pas développés ici. Le lecteur peut les retrouver dans la suite on se place dans le deuxième cas, utilisant un observateur. Ce dernier, peut s'écrire de façon générale

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = A_z \hat{x}(t) + B_z u(t) + K_z (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y} = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

On remarquera que le vecteur des prémisses $z(t)$ n'est pas forcément mesuré, alors dans (I.13) on utilise son estimée $\hat{z}(t)$. Dans ce cas, la loi de commande s'écrit :

$$U(t) = - F_z^j (\hat{z}(t)) \quad (\text{I.14})$$

La majorité des résultats rencontrés dans la littérature s'intéresse au cas particulier où $z(t)$ est mesurable, $\hat{z}(t) = z(t)$.

La dynamique de l'erreur de reconstruction $x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\delta \tilde{x}(t) = (A_z - K_z C_z) \tilde{x}(t) \quad (\text{I.15})$$

$$\begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z - B_z F_z & B_z F_z \\ 0 & A_z - K_z C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Un principe de séparation peut être énoncé de plusieurs façons, en utilisant les compléments de Schur.

I.4. Obtention d'un modèle flou de T-S

Les modèles flous de T-S peuvent être obtenus de trois façons:

- Par identification, à partir des signaux d'entrées/sorties on peut identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement [Gasso 00].
- Par linéarisation du modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement [Tanaka 01].
- Par passage d'un modèle non linéaire en la commande à un modèle flou de T-S. Elle permet d'obtenir un représentant de type T-S d'un modèle non linéaire (Il ne s'agit pas d'une linéarisation autour de points de fonctionnement) [Thier 01], [Morère 01]. Cette troisième approche, qui est utilisée dans la suite de ce mémoire.

Notons, aussi, que pour un système donné, l'obtention d'un modèle de T-S n'est pas unique.

I.4.1. Transformation d'un système non linéaire en un modèle flou de T-S

Cette méthode permet de passer d'un modèle non linéaire en la commande, de la forme (I.18) dans le cas continu et (I.19) dans le cas discret, à un modèle flou de T-S est appelée aussi approche par secteur non linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = g(x(t)) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) + B(x(k))u(k) \\ y(k) = g(x(k)) + D(x(k))u(k) \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

où

$$\begin{aligned} x(t) \in \mathfrak{X}^n, x(k+1) \in \mathfrak{X}^n, y(t) \in \mathfrak{Y}^q, y(k) \in \mathfrak{Y}^q, f(x(t)) \in \mathfrak{X}^n, f(x(k)) \in \mathfrak{X}^n, g(x(t)) \in \mathfrak{Y}^q, \\ g(x(k)) \in \mathfrak{Y}^q, B(x(t)) \in \mathfrak{X}^{n,m}, B(x(k)) \in \mathfrak{X}^{n,m}, D(x(t)) \in \mathfrak{X}^{q,m}, D(x(k)) \in \mathfrak{X}^{q,m}. \end{aligned}$$

Elle permet d'obtenir un représentant de type T-S d'un modèle non linéaire. L'avantage de cette méthode et de réduire le nombre de modèles locaux par rapport à la méthode de

linéarisation. En effet, le nombre de contraintes matricielles se trouve généralement réduit par cette méthode. Dans toute la suite, seul le cas continu est pris en compte, le cas discret se traite de la même manière.

- **Conditions d'obtention d'un modèle flou de T-S**

Le cas le plus utilisé est la transformation d'un modèle non linéaire à un modèle flou de T-S avec des fonctions à une variable [Tanaka 98]. Supposons dans la suite que le système se stabilise autour d'un point d'équilibre 0 (zéro).

Lemme 1.1 : [Morère 01] Si $\forall x \in [-a, b]$ avec $(a, b) \in \mathfrak{R}^2$, $f(x(t)): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ est une fonction bornée sur $[-a, b]$, alors il existe deux fonctions $h_1(x), \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ et $h_2(x), \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ et deux scalaires α et β telsque

$$h_1(x) + h_2(x) = 1, h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0 \text{ et } f(x) = h_1(x)\alpha + h_2(x)\beta \quad (\text{I.19})$$

Preuve: On considère la fonction $f(x)$ bornée telle que $\beta \leq f(x(t)) \leq \alpha$, on peut toujours écrire:

$$f(x) = h_1(x)\alpha + h_2(x)\beta \quad (\text{I.20})$$

avec :

$$h_1(x) = \frac{f(x) - \beta}{\alpha - \beta}, \quad h_2(x) = \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - \beta} \quad (\text{I.21})$$

$$\alpha = \max_{x \in [-a, b]} f(x) \text{ et } \beta = \min_{x \in [-a, b]} f(x) \quad (\text{I.22})$$

Exemple 1.1 :

Considérons le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = 2x(t) \sin(x(t))$$

Pour traiter la non linéarité, il faut prendre en compte la fonction non linéaire $f(x) = \sin(x)$ qui est bornée pour $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 > \pi/2$.

Selon (I.20) on peut écrire la fonction $\sin(x)$ comme suit :

$$\sin(x) = \frac{\sin(x)+1}{2} \times 1 + \frac{1-\sin(x)}{2} \times (-1) \quad (\text{I.23})$$

On obtient donc le modèle flou de T-S suivant :

Si x est $h_1(x)$ ALORS $\dot{x}(t) = 2x(t) \times 1$

Si x est $h_2(x)$ ALORS $\dot{x}(t) = 2x(t) \times (-1)$

où

$$h_1(x) = \frac{\sin(x)+1}{2}, \quad h_2(x) = \frac{1-\sin(x)}{2}, \quad \alpha = 1 \text{ et } \beta = -1 \quad (\text{I.24})$$

Pour éviter d'avoir des modèles ayant des termes constants, le traitement des non linéarités peut se faire suivant la manière générale suivante.

Le modèle non linéaire doit être transformé pour aboutir à :

$$\dot{x}(t) = L(x(t))x(t) + g(x(t))u(t) \quad (\text{I.25})$$

Pour $g(x(t))$, il suffit de considérer les non linéarités bornées, pour $L(x(t))$, cela revient à considérer les fonctions de type $f_i(x_j)/x_j$, qui est évidemment bornée, donc, il faut obligatoirement avoir $\lim_{x_j \rightarrow 0} f_i(x_j)/x_j < \infty$.

Exemple 1.2 : Considérons le modèle non linéaire affine en la commande suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \sin(x_1) + u(t) \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2^2 - 3x_2 + x_2^2u(t) \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

$$y(t) = x_2^2x_1$$

Ce modèle peut être représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(x_1) \\ 2x_2^2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} x_2^2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Les deux termes non linéaires sont: $\sin(x_1)$ et x_2^2 qui sont bornés pour $x_1 > \frac{\pi}{2}$ et $x_2 \in [-a, a]$

et qui aboutit à un modèle flou de T-S à 4 règles. On peut transformer les termes non linéaires suivant le lemme 1.1 comme suit :

$$\sin(x_1) = \frac{\sin(x_1) + 1}{2} \times 1 + \frac{1 - \sin(x_1)}{2} \times (-1) \quad (\text{I.27})$$

$$x_2^2 = \frac{x_2^2}{a^2} \times a^2 + \frac{a^2 - x_2^2}{a^2} \times 0 \quad (\text{I.28})$$

avec

$$h_1^1 = \frac{1}{2}(\sin(x) + 1), \quad h_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin(x)) \quad (\text{I.29})$$

$$h_2^1 = \frac{x_2^2}{a^2}, \quad h_2^2 = 1 - \frac{x_2^2}{a^2} \quad (\text{I.30})$$

Ainsi, on aboutit à 4 modèles locaux, obtenus à partir des 4 combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires $\sin(x_1)$ et x_2^2 , décrits par les matrices suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2a^2 & -3 \end{bmatrix} \\ B_1 = [1 \quad a^2]^T \\ C_1 = [a^2 \quad 0] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ B_2 = [1 \quad 0]^T \\ C_2 = [0 \quad 0] \end{array} \right. \quad (\text{I.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2a^2 & -3 \end{bmatrix} \\ B_3 = B_1 \\ C_3 = C_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ B_4 = B_2 \\ C_4 = C_2 \end{array} \right.$$

Enfin, le système non linéaire (I.26) peut être représenté par le modèle flou de T-S suivant :

Règle 01:

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^1 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ y(t) = C_1x(t) \end{cases}$$

Règle 02:

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^1 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_2x(t) \end{cases}$$

Règle 03:

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^2 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^1 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ y(t) = C_3x(t) \end{cases}$$

Règle 04:

$$\text{SI } x_1(t) \text{ est } h_1^2 \text{ et } x_2(t) \text{ est } h_2^2 \quad \text{ALORS} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t) \\ y(t) = C_4x(t) \end{cases}$$

En prenant l'opérateur produit comme opérateur de conjonction, les fonctions d'activation, au nombre de 4, sont obtenues à partir des produits : $h_1^{1 \text{ ou } 2} \times h_2^{1 \text{ ou } 2}$

$$\mu_1(x) = h_1^1(x_1) \times h_2^1(x_2) \quad \mu_2(x) = h_1^1(x_1) \times h_2^2(x_2)$$

$$\mu_3(x) = h_1^2(x_1) \times h_2^1(x_2) \quad \mu_4(x) = h_1^2(x_1) \times h_2^2(x_2)$$

Le modèle flou de T-S obtenu, représente exactement le modèle non linéaire (I.26) où $x_1 > \frac{\pi}{2}$ et $x_2 \in [-a, a]$.

I.5. Construction de modèles TS à partir méthodologie générale

Nous avons vu que, les techniques de clustering flou sont des outils puissants pour la reconnaissance des formes à partir des données. Dans le cadre de la modélisation floue des systèmes, notre intérêt porte sur l'obtention des modèles Takagi-Sugeno qui permettent une décomposition automatique d'un système non linéaire dans un ensemble de régions linéaires.

Pour cela, nous appliquons des techniques de clustering flou dans l'espace produit d'entrée sortie des données.

Les algorithmes présentés précédemment ont tous des caractéristiques particulières qui peuvent être réunies dans une seule vue d'ensemble. Nous abordons ainsi une description d'une méthodologie générale pour la construction des modèles flous du type TS, en mettant l'accent sur les besoins communs qui sont : la validation du nombre de clusters, la génération des fonctions d'appartenance des antécédents, l'obtention des paramètres des conséquents et la validation numérique du modèle final.

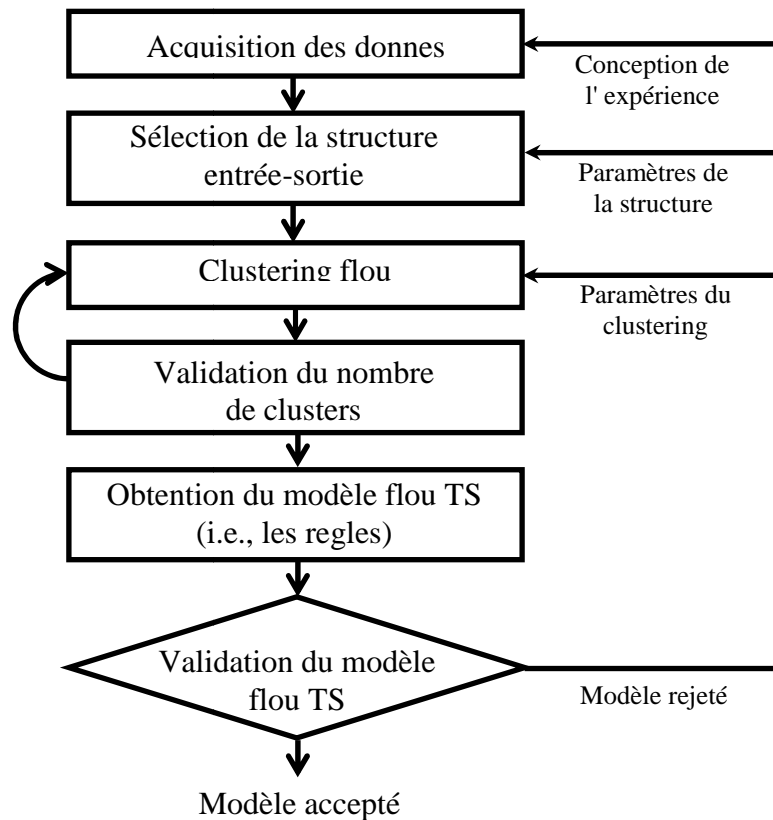


Figure I.1. Vue générale de la méthodologie d'identification non linéaire basée sur l'approche de clustering flou

I.6. Stabilité et stabilisation quadratique des modèles flous de Takagi-Sugeno

I.6.1. Stabilité quadratique des modèles flous de T-S

L'analyse de la stabilité des modèles flous est généralement basée sur les fonctions de Lyapunov candidates. Nous nous intéressons dans ce travail à l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques. Il s'agit de chercher une matrice symétrique définie positive et sa fonction de Lyapunov quadratique associée telles que certaines conditions garantissent les

propriétés de stabilité. Dans toute la suite, sans perte de généralité on suppose que le point d'équilibre est l'origine.

Le principe de stabilité selon Lyapunov s'appuie sur une observation physique fondamentale sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Si cette énergie (qui est généralement scalaire), est continûment dissipée, on parle alors de système dissipatif. Dans ce cas, on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. Ainsi l'idée de Lyapunov est d'examiner la variation d'une fonction scalaire pour étudier la variation d'énergie d'un système donné. D'abord, on présente les différentes fonctions de Lyapunov le plus souvent employées dans la théorie de stabilité des modèles flous de T-S.

I.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles

En général, il n'existe pas de méthodes systématiques pour trouver une fonction candidate de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dépendants de la forme particulière imposée à la fonction $V(x)$ et de la structure du système. Cependant, la fonction de Lyapunov est choisie parmi une famille de fonctions prédéfinies [Chad 02], la plus utilisée est la famille des fonctions quadratique. On distingue les formes suivantes :

- **Fonction de Lyapunov quadratique**

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est dite quadratique. Elle est définie par la forme quadratique suivante:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P \in R^{n,n}, \quad P = P^T > 0 \quad (\text{I.32})$$

Si on étudie la stabilité avec ce type de fonction de Lyapunov on parlera de stabilité quadratique. Donc, trouver une fonction de Lyapunov revient à trouver une matrice symétrique définie positive P . L'inconvénient de cette fonction réside dans l'obtention des conditions de stabilités très conservatives, d'où l'intérêt de chercher des conditions qui le sont beaucoup moins conservatives (conditions relâchées) comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

- **Fonction affine paramétrique**

Cette fonction est de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)P(\theta)x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{I.33})$$

avec $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$ et est souvent utilisée pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps du type

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) \quad (\text{I.34})$$

avec $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_k A_k$ où les paramètres θ_i et leurs variation sont bornés [Gahi 96].

- **Fonction polyquadratique**

La forme de cette fonction est la suivante [Cao 96]:

$$V(x(t), z(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{I.35})$$

où les h_i sont les fonctions d'activation définies par (I.5). Dans le cas des modèles flous de T-S, cette fonction permet de relâcher les contraintes imposées par la méthode quadratique. En effet, trouver une matrice pour chaque modèle local est plus facile que trouver une matrice commune entre tout les modèles locaux, elle permet de réduire un problème de stabilité globale d'un modèle non linéaire à l'analyse indépendante de la stabilité locale de modèles linéaires.

Cette fonction représente le cas le plus général de fonctions quadratiques. En effet, il suffit de choisir $P_i = P$ pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Plusieurs travaux utilisent ce type de fonctions que ce soit dans le cas continu, ou bien dans le cas discret [Morère 01].

- **Fonctions continues par morceaux**

Ce type de fonctions est donné par la forme suivante [Feng 03]:

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_n(x(t))) \quad (\text{I.36})$$

avec

$$V(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{I.37})$$

Ce type de fonctions fait l'objet d'applications dans le cas des systèmes flous [Cao 99], [Joh 99], il présente l'avantage d'être moins conservatif que la fonction quadratique.

Les théorèmes de stabilité suivants, basés sur la fonction de Lyapunov quadratique donnent les conditions suffisantes permettant de garantir la stabilité de modèles flous continus et discrets décrits respectivement par l'expressions (I.3) dans le cas continu et (I.6) dans le cas discret.

- **Modèle flou continu (MFC)**

Soit le modèle flou de T-S continu suivant en régime libre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (\text{I.38})$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (I.32) :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \quad (\text{I.39})$$

ou encore en utilisant (I.38) :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) \quad (\text{I.40})$$

En utilisant la relation (I.6), on obtient :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) \quad (\text{I.41})$$

Théorème 1 : [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (I.38) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune P définie positive telle que:

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.42})$$

- **Modèle flou discret (MFD)**

Soit le modèle flou de T-S discret, suivant, en régime libre :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(k)) A_i x(k) \quad (\text{I.43})$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction $V(x(k)) = x(k)^T P_i x(k)$ comme suit :

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) \quad (\text{I.44})$$

En calculant (I.44) le long des trajectoires du modèle (I.47), on obtient :

$$\Delta V(x(k+1)) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(k)) A_i x(k) \right)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(k)) A_i x(k) \right) - x(k)^T P x(k) \quad (\text{I.45})$$

alors
$$\Delta V(x(k+1)) = x(k)^T (A_i^T P A_i - P) x(k) \quad (\text{I.46})$$

Théorème 2 : [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou discret décrit par (I.43) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P définie positive telle que :

$$P > 0, \quad A_i^T P A_i - P < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.47})$$

Les conditions de stabilité obtenues sont évidemment conservatives puisque la partie prémisse des règles n'est pas prise en compte. Pour la suite, chaque sous-modèle est supposé vérifier les propriétés de commandabilité et d'observabilité suivantes [Morère 01] :

- Si les paires $((A_i, B_i), i = 1, 2, \dots, r)$ sont commandables, alors les modèles flous (I.12) et (I.16) sont localement commandables.
- Si les paires $((A_i, C_i), i = 1, 2, \dots, r)$ sont observables, alors les modèles flous (I.12) et (I.16) sont localement observables.

I.6.3. Stabilisation quadratique des modèles flous de T-S

Pour garantir la stabilité d'un modèle flou de T-S, nous avons recours à la synthèse d'une commande stabilisante. Pour ce faire, en s'inspirant des résultats d'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, on aboutit à des conditions de synthèse de commande par retour d'état. Les conditions sur les gains de commande ainsi obtenues, ne sont pas nécessairement formulées directement en un problème LMI. En effet, dans certains cas, on obtient des inégalités matricielles non linéaires, qui nécessitent un ensemble de transformations matricielles pour les rendre linéaires. Alors pour générer un signal de commande stabilisant pour le système (I.12) ou (I.16), plusieurs formules de commande floue sont proposées dans la littérature, on ne citera ici que la plus utilisée, c'est la loi de commande basée sur le retour d'état et connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation).

Dans cette loi de commande, les matrices de la représentation d'état du système en boucle ouverte sont remplacées par celles du système bouclé.

I.6.3.1. Loi de commande PDC

Le concept PDC est utilisé pour élaborer une loi de commande pour les modèles flous de type T-S. L'idée est de calculer une loi de commande linéaire par retour d'état pour chaque sous-modèle du modèle flou. La détermination d'une loi de commande revient à déterminer pour chaque modèle local (sous-modèle) des gains matriciels. Chaque modèle local est stabilisé localement par une loi de commande linéaire. La loi de commande globale, qui en général est non linéaire, est obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales.

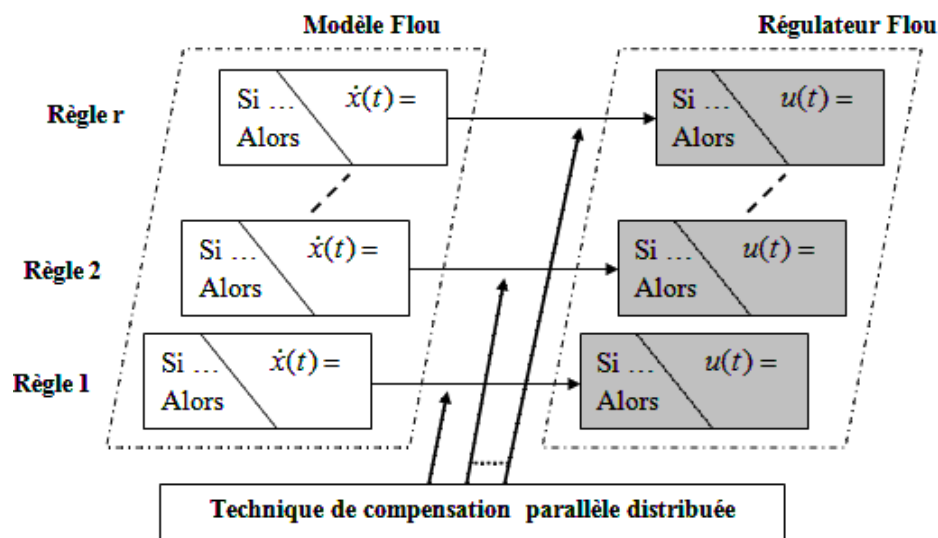


Figure I.2. Représentation du concept PDC.

Le régulateur flou PDC partage les mêmes ensembles flous que celle du modèle flou de T-S, donc, il garde les mêmes parties prémisses ainsi que les mêmes fonctions d'appartenance. L'avantage majeur de cette loi de commande, est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle T-S. La figure I.2 illustre cette loi de commande.

Pour les modèles flous continus (I.6) et discrets (I.13), la réalisation du régulateur se fait de la façon suivante :

Règle i du régulateur :

$$\text{SI } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \quad \text{ALORS} \quad u(t) = -F_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{I.48})$$

La sortie finale du régulateur est inférée par l'équation suivante :

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))F_i x(t) \quad (\text{I.49})$$

La conception du régulateur revient à déterminer les gains locaux de retour d'état F_i dans la partie conclusion des règles de la loi de commande PDC.

a. Conditions de stabilité du modèle bouclé

Pour obtenir l'expression de la boucle fermée, il suffit de substituer (I.49) à (I.38) (cas continu). Ainsi l'expression obtenue est la suivante :

• **MFC**

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{A_i - B_i F_j\}x(t) \quad (\text{I.50})$$

De la même façon, on obtient l'expression dans le cas discret comme suit :

• **MFD**

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\{A_i - B_i F_j\}x(k) \quad (\text{I.51})$$

Les équations (I.50) et (I.51) peuvent être réécrites de la manière suivante :

• **MFC**

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left\{\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right\}x(t) \quad (\text{I.52})$$

• **MFD**

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(k))G_{ii}x(k) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(k))h_j(z(k))\left\{\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right\}x(k) \quad (\text{I.53})$$

où $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

En appliquant les théorèmes I.1 et I.2 respectivement à (I.52) et (I.53), il est possible de tirer des conditions de stabilité pour les MFC et MFD. Le même raisonnement précédent, est utilisé pour trouver les conditions de stabilité de (I.52) et (I.53) respectivement.

- **MFC**

Théorème 3 : [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou, continu, décrit par (I.52) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{I.54})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) < 0 \quad i < j \quad (\text{I.55})$$

pour tous les i et j , sauf les paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$

Preuve : Soit le modèle flou de T-S décrit par (I.41), la stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (I.32) (qui est représentée en (I.39)) ou encoure en utilisant (I.52) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right)^T P x(t) \\ &\quad + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right) \\ \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x(t)^T G_{ii}^T P x(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x(t)^T P G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x(t)^T (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \left(\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right) x(t) \end{aligned}$$

Selon les conditions (I.54) et (I.55), on obtient $\dot{V}(x(t)) < 0$ et le système est quadratiquement stable.

- **MFD**

Théorème 4 : [Tanaka 98] L'équilibre d'un modèle flou discret, décrit par (I.53) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (I.56)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P < 0 \quad i < j \quad (I.57)$$

pour tous les i et j , sauf les paires (i, j) telles que $h_i(z(k))h_j(z(k)) = 0$ avec $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

Preuve : Le même raisonnement que pour la stabilité du système (I.52) est suivi.

Le fait d'utiliser la condition (I.55) pour les MFC et (I.57) pour les MFD, avec $i < j$ permet de réduire un peu la conservativité des résultats puisqu'il n'est pas obligatoire d'avoir tous les sous-modèles croisés $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ stables.

L'obtention du régulateur flou PDC consiste, donc, à déterminer les matrices de gains de retour d'état $F_i (i = 1, \dots, r)$ satisfaisant les conditions du théorème 3 (MFC) ou du théorème 4 (MFD) pour une matrice commune P définie positive.

Afin de trouver la matrice commune P et les gains F_i , il est possible d'opérer en deux étapes:

La détermination des gains F_i , puis la vérification de l'existence d'une matrice commune P . Mais cette méthode reste assez empirique et ne garantit pas l'existence de la matrice commune P . Il peut, donc, être intéressant de trouver simultanément les gains F_i et la matrice commune P , grâce aux LMIs

b. Linéarisation des conditions de stabilité

Les théorèmes 3 et 4 donnent les conditions suffisantes pour la stabilité des systèmes bouclés (I.52) et (I.53), mais les inégalités matricielles (I.54) ~ (I.57) ne sont pas linéaires en P et F_i . On peut exprimer ces conditions de stabilité sous la forme d'un problème d'optimisation avec contrainte LMI. En effectuant des changements de variables, il est possible de rendre les inégalités matricielles (I.54) ~ (I.57) linéaires c'est à dire des LMIs en de nouvelles variables.

▪ Les LMIs pour le théorème 3

Les conditions de stabilité (I.54) et (I.55) (pour le MFC) peuvent être mises sous forme d'LMI après avoir effectué le changement de variable classique: $X = P^{-1}$, $M_i = F_i P^{-1}$ et en

pré- et post- multipliant (I.54) et (I.55) par $X = P^{-1}$ on obtient les LMIs suivantes en X et M_i

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i < 0 & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - M_j^T B_i^T - B_i M_j - M_i^T B_j^T - B_j M_i < 0 & i < j \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

Les gains du régulateur F_i sont donnés par $F_i = M_i P$

▪ **Les LMIs pour le théorème 4**

En pré- et post- multipliant (I.56) et (I.57) par $X = P^{-1}$ avec l'utilisation du compliment de Schur on obtient les LMIs suivantes en X et M_i

$$\begin{cases} X > 0 \\ \begin{bmatrix} X & XA_i^T - M_i^T B_i^T \\ A_i X - B_i M_i & X \end{bmatrix} > 0 & i = 1, \dots, r \\ \begin{bmatrix} X & \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\}^T \\ \frac{1}{2} \{A_i X + A_j X - B_i M_j - B_j M_i\} & X \end{bmatrix} > 0 & i < j \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i P \quad (\text{I.60})$$

Remarque : Supposons que les matrices de commande sont $B_1 = B_2 = \dots = B_r$, dans ce cas, les conditions de stabilité des théorèmes 3 et 4 sont exprimées comme suit:

- L'équilibre d'un modèle flou, continu, décrit par (I.52) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

- L'équilibre d'un modèle flou, discret, décrit par (I.46) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P définie positive telle que :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

Les théorèmes de stabilité 3 et 4 garantissent uniquement la stabilité asymptotique. Cependant, il est possible de considérer non seulement la stabilité, mais également d'autres performances tel que la vitesse de réponse, les contraintes sur l'entrée et sur la sortie.

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les outils et les principes fondamentaux que nous allons utiliser dans ce mémoire, à savoir, les modèles flous de T-S continus et discrets et les inégalités matricielles linéaires LMIs.

Nous avons présenté également la méthode d'obtention d'un modèle flou de type T-S à partir d'un modèle mathématique non linéaire. Nous avons introduit, aussi, la notion de la convexité d'un problème d'optimisation impliquant les LMIs, qui présente des avantages multiples concernant les problèmes d'analyse et de synthèse, et plus particulièrement, l'analyse de la stabilité/stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires décrits par les modèles flous de T-S.

Chapitre II

CHAPITRE II : LA TECHNIQUE D'INEGALITE MATRICIELLE LINEAIRE (LMI)

II.1. Introduction

Ce chapitre, traite de formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI). Ces dernières, ainsi qu'un certain nombre de propriétés matricielles, sont rappelées. Les résultats standards concernant la stabilité TS sont alors présentés.

II.2. Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs)

Depuis quelques années, de nombreux travaux ayant pour principal objectif de réduire une grande variété de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMI a vu le jour. Parallèlement, des méthodes efficaces de résolution des problèmes d'optimisation convexes ont été développées. Ces méthodes, appelées méthodes de point-intérieur, développées initialement par Karmarkar [Karm 84] pour la programmation linéaire, furent étendues ensuite par Nesterov et Nemirovskii [Nesterov 94] au cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives.

L'approche d'inégalités matricielles, et en particulier l'approche LMI sont de plus en plus utilisées en automatique. Parmi les raisons de son succès, on peut citer :

- L'existence de méthodes de résolution numérique efficaces (coût polynomial)
- La possibilité de reformuler de nombreux problèmes d'analyse : (stabilité, certaines performances, etc.) en termes de LMI
- La capacité de traiter des problèmes à données incertaines en commande robuste, qui a joué pour beaucoup dans l'essor de cette approche ces dernières années.

Dans cette partie, différents lemmes de l'approche LMI sont présentés. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires en les inconnues quand cela est possible.

Définition 1 :

Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une expression de type.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{II.1})$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^m$ est un vecteur de valeurs inconnues. F_0 et $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n,n}$ $i = 1, 2, \dots, m$ sont des matrices symétriques et l'inégalité " > 0 " signifie "défini positif", c'est à dire, $u^T F(x) u > 0$ pour tout $u \in \mathfrak{R}^n$, $u \neq 0$. De manière équivalente, la valeur propre la plus petite de $F(x)$ est positive.

Remarque 1 : L'ensemble E défini par $E = \{x \in \mathfrak{R} : F(x) > 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Remarque 2 : On peut avoir une égalité matricielle linéaire non stricte dénotée par le symbole " \geq ".

Remarque 3 : L'expression $F(x) < 0$ est un cas spécial de (1.31), qui peut être réécrit comme $-F(x) > 0$.

II.2.1. Conversion des inégalités matricielles non linéaires en LMIs

Les lemmes suivants montrent que certains types d'inégalités matricielles non linéaires peuvent être converties en LMIs qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire, citons :

Lemme 1 (Complément de Schur) : Soient les matrices $S(x) \in \mathfrak{R}^{m,n}$ et les matrices symétriques $Q(x) \in \mathfrak{R}^{n,n}$ et $R(x) \in \mathfrak{R}^{m,m}$, les inégalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.2})$$

$$R(x) > 0; \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \quad (\text{II.3})$$

$$Q(x) > 0; \quad R(x) - S(x)^T Q^{-1}(x)S(x) > 0 \quad (\text{II.4})$$

Preuve : Soient

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}S \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

La multiplication de (II.2) à gauche par M_1^T et à droite par M_1 , donne :

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.6})$$

de la même manière, la multiplication de (II.2) à gauche par M_2^T et à droite par M_2 , donne :

$$\begin{bmatrix} Q - S^T R^{-1} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.7})$$

Lemme 2 (Contraintes quadratiques convexes) : La contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$, avec $Z(x) \in \mathfrak{R}^{p,q}$ est représentée par :

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z^T(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.8})$$

Lemme 3 : Soient A, G, L, P et Q des matrices de tailles appropriées. Les inégalités suivantes sont équivalentes [Peaucelle 00]:

$$A^T P A - Q < 0, P > 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{bmatrix} -Q & A^T \\ A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\exists G; \begin{bmatrix} -Q & A^T G \\ G^T A & -G - G^T + P \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\exists G, L; \begin{bmatrix} -Q + A^T L^T + LA & -L + A^T G \\ -L^T + G^T A & -G - G^T + D \end{bmatrix} < 0, P > 0 \quad (\text{II.12})$$

II.2.2. Regroupement des LMIs

Les LMIs multiples $F_1(x) > 0, F_2(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0$ peuvent être exprimées comme une simple LMI comme suit:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & F_p(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.13})$$

On remarque que la LMI (II.13) est symétrique $\forall x$, de plus l'ensemble des valeurs propres de $F(x)$ est simplement l'union des valeurs propres de $F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x)$, et n'importe quel x satisfait $F(x) > 0$ satisfait également le système LMI (II.1) et vice-versa. En conclusion, les contraintes LMI multiples peuvent toujours être converties en une LMI simple.

II.2.3. Régions LMIs

Définitions 2 : [Chilali 96] Une région S du plan complexe est appelée une région LMI, s'il existe une matrice symétrique $M \in \mathfrak{R}^{m,m}$ et une matrice $N \in \mathfrak{R}^{m,m}$ telles que :

$$S = \{z \in \mathbb{C} : f_S(z) < 0\} \quad (\text{II.14})$$

avec $f_S(z) = M + zN + z^*N^T$. La notation z^* désigne le conjugué de z . $f_S(z)$ est appelée la fonction caractéristique de S .

En d'autres termes, une région LMI est une région du plan complexe qui est caractérisée par une LMI en fonction de z et z^* , ou de $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. Les régions LMI sont, donc, des ensembles convexes.

II.2.4. Problèmes classiques LMI

Les trois problèmes d'optimisation convexe les plus utilisés sous forme de LMI sont :

- **Problème de réalisabilité (Faisabilité) :** Il s'agit de trouver un vecteur S tel que la contrainte convexe $F(x) > 0$ est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t \times I \quad (\text{II.15})$$

Si la valeur minimale de t est négative, le problème est réalisable (faisable).

- **Problème de valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{cases} \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

- **Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems) :** Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une matrices, par rapport à une contrainte LMI :

$$\begin{cases} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes} \end{cases} \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent alors être résolus par différents types de méthodes grâce aux outils disponibles comme le "LMI control Toolbox" de MATLAB ou encore la résolution des SDP par le logiciel Scilab. Il existe aussi :

- Méthode des plans sécants
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type simplexe
- Méthode des points intérieurs

II.3. Relaxations

Dans toute cette partie on suppose que la seule connaissance disponible sur les h_i est la propriété de somme convexe. Dans le cas d'une simple somme, avec y_i des matrices de taille appropriée, il s'agit de trouver des conditions suffisantes assurant : $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \gamma_i < 0$. Le seul résultat qui sera utilisé est :

Lemme 4 : Soit Y_i des matrices de taille appropriée, (II.1) est vérifiée si :

$$Y_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.18})$$

Remarque : Notons que ces conditions ne sont que suffisantes et introduisent forcément du conservatisme.

Dans le cas d'une double somme avec Y_{ij} des matrices de taille appropriée :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij} < 0$$

Une solution triviale à (II.1) est :

$$Y_{ii} < 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \quad (\text{II.19})$$

En constatant que $h_i(\cdot) h_i(\cdot) = h_j(\cdot) h_i(\cdot)$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij} &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))^2 Y_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j \neq i}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) Y_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))^2 Y_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{j < i}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (Y_{ij} + Y_{ji}) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

et proposer premier résultat suivant :

Lemme 5 [Tanaka 94] : Soient Y_{ij} des matrices de taille appropriée. (II.1) est vérifiée si :

$$Y_{ii} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.21})$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i < j \quad (\text{II.22})$$

Plusieurs relaxations existent pour améliorer le lemme 5. Ces relaxations peuvent être groupées en deux familles. La première famille est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. La deuxième famille regroupe les autres types de relaxations.

La principale différence en termes d'efficacité est que les relaxations introduisant des variables supplémentaires produisent des problèmes LMI qui sont moins conservatifs mais plus longs à résoudre voire impossible à cause de la puissance de calcul des ordinateurs actuels.

Nous présentons dans la suite les deux résultats qui nous paraissent correspondre au meilleur compromis qualité de la solution compatibilité avec les solveurs actuels.

Le lemme suivant est issu de [Tuan 01]. Le domaine des solutions satisfaisant ses conditions inclut les domaines des solutions du lemme 5.

Lemme 6 [Tuan 01] : Soient Y_{ij} des matrices de taille appropriée. (II.3) est vérifiée si :

$$Y_{ii} < 0 \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{2}{r-1} Y_{ii} + Y_{ij} + Y_{ji} < 0 \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i \neq j \quad (\text{II.24})$$

La preuve est donnée **Lemme 1**.

Des relaxations plus efficaces existent en termes de taille des domaines de solutions. Néanmoins, elles nécessitent l'introduction de variables additionnelles. Leur nombre fait croître la complexité du problème à résoudre, et même pour des problèmes de taille faible on peut atteindre les limites des solveurs actuels. Le lemme suivant est issu de [Liu 03]. Il représente un bon compromis entre conservatisme et complexité.

Lemme 7 [Liu 03] : Soient Y_{ii} des matrices de taille appropriée . (II.1) est vérifiée s'il existe des matrices $Q_i = Q_i^T, i \in \{1, \dots, r\}$ et $Q_{ij} = Q_{ji}^T, (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$

telle que :

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \dots & Q_{r(r-1)} & Q_r \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.25})$$

$$Y_{ii} < 0 \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II.26})$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} > Q_{ij} + Q_{ji} \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, i > j \quad (\text{II.27})$$

II.4. Analyses convexes

Un grand nombre de problème concernant les systèmes incertains peuvent se résoudre par l'intermédiaire de problèmes convexe d'un type particulier, les programmes semi-définis (SDP) [Boyd 94]. Ils sont aussi connus sous le nom de LMI (Linear Matrix Inequality) en automatique. Les problèmes d'analyse et de synthèse dont il est question sont formulés, lorsque cela est possible, en termes d'optimisation convexe [Chad 02].

La convexité d'un problème d'optimisation a un double avantage :

- Les temps de calcul pour trouver une solution sont raisonnables
- Il n'existe pas de minimum local de la fonction coût à optimiser; le résultat obtenu correspond à un minimum global unique.

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas [Boyd 94].

Définition 3 : Ensemble convexe

Soit un ensemble $E \subset \mathfrak{R}^n$, E est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathfrak{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E \quad (\text{II.28})$$

Définition 4 : Fonction convexe

Soit une fonction $f : E \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, E un ensemble convexe, alors f est une fonction convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathfrak{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (\text{II.29})$$

Définition 5 : Fonction quasi convexe

Une fonction $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ est dite quasi convexe si le sous ensemble S_λ est convexe pour tout $\lambda \in \mathfrak{R}$, tel que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max(f(x_1), f(x_2)) \quad (\text{II.30})$$

Et ceci, $\forall \lambda \in [0, 1]$ et pour tout $x_1, x_2 \in S$

Définition 6 : Combinaison convexe

Soit S un sous ensemble d'un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est un ensemble réel non négatif avec $\sum_1^n \lambda_i = 1$ Alors $\sum_1^n \lambda_i x_i$ est appelée une combinaison convexe de x_1, x_2, \dots, x_n

Supposons qu'on prenne x_1, x_2, \dots, x_n n points x_1, x_2, \dots, x_n dans S ; alors il est facile de voir que l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de x_1, x_2, \dots, x_n est lui-même convexe, c'est à dire $C = \{x/x\}$ est une combinaison convexe de $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 7 : Points intérieurs

Soit S un sous ensemble d'un espace normé Π , le point $x \in S$ est appelé un point intérieur de S s'il existe un $\varepsilon > 0$, tel que tous les points $y \in \Pi$ avec $\|x - y\| < \varepsilon$, aussi, appartiennent à S .

L'intérieur de S est la collection de tous les points intérieurs de S .

Définition 8 : Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe $Co(S)$ d'un ensemble convexe S est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant S .

Définition 9 : Minimum local et global

Une fonction $f : S \rightarrow R$ possède un minimum local en $x_0 \in S$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

L'intervalle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ est appelé voisinage de x_0

x_0 est minimum local de f si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{R}$.

Un problème d'optimisation convexe s'énonce, donc, comme suit: $\min_{x \in E} (f(x))$ où E est un ensemble convexe et f_i est une fonction convexe. De même, une contrainte $f_i(x) \leq 0$ est dite convexe si la fonction est convexe. Un des avantages de la convexité, est que toute

optimisation d'une fonction convexe définie sur un ensemble convexe peut se traiter localement car toute solution locale devient globale.

II.5. Réduction du nombre de contraintes LMI

Ce problème peut être abordé par l'introduction de variables additionnelles. On se retrouve, donc, à nouveau dans un compromis, nombre de variables à rechercher de nombre de contraintes LMI à vérifier. L'idée est de séparer les différents instants $t + i$, $i \in \{0, \dots, k - 1\}$ présents dans les conditions pour ne plus avoir de conditions « croisées » utilisant deux instants différents.

On passe alors globalement de $(.)^K$ à $k \times (.)$ conditions LMI.

II.6. Conclusion

On a essayé, dans ce chapitre, de faire la plupart des problèmes, la possibilité d'obtenir des contraintes LMI et conservatisme des résultats, sachant que l'on n'a que des conditions suffisantes. Cela provient de plusieurs phénomènes, le choix du modèle, le fait de ne pas utiliser des connaissances autres que la propriété de somme convexe et le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique .

Dans le chapitre suivant, nous combinerons les deux parties précédentes, les modèles flous de T-S et les LMI pour étudier la stabilité et la stabilisation quadratique des systèmes non linéaire de ces modèles flous .

Chapitre III

CHAPITRE III : APPLICATION DES INEGALITES

MATRICIELLES LINEAIRES (LMI) ET DES SYSTEMES FLOUS DE

TAKAGI SUGENO (T-S)

III.1. Introduction

Ce chapitre, traite la stabilité et la stabilisation de modèles flous de type T-S dans le cadre de l'utilisation d'une loi de commande. L'étude de la stabilité et de la stabilisation de ce type de modèles flous fait appel, dans la grande majorité des cas, à la fonction de Lyapunov de type quadratique qui produit des conditions suffisantes de stabilité. Les résultats également exprimés sous forme d'LMI seront illustrés à travers un exemple de simulation.

III.2. Application

En général, les systèmes flous s'appuient sur une représentation de la connaissance sous forme de règles « Si-Alors » qui permettent de représenter les relations entre les variables d'entrée et de sortie, dont l'expression générique est de la forme :

Si antécédent **Alors** conséquent

Alors nous représentons le comportement non linéaire d'un système par une composition de règles du type « Si-Alors », concaténant un ensemble de sous modèles localement linéaires, ce type de modèles flous a été introduit en 1985 par Takagi et Sugeno, dans ce type de modèles, les conséquences de règles sont alors des fonctions ordinaires (souvent des modèles d'état)

Alors la règle i du modèle de Takagi Sugeno s'écrit :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } M_{i1} \text{ et } \dots, z_n(t) \text{ est } M_{in} \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

A partir des poids attribués à chaque règle, les sorties finales des modèles flous sont inférées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(x)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))C_i x(t) \end{aligned} \quad (III.2)$$

avec $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$ et $\alpha_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$

La $i^{ème}$ règle du contrôleur flou de T-S est définie par :

Si $z_1(t)$ est M_{i1} et \dots , $z_n(t)$ est M_{in} Alors $u(t) = -K_i x(t)$

A partir des poids attribués à chaque règle, la sortie finale du contrôleur est inférée de la manière suivante :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))K_i x(t) \quad (III.3)$$

Le système en boucle fermée sera décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t))\alpha_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (III.4)$$

Considérons le problème de contrôle classique qui consiste à stabiliser un pendule inversé autour de sa position vertical d'équilibre

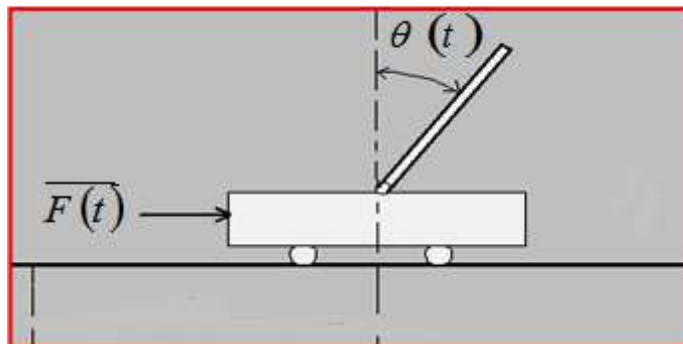


Figure III.1.pendule inversé

l'équation dynamique du pendule est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - amlx_2^2 \sin\frac{2x_1}{2} - a \cos(x_1) u}{\frac{3}{4}l - aml \cos(x_1)^2} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

avec : $a = \frac{1}{M + m}$ $M = 8$ $m = 2$ $l = 0.25$ $g = 9.8$

Ce système sera représenté par deux modèles de type *Takagi Sugeno*, autour d'un point d'équilibre 0° et un point 88°

III.2.1 Approximation du modèle

$$\begin{aligned} 1 \quad \text{Autour de zéro : } \dot{x} = A_1x + B_1u &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.3 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.177 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \quad 0]x \end{cases} \\ 2 \quad \text{Autour de } 88^\circ : \dot{x} = A_2x + B_2u &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10.58 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.03 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \quad 0]x \end{cases} \end{aligned}$$

III.2.2 Analyse de stabilité

- L'analyse de la stabilité par la commande floue est un sujet difficile puisque les modèles considérés sont de nature non linéaire.
- Il est important de noter que beaucoup de techniques d'analyse de stabilité sont basées sur des méthodes de stabilité locale autour de point d'équilibre
- On a utilisé par la suite l'approche de Lyapunov et de LMI

III.2.3. Les systèmes flous de TAKAGI SUGENO

III.2.3.1 Analyse de stabilité SYSTEME/CONTROLEUR

a) Approche de LYAPUNOV

basée sur l'existence d'une matrice commune P définie positive satisfaisant les inégalités de Lyapunov:

$$\begin{cases} (A_i - B_iK_i)^T P + P (A_i - B_iK_i) < 0, & \forall i = 1, \dots, r \\ G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, & i < j < r \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i, \quad i < j \leq r \quad (\text{III.7})$$

b) Approche de LMI

L'utilisation du lemme de Schur et du changement de variable suivant :

$$\begin{cases} P^{-1} = Y \\ X_i = K_i Y \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Permet d'exprimer la stabilité du système flou de T-S en boucle fermée en termes d'LMIs comme suit:

$$\begin{cases} 0 < Y \\ 0 > Y A_i^T + A_i Y - B_i X_i - X_i^T B_i^T \quad \forall i = 1, \dots, r \\ 0 > Y (A_i A_j)^T + (A_i A_i) Y - (B_i X_j + B_j X_i) - (B_i X_j + B_j X_i)^2 \quad j < i \leq r \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Les vecteurs de gain seront alors : $K_i = X_i Y^{-1}$ pour notre application nous avons $r=2$

La stabilité du système flou de T-S en B.F en termes d'LMIs est donnée comme suit :

$$\begin{cases} 0 < Y \\ 0 < Y A_1^T + A_1 Y + B_1 x_1 - x_1^T B_1^T \\ 0 < Y A_2^T + A_2 Y + B_2 x_2 - x_2^T B_2^T \\ 0 < Y (A_2 + A_1)^2 + (A_2 + A_1) y - (B_2 x_1 - B_1 x_2) - (B_2 x_1 - B_1 x_2)^T \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

III.2.3.2. Analyse de stabilité SYSTEME/OBSERVATEUR

Si les états du système ne sont pas tous mesurables, on fait appel à un estimateur qui reconstruit les états inaccessibles, en minimisant l'erreur entre les états réels et celles obtenus des états estimés.

Alors l'équation dynamique de l'estimateur est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A \hat{x}(t) + B u(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ &= A \hat{x}(t) + B u(t) + L[y(t) - C \hat{x}(t)] = (A - LC) \hat{x}(t) + B u(t) + L y(t) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

a. Approche de Lyapunov

Le système précédent est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune P_2 qui satisfait les inégalités suivantes

$$\begin{cases} (A_i - L_i C_i)^T P_2 + P_2 (A_i - L_i C_i) < 0, & i = 1, \dots, r \\ H_{ij}^T P_2 + P_2 H_{ij} < 0, & j < i \leq r \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

avec

$$H_{ij} = A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i \quad (\text{III.13})$$

b. Approche de LMI

Ces inégalités ne sont pas des **LMI** en P_2 alors, pour les linéariser on fait appel à un changement de variable

$$W_i = P_2 L_i \quad (\text{III.14})$$

On obtient de inégalités linéaires en P_2 et W_i

$$\begin{cases} 0 < P_2 \\ 0 > A_i^T P_2 + P_2 A_i - W_i C_i - C_i^T W_i^T & i = 1, \dots, r \\ 0 > (A_i + A_j)^T P_2 + P_2 (A_i + A_j) - (W_i C_j + W_j C_i) - (W_i C_j + W_j C_i)^T & j < i \leq r \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Les gains d'observation sont alors donnés par :

$$L_i = P_2^{-1} W_i \quad (\text{III.16})$$

La stabilité du système flou de T-S en B.F en termes d'LMIs est donnée comme suit :

$$\begin{cases} 0 < p_2 \\ 0 < A_1^T p_2 + p_2 A_1 - w_1 C_1 - C_1^T w_1^T \\ 0 < A_2^T p_2 + p_2 A_2 - w_2 C_2 - C_2^T w_2^T \\ 0 < (A_2 + A_1)^T p_2 + p_2 (A_2 + A_1) - (w_2 C_1 - w_1 C_2) - (w_2 C_1 - w_1 C_2)^T \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

À partir de l'équation différentielle précédente, on a vue l'évolution angulaire et l'évolution de la vitesse angulaire :

III.2.3.3. Analyse de stabilité SYSTEME/ CONTROLEUR/ OBSERVATEUR

La dynamique du système global (Système + Contrôleur + Observateur) est régit par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i K_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j B_i K_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i - L_i C_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j C_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

Le système global (contrôleur + observateur) en boucle fermée est stable s'il existe une matrice commune \tilde{P} définie positive satisfaisant les inégalités matricielles suivantes :

$$A_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} A_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{III.19})$$

$$(A_{ij} + A_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P} (A_{ij} + A_{ji}) < 0, \quad j < i \leq r$$

$$\text{où } A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}, \text{ avec } \tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda P & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

À partir de l'équation différentielle précédente, on a vue l'évolution angulaire et l'évolution de la vitesse angulaire avec :

Les gains de régulation :

$$K1 = 1.0e+003 * [-1.9073 \quad -0.5547], \quad K2 = 1.0e+003 * [-2.6797 \quad -0.7823]$$

Les gains de observation :

$$L1 = [8.7002; 20.9865], \quad L2 = [6.2459; 13.5993]$$

La figure III.2 représente les réponses du système (angle) avec observateur, la figure III.3 représente la vitesse angulaire et son état estimé et la figure III.4 représente la commande.

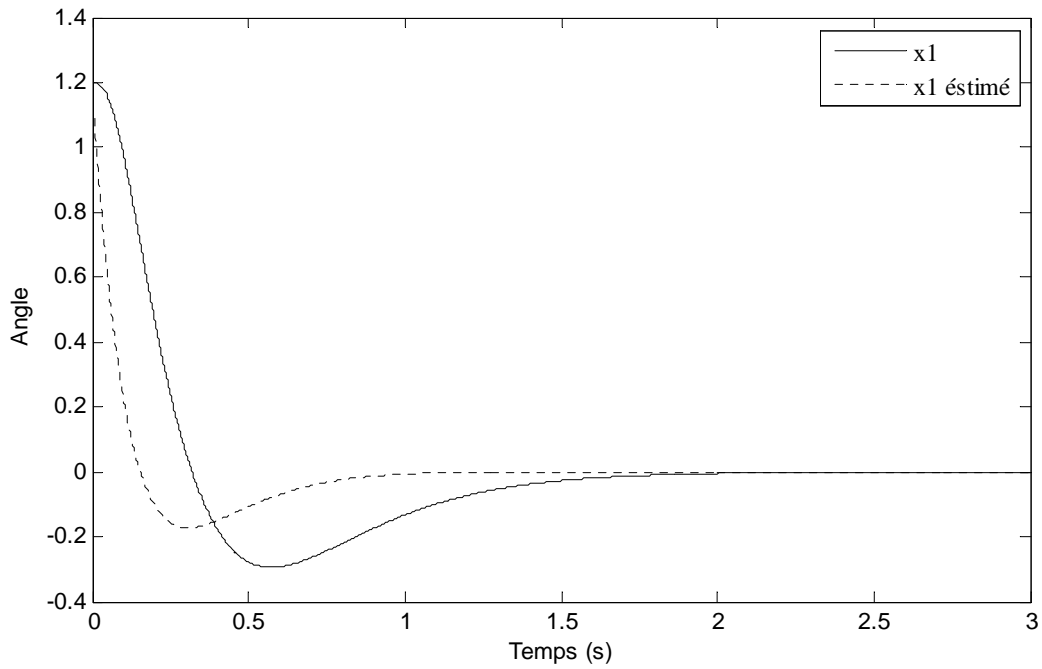


Figure (III.2) : Évolution angulaire (la sortie x_1 et l'état \hat{x}_1) de l'observateur.

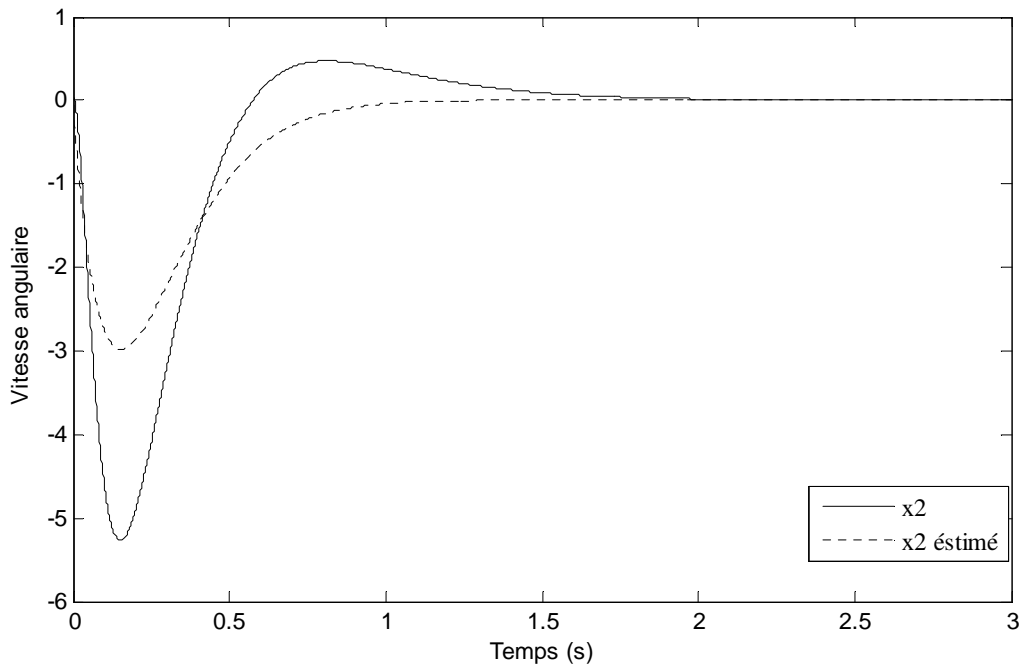


Figure (III.3) : Évolution de la vitesse angulaire (x_2 et \hat{x}_2).

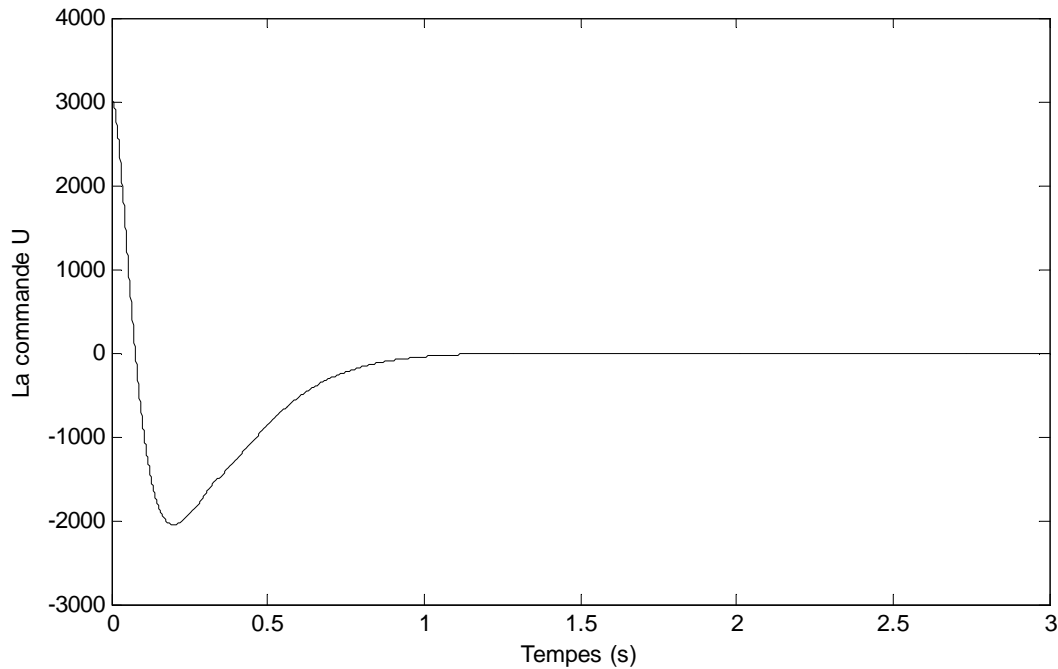


Figure (III.4) : Évolution de la commande.

Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures (III.2-III.4). Les bonnes performances de poursuite ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro

Nous pouvons conclure que l'approche de commande floue, proposée, garantie que tous les signaux x_1 , \hat{x}_1 , x_2 , \hat{x}_2 et la commande u sont globalement bornés.

Lors de nos simulations, nous avons constaté que la régulation s'effectue en minimisant l'erreur d'approximation d'une part, et en assurant la stabilité robuste globale du système d'autre part. Il est à noter qu'un choix judicieux des valeurs des gains du retour d'état des sous systèmes permet d'améliorer les performances du système.

III.3. Conclusion

En outre, la stabilité du système en boucle fermée a été prouvée en employant la méthode de Lyapunov, c'est à dire, l'approche de la commande étudiée a permis de garantir la stabilité globale de système non linéaire incertain en boucle fermée et, aussi, que tous les signaux et les états sont globalement limités, et la convergence de l'erreur de poursuite du système vers un petit voisinage de l'origine.

Les résultats de simulation sont illustrés pour confirmer l'efficacité et l'applicabilité de la méthode proposée.

Conclusion

CONCLUSION GENERALE

La méthode traitée dans ce mémoire est essentiellement théorique, elle est consacrée à la relaxation des conditions de stabilité pour les systèmes non linéaires décrits par les modèles flous de Takagi-Sugeno. Son établissement, fait appel à la fonction de Lyapunov quadratique. L'étude que nous avons menée traite l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de type T-S où les résultats obtenus sont conservatifs.

En effet, après avoir donné un rappel sur les systèmes flous de T-S continus et discrets, nous avons présenté la notion d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) appliquée à la commande des systèmes non linéaires.

L'analyse de la stabilité et de la stabilisation des modèles flous de T-S, basée sur la fonction de Lyapunov quadratique conduit, à l'élaboration de conditions suffisantes de stabilité et de stabilisation avec l'utilisation de la loi de commande PDC. Les conditions obtenues sont formulées en terme d'inégalités matricielles non linéaires, qui peuvent être transformées en LMIs par les techniques classiques de changement de variables, pour l'exploitation numérique de ces conditions.

Nous avons montré, à partir du modèle T-S, une méthode de commande de type PDC. Cette loi de commande très utilisée, est basée sur la connaissance de l'état, c'est-à-dire, elle nécessite la disponibilité de tous les états. Comme cette condition est rarement vérifiée, l'utilisation d'un observateur permettant d'estimer l'état du système devient nécessaire. Le principe de séparation permet de trouver séparément les gains de l'observateur et du régulateur (dans le cas des prémisses mesurables) a été utilisé. Dans ce cas, la recherche de la matrice et les gains (de l'observateur et du régulateur) est facile à mettre en œuvre et peut être énoncée comme un problème d'optimisation convexe en terme d'LMI résolu efficacement.

Un exemple de simulation est illustré, pour montrer l'influence des fonctions d'appartenance sur la stabilité des systèmes flous de T-S.

Les résultats de simulation d'un système non linéaire, ont permis d'illustrer l'efficacité de l'approche LMI et les performances d'observation.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [Boyd 94] Boyd S., El Ghaoui L., ‘*Linear Matrix Inequalities in system and control theory*’, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [Cao 99] Cao S. G., Rees N.W., Feng S.G., ‘*Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy state space models*’, IEEE Transaction on Fuzzy Systems. Vol. 7, No. 2, pp. 192-200, 1999.
- [Chad 02] Chadli M., ‘*Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèles*’, Thèse de doctorat, L’institut National Polytechnique de Lorraine, 2002
- [Chad 02] Chilali M., Gabinet P., ‘*H ∞ design with pole placement constraints: An LMI approach*’, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 41, No. 3, pp. 358-367, 1996.
- [De Oliveira 01] De Oliveira M. C. et Skelton R. E., ‘*Stability Tests for Constrained Linear Systems, Perspectives in Robust Control*’, Lecture Notes in Control and Information Sciences 268 edited by S. O. Reza Moheimani, Springer, 2001.
- [Feng 03] Feng G., ‘*Controller synthesis of fuzzy dynamical systems based on piecewise Lyapunov functions*’, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 11, No. 5, pp. 605-612, 2003.
- [Joh 99] Johanson M., Rantzer A., Arzen K., ‘*Piecewise quadratic stability of fuzzy systems*’, IEEE Transaction on Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 6, pp. 713-721, 1999.
- [Karm 84] Karmarkar N., *A new polynomial time algorithm for linear programming*. Combinatorica, Vol. 4, No. 4, pp. 373-395, 1984.
- [Gasso 00] Gasso K., ‘*Identification des systèmes dynamiques non linéaires: Approche multimodèle*’, Thèse de doctorat, L’institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2000.
- [Lix 03] Liu X et Zhang Q., ‘*New approaches to controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI*’. Automatica, Vol.39 (9), pp1571-1582, 2003.

- [Mamd 94] E. H. Mamdani, "Application Of Fuzzy Algorithms For Control Of Simple Dynamic Plant" Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Control and Science, 1974.
- [Morère 01] Morère Y., '*Mise en œuvre de la loi de commande pour les modèles flous de Type Takagi-Sugeno*', Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2001.
- [Nesterov 94] Nesterov Y., Balakrishnan J., '*A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices*', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 12, pp. 2469-2471, 1994.
- [Peaucelle 00] Peaucelle D, Arzelier D, Bachelier O, Bernussou J., '*A New Robust D-stability Condition for Real Convex Polytopic Uncertainty*', Systems & Control Letters, Vol.40, pp21-30, 2000.
- [Tak 85] Takagi T., Sugeno M., '*Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control*', IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Vol. 15, No. 1, pp.116-132, 1985.
- [Tanaka 92] Tanaka K. et Sugeno M., '*Stability analysis and design of fuzzy control systems*', Fuzzy Sets and Systems, Vol.45 (2), pp135-156, 1992.
- [Tanaka 98] Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O., '*Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs*', IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998.
- [Tanaka 01] Tanaka K., Hua O., Wang H.O., '*Fuzzy control systems design and analysis a Linear Matrix Inequality*', John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [Thier 01] Thierry M.G., Vermeiren L., '*Control laws for Takagi-Sugeno fuzzy models*', ELSEVIER, Fuzzy Sets and Systems 120 (2001) 95 -108.
- [Tuan 01] ". IEEE Trans. on Fuzzy Tuan, '*Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design* Systems Vol.9, pp324-332, 2001.
- [Wang 95] Wang H.O., Tanaka K., Griffin M. '*Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model*', in Proc. FUZZ-IEEE/IFES, Vol. 95, pp. 531-538, 1995.

Résumé :

Cette mémoire présente l'analyse de stabilisation pour une classe de systèmes non linéaires incertains représentés par un modèle flou Takagi et Sugeno (TS). Notre étude est faite par une approche utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. Celle-ci permettant d'écrire facilement des conditions sous la forme de contraintes *LMI*. Des conditions de stabilisation avec un observateur d'état sont également données. Un exemple de simulation est également fourni pour démontrer l'efficacité des approches étudiées.

Mots clés : Inégalité Matricielle Linéaire (*LMI*), Modèle flou de Takagi-Sugeno, Systèmes non linéaires, Concept *PDC*, Observateur flou.

Abstract:

This memory presents the stabilization analysis for a class of nonlinear systems that are represented by a Takagi and Sugeno (TS) fuzzy model. Our survey is made by an approach using a quadratic Lyapunov function. This one permitting to write some conditions easily in the form of LMIs constraints. The conditions of stabilization with an observer of state are also given. Finally, an example is also provided to demonstrate the efficiency of the approaches.

Keywords: Linear Matrix Inequality (*LMI*), Takagi-Sugeno fuzzy model, Nonlinear Systems, Concept *PDC*, Fuzzy observer.

ملخص:

هذه المذكرة تهدف إلى اقتراح شروط استقرار جديدة للأنظمة الغامضة من نوع T-S على شكل متراجحات المصفوفات الخطية. استعملنا في هذه الدراسة دالة ليابونوف الرباعية التي تمكننا من كتابة شروط استقرار على شكل *LMI*. قمنا كذلك بإعطاء شروط استقرار في حالة استعمال ملاحظ حالة. إلي هنا، جميع شروط الاستقرار المتحصل عليها محدودة. في النهاية عالجتنا مشكلة متعلقة بالاستقرارية الملائمة و استخلصنا كذلك شروطا للاستقرار الإجمالي لهذا النوع من الأنظمة الغامضة.

كلمات مفتاحية: متراجحة المصفوفات الخطية *LMI*، النظام الغامض T-S، الأنظمة غير الخطية، تصور *PDC*، الملاحظ الغامض.