No d'ordre :
No de série :


**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**
FACULTE DES MATHEMATIQUES
ET DES SCIENCES DE LA MATIERE
**Département de physique**


# Mémoire
# MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences de la Matière
Filière : Physique
Spécialité : Rayonnement et Spectroscopie et Optoélectronique
Présenté par : Hamdi Hadjer

**Thème :**

# Formalisme de Feynman pour Particule non Relativiste dans un Champ Magnétique non Homogène avec la Distance Minimale

Soutenu publiquement
Le : 24 /05/2017
Devant le jury composé de

| | | | |
|---|---|---|---|
| M. T. Meftah | Prof. | Président | UKM Ouargla |
| M.A.Benbitour | MCA | Examinateur | UKM Ouargla |
| H. Benzair | MCA | Rapporteur | UKM Ouargla |

Année Universitaire : 2016/2017

# Table des matières

# Dédicace

*Ce travail modeste est dédié :*

*À ma chère mère ;*

*À mon père ;*

*À tous mes proches de la famille Hamdi, et plus particulièrement, mes sœurs et mes frères tout à son nom ;*

*À tous mes chers amis et mes collègues de l'Université de Ouargla ;*

*Et à tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire ;*

**HADJER**

## Remerciements

*En premier lieu, je tiens à remercier le Dieu pour m'avoir aidé tout au long de mes études de l'école à la fin de ce mémoire.*

*Mon respect et ma gratitude vont a* ***H.Benzair*** *mon encadreuse à qui je dois beaucoup, j'ai particulièrement apprécié sa disponibilité, sa gentillesse et son enthousiasme, ses compétences m'ont été extrêmement profitables. Je lui dois tout, depuis les cours des intégrales de chemins, depuis mon mémoire de licence, jusqu'a le mémoire de master.*

*Mes remerciements vont ensuite au jury de ma mémoire .**M. T. Meftah** le père de la physique théorique à notre université, pour l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury, et les examinateurs:* ***M.A.Benbitour*** *qui ont bien voulu accepté de juger ce travail*

*Je remercie également tout les membres du laboratoire de Rayonnement et Plasmas et Physique des Surfaces (LRPPS), où j'ai accompli ce travail, pour leurs aides et leurs conseils. et mes plus vifs remerciements à le Professeur* ***K. Fethi***

*En fin, je remercie infiniment tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin durant la réalisation de ce travail, même par un petit sourire d'encouragement.*

**Hamdi Hadjer**

# Résumé

Dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste avec spin 1/2, nous avons traité par le formalisme des intégrales de chemin le comportement d'une particule de masse $m$ et de charge $e$ se mouvant dans un champ magnétique non-homogène dans la représentation de l'espace de moment $\{|p\rangle\}$.

Dans la première partie, le système a quelques-uns des problèmes qu'on a résolus par plusieurs étapes, comme le problème de singularité, la symétrie et le point de discrétisation....etc, la fonction de Green a été construite en adoptant la technique standard de Feynman, avec le choix le plus approprié de la transformation spatiale, qui la ramène à celle de propagateur de Rosen-Morse, les spectres d'énergie ainsi que les fonctions d'ondes correspondantes des états liés ont été exactement obtenues.

Dans la deuxième partie, le but est de traiter le système précèdent en présence de l'incertitude de longueur minimale suivant l'approche de Kempf. Nous avons déterminé la fonction de Green et aussi, nous avons trouvé que cette approche attribue la masse dépendant de l'impulsion, par conséquent, nous employons la méthode de transformation spatio-temporelle pour évaluer des corrections quantiques et ces dernières sont dépendantes de $\eta$-point discrétisation, nous avons trouvé une fonction de Green relative au potentiel très difficile. Nous avons donc proposé des idées qui contribuent à l'existence de la solution exacte dans les travaux ultérieurs.

# 1

# Introduction générale

Comme on le sait, Feynman a introduit sa fameuse technique des intégrales de chemins qui est alternative aux méthodes de Heisenberg et de Schrödinger afin de répondre au besoin profond de la compréhension de la physique quantique. Cette formulation a été suggérée par certaines remarques de Dirac celui qui a observé que l'action joue un rôle centrale dans la mécanique classique et qui est plus important que la formulation hamiltonienne, mais qu'il ne semblait avoir aucun rôle fondamentale dans la mécanique quantique, il a ensuite avancé que cette situation pourrait être corrigée si la fonction de transformation, communément connue comme le propagateur, est identique à $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$où $S$ est l'action classique évaluée le long du chemin classique. Par analogie avec ces idées Feynman a réussi à dériver une formulation spatio-temporelles qui repose sur le fait que le propagateur (noté $K$) qui contient toutes les information du système physique comme la fonction de Green de l'équation de Schrödinger ce dernier qui définit l'amplitude de la probabilité d'évolution d'une particule du point $A$ vers le point $B$, est formulé comme étant une somme d'une infinité d'amplitudes partielles licenciées à chacun des chemin noté $\Gamma$qui raccordé $A\left(\vec{r}_i, t_i\right)$ et $B\left(\vec{r}_f, t_f\right)$ dans la phase est proportionnelle à la quantité de $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_\Gamma\right)$ avec $S_\Gamma = \int_\Gamma L\left(\vec{r}, \dot{r}, t\right)$ où $L\left(\vec{r}, \dot{r}, t\right)$ est un lagrangien de la particule. Feynman inclut dans cette action le principe de moindre action pour ignorer les autres chemins que ceux qui sont très proches du chemin $\Gamma_0$ ou l'action est minimale.

De ce fait, Dirac a considéré seulement le chemin classique $\Gamma_0$ alors que Feynman a démontré que tous les chemins contribuent dans le sens où la particule quantique contrairement à la particule classique, on grenage tous les chemins s'ajoutent selon le Principe de superposition de la mécanique quantique. Cette formulation est particulièrement intéressante puisqu'elle a le mérite d'établir le lien entre la mécanique quantique est la mécanique classique on doit noter qu'à la limite $\hbar \rightarrow 0$, la contribution essentielle au propagateur provient des chemins qui obeïssent au principe variationnel classique $\delta S = 0$, ainsi l'intégrale de chemin permet aux physiciens de présenter un formalisme simple et riche qui transcrit aussi directement que possible les phénomènes physiques et tout particulièrement les phénomènes quantiques, du point de vue pédagogique, avec des notions simples et uniquement classiques comme l'action, les trajectoires, le lagrangien ...etc. Que cette approche permet d'aborder le concept probabiliste de la mécanique quantique usuelle qui est non évident pour des esprit non préparés.

De plus la méthode des intégrales de chemins traite avec des transformations spatio-temporelles des problèmes indépendants du temps et dépendants du temps de la même manière et c'est un vrai avantage par rapport aux autres approches basées sur le hamiltonien pour résoudre des problèmes dépendant du temps.

Cette nouvelle approche est rapidement imposé en physique théorique avec sa généralisation à la théorie quantique des champs, permettant notamment une quantification des théories de jauge non abéliennes beaucoup moins compliquées que la procédure de la quantification canonique, l'application du formalisme des intégrales de chemins aux problèmes de la particule libre et de l'oscillateur harmonique s'est fait avec succès mais elle est restée restreinte aux systèmes quadratiques. Cependant, ce formalisme a rencontré des difficultés dans l'étude de l'atome d'hydrogène, il a fallu attendre l'année (1978) où grâce à l'introduction de la transformation de Duru-Kleinert plusieurs systèmes quantiques qui sont à l'origine de succès enregistré de l'équation de Schrödinger ont été exactement solutionnés via l'intégrale de chemin. En l'occurrence, le système coulombien[1] a trouvé la forme Gaussienne dans l'espace des phases à l'aide d'une transformation canonique des variables de Kustamheimo et Stiefle [2] et en reparamétrisant le parcours d'intégration par un paramètre temps et l'intégrale de chemin de l'atome d'hydrogène en cordonnées polaires dans l'espace $\mathbb{R}^3$a pu être transformer en une intégrale de chemin dans l'espace $\mathbb{R}^4$relative a deux oscillateurs harmoniques indépendants à deux dimensions [3]. De nombreux travaux ont été réalisés et ont permis à ce formalisme de se développer davantage (voir par exemples; [4, 5, 6, 7]).

D'autre part, les algèbres déformées et leurs applications dans les différentes branches de la physique ont continué à se développer. Un très bon exemple est le modèle de Snyder [8]. Ce modèle est décrit par la déformation des relations de commutation en introduisant deux paramètres de déformation, ce qui conduit à l'apparition d'une incertitude minimale non nulle en position et aussi en moment. Le concept de la longueur minimale est l'un des modèles scientifiques qui vise à décrire les changement qui apparaissent dans la tentative d'intégrer les quatre principales interaction physiques qui conduit à une nouvelle approche naturelle qui est basé sur la quantification du champ gravitationnel comme les autres champs, en effet l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs fait apparaitre des divergences qui rendent la théorie non normalisable. Plusieurs suggestions ont été proposées pour résoudre ce problème notamment l'existence d'une longueur minimale. Ainsi la gravitation devrait nous orienter à une rupture de l'espace jusqu'au très petites distances, nécessite une très haute énergie, par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée par les effets gravitationnels, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable. Cette longueur minimale est supposée être proche de celle de Planck $L_p = 10^{-35}m$.

L'idée de la longueur élémentaire a été principalement motivé par de nombreuses études sur la théorie de gravitation quantique, la longueur de Planck peut jouer un rôle centrale dans laquelle les effets gravitationnels ne peuvent pas être négligés et les nouveaux phénomènes sont observés [9, 10, 11], la théorie des cordes une échelle minimale est naturelle puisque les particules qui sont considérées comme des cordes ne peuvent pas résoudre des distances plus petites que la dimension de la corde et aussi dans la géométrie non -commutative et en physique des trou noir.

En addition, l'introduction de cette longueur minimale est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position liée a une modification de l'algèbre de Heisenberg standard par l'ajout de petites corrections aux relation de commutation canoniques. Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des propriétés de cette version déformée de la mécanique quantique: L'oscillateur harmonique de dimensions arbitraires a été résolu [12, 13, 14, 15, 16, 17], le problème de la constante cosmologique a été étudié [18, 19], l'effet de la longueur minimale (LM) sur le spectre d'énergie du potentiel de Colomb à 3 D a été également étudié dans [20, 21], la boite unidimensionnelle [22], l'étude de la dynamique d'une particule non relativiste de masse variable $m(t)$ se mouvant dans un potentiel linéaire dépendant du temps [23], ... etc. En plus l'extension relativiste de ce problème a limité certaines tentatives, parmi eux nous citons: l'équation de Dirac en présence d'une longueur minimale dans la référence [24], où l'oscillateur de Dirac à une dimension a été exactement résolu, l'équation de Dirac généralisée a été récemment étudiée par Nozari [25], l'oscillateur de Dirac à une dimension a été résolu par Nouicer [26], l'oscillateur bosonique de DKP (spin 0 et 1) unidimensionnel et à trois dimensions qui ont été respectivement traités dans [27] et [28], ... etc.

L'objet de ce travail, c'est d'adapter le formalisme de l'intégrale de chemin pour particule non relativiste a spin 1/2 se déplaçant dans un champ magnétique non-homogène dans un nouveau cadre de l'algèbre de Heisenberg modifiée. Ce type de système est très important car il représente un potentiel coulombien qui signifie description réaliste de la physique, ce qui a fait, il semble d'abord difficile à traiter, mais nous avons décidé d'expérimenter sans penser aux conséquences. A travers les étapes du travail, il montre que le sujet a de bonnes perspectives d'avenir.

Le mémoire est divisé en deux parties. La première partie représente l'application de l'intégrale de chemin dans l'espace de moment en cas non déformé, alors que la seconde est une extension de cette approche en présence de longueur minimale.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une description du système quantique non relativiste selon la méthode de *Feynman*, nous utilisons une transformation spatiale et aussi nous calculons les corrections quantiques, le propagateur obtenu est exactement la représentation d'intégrale de chemin de la particule ponctuelle se déplaçant dans le potentiel Rosen-Morse et sa solution est bien connu dans [29].

Nous poursuivrons dans le troisième chapitre la présentation du formalisme des intégrales de chemin pour le même système qui a été décrit précédemment dans l'espace des impulsions en présence de la distance minimale qui a été développé par *Kempf*, en utilisant la méthode de transformation Spatio-temporelle et par un calcul précis nous obtiendrons les corrections quantiques. Nous pouvons obtenir la fonction de Green, mais avec un potentiel complexe où nous proposons des moyens de résoudre ce système à travers les œuvres à venir.

# 2

# Le formalisme de Feynman avec un champ magnétique non-homogène

## 2.1 Bref rappel de l'intégrale de chemins

### 2.1.1 L'histoire

L'origine de l'intégrale de chemin remonte depuis 1942, qui ont été proposé par "*Richard Feynman*" dans sa thèse sous le titre '*Une nouvelle approche de la théorie quantique*'. Sa proposition était extraite des idées de *Dirac* puis il a cherché une nouvelle méthode de quantification basée sur le lagrangien pour pouvoir décrire un système ne possédant pas nécessairement d'hamiltonien. Sa motivation première est de quantifier la nouvelle formulation de l'électrodynamique classique basée sur l'action à distance qu'il vient juste de développer avec *Wheeler*.

En 1941 lors d'une soirée à *la Nassau Tavern Herbert Jehle* a rencontré les visiteurs de Princeton où il leur fait savoir l'existence d'un article de *Dirac* qui discute précisément la quantification à partir du lagrangien, *Jehle* a assuré à *Feynman* que cette formulation permet une approche relativiste covariante bien plus aisée que celle basée sure le hamiltonien. Le lendemain, les deux *Jehle* et *Feynman* sont allés à la bibliothèque pour lire l'article, et leur attention a été par la phrase suivante:

Pour deux instants $t$ et $t+\varepsilon$, voisins, l'amplitude de transition élémentaire s'écrit par

$$\langle q_2\,(t+\varepsilon) \mid q_1\,(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\,(q)\right), \tag{2.1.1}$$

avec $S$ est l'action classique définie par:

$$S\left(q_2\left(t+\varepsilon\right), q_1\left(t\right)\right) = \int_t^{t+\varepsilon} L\left(q, \dot{q}\right) dt. \tag{2.1.2}$$

Afin de comprendre ce qu'a dit Dirac comparativement à Feynman en utilisant le cas d'une particule non relativiste de masse m pour laquelle le lagrangienne s'écrit par:

$$L\left(q, \dot{q}\right) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q). \tag{2.1.3}$$

Nous avons que

$$\langle q_2|\Psi(t+\varepsilon)\rangle = \Psi(q_2, t+\varepsilon) = \int dq_1 \langle q_2(t+\varepsilon)|q_1(t)\rangle \langle q_1|\Psi(t)\rangle . \tag{2.1.4}$$

Feynman exige alors une expression de proportionnalités

$$\Psi(q_2, t+\varepsilon) = A \int dq_1 \exp\left(i\tfrac{S[q(t)]}{\hbar}\right) \Psi(q_1, t). \tag{2.1.5}$$

Où $A$ une constant inconnue, Feynman suppose que cette équation appliqué que $\Psi(q,t)$ obéit à l'équation de Schrödinger

$$\left[\tfrac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\Psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t). \tag{2.1.6}$$

À la condition que la constante inconnue $A$ soit égale à

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}}. \tag{2.1.7}$$

### 2.1.2 Propagateur de l'équation de Schrödinger

Pour obtenir le propagateur de l'équation de Schrödinger, on définit l'opérateur hamiltonien dans un cas non relativiste à une dimension comme suit:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V\left(\hat{x}\right), \tag{2.1.8}$$

avec $m$ est la masse de particule qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\left|\Psi\left(t\right)\right\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V\left(\hat{x}\right)\right)\left|\Psi\left(t\right)\right\rangle . \tag{2.1.9}$$

Si l'on se donne à un instant initial $t_0$ fixé une condition initiale $\left|\Psi\left(t_0\right)\right\rangle$, et en supposant que l'opérateur $\hat{H}$ est indépendant du temps, on peut écrire la solution de l'équation de Schrödinger aux instants ultérieurs $t > t_0$ comme:

$$\left|\Psi\left(t\right)\right\rangle = e^{\left[-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar\right]}\left|\Psi\left(t_0\right)\right\rangle . \tag{2.1.10}$$

Projetons cette équation dans la représentation des moments :

$$\langle p \,|\Psi(t)\rangle = \langle p|\, e^{\left[-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar\right]} \,|\Psi(t_0)\rangle\,. \tag{2.1.11}$$

Et insérons la relation de fermeture dans le terme de droite $\left(1 = \int dp_0 \,|p_0\rangle \langle p_0|\right)$, on obtient:

$$\Psi(p,t) = \int dp_0 \,\langle p|\, e^{\left[-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar\right]} \,|p_0\rangle\, \Psi(p_0,t_0)\,, \tag{2.1.12}$$

avec $\Psi(p,t) = \langle p\,|\Psi(t)\rangle$.

On définit le propagateur de l'équation de Schrödinger dans l'espace des moments par :

$$K(p,t \mid p_0,t_0) = \langle p|\, e^{\left[-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar\right]} \,|p_0\rangle\,. \tag{2.1.13}$$

De telle sorte que la fonction d'onde évolue selon l'équation intégrale :

$$\Psi(p,t) = \int dp_0 K(p,t \mid p_0,t_0)\, \Psi(p_0,t_0)\,, \tag{2.1.14}$$

ce propagateur est une solution de l'équation de Schrödinger (2.1.9) comme celle de la fonction d'onde.

### 2.1.3 Forme discrète du propagateur dans l'espace des moments

Nous pouvons décrire le propagateur comme étant l'amplitude de probabilité de transition définie à l'aide de l'opérateur d'évolution dans l'espace des impulsions pour une particule non relativiste soumise à un potentiel $V(x)$ et repérée par les positions $x_a$ et $x_b$ aux instants fixés $t_a$ et $t_b$ respectivement, par:

$$K(p_a,p_b;t_a,t_b) = \left\langle p_b \left| \hat{U}(t_b,t_a) \right| p_a \right\rangle, \tag{2.1.15}$$

avec la condition $t_b > t_a$. On peut décomposer l'opérateur d'évolution $\hat{U}(t_b,t_a) = e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar}$ en $(N+1)$ opérateurs élémentaires $\hat{U}(t_j,t_{j-1}) = e^{-i\hat{H}(t_j-t_{j-1})/\hbar}$; $t_j - t_{j-1} = (t_b - t_a)/(N+1)$. Ensuite, en insérant $N$ relations de fermeture de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \,|p_j\rangle \langle p_j| = 1, \tag{2.1.16}$$

entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux, le propagateur peut se mettre sous la forme d'un produit de $(N+1)$ propagateurs élémentaires

$$K(p_a,p_b;t_a,t_b) = \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \prod_{j=1}^{N} K(p_j,p_{j-1};\varepsilon)\,, \tag{2.1.17}$$

où

$$K\left(p_j, p_{j-1}; \varepsilon\right) = \left\langle p_j \left| \exp\left[-i\varepsilon \hat{H}/\hbar\right] \right| p_{j-1} \right\rangle, \tag{2.1.18}$$

avec l'opérateur Hamiltonien standard $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ et $\varepsilon = (t_j - t_{j-1})$ est très petit. On peut trouver ce propagateur infinitésimal dans la représentation du moment

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \hat{p} = p. \tag{2.1.19}$$

Et

$$\langle p \mid p' \rangle = \delta\left(p - p'\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{-\frac{ix}{\hbar}(p-p')}, \tag{2.1.20}$$

qui doit de plus vérifier la condition initiale de propagateur à $t = t'$. Dans l'expression (2.1.18) nous obtenons

$$\begin{aligned} K\left(p_j, p_{j-1}; \varepsilon\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{2\pi\hbar} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{p_j^2}{2m} + V\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}\right)\right)\right] e^{-\frac{ix_j}{\hbar}(p_j - p_{j-1})}, & (2.1.21) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{2\pi\hbar} e^{-\frac{ix_j}{\hbar}(p_j - p_{j-1})} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{p_j^2}{2m} + V(x_j)\right)\right], & (2.1.22) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{2\pi\hbar} e^{-\frac{ix_j}{\hbar}(p_j - p_{j-1})} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(p_j^2/2m + V(x_j)\right)}. & (2.1.23) \end{aligned}$$

Par substitution de (2.1.23) dans (2.1.17) et en définissant la fonction de Green $G(p_a, p_b; E)$ comme étant la transformée de Fourier du propagateur $K(p_a, p_b; t_a, t_b)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} G\left(p_a, p_b; E\right) &= \int_0^{\infty} dT e^{\frac{i}{\hbar}ET} \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \prod_{j=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[x_j\left(p_j - p_{j-1}\right) + \varepsilon\left(\frac{p_j^2}{2m} + V(x_j)\right)\right]\right], \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

il y a peu de cas où on peut le résoudre exactement; à savoir, le cas d'un potentiel linéaire $(V(x) = gx)$ et le cas d'un potentiel de l'oscillateur harmonique $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$.

## 2.2 Construction du propagateur dans le cas non déformé

Dans cette section, nous allons analyser, par l'intégrale de chemin, le comportement d'une particule de masse $m$ et de charge $e$, dans un champ magnétique non homogène s'écrit comme suit:

$$\vec{B} = \left[B_0/\left(1 - ay\right)^2\right] \vec{e}_z, \tag{2.2.1}$$

où ce qui en fait le potentiel vectoriel défini par $\vec{A} = [B_0 y/ (1-ay)]\, \vec{e}_x$ et potentiel électrique scalaire nul.

Le mouvement de la particule non relativiste avec spin 1/2 dans l'espace des moments est régi par le Hamiltanien de l'équation de Pauli

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2m}(\hat{p}_x - \tfrac{eB_0\hat{y}}{1-a\hat{y}})^2 + \tfrac{\hat{p}_y^2}{2m} + \tfrac{\hat{p}_z^2}{2m} + \tfrac{e\hbar}{2m}\tfrac{B_0}{(1-a\hat{y})^2}\sigma_z, \tag{2.2.2}$$

avec $\sigma_z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice de Pauli.

### 2.2.1 La fonction de Green

Pour fournir le traitement d'intégrale de chemin correspondant à l'équation (2.2.2), le propagateur s'écrit dans la représentation de l'espace des impulsions (2.1.19), (2.1.20) qui est la transformation de Fourier de la fonction de Green définit comme suit [1]:

$$K(\vec{p}_f, \vec{p}_i; T) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}ET} G(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E), \tag{2.2.3}$$

cette dernière est définit par

$$G(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) = \left\langle \vec{p}_f \left| \frac{i\hbar}{E - \hat{H} + i\varepsilon} \right| \vec{p}_i \right\rangle . \tag{2.2.4}$$

L'action discrète est des fois mal définie à cause de la singularité, qui apparait dans certaines types de potentiels, c'est le premier problème posé dans notre système pour cela, il est nécessaire de modifié le propagateur de manière à éviter le problème de singularité au point $\left(\frac{1}{a}\right)$ parce que le système est dévolue indéfiniment si $\left(y = \frac{1}{a}\right)$.

Nous commençons par écrire l'opérateur résolvant

$$\hat{R} = \frac{i\hbar}{E - \hat{H} + i\varepsilon}. \tag{2.2.5}$$

En multipliant $\hat{R}$ à gauche et à droite par $\hat{g}_l$, $\hat{g}_r$, nous aurons

$$\hat{R} = \hat{g}_r \frac{i\hbar}{\hat{g}_l \left(E - \hat{H} + i\varepsilon\right) \hat{g}_r} \hat{g}_l, \tag{2.2.6}$$

avec $\hat{g}_l$, $\hat{g}_r$ sont des fonctions arbitraires appelées les fonctions Régulatrices, qui sont choisies d'une manière appropriées, dans notre cas $\hat{g} = (1 - a\hat{y})$

$$G(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) = g(\hat{y}_f) g(\hat{y}_i) \left\langle \vec{p}_f \left| \tfrac{i\hbar}{g_l(\hat{y})\left(E - \hat{H}\right) g_r(\hat{y}) + i\varepsilon} \right| \vec{p}_i \right\rangle . \tag{2.2.7}$$

On remarque que la multiplication de la fonction $g(\hat{y}) = 1 - a\hat{y}$ à gauche et à droite afin de garder la symétrie de Hamiltonien pour ce système. Comme on le sait la fonction de Green est une matrice diagonale $(2 \times 2)$ dans l'espace de moment s'écrit comme

$$G(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) = g(\hat{y}_f)g(\hat{y}_i)\begin{bmatrix} G^+(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) & 0 \\ 0 & G^-(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) \end{bmatrix}, \tag{2.2.8}$$

Puis en exprimant l'opérateur $\frac{i\hbar}{g_l(\hat{y})\left(E-\hat{H}\right)g_r(\hat{y})}$ dans la représentation de Schwinger [30], on peut associer à l'opérateur résolvant un élément de matrice appelé l'amplitude de transition pour une énergie fixée ou fonction de Green nous trouvons

$$G^s(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E) = -\frac{i}{\hbar}g(\hat{y}_f)g(\hat{y}_i)\int_0^{\infty} d\tau \left\langle \vec{p}_f \left| \exp\left[\frac{i\tau}{\hbar}\hat{H}^s\right] \right| \vec{p}_i \right\rangle, \tag{2.2.9}$$

où $\hat{H}^s$ est le résultat de l'injection des fonctions $g_l(\hat{y}),\ g_r(\hat{y})$ sur le terme$\left(E - \hat{H}\right)$ avec $s = \pm 1$

$$\begin{aligned} \hat{H}^s &= \frac{1}{2m}\left[\left[2mE - \left(\hat{p}_x - eB_0\hat{y}/(1-a\hat{y})\right)^2 - \hat{p}_z^2\right)\right](1-a\hat{y})^2 \\ &\quad -(1-a\hat{y})\hat{p}_y^2(1-a\hat{y}) - se\hbar B_0\right]. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Après la simplification de Hamiltonien comme la forme quadratique de $\hat{y}$ avec l'utilisation connu du crochet de Heisenberg $[\hat{y}, \mathbb{F}(\hat{p}_y)] = i\hbar\mathbb{F}'(p_y)$ et suivant la procédure habituelle de la construction de la formulation d'intégrale de chemin de $K$, l'intervalle de temps est d'abord divisée en $(N+1)$ parties égales infinitésimales $\varepsilon = \tau/(N+1)$ et l'exponentielle est décomposée en $(N+1)$ exponentielle (à la suite Trotter) et puis les relations de fermeture (2.1.16) et (2.1.20).

$$\begin{aligned} G^s(\vec{p}_f, \vec{p}_i; E) = -\frac{i}{\hbar}(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i)\delta(p_{x_f} - p_{x_i})\delta(p_{z_f} - p_{z_i})\int_0^{\infty} d\tau \prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_j}{2\pi\hbar} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[-\frac{\varepsilon a^2\left(P_E^2 + p_{y_j}^2\right)}{2m}y_j^2 + \left(\triangle p_{y_j} + \frac{\varepsilon a}{m}\left(P_E^2 + p_{y_j}^2 - \xi\left(\xi + p_{x_j}\right) - i\hbar a p_{y_j}\right)\right)y_j \right.\right. \\ \left.\left. -\frac{\varepsilon}{2m}\left(P_E^2 + p_{y_j}^2 - \xi\left(\xi + 2p_{x_j}\right) - 2i\hbar a p_{y_j} - se\hbar B_0\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

avec

$$P_E = \sqrt{\left(p_x + \xi\right)^2 + p_z^2 - 2mE} \text{ et } \xi = eB_0/a \tag{2.2.12}$$

La forme de l'expression (2.2.11) fait apparaître que l'intégrale de chemin sur les variables $y_j$ est gaussienne, donc le résultat de la fonction Green $G^s(\vec{p}_f, \vec{p}_i, E)$ est simplifié par:

$$
\begin{aligned}
G^s(\vec{p}_f,\vec{p}_i,E) &= -\tfrac{i}{\hbar}(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i) \\
\times\delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i}) &\int\limits_0^\infty d\tau \prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\tfrac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2 p_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}} \\
\times\exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon a^2}\tfrac{\triangle p_{y_j}^2}{p_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}\right.\right. &- \left(\tfrac{1}{a}-\tfrac{\xi(p_x+\xi)}{ap_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}-\tfrac{i\hbar p_{y_j}}{p_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}\right)\triangle p_{y_j} \\
&\left.\left.+\tfrac{\varepsilon(\xi(p_x+\xi)+i\hbar a p_y)^2}{2mp_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}-\tfrac{\varepsilon\xi^2}{2m}-\tfrac{\varepsilon se\hbar B_0}{2m}\right]\right\}. \qquad (2.2.13)
\end{aligned}
$$

Pour évite le terme complexe dans l'expression de l'action donc, il faut développer d'abord la deuxième terme de l'action au post-point à l'ordre $\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\xi(p_x+\xi)}{a}\tfrac{\triangle p_{y_j}}{p_{y_j}^2+p_E^2} &= \tfrac{\xi(p_x+\xi)}{ap_E}\left[\arctan(\tfrac{p_f}{p_E})-\arctan(\tfrac{p_i}{p_E})\right] \\
&-\tfrac{\varepsilon i\hbar\xi(p_x+\xi)}{m}\tfrac{ap_{y_j}}{p_{y_j}^2+p_E^2}. \qquad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que cette fonction de Green $G^s(p_f,p_i;E)$ n'est pas identique à la formule standard de Feynman,

$$
\begin{aligned}
G^s(\vec{p}_f,\vec{p}_i,E) &= -\tfrac{i}{\hbar}(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i)\delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i}) \\
&\times e^{-\frac{i}{a\hbar}(p_{y_f}-p_{y_i})}\exp\left\{\tfrac{i\xi(p_x+\xi)}{\hbar a p_E}\left(\arctan(\tfrac{p_f}{p_E})-\arctan(\tfrac{p_i}{p_E})\right)\right\} \\
&\times\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty d\tau\prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\tfrac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}} \\
&\times\exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon a^2}\tfrac{\triangle p_{y_j}^2}{\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}+\tfrac{i\hbar p_{y_j}\Delta p_{y_j}}{\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}\right.\right. \\
&\left.\left.+\varepsilon\left(\tfrac{(\xi(p_x+\xi))^2}{2m\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}-\tfrac{\hbar^2a^2}{2m}\tfrac{p_{y_j}^2}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}-\tfrac{\xi^2}{2m}-\tfrac{se\hbar B_0}{2m}\right)\right]\right\}, \qquad (2.2.15)
\end{aligned}
$$

puisque l'expression de l'intégrale de chemin ci-dessus, $\frac{m\,\triangle p_{y_j}^2}{2\varepsilon a^2\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}$ représente le terme de l'action cinétique est évident que la «masse» est dépendante de l'impulsion $p_y$ ou il est similaire à celui généré par le mouvement des particules ponctuelles sur les espaces courbes. Cette dépendance de l'espace peut être supprimée par utiliser la méthode de transformation sur les variable $p_y$ au $\eta$-point de discrétisation pour obtenir la forme standard de l'intégrale du chemin de Feynman.

### 2.2.2 Evaluation des corrections quantiques

Suivant la méthode standard de Feynman [29], nous pouvons montrer qu'il y a trois corrections dans l'expression (2.2.15).

**1-** La première est liée à l'action $C_{act}^{(1)}$,

**2-** la deuxième est liée à la mesure $C_m^{(1)}$

**3-** et la troisième est liée au pré-facteur $C_f$.

Nous développons l'exponentielle $\frac{m\,\triangle p_{y_j}^2}{2\varepsilon a^2\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}$ au $\eta-$point de discrétisation $\bar{p}_{y_j}^{(\eta)}=\eta p_{y_j}+(1-\eta)\,p_{y_{j-1}}$, nous trouvons

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{m}{2\varepsilon a^2}\frac{\left(\triangle p_{y_j}\right)^2/p_E^2}{1+p_{y_j}^2/p_E^2}\right)\right]=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{m\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2}{2\varepsilon a^2p_E^2}\left(\Delta p_{y_j}\right)^2\right)\right]\left(1+C_{act}^{(1)}\right), \quad (2.2.16)$$

où

$$C_{act}^{(1)}=\frac{im}{2\hbar\varepsilon a^2p_E^2}\left[\frac{2(1-\eta)\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\left(\Delta p_{y_j}\right)^3+(1-\eta)^2\left(\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2+\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)(\bar{f}_j^{(\eta)\prime})^2\left(\Delta p_{y_j}\right)^4\right]$$
$$-\frac{2(1-\eta)^2}{\left(2\hbar\varepsilon a^2p_E^2/m\right)^2}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^4\left(\Delta p_{y_j}\right)^6, \quad (2.2.17)$$

avec $f'(p_{y_j})=1/\sqrt{1+p_{y_j}^2/p_E^2}$. Et le terme de mesure sera développé comme:

$$\prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2p_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)}}=\prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2p_E^2}}\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\left(1+C_m^{(1)}\right), \quad (2.2.18)$$

où

$$C_m^{(1)}=(1-\eta)\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\Delta p_{y_j}+\frac{(1-\eta)^2}{2}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\Delta p_{y_j}^2. \quad (2.2.19)$$

Aussi le terme pré-facteur sera développé comme suit:

$$\frac{i\hbar p_{y_j}\Delta p_{y_j}}{\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}=1+C_f, \quad (2.2.20)$$

avec

$$C_f=\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)\Delta p_{y_j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\left(\Delta p_{y_j}\right)^2+(1-\eta)\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}-\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\right)\left(\Delta p_{y_j}\right)^2, \quad (2.2.21)$$

apportons le terme cinétique à la forme conventionnelle en utilisant la transformation des impulsions $p_{y_j}/p_E=g(k_{y_j})$; qui génère deux corrections:

**1-** La première est liée à l'action $C_{act}^{(2)}$,

**2-** la deuxième est liée à la mesure $C_m^{(2)}$

Le $\eta$-point expansion de $\Delta p_{y_j}$ est écrit par l'indice $(j)$

$$\Delta p_{y_j}/P_E = \Delta k_{y_j}\bar{g}_j^{(\eta)\prime}\left(1+\frac{(1-2\eta)}{2!}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\Delta k_{y_j}+\frac{(1-\eta)^3+\eta^3}{3!}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\Delta k_{y_j}^2\right). \tag{2.2.22}$$

Le choix de $g$ est arbitraire, nous imposons la condition suivante $((\partial g/\partial k) = (\partial f/\partial p)^{-1})$, qui fait la transformation $p_{y_j}/p_E = g(k_{y_j}) = \sinh k_{y_j}$ où $p_{y_j} \in [-\infty, +\infty]$ est mappé à $k_{y_j} \in [-\infty, +\infty]$. Mais les autres variable restent les mêmes ($p_x = k_x$ et $p_z = k_z$). Par la suite, nous développons l'exponentielle du terme cinétique comme suit

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\frac{m}{2\varepsilon a^2}\frac{\triangle p_{y_j}^2/p_E^2}{1+p_{y_j}^2/p_E^2}\right)\right] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m\Delta k_j^2}{2\varepsilon a^2}\right]\right\}\left[1+C_{act}^{(1)}\right]\left[1+C_{act}^{(2)}\right], \tag{2.2.23}$$

où $C_{act}^{(2)}$ est donné par

$$\begin{aligned} C_{act}^{(2)} = \Bigg\{ & \frac{im}{2\hbar a^2\varepsilon}\left[(1-2\eta)\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\Delta k_{y_j}^3+\left[\frac{(1-2\eta)^2}{4}\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2+\frac{(1-\eta)^3+\eta^3}{3}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right]\Delta k_{y_j}^4\right. \\ & \left. -\frac{(1-2\eta)^2}{2(2\hbar a^2\varepsilon/m)^2}\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\Delta k_{y_j}^6+\ldots\right\}. \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

La mesure induit aussi une correction

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{N}\int dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2\left(p_{y_j}^2+p_E^2\right)}} &= \sqrt{\frac{1}{g_f' g_i' p_E^2}}\prod_{j=1}^{N}\int dk_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2}} \\ &\times\left(1+C_m^{(1)}\right)\left(1+C_m^{(2)}\right), \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

où $C_m^{(2)}$ est donné par

$$C_m^{(2)} = \frac{(1-2\eta)}{2}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\Delta k_{y_j}+\left[-\frac{\eta(1-\eta)}{2}\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2+\frac{(1-\eta)^2+\eta^2}{4}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right]\Delta k_{y_j}^2, \tag{2.2.26}$$

est la deuxième correction sur la mesure.

En combinant toutes ces corrections on obtient:

$$\begin{aligned} C_T \;=\; & \left[\left(3-\frac{3}{2}\eta\right)\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2+\frac{3}{2}\eta-\frac{5}{4}\right]\Delta k_{y_j}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2\varepsilon\hbar a^2}\right)^2\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\Delta k_{y_j}^6 \\ & +\left(\frac{im}{2\varepsilon\hbar a^2}\right)\left[\left(\frac{11}{4}-\eta^2\right)\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\eta\right]\Delta k_{y_j}^4. \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Où les termes de correction sont évalués de façon perturbatrice, suivant l'utilisation de cette expression

$$\left\langle (\Delta k)^{2\ell} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar a^2 \varepsilon}{m}\right)^{\ell} (2\ell - 1)!!. \tag{2.2.28}$$

Ainsi, à travers toutes ces corrections, on peut conclure que la correction totale $C_T$ selon la discrétisation du $\eta-$point peut être obtenue comme

$$C_T = \frac{i\hbar a^2 \varepsilon}{m} \left[ \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\eta\left(\eta - 1\right)\right) \left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)}{}''}{\bar{g}_j^{(\eta)}{}'}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)}{}'''}{\bar{g}_j^{(\eta)}{}'} \right], \tag{2.2.29}$$

en outre, un choix judicieux du paramètre de discrétisation est indiqué par l'ordre des opérateurs présents dans la méthode de l'équation d'onde, le résultat coïncide avec l'approche intégrale du trajet lorsque $C_T$ est égal à

$$C_T = \frac{i\hbar a^2 \varepsilon}{m} \left[ \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\eta\left(\eta - 1\right)\right) \tanh^2\left(\bar{k}_{y_j}^{(\eta)}\right) - \frac{1}{4} \right], \tag{2.2.30}$$

Finalement l'expression de la fonction de Green s'écrit

$$\begin{aligned} G^s(\vec{k}_f, \vec{k}_i; E) &= -\frac{i}{\hbar}(1 - a\hat{y}_f)(1 - a\hat{y}_i) \\ &\times e^{-\frac{iP_E}{a\hbar}(\sinh k_f - \sinh k_i)} e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)}{\hbar a p_E}\left(\arctan(\sinh k_f) - \arctan(\sinh k_i)\right)} \\ &\times \delta(k_{x_f} - k_{x_i})\delta(k_{z_f} - k_{z_i})\sqrt{\frac{1}{g_f' g_i' p_E^2}} \int_0^\infty d\tau \prod_{j=1}^{N} \int dk_{y_j} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon a^2}} \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \left[ \frac{m\left(\Delta k_{y_j}\right)^2}{2\varepsilon a^2} + \varepsilon\frac{\hbar^2 a^2}{2m} \left( \frac{(\xi/\hbar a p_E)^2 (p_x+\xi)^2 - 3\eta^2 + 3\eta - \frac{1}{2}}{\cosh^2\left(\bar{k}_{y_j}\right)} \right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + 3\eta^2 - 3\eta - \frac{\xi^2}{\hbar^2 a^2} - \frac{s\xi}{\hbar a} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Cette expression est exactement la représentation de l'amplitude de transition d'une particule ponctuelle, étude du mouvement d'une particule sous l'action d'un potentiel de Rosen-Morse dans l'espace des impulsions.

### 2.2.3 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés:

Nous remarque que la fonction de Green relatif de ce system admet la solution associée au potentiel de Rosen-Morse [31]:

$$G^s(\vec{k}_f,\vec{k}_i;E) = -\frac{(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i)}{P_E}\delta(k_{x_f}-k_{x_i})\delta(k_{z_f}-k_{z_i})$$
$$\times e^{-\frac{iP_E}{a\hbar}(\sinh k_f-\sinh k_i)}e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)}{\hbar a p_E}\left(\arctan(\sinh k_f)-\arctan(\sinh k_i)\right)}$$
$$\times\left[\cosh(k_f)\cosh(k_i)\right]^{-1/2}\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^\infty d\tau e^{\frac{i\tau}{\hbar}\tilde{\mathcal{E}}^s}\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tau). \tag{2.2.32}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{E}}^s = \frac{\hbar^2 a^2}{2m}\left[3\eta^2-3\eta-\frac{\xi^2}{\hbar^2a^2}-\frac{s\xi}{\hbar a}\right], M=m/a^2 \tag{2.2.33}$$

et le propagateur $\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tau)$ donné par

$$\mathcal{K}^s(k_f,k_i;\tau) = \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}\int dk_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon}}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{M\Delta k_{y_j}^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon\hbar^2}{2M}\frac{\xi^2(p_x+\xi)^2/\left(\hbar a p_E\right)^2+3\eta\left(1-\eta\right)-\frac{1}{2}}{\cosh^2\left(k_{y_j}\right)}\right]\right\}. \tag{2.2.34}$$

La solution exacte pour la fonction de Green $\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tilde{\mathcal{E}}^s)$ correspondant de cet propagateur $\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tau)$ est donnée par:

$$\mathcal{K}^s\left(k_f,k_i;\tilde{\mathcal{E}}^s\right) = \frac{i}{\hbar}\int\limits_0^\infty d\tau e^{\frac{i\tau}{\hbar}\tilde{\mathcal{E}}^s}\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tau) \tag{2.2.35}$$
$$= \frac{M}{\hbar^2}\frac{\Gamma\left(m_1-L_{P_E}\right)\Gamma\left(L_{P_E}+m_1+1\right)}{\Gamma\left(m_1+m_2+1\right)\Gamma\left(m_1-m_2+1\right)}$$
$$\times\left(\frac{1-\tanh k_f}{2}\cdot\frac{1-\tanh k_i}{2}\right)^{\frac{m_1-m_2}{2}}\left(\frac{1+\tanh k_f}{2}\cdot\frac{1+\tanh k_i}{2}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}}$$
$$\times{}_2F_1\left(-L_{P_E}+m_1,L_{P_E}+m_1+1;m_1+m_2+1;\frac{1+\tanh k_\succ}{2}\right)$$
$$\times{}_2F_1\left(-L_{P_E}+m_1,L_{P_E}+m_1+1;m_1-m_2+1;\frac{1-\tanh k_\prec}{2}\right), \tag{2.2.36}$$

Il est égal à la somme deux expressions

$$\mathcal{K}^s\left(k_f,k_i;\tilde{\mathcal{E}}^s\right) = \sum_{n=0}^{N_{\max}}\frac{\psi_n\left(k_f\right)\psi_n^*\left(k_i\right)}{E_n-\tilde{\mathcal{E}}_E^s}+\sum_{\pm}\int_0^\infty d\boldsymbol{k}\frac{\psi_k^\pm\left(k_f\right)\psi_k^{\pm *}\left(k_i\right)}{\hbar^2\boldsymbol{k}^2/2m-\tilde{\mathcal{E}}_E^s}. \tag{2.2.37}$$

avec

$$L_{P_E} = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\xi^2(p_x+\xi)^2}{\left(\hbar a p_E\right)^2}+3\eta\left(1-\eta\right)-\frac{1}{4}}$$
$$m_1 = 0,\quad m_2=\sqrt{-2M\tilde{\mathcal{E}}_E^s}. \tag{2.2.38}$$

le spectre d'énergie $E_n$ et les fonctions d'onde $\psi_n(k)$ dans les états liés sont donnés par [31]

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{8M}\left[\nu_E - 2n + 1\right]^2, \tag{2.2.39}$$

et

$$\psi_n(k) = \left[\frac{2^{2n+1-\nu_E)}((\nu_E-2n-1)/2)n!\Gamma(\nu_E-n)}{\Gamma^2((\nu_E+1)/2)}\right]^{1/2}\left[\frac{1}{\cosh k}\right]^{(\nu_E-2n-1)/2} P_n^{(\nu_E-2n-1)/2}(\tanh k), \tag{2.2.40}$$

où

$$\frac{\nu_E}{2} = \sqrt{\frac{\xi^2(p_x+\xi)^2}{(\hbar a p_E)^2} + 3\eta(1-\eta) - \frac{1}{4}}. \tag{2.2.41}$$

Et les fonctions d'onde $\psi_k^{\pm}(k)$ correspondant les spectres d'énergie ($\tilde{\mathcal{E}}_E^s = \hbar^2\boldsymbol{k}^2/2m$) des états continus pour ce système est exprimé dans Ref [31].

Alors nous pouvons écrire la fonction $G(\vec{k}_f, \vec{k}_i; E)$ des états liés de la manière suivante

$$\begin{aligned} G(\vec{k}_f, \vec{k}_i; E) &= \sum_{s=\pm1}\tfrac{1}{2}(1+s\sigma_z)\, G^s(\vec{k}_f, \vec{k}_i, E) \\ &= \sum_{s=\pm1}(1+s\sigma_z)\,\frac{(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i)}{2p_E}\delta(k_{x_f}-k_{x_i})\delta(k_{z_f}-k_{z_i}) \\ &\times e^{-\frac{iP_E(\sinh k_f - \sinh k_i)}{a\hbar}} e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)\left(\arctan(\sinh k_f)-\arctan(\sinh k_i)\right)}{\hbar a p_E}} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{((\nu_E-2n-1)/2)n!\Gamma(\nu_E-n)}{\Gamma^2((\nu_E+1)/2)}\right]\frac{2M}{\hbar^2\left(E_n-\tilde{\mathcal{E}}_E^s\right)}\left[\frac{1}{\cosh k_f\cosh k_i}\right]^{(\nu_E-2n-1)/2} \\ &\times P_n^{(\nu_E-2n-1)/2}(\tanh k_f)\, P_n^{(\nu_E-2n-1)/2}(\tanh k_i). \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Ensuite, en écrivant la matrice $\frac{1}{2}(1+s\sigma_z)$ dans (2.2.42) comme un produit d'un vecteur spinoriel $U$ et son conjugué $\bar{U}$ et le propagateur correspondant

$$\begin{aligned} K(\vec{k}_f, \vec{k}_i; T) &= \sum_{s=\pm1}\tfrac{1}{2}(1+s\sigma_z)\, K^s(\vec{k}_f, \vec{k}_i, T) \\ &= \sum_{s=\pm1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-a\hat{y}_f)(1-a\hat{y}_i)\delta(k_{x_f}-k_{x_i})\delta(k_{z_f}-k_{z_i}) \\ &\times \int\frac{dE}{2\pi\hbar}\left[\frac{((\nu-2n-1)/2)n!\Gamma(\nu-n)}{\Gamma^2((\nu+1)/2)}\right]\frac{\xi(\xi+p_x)}{a^3\hbar^3\left(\frac{\xi}{\hbar a}+\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\xi}{\hbar a}+\frac{s}{2}+n+\frac{1}{2}\right)^2}\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}ET}}{E-E_{n,s}^{(a)}}U_s\bar{U}_s \\ &\times e^{-\frac{iP_E}{a\hbar}(\sinh k_f-\sinh k_i)} e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)}{\hbar a p_E}\left(\arctan(\sinh k_f)-\arctan(\sinh k_i)\right)} \\ &\times\left[\frac{1}{\cosh k_f\cosh k_i}\right]^{(\nu-2n-1)/2} P_n^{(\nu-2n-1)/2}(\tanh k_f)\, P_n^{(\nu-2n-1)/2}(\tanh k_i), \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

avec $U_s$

$$U_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{1+s}\\ \sqrt{1-s}\end{pmatrix}. \tag{2.2.44}$$

Pour évaluer les fonctions d'onde et le spectre d'énergie, nous allons intégrer sur la variable $E$, ça peut être converti en une intégration complexe sur le long du contour spécial $\Gamma_c$, puis en utilisant le théorème des résidus, on obtient:

$$\oint \frac{dE}{2\pi\hbar} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}ET}}{E-E_{n,s}^{(a)}} F(E) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n,s}^{(a)}\left(t_f-t_i\right)} F\left(E_{n,s}^{(a)}\right). \tag{2.2.45}$$

$F(E)$ c'est toutes les fonctions dépendantes de $E$. On peut trouver les pôles de cette fonction défini par:

$$E_{n,s}^{(a)} = \frac{1}{2m}\left[p_z^2 + (p_x+\xi)^2 - \frac{\left(\frac{\xi}{\hbar a}\right)^2 (p_x+\xi)^2}{\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)^2}\right], \tag{2.2.46}$$

si on pose la condition suivante

$$-3\eta^2 + 3\eta - \frac{1}{4} = 0. \tag{2.2.47}$$

Où $\mu = \frac{\xi}{\hbar a} + \frac{s}{2}$.

Donc le propagateur devient avec énergie $E_{n,+1}^{(a)}$

$$K\left(\vec{p}_f, \vec{p}_i; T\right) = \sum_n \sum_{s=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dxdz \left[e^{-\frac{i}{\hbar}\left[E_n^{(a)}T + x\left(p_{x_f}-p_{x_i}\right) + z\left(p_{z_f}-p_{z_i}\right)\right]}\right] \times \Psi_{n,s}\left(p_f\right)\bar{\Psi}_{n,s}\left(p_i\right), \tag{2.2.48}$$

à partir de ce résultat, on peut déduire les fonctions d'onde correspondantes à l'énergie $E_{n,+1}^{(a)}$. Il peut symboliser les fonctions propres normalisées des états liés par les symboles $\Psi_{n,\upharpoonleft}(p)$, $\Psi_{n,\downharpoonleft}(p)$ et peuvent être facilement déduites par:

$$\Psi_{n,\upharpoonleft}(p) = \sqrt{\frac{((\nu-2n-1)/2)n!\Gamma(\nu-n)}{\Gamma^2((\nu+1)/2)} \frac{\xi(\xi+p_x)}{a^3\hbar^3}}(1-a\hat{y})e^{-\frac{iP_E \sinh k_y}{a\hbar}} \times e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)(\arctan(\sinh k_y))}{\hbar a p_E}} \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\cosh k_y}\right]^{\mu} P_n^{\mu}(\tanh k_y) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.49}$$

et

$$\Psi_{n,\downharpoonleft}(p) = \sqrt{\frac{((\nu-2n-3)/2)(n+1)!\Gamma(\nu-n-1)}{\Gamma^2((\nu+1)/2)} \frac{\xi(\xi+p_x)}{a^3\hbar^3}}(1-a\hat{y})e^{-\frac{iP_E \sinh k_y}{a\hbar}} \times e^{\frac{i\xi(p_x+\xi)(\arctan(\sinh k_y))}{\hbar a p_E}} \begin{pmatrix} 0 \\ \left[\frac{1}{\cosh k_y}\right]^{\mu} P_{n+1}^{\mu}(\tanh k_y) \end{pmatrix}. \tag{2.2.50}$$

On remarque que le spectre d'énergie défini dans l'équation (2.2.46) coïncide exactement avec le système relativiste obtenu dans [32], mais dans la limite $\frac{c}{v} \to 0$. Grâce à un bon choix de valeurs de $\eta-$point discrétisation ($\eta = 1/2 \pm \sqrt{6}/6$) qui diffèrent au cas familier ($\eta = 1/2$). Bien que les plus grandes attentes étaient sur le mi-point ce par rapport aux résultats de nombreux articles qui ont traité de nombreux systèmes comme les potentiels centraux ou le potentiel de Morse [33, 34, 35] par l'utilisation de la technique de transformation spatio-temporelle, où les corrections ont été calculées au voisinage du mi-point et les résultats ont été confirmés.

En fait, nous avons pensé que le décalage est dû à la nature du système étudié, ce qui représente un système de masse variable, d'autre part ce type de systèmes (masse variable) a été résolu par l'approche de Kleinert dans l'espace des configurations [36] et la valeur précise de l'énergie est réalisé au post-point mais dans notre cas, nous travaillons dans l'espace des moments ce qui nous fait poser la question quel sera le résultat à l'aide de la méthode Kleinert.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la fonction de Green relative au problème de la particule se déplaçant dans un champ magnétique non-homogène avec spin $(\frac{1}{2})$ peut être calculée par l'approche des intégrale de chemin dans l'espace des impulsions, en utilisant la transformation spatial et nous calculons aussi les corrections quantique qui permettent de ramener l'intégrale de chemin aux intégrale de chemin relative au potentiel de Rosen-Morse, le spectre d'énergie et les fonctions d'ondes sont déduits exactement. A ce niveau nous avons remarqué que la nature complexe du système fait le mi-point ne vérifie pas la valeur exacte de l'énergie, pour connaître la raison de ce changement nous sommes obligés d'utiliser des approches différentes de calcul et comparer les résultats.

Nous pouvons généraliser pour étudier ce système dans le cas relativiste. Aussi deux champs magnétique et électrique à forme non-homogène.

# 3

# Le formalisme de Feynman avec champ magnétique non-homogène dans le cas déformé

## 3.1 Introduction

La physique théorique au cours du $20^{\text{éme}}$ siècle a été caractérisée par trois révolutions, la physique quantique et la théorie de la relativité générale qui ont été découvertes ensemble, une autre théorie a été adoptée au milieu du siècle appelée la géométrie non commutative (NC) qui a été accueillie par les chercheurs dans le domaine de la physique et des mathématiques. La motivation de l'apparition de ces théories est multiple, dans une théorie des cordes, dans la gravité quantique, dans une géométrie non commutative, et dans un trou noir physique. Il existe de nombreuses applications physiques pour ce type d'étude, parmi lesquelles une série de papiers Kempf sont l'un des exemples les plus simples dans la mécanique quantique déformée. Mathématiquement, son idée est basée sur la généralisation du principe de Heisenberg dans une dimension $(1D)$ comme suit:

$$\Delta X \Delta P \geqslant \frac{\hbar}{2}\left(1+\beta\left(\Delta P\right)^{2}\right), \tag{3.1.1}$$

et leur relation de commutation canonique correspondante entre les opérateurs de position et de moment est donné par:

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right] = i\hbar\left(1+\beta\hat{P}^{2}\right). \tag{3.1.2}$$

Cette déformation conduit à une nouvelle structure à courte distance caractérisée par une incertitude minimale non nulle $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$ dans la mesures de position. Ces termes de correction cédés aux relations d'incertitude et impliquent une incertitude minimale limitée dans les mesures de position, par exemple. À l'échelle de Planck. Une première conséquence de la longueur minimale est l'apparence d'une coupure naturelle qui empêche les divergences UV habituelles. Une autre conséquence d'une telle incertitude de Heisenberg généralisée est l'apparition d'un mélange UV/IR intrigant. Ce type de relation UV/IR est apparu dans plusieurs autres contextes: la correspondance AdS/CFT [37], Théorie des champs non commutative [38].

De nombreux travaux sont étudiés en présence d'une incertitude de longueur minimale dans les deux cas, mécanique quantique non relativiste et relativiste. Comme certaines de ces questions ont été traitées par méthode d'équation; Par exemple, l'oscillateur harmonique dans des dimensions arbitraires a été résolu par [13], Le problème cosmologique constant et la limite classique de la physique ont également été étudiés [17, 39], L'effet de la longueur minimale sur le spectre énergétique du potentiel $3D$ Coulomb a été étudié dans [20, 40], La boîte unidimensionnelle [22], le potentiel linéaire dépendant du temps [23], etc. L'extension relativiste est également importante dans ce cadre, nous avons trouvé le cas de l'équation Dirac généralisée qui a récemment été considérée dans [25], et l'oscillateur Bosonic dans un boîtier de dimension de spin (0 et 1) dans [27] et dans $(1 + 3)$ dimension dans [28].

D'autres auteurs ont utilisé l'approche de Feynman pour gérer ce type de systèmes, rappelons par exemple; l'oscillateur harmonique dans une dimension dans [41], le potentiel coulomb [42], dans la deuxième section pour le potentiel linéaire dépendant du temps [23] et la particule relativiste sans spin [43], ... etc.

## 3.2 La mécanique quantique en présence de la distance minimale

Dans $D$ dimensions, le cadre de la mécanique quantique avec la présence de la distance minimale a été présentée par une série de recherches basées sur une relation de commutation modifiée entre les opérateurs position et moment donnés par [14]:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\left(1 + \beta\hat{p}_j^2\right), \tag{3.2.1}$$

où $\beta$ est petit paramètre, cette relation de commutation conduit à une incertitude généralisée de Heisenberg (GUP) qui définit une longueur minimale non nulle en position et la relation d'incertitude correspondant est:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}\left(1+\beta(\Delta p)^2+\beta\left\langle p\right\rangle^2\right). \tag{3.2.2}$$

Pour un $(\Delta x)$ fixe, l'intégalité (3.2.2) est satisfaite dans l'intervalle: $[\Delta p_-, \Delta p_+]$, tel que:

$$\Delta p_{\pm} = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}) - \beta - \left\langle p\right\rangle^2}. \tag{3.2.3}$$

La valeur minimale $(\Delta x)_{\min}$

$$\begin{aligned}(\Delta x)_{\min}(\langle p\rangle) &= \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\beta\left\langle p\right\rangle^2} \\ &= \hbar\sqrt{\beta} \text{ correspond à } \langle p\rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Les motivations pour l'occurrence d'une longueur multiple, dans une théorie des cordes, dans une gravitation quantique, dans une géométrie non-commutative, et dans un trou noir de la physique, qui a donné des termes de correction aux relations d'incertitude et impliquait une incertitude minimale dans les mesures de position, par exemple à l'échelle de Planck. On suppose que les composantes de l'opérateur de moment commutent avec l'un et l'autre.

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \tag{3.2.5}$$

La commutation entre les opérateurs de position sont modifiée par:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 2i\hbar\beta\left[\hat{p}_i\hat{x}_j - \hat{p}_j\hat{x}_i\right], \tag{3.2.6}$$

ce qui signifie que nous sommes laissés avec un espace de position non-commutative. Les opérateurs sont réalisés dans l'espace de moment comme:

$$\hat{x}_i = \left(1+\beta\mathbf{p}^2\right)\hat{q}_i, \hat{p}_i = p_i, i = 1,2,3 \text{ et } \hat{q}_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{3.2.7}$$

et par cette algèbre modifiée, la définition du produit scalaire devient:

$$\langle f|g\rangle = \int \tfrac{d^3p}{(1+\beta\mathbf{p}^2)} f^*(p)g(p), \tag{3.2.8}$$

cette définition assure herméticité de $\hat{x}$. Notons que les relations habituelles de la mécanique quantique peuvent être reproduites en posant $\beta = 0$. Avec la relation de fermeture pour l'état $|p\rangle$est:

$$\int \frac{d^3p}{(1+\beta\mathbf{p}^2)} |p\rangle \langle p| = 1, \tag{3.2.9}$$

et la relation de projection est facilement donnée par

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta\vec{p}^2)\delta^3(p-p'). \tag{3.2.10}$$

Où à une dimension la relation (3.2.10) s'écrit comme

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\delta(p-p'), \tag{3.2.11}$$

autrement

$$\langle p|p'\rangle = \delta\left(\frac{\arctan(\sqrt{\beta}p)}{\sqrt{\beta}} - \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p')}{\sqrt{\beta}}\right). \tag{3.2.12}$$

Avant de commencer par calculer la fonction de Green, nous allons vous rappeler "la méthode de transformation Spatio-temporelle" dans l'intégrale de chemin à la suite.

## 3.3 Transformation Spatio-temporelle dans l'intégrale de chemin

La formule intégrale de chemin de Feynman est facilement applicable aux premiers, mais pose des difficultés considérables pour L'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène qui sont deux problèmes d'essai bien connus dans la mécanique quantique. Duru et Kleinert [3] ont utilisé la transformation Kustaanheimo-Stifel (KS) [2] pour la première fois dans l'intégration du potentiel Coulomb. Cette transformation (KS) est bien connue dans la mécanique céleste, consiste en une transformation spatiale (pas nécessairement un changement de coordonnées) suivie d'une transformation temporelle, il peut être utilisé pour intégrer un certain nombre de potentiels en plus du potentiel Coulomb comme il sera expliqué dans cette section.

Nous commençons par le propagateur qui exprime l'intégrale du chemin conventionnel

$$K\left(x'',t'';x',t'\right) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} Ldt\right] D\left(x\left(t\right)\right). \tag{3.3.1}$$

Pour le lagrangien

$$L = \frac{m}{2}\dot{x} - V(x). \tag{3.3.2}$$

Pour une explication simple de la méthode de transformation nous choisissons un problème dans une dimension. Le propagateur doit être considéré comme la limite de la forme discrétisée $K_N$ tandis que $N \to \infty$, où

$$K_N = A_N \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} S_j\right] \prod_{j=1}^{N-1} dx_j, \tag{3.3.3}$$

avec le facteur de normalisation $A_N = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{N/2}$. L'action discrète dans l'intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ prend la forme

$$S_j = \frac{m}{2\varepsilon}\left(x_j - x_{j-1}\right)^2 - \varepsilon V(x_j) \tag{3.3.4}$$

La transformation de coordonnées est appliquée de la manière suivante

$$x = f(q). \tag{3.3.5}$$

Dans la version discrétisée, nous exprimons les incréments $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ en terme d' incréments $\Delta q_j = (q_j - q_{j-1})$. Ici la règle du $\eta$-point est un pari sûr. Les contributions jusqu'à l'ordre $\varepsilon$ doivent être conservées dans l'action et nous devons tenir compte que $(\Delta q_j)^2 \approx \varepsilon$. Nous développons $f(q_j)$ et $f(q_{j-1})$ au voisinage du $\eta$-point $\bar{q}_j^{(\eta)} = \eta q_j + (1-\eta)\, q_{j-1}$, et conserver les termes jusqu'au troisième ordre en $\Delta q_j$ nous avons:

$$\Delta x_j = \bar{f}_j^{(\eta)\prime}\Delta q_j\left[1 + \Delta q_j \frac{1-2\eta}{2!}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}} + \frac{1+3\eta^2-3\eta}{3!}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\left(\Delta q_j\right)^2\right], \tag{3.3.6}$$

où la prime indique les dérivés $\bar{f}_j^{(\eta)}$ par rapport à $\bar{q}_j^{(\eta)}$, puis nous trouvons le terme d'énergie cinétique dans l'action:

$$\begin{aligned}\frac{m}{2\varepsilon}\left(\Delta x_j\right)^2 \;&=\; \frac{m}{2\varepsilon}\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2 \Delta q_j^2 \left(1 + \Delta q_j\left(1-2\eta\right)\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right.\\ &\quad \left. + \left(\Delta q_j\right)^2\left[\frac{(1-2\eta)^2}{4}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2 + \frac{1+3\eta^2-3\eta}{3}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right]\right).\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Le terme d'énergie potentiel prend une forme simple

$$\varepsilon V(x_j) = \varepsilon V\left[f(\bar{q}_j^{(\eta)})\right] + O\left(\varepsilon^2\right) = \varepsilon V(f_j). \tag{3.3.8}$$

Maintenant considérez le terme

$$\prod_{j=1}^{N-1} dx_j = \prod_{j=1}^{N-1} f_j' dq_j, \tag{3.3.9}$$

qui doit être symétrique sur le point $q_j$,$q_{j-1}$.Donc, de préférence, on évite le point final de l'intervalle lorsque nous le développons sur le $\eta$-point $\bar{q}_j^{(\eta)}$ de l'intervalle. Ça sera fait par réécriture

$$\prod_{j=1}^{N-1} dx_j = [f'(q_N)f'(q_0)]^{\frac{-1}{2}} \prod_{j=1}^{N} (f'(q_j)f'(q_{j-1}))^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j. \tag{3.3.10}$$

Nous développons $f(q_j)$ et $f(q_{j-1})$ au deuxième ordre $\Delta q_j$, pour que

$$\begin{aligned}(f'(q_j)f'(q_{j-1}))^{\frac{1}{2}} &= \bar{f}_j^{(\eta)\prime}\left(1 + \tfrac{1-2\eta}{2}\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\Delta q_j\right.\\ &\left. + \left[\tfrac{(1-\eta)^2+\eta^2}{4}\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}} - \tfrac{\eta(1-\eta)}{2}\left(\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\right]\Delta q_j^2\right),\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{N-1} dx_j &= [f'(q_N)f'(q_0)]^{\frac{-1}{2}} \prod_{j=1}^{N} \bar{f}_j^{(\eta)\prime}\left(1 + \tfrac{1-2\eta}{2}\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j}\Delta q_j\right.\\ &\left. + \left[\tfrac{(1-\eta)^2+\eta^2}{4}\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}} - \tfrac{\eta(1-\eta)}{2}\left(\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\right]\Delta q_j^2\right).\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Il est clair que la forme discrétisée de l'intégrale du chemin est suffisamment compliqué à cause de la transformation (3.3.5). De plus, le paramètre de masse est dépendant de $\left(f_j'\right)$, donc nous appliquons la transformation de temps locale suivante pour surmonter cette difficulté

$$\frac{dt}{ds} = [f'(q(s))]^2 ; t(s_N) \approx t'', t(s_0) \approx t', \tag{3.3.13}$$

où $s$ représente le nouveau "temps". Pour la cohérence, il faut d'abord symétriser (3.3.13) sur l'intervalle $(j-1, j)$ afin d'éviter toute préférence d'un point d'extrémité au-dessus de l'autre. Cela signifie que

$$\varepsilon = \sigma_j f'(q_j)f'(q_{j-1}), \tag{3.3.14}$$

où $\sigma_j = s_j - s_{j-1}$. Nous développons $f'(q_j)$ et $f'(q_{j-1})$ autour le $\eta$-point $\bar{q}_j^{(\eta)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sigma_j\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2\left(1 + (1-2\eta)\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\Delta q_j + \left[\tfrac{(1-\eta)^2+\eta^2}{2}\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right.\right.\\ &\left.\left. -\eta(1-\eta)\left(\tfrac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\right]\Delta q_j^2\right).\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Notons que $\sigma_j$ ne sont plus de longueur égale. Une conséquence immédiate de (3.3.12) et (3.3.15) de ce que la mesure différentielle du chemin prend la forme

$$A_N \prod_{j=1}^{N-1} dx_j = \left[f'\left(q'\right) f'\left(q''\right)\right]^{\frac{-1}{2}} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\sigma_j}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j. \tag{3.3.16}$$

En insérant l'expression (3.3.15) pour $\varepsilon$ dans (3.3.7) et en retenant le terme jusqu'à $\left(\Delta q_j\right)^4$, on obtient

$$\frac{m(\Delta x_j)^2}{2\varepsilon} = \frac{m(\Delta q_j)^2}{2\sigma_j} + \frac{m(\Delta q_j)^4\lambda_j}{8\sigma_j}, \tag{3.3.17}$$

où

$$\lambda_j = \left(\left(16\eta\left(1-\eta\right)-3\right)\left(\frac{f_j''}{f_j'}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{f_j'''}{f_j'}\right). \tag{3.3.18}$$

Par ailleurs, le dérivé schwarzien de $f(x)$ est $\frac{-2\lambda}{3}$, Une quantité qui reste invariable sous n'importe quelle transformation fractionnaire. Aussi, le terme d'énergie potentielle prend la forme

$$\varepsilon V(x_j) = \sigma_j (f_j')^2 V(f_j) = \sigma_j (f_j')^2 V_j. \tag{3.3.19}$$

En combinant tous ces résultats, nous écrivons

$$\exp\left[\tfrac{i}{\hbar}S_j\right] = \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\left\{\tfrac{m}{2\sigma_j}\left(\Delta q_j\right)^2 + \tfrac{m}{8\sigma_j}\lambda_j\left(\Delta q_j\right)^4 - \sigma_j f_j'^2 V_j\right\}\right]. \tag{3.3.20}$$

Lorsque la relation suivante permet l'élimination de terme $\left(\Delta q_j\right)^4$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2 - bx^4\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-ax^2 - \tfrac{3}{4a^2}b\right) + 0\left(1/a^3\right). \tag{3.3.21}$$

Dans notre cas, $a = m/2i\hbar\sigma_j$, $b = m\lambda_j/8i\hbar\sigma_j$ et donc

$$\exp\left[\tfrac{i}{\hbar}S_j\right] = \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}\left\{\tfrac{m}{2\sigma_j}\left(\Delta q_j\right)^2 - \sigma_j\left(\left(f_j'\right)^2 V_j + \tfrac{3\hbar^2}{8m}\lambda_j\right)\right\}\right]. \tag{3.3.22}$$

Le dernier point important est que la nouvelle différence de temps $(s'' - s')$ est une quantité dépendante du chemin. Cette dépendance doit être incorporée au moyen de la contrainte

$$T = t'' - t' = \int_{s'}^{s''} ds\left[f'\left(q\left(s\right)\right)\right]^2, \tag{3.3.23}$$

dans l'intégrale du chemin. Pour cela, l'identité suivante est utilisée

$$[f'(q'')\, f'(q')] \int_0^{\infty} ds\delta \left( T - \int_{s'}^{s''} ds\, [f'(q(s))]^2 \right) = 1. \qquad (3.3.24)$$

On peut donc écrire le propagateur

$$K(f(q''), f(q'); T) \approx \lim_{N\to\infty} \int_{s'}^{s''} \delta \left( T - \int d\tau\, [f'(q(\tau))]^2 \right) K_N ds, \qquad (3.3.25)$$

où $K_N$ est le transformé discrétisé de

$$K_N = \sqrt{f'(q'')\, f'(q')} \int \prod_{j=1}^{N} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp\left( \frac{i}{\hbar} S_j \right). \qquad (3.3.26)$$

La représentation de Fourier de la fonction $\delta$ donne

$$K = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left( \frac{-iTE}{\hbar} \right) G(x'', x'; E)\, dE, \qquad (3.3.27)$$

où

$$G(x'', x'; E) = [f'(q'')\, f'(q')]^{\frac{1}{2}} \int_o^{\infty} ds P(q'', q'; s). \qquad (3.3.28)$$

La quantité $P(q'', q'; s)$ est le promoteur qui, comme le propagateur, est défini comme la limite de discret de $P_N$

$$P(q'', q'; s) = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{j=1}^{N} \left( \frac{m}{2i\pi\hbar\sigma_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp\left( \frac{i}{\hbar} \tilde{S} \right), \qquad (3.3.29)$$

où la nouvelle action $\tilde{S}$ se lit comme

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{m}{2\sigma_j} (\Delta q_j)^2 - \sigma_j \left( \left( f'_j \right)^2 (V - E) + \frac{3\hbar^2}{8m} \lambda_j \right) \right\}. \qquad (3.3.30)$$

Le succès de la transformation des coordonnées et du temps local dépend de la mesure dans laquelle on peut évaluer le promoteur sous une forme fermée. Nous pouvons également écrire l'expression pour le promoteur dans la forme de Feynman comme

$$P(q'', q'; s) = \int \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \tilde{S}[q(s)] \right\} D[q(s)], \qquad (3.3.31)$$

où

$$\tilde{S}[q(s)] = \int_0^{s} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{d\sigma} \right)^2 - \tilde{V}(q) \right] d\sigma. \qquad (3.3.32)$$

Le nouveau potentiel $\tilde{V}(q)$ a la forme

$$\tilde{V}(q) \approx [f'(q)]^2 [V(f(q)) - E] + \frac{3\hbar^2}{8m}\lambda. \tag{3.3.33}$$

Le promoteur original a impliqué l'intégration du chemin de la fonction caractéristique classique de Hamilton $W = S + Et$ plutôt que l'action classique. Le promoteur transformé est comme le propagateur dans de nouvelles coordonnées et un nouveau temps avec l'action $\tilde{S}[q(s)]$. La formulation discutée ici a le mérite que la transformation des coordonnées suggère la transformation de temps locale.

## 3.4 Construction de la fonction de Green (cas déformé)

Comme on a l'hamiltonien (2.2.2) indépendant de $(x, z)$, nous pouvons traiter le système à une dimension avec la modification suivante

$$\hat{y} = i\hbar\frac{\beta}{\hat{\alpha}}(1 + \hat{\alpha}\hat{p}_y^2)\frac{\partial}{\partial p_y} \text{ avec } \hat{\alpha} = \frac{\beta}{1+\beta(\hat{p}_x^2+\hat{p}_z^2)}. \tag{3.4.1}$$

et le produit scalaire de deux états est simplifié par

$$\langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle = \frac{\beta}{\alpha}\delta(p_x - p_x')\,\delta(p_z - p_z')\,\delta\left(\frac{\arctan(\sqrt{\alpha}p_y)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\arctan(\sqrt{\alpha'}p_y')}{\sqrt{\alpha'}}\right). \tag{3.4.2}$$

Le propagateur est la transformation de Fourier de la fonction de Green définit comme suit

$$K^{(\alpha)}(p_f, p_i; T) = \int \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}ET} G^{\alpha}(p_f, p_i; E), \tag{3.4.3}$$

cette dernière s'écrit comme suite

$$G^{(\alpha)}(p_f, p_i; E) = \left\langle p_f \left| \frac{i\hbar}{E-\hat{H}+i\varepsilon} \right| p_i \right\rangle. \tag{3.4.4}$$

où $\hat{R} = \frac{i\hbar}{E-\hat{H}+i\varepsilon}$ est l'opérateur résolvant, a fin d'éviter le problème de singularité au point $(1/a)$ et garder la symétrie de Hamiltonien doit être multiplier $\hat{R}$ à gauche et à droite par des fonction arbitraires $\hat{g}_l$, $\hat{g}_r$, nous aurons

$$G^{(\alpha)}(p_f, p_i; E) = g^{(\alpha)}(\hat{y}_f)g^{(\alpha)}(\hat{y}_i)\left\langle p_f \left| \frac{i\hbar}{g_l(\hat{y})\left(E-\hat{H}\right)g_r(\hat{y})+i\varepsilon} \right| p_i \right\rangle, \tag{3.4.5}$$

et comme on a fait la fonction de Green est une matrice diagonale $(2 \times 2)$ dans l'espace de moment s'écrit comme

$$G^{(\alpha)}(p_f, p_i; E) = g^{(\alpha)}(\hat{y}_f)g^{(\alpha)}(\hat{y}_i)\begin{bmatrix} G^+(p_f, p_i; E) & 0 \\ 0 & G^-(p_f, p_i; E) \end{bmatrix}, \tag{3.4.6}$$

après, en utilisant la méthode de Schwinger, on définit respectivement les éléments de matrice $G^{(\alpha)}(p_f, p_i; E)$ dans la même expression

$$G^{(\alpha)}(p_f, p_i; E) = g^{(\alpha)}(\hat{y}_f) g^{(\alpha)}(\hat{y}_i) \int_0^\infty d\tau \left\langle p_f \left| \exp\left[\tfrac{i\tau}{\hbar}\hat{H}^\alpha\right]\right| p_i \right\rangle, \tag{3.4.7}$$

Ensuite, nous définissons le nouvel opérateur $\hat{H}^{(\alpha)}$

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2m}\left[\left[2mE - \left(\hat{p}_x - eB_0\hat{y}/(1-a\hat{y})\right)^2 - \hat{p}_z^2\right)\right](1-a\hat{y})^2 \\ &\quad -(1-a\hat{y})\hat{p}_y^2(1-a\hat{y}) - se\hbar B_0\Big]. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

nous utilisons le crochet de Heisenberg $[\hat{y}, \mathbb{F}(\hat{p}_y)] = i\hbar\,(1+\beta\vec{p}^2)\,\mathbb{F}'\,(p_y)$ pour la simplification de Hamiltonien comme la forme quadratique de $\hat{y}$ et suivant la procédure habituel de la construction de la formulation d'intégrale de chemin de $K$, nous divisons l'intervalle de temps en $(N+1)$ parties égales infinitésimales $\varepsilon = \tau/(N+1)$ où l'exponentielle est décomposée en $(N+1)$ exponentielle (à la suite Trotter) insérant la relation de fermeture pour les états impulsion donnée par l'équation (3.2.9) entre chaque pair d'opérateurs évolution infinitésimales, ils ont trouvés la forme Hamiltonienne de l'intégrale de chemin pour la fonction $G^{(\alpha,s)}(p_f, p_i; E)$

$$\begin{aligned} G^{(\alpha,s)}(p_f, p_i; E) &= -\tfrac{i}{\hbar} g^{(\alpha)}(\hat{y}_f) g^{(\alpha)}(\hat{y}_i) \int_0^\infty d\tau\, \delta(p_{x_f} - p_{x_i})\delta(p_{z_f} - p_{z_i}) \\ \times \tfrac{\beta}{\alpha} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{dp_{y_j}}{\frac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)} \prod_{j=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dy_j}{2\pi\hbar} \exp\Bigg[ &-\frac{\varepsilon a^2\beta^2\left(p_E^2 + p_{y_j}^2\right) y_j^2}{i\hbar 2m\alpha^2} + \Bigg( \frac{i\left(\triangle \arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)}{\hbar\sqrt{\alpha}} \\ &+ \tfrac{\varepsilon a\beta}{m\sqrt{\alpha}} \left( p_E^2 + p_{y_j}^2 - \xi\,(p_x + \xi) - \frac{2i\hbar a\beta\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}{\alpha} p_{y_j}^2 \right)\Bigg) y_j - \tfrac{\varepsilon\xi^2}{2m} \\ &- \tfrac{\varepsilon se\hbar B_0}{2m} + \tfrac{\varepsilon(\xi(p_x+\xi) + i\hbar a p_y)^2}{2mp_E^2\left(1+p_{y_j}^2/p_E^2\right)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

La forme de l'expression (3.4.9) fait apparaître que l'intégrale de chemin sur les variables $y_j$ est gaussienne, donc le résultat est simplement écrit par:

$$
\begin{aligned}
G^{(\alpha,s)}(p_f,p_i;E) &= -\tfrac{i}{\hbar}g^{(\alpha)}(\hat{y}_f)g^{(\alpha)}(\hat{y}_i)\int_0^\infty d\tau\delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i}) \\
&\times\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_{y_j}}{\frac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\left[\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)^2}{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\right.\right. \\
&-\frac{\alpha}{\beta a}\left(\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(1-\frac{\xi(p_x+\xi)}{p_E^2+p_{y_j}^2}-\frac{i\hbar a\frac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)p_{y_j}}{p_E^2+p_{y_j}^2}\right) \\
&\left.\left.+\varepsilon\left(\frac{\left(\xi(p_x+\xi)+i\hbar a\frac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)p_{y_j}\right)^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}-\frac{se\hbar B_0}{2m}-\frac{\xi^2}{2m}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.4.10}
$$

L'existence du terme complexe dans l'expression de l'action crée un problème entre l'approche de Feynman et la mécanique quantique, afin d'éliminer ce dernier il faut développer d'abord le terme $(\frac{i\alpha}{\hbar\beta a}\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}}\frac{\xi(p_x+\xi)}{p_E^2+p_{y_j}^2})$ au post-point

$$
\frac{i\alpha}{\hbar\beta a}\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}}\frac{\xi(p_x+\xi)}{p_E^2+p_{y_j}^2}=\frac{i\alpha_j}{\hbar\beta a}\frac{\xi(p_x+\xi)}{p_E^2+p_{y_j}^2}\left(\frac{\Delta p_{y_j}}{1+\alpha p_{y_j}^2}+\frac{\alpha p_{y_j}\Delta p_{y_j}^2}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2}\right),
\tag{3.4.11}
$$

à l'ordre $\varepsilon$ on trouve:

$$
\begin{aligned}
G^{(\alpha,s)}(p_f,p_i;E) &= -\frac{i\beta}{\hbar\alpha}g^{(\alpha)}(\hat{y}_f)g^{(\alpha)}(\hat{y}_i)\int_0^\infty d\tau\delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i}) \\
&e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha}{\beta a}\left(\frac{\alpha\xi(p_x+\xi)}{(1-\alpha p_E^2)}-1\right)\left(\frac{\arctan(\sqrt{\alpha}p_f)-\arctan(\sqrt{\alpha}p_i)}{\sqrt{\alpha}}\right)}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\frac{\alpha}{\beta a}\xi(p_x+\xi)}{p_E(1-\alpha p_E^2)}\left[\arctan(\frac{p_f}{p_E})-\arctan(\frac{p_i}{p_E})\right]} \\
&\times\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_{y_j}}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}} \\
&\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)^2}{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}+\frac{i\hbar\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)p_{y_j}}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\left(\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}}\right)\right. \\
&\left.+\varepsilon\left(\frac{(\xi(p_x+\xi))^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}-\frac{\left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2p_{y_j}^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}-\frac{\xi^2}{2m}-\frac{se\hbar B_0}{2m}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.4.12}
$$

aussi à l'ordre $\varepsilon$ en développant le deuxième terme de l'action au $\eta$-point de discrétisation on trouve,

$$
i\hbar\left(\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)p_{y_j}}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}=\frac{i\hbar p_{y_j}\triangle p_{y_j}}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}-\varepsilon\frac{(\hbar a\beta)^2p_{y_j}^2\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}{\alpha m}.
\tag{3.4.13}
$$

La fonction de Green $G^{(\alpha,s)}(p_f,p_i;E)$ est simplifie par

$$G^{(\alpha,s)}(p_f,p_i;E) = -\frac{i\beta}{\hbar\alpha} g^{(\alpha)}(\hat{y}_f) g^{(\alpha)}(\hat{y}_i) \int\limits_0^\infty d\tau \delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i})$$
$$\times e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha}{\beta a}\left(\frac{\alpha\xi(p_x+\xi)}{(1-\alpha p_E^2)}-1\right)\left(\frac{\arctan(\sqrt{\alpha}p_f)-\arctan(\sqrt{\alpha}p_i)}{\sqrt{\alpha}}\right)} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\frac{\alpha}{\beta a}\xi(p_x+\xi)}{p_E(1-\alpha p_E^2)}\left[\arctan(\frac{p_f}{p_E})-\arctan(\frac{p_i}{p_E})\right]}$$
$$\times \prod_{j=1}^{N}\int \frac{dp_{y_j}}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)} \prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)^2}{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\right.$$
$$+i\hbar\frac{p_{y_j}\triangle p_{y_j}}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)} + \varepsilon\left(\frac{(\xi(p_x+\xi))^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)} - \frac{\left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2 p_{y_j}^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\right.$$
$$\left.\left. -\frac{\xi^2}{2m} - \frac{se\hbar B_0}{2m} - \frac{(\hbar a\beta)^2 p_{y_j}^2\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}{\alpha m}\right)\right\}. \tag{3.4.14}$$

Pour retourner le kernel standard de Feynman, il faut utiliser la transformation spatio-temporelle $\varepsilon_j \to \sigma_j$ et $p_{y_j}/p_E = g(k_{y_j})$, qui sont exprimés dans la section suivante.

### 3.4.1 Evaluation des corrections quantique:

À la première nous allons appliquer une transformation temporelle suivant les étapes bien connues, si on pose que

$$\varepsilon_j = \sigma_j f'(p_{y_j}) f'(p_{y_{j-1}}). \tag{3.4.15}$$

Par le développement $f'(p_{y_j})$ et $f'(p_{y_{j-1}})$ au $\eta$-point de discrétisation à l'ordre deux de $\Delta p_{y_j}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= \sigma_j\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2\left(1+(1-2\eta)\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\Delta p_{y_j} + \left[\frac{(1-\eta)^2+\eta^2}{2}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right.\right.\\ &\quad \left.\left. -\eta(1-\eta)\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2\right]\Delta p_{y_j}^2\right).\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

En développant $\left(\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)/\sqrt{\alpha}\right)$ au $\eta$-point de discrétisation, nous aurons:

$$\frac{\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})}{\sqrt{\alpha}} = \bar{f}_j^{(\eta)\prime}\Delta p_{y_j}\left[1+\Delta p_{y_j}\frac{1-2\eta}{2}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}} + \frac{1+3\eta^2-3\eta}{3!}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\left(\Delta p_{y_j}\right)^2\right]. \tag{3.4.17}$$

Nous trouvons le terme d'énergie cinétique dans l'action qui est simplifie par:

$$\begin{aligned}\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)^2}{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)} &= \frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\bar{f}_j^{(\eta)\prime}\right)^2\Delta p_{y_j}^2}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\left(1+\Delta p_{y_j}(1-2\eta)\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right.\\ &\quad \left. +\left(\Delta p_{y_j}\right)^2\left[\frac{(1-2\eta)^2}{4}\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2 + \frac{1+3\eta^2-3\eta}{3}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right]\right).\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

A partir de deux expressions (3.4.16) et (3.4.18), nous pouvons déduire la correction quantique sur l'action:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m\alpha^2}{2\varepsilon a^2\beta^2}\frac{\left(\triangle\arctan(\sqrt{\alpha}p_{y_j})\right)^2}{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{m\alpha^2}{2\sigma_j a^2\beta^2}\frac{\Delta p_{y_j}^2}{\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\right)(1+C_{act}), \qquad (3.4.19)$$

où

$$C_{act}=\frac{m\alpha^2}{2\sigma_j a^2\beta^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}\Delta p_{y_j}^4\left[\left(4\eta\left(\eta-1\right)-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2-\frac{1}{6}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right]. \qquad (3.4.20)$$

Nous pouvons utiliser l'expression suivante

$$\left\langle(\Delta p)^{2n}\right\rangle=\left(\frac{i\hbar\sigma_j a^2\beta^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}{m\alpha^2}\right)^n(2n-1)!!. \qquad (3.4.21)$$

Nous arrivons à

$$C_{act}=-\sigma_j\frac{3\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}{2m}\left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2\left[\left(4\eta\left(\eta-1\right)-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2-\frac{1}{6}\frac{\bar{f}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{f}_j^{(\eta)\prime}}\right]. \qquad (3.4.22)$$

Passons maintenant au terme de la mesure

$$\prod_{j=1}^{N}\int\frac{dp_{y_j}}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}}=\prod_{j=1}^{N}\int f'(p_j)dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}}, \qquad (3.4.23)$$

cela peut être réalisé en réécrivant le terme de volume

$$\begin{aligned}&\left[f'\left(p_f\right)f'\left(p_i\right)\right]^{-1/2}\prod_{j=1}^{N}dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{mf'(p_j)f'\left(p_{y_{j-1}}\right)}{2\pi i\hbar\varepsilon a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}}\\ =\;&\left[f'\left(p_f\right)f'\left(p_i\right)\right]^{-1/2}\prod_{j=1}^{N}dp_{y_j}\prod_{j=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\sigma_j a^2\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}}. \qquad (3.4.24)\end{aligned}$$

L'expression (3.4.14) se transforme,

$$\begin{aligned}G^{(\alpha,s)}(p_f,p_i;E)=&-\frac{i\beta}{\hbar\alpha}g^{(\alpha)}(\hat{y}_f)g^{(\alpha)}(\hat{y}_i)\delta(p_{x_f}-p_{x_i})\delta(p_{z_f}-p_{z_i})\left[f'\left(p_f\right)f'\left(p_i\right)\right]^{-1/2}\\ &e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha}{\beta a}\left(\frac{\alpha\xi(p_x+\xi)}{(1-\alpha p_E^2)}-1\right)\left(\frac{\arctan(\sqrt{\alpha}p_f)-\arctan(\sqrt{\alpha}p_i)}{\sqrt{\alpha}}\right)}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\frac{\alpha}{\beta a}\xi(p_x+\xi)}{p_E(1-\alpha p_E^2)}\left[\arctan(\frac{p_f}{p_E})-\arctan(\frac{p_i}{p_E})\right]}\\ &\times\int_0^\infty d\tau\mathcal{K}^s(k_f,k_i,\tau)\end{aligned}$$

avec le propagateur $\mathcal{K}^s(p_f, p_i, \tau)$ donné par

$$\mathcal{K}^s(p_f, p_i, \tau) = \prod_{n=1}^{N} \int dp_{y_j} \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\sigma_j a^2 \left(p_E^2 + p_{y_j}^2\right)}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m\alpha^2}{2\sigma_j a^2 \beta^2} \frac{\Delta p_{y_j}^2}{\left(p_E^2 + p_{y_j}^2\right)} + i\hbar \frac{p_{y_j} \triangle p_{y_j}}{\left(p_E^2 + p_{y_j}^2\right)} \right.$$
$$+\sigma_j \left( \frac{(\xi(p_x+\xi))^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2} - \frac{\left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2 p_{y_j}^2}{2m\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)} - \frac{\left(\xi^2+\xi\hbar a s\right)}{2m\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2} - \frac{\left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2 \alpha p_{y_j}^2}{m\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)} \right)$$
$$\left. -\sigma_j \frac{3}{2m} \left(\frac{\hbar a\beta}{\alpha}\right)^2 \left[ \left(4\eta\left(1-\eta\right)-1\right) \frac{4\alpha p_{y_j}^2 \left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2} + \frac{\alpha\left(p_E^2+p_{y_j}^2\right)}{3\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)^2} \right] \right\}, \tag{3.4.25}$$

comme on a fait le nouveau temps $\sigma_j = s_j - s_{j-1}$ est une quantité dépendante du chemin. Cette dépendance est liée à la condition suivante

$$\tau = \tau_f - \tau_i = \int_{s_i}^{s_f} \frac{ds}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)\left(1+\alpha p_{y_{j-1}}^2\right)}. \tag{3.4.26}$$

Au moyen de l'identité suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\alpha p_{y_f}^2\right)\left(1+\alpha p_{yi}^2\right)}} \int_0^\infty ds\; \delta\left(\tau - \int_{s_i}^{s_f} \frac{ds}{\left(1+\alpha p_{y_j}^2\right)\left(1+\alpha p_{y_{j-1}}^2\right)}\right) = 1. \tag{3.4.27}$$

aussi on a trouvé que le terme cinétique de ce propagateur est similaire dans le cas non déformé mais l'expression de l'intégrale de chemin ci-dessus, représente le terme cinétique de l'action $\frac{\left[m\alpha^2/2\sigma_j a^2\beta^2\right]\Delta p_{y_j}^2}{p_E^2+p_{y_j}^2}$ est évident que la «masse» est dépendante de l'impulsion $p_y$ ou il est similaire à celui généré par le mouvement des particules ponctuelles sur les espaces courbes. Cette dépendance de l'espace peut être supprimée par l'utilisation de la méthode de transformation spatial au $\eta$-point de discrétisation [29] afin d'obtenir la forme standard de l'intégrale du chemin de Feynman.

Suivant la méthode standard de Feynman [29] nous pouvons montrer qu'il y a trois corrections dans l'expression (3.4.25).

**1-** La première est liée à l'action $C_{act}$,

**2-** la deuxième est liée à la mesure $C_m$

**3-** et la troisième est liée au pré-facteur $C_f$.

Les étapes de calcul pour ces corrections quantique seront les mêmes dans le cas ordinaire, il y a seulement un changement de paramètre de masse ce qui est égal $\left(m\alpha^2/2a^2\beta^2\right)$, En combinant toutes les corrections on obtient:

$$\begin{aligned} C_T &= \left[(3-\frac{3}{2}\eta)(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}})^2 + \frac{3}{2}\eta - \frac{5}{4}\right]\Delta k_{y_j}^2 - \frac{1}{2}(\frac{m\alpha^2}{2\sigma_j\hbar a^2\beta^2})^2(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}})^2\Delta k_{y_j}^6 \\ &+ \frac{im\alpha^2}{2\sigma_j\hbar a^2\beta^2}\left[\left(\frac{11}{4}-\eta^2\right)(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}})^2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\eta\right]\Delta k_{y_j}^4. \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Où les termes de correction sont évalués de façon perturbatrice, en utilisant les valeurs d'attente

$$\left\langle (\Delta k)^{2\ell} \right\rangle = \left( \frac{i\hbar a^2\beta^2\sigma_j}{m\alpha^2} \right)^{\ell} (2\ell - 1)!!. \tag{3.4.29}$$

Ainsi, à travers toutes ces corrections, on peut conclure que la correction totale $C_T$ selon la discrétisation du $\eta-$point peut être obtenue comme

$$C_T = \frac{i\hbar\sigma_j a^2\beta^2}{m\alpha^2} \left[ \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\eta\left(\eta - 1\right)\right)\left(\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\bar{g}_j^{(\eta)\prime\prime\prime}}{\bar{g}_j^{(\eta)\prime}} \right], \tag{3.4.30}$$

Nous remarquons que si on pose $(\beta \to 0)$ nous revenons au système dans le cas ordinaire, ce qui nous donne le pouvoir de considérer que $\left(\eta = 1/2 \pm \sqrt{6}/6\right)$ . Où l'expression de la fonction de Green $\mathcal{K}^{(s)}(k_f, k_i; \mathcal{E})$ est fixé par le pseudo énergie $\mathcal{E}$ pour être évalué à $\mathcal{E}$ =0, il est la transformation de Fourier pour le Kernel $\mathcal{K}^s(p_f, p_i, \tau)$ s'écrit par

$$\mathcal{K}^{(s)}(k_f, k_i; \mathcal{E}) = \int_0^\infty d\tau \int_o^\infty ds P^{(\alpha,s)}(k_f, k_i, s), \tag{3.4.31}$$

où le promoteur $P^{(\alpha,s)}(k_f, k_i; s)$ est défini par

$$\begin{aligned} P^{(\alpha,s)}(k_f, k_i; s) &= \prod_{j=1}^{N} \int dk_{y_j} \prod_{j=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\sigma_j a^2}} \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{m\alpha^2(\triangle k_{y_j})^2}{2\sigma_j a^2\beta^2} + \frac{\sigma_j(\hbar a\beta/\alpha)^2}{2m} \left[ \frac{\tanh^2\left(k_{y_j}\right)}{4} - \frac{1}{2} \right.\right. \\ &+ \frac{\mathbf{c}(\alpha\xi(p_x+\xi)/\hbar a\beta)^2}{p_E^2\cosh^2(k_{y_j})} - \frac{\xi^2+\xi s\hbar a - 2m\mathcal{E} + \mathbf{B}(\alpha\xi(p_x+\xi)/\hbar a\beta)^2}{\left(1+\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})\right)^2} - \frac{9\alpha p_E^4\sinh^2(k_{y_j})\cosh^2(k_{y_j})}{\left(1+\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})\right)^2} \\ &\left.\left. - \frac{\alpha p_E^2\cosh^2(k_{y_j})}{\left(1+\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})\right)^2} - \frac{2\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})}{\left(1+\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})\right)} - \frac{\mathbf{A}(\alpha\xi(p_x+\xi)/\hbar a\beta)^2 p_E^2\sinh^2(k_{y_j})}{\left(1+\alpha p_E^2\sinh^2(k_{y_j})\right)^2} \right]. \right. \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Où

$$A = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 p_E^4 - 2\alpha p_E^2 + 1}, \tag{3.4.33}$$

et

$$B = \frac{2\alpha - \alpha p_E^2}{\alpha^2 p_E^4 - 2\alpha p_E^2 + 1}, \tag{3.4.34}$$

avec

$$C = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 p_E^4 - 2\alpha p_E^2 + 1} \tag{3.4.35}$$

Pour évaluer ce résultat nous allons simplifier ce potentiel effectif par les termes exponentielle comme ces Refs [44, 45, 46, 47, 48, 49], avec la fixation de la condition de $\alpha p_E^2 = ...$ ?

Pour éviter ce problème, nous proposons un autre type de déformation suivant le modèle Snyder [50] défini comme suit

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \beta p_i p_j\right). \tag{3.4.36}$$

avec

$$\hat{x}_i = i\hbar\sqrt{1+\beta\vec{P}^2}\hat{X}_i, \hat{p}_i = \frac{\hat{P}_i}{\sqrt{1+\beta\vec{P}^2}}, \tag{3.4.37}$$

où $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$ sont les opérateurs des positions et des moments qui vérifient le crochet de Heisenberg ordinaire $\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar$.

Ou nous devons répéter la transformation Spatio-temporelle mais cette fois ci, nous avons mis une autre considération pour $\sigma_j$ qui prend la forme suivante

$$\sigma_j = \varepsilon \left(p_{y_j}^2 + p_E^2\right). \tag{3.4.38}$$

dans ce cas le $\eta-$point-discrétisation sont les mêmes points dans Refs [52, 53, 54]. Car la limite $a \to 0$ devient un champ magnétique constant avec la présence de longueur minimal.

Le promoteur $P^{(\alpha)}(k_b, k_a, s)$ à l'ordre un de $\beta$ donne le potentiel effectif comme suit:

$$\begin{aligned} V_{eff} = {} & \frac{\xi^2(p_x+\xi)^2}{2mp_E^2\cosh^2\left(k_{y_j}\right)} - \frac{2\beta\xi^2(p_x+\xi)^2}{2m}\tanh^2\left(k_{y_j}\right) - \frac{\xi^2+s\xi\hbar a-2m\mathcal{E}}{2m} - \frac{\hbar^2a^2}{8m} \\ & +\beta\left\{2p_E^2\frac{\xi^2+s\xi\hbar a-2m\mathcal{E}}{2m}\sinh^2\left(k_{y_j}\right) + \frac{\hbar^2a^2}{2m}\left[-\frac{\left(p_x^2+p_z^2\right)}{2\cosh^2\left(k_{y_j}\right)} - \frac{\left(p_x^2+p_z^2\right)}{2}\right.\right. \\ & \left.\left.+2p_E^2 - 3p_E^2\cosh^2\left(k_{y_j}\right) - 9p_E^4\cosh^2\left(k_{y_j}\right)\sinh^2\left(k_{y_j}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

A partir de ce dernier, on peut se poser la question suivante: quels sont les systèmes étudiés qui donnent le même potentiel effectif ?

# 4

# Conclusion générale

Ce mémoire a deux objectifs

Le premier étant la présentation d'un traitement précis par l'approche de Feynman pour système d'une particule de masse $m$ et de charge $(e)$ se déplaçant dans un champ magnétique non-homogène avec spin $(1/2)$ dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste dans l'espace des impulsions. La construction du propagateur est basée sur la transformée de Fourier généralisée et nous avons montré que le calcul de la fonction de Green dans ce cas se ramène à un problème d'une particule ponctuelle, se déplaçant dans le potentiel Rosen-Morse par une transformation de coordonnée accompagnée d'un calcul des corrections quantiques. Les spectres d'énergie et les fonctions d'onde normalisées des états liés sont alors obtenus à partir des pôles de la fonction de Green. Ces résultats sont très satisfaisants

Le second but de ce mémoire, est l'introduction d'une longueur minimale sur le même système précédent, nous avons déterminé la fonction de Green via l'exemple de Kempf, cette dernière a une forme très complexe nécessitant l'utilisation de la technique des transformations spatio-temporelles et en incluant aussi une correction quantique supplémentaire dépendante du paramètre de déformation en s'appuyant sur la technique standard de Feynman. Ces deux étapes ont permis de convertir le problème d'une masse dépendante du temps à un problème de masse constante, il est vrai que nous avons trouvé une expression identique à la formule standard de Feynman mais avec un potentiel difficile ce qui nous a conduit à poursuivre d'autres moyens de résolution comme le changement de la déformation ou bien l'application d'une autre transformation spatio-temporelles. En fin, tout ce qu'on peut confirmer est que le sujet a de bonnes perspectives, notamment en ce qui concerne les potentiels coulombien.

# Bibliographie


[1] I. H. Duru et H. Kleinert, Phys. Lett. B **84** (1979) 185.

[2] P. Kustaanheimo et E. Stiefel, J. Reine Angew ; Math. **218** (1965) 204.

[3] I. H. Duru et H. Kleinert, Fortschr. Phys. **30** (1982) 401.

[4] I. H. Duru, Phys. Rev. D**28**, (1983) 2689.

[5] N. Pak and I. Sokraan, Phys. Lett. **100**A, (1984) 327.

[6] N. Pak and I. Sokman, Phys. Lett. **103**A, (1984) 298 .

[7] A. Inomata, Phys. Lett. **101**A, (1984) 253.

[8] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71** (1947) 38.

[9] C. Rovelli, Living Rev. Rel. **11** (1998).

[10] T. Thiemann, Lect. Notes Phys. **631**, (2003) 41.

[11] A. Perez, Class. Quantum Grav. **20** (2003) 43.

[12] A. Kempf, J. Math. Phys. **35**, (1994) 4483.

[13] A. Kempf, G. Mangano and R. B. Mann, Phys. Rev. D **52**, (1995) 1108.

[14] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. **37**, (1996) 2121.

[15] A. Kempf, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, (1997) 2093.

[16] A. Kempf and G. Mangano, Phys. Rev. D **55**, (1997) 7909.

[17] L.N. Chang, D. Minic, N. Okamura, T. Takeuchi, Phys. Rev. D **65** (2002) 125027.

[18] M R. Douglas and N A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, (2001) 977.

[19] A.W. Pet, J. Polchinski, Phys. Rev. D **59** (1999) 065011.

[20] F. Brau, J. Phys. A **32** (1999) 7691.

[21] R. Akhoury, Y.-P. Yao, Phys. Lett. B **572** (2003) 37.

[22] K.Nozari and T. Azizi, Gen. Rel. Grav. **38**, (2006) 735.

[23] M. Merad and M. Falek, Phys. Scr. **79**, (2009) 015010.

[24] K. Nouicer, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, (2006) 5125.

[25] K. Nozari and M. Karami, Mod. Phys. Lett. A **20**, (2005) 3095.

[26] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A **38**, (2005) 1747.

[27] M. Falek, M. Merad, J. Math. Phys. **50**, (2009) 023508.

[28] M. Falek and M. Merad, J. Math. Phys. **51**, (2010) 033516.

[29] D. C. Khandekar, S. V. Lawande, and K. V. Bhagwat, *Path Integral Methods and their Applications* (World Scientific, Singapore, 1993).

[30] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, (1951) 664.

[31] C. Grosche, F. Steiner, *Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics*, vol. **145** (Springer, Berlin, Heidelberg, 1998).

[32] P.Achuthan and, S.Benjamin. Al Nuovo Cimento . lett. **36**, (1983) 420.

[33] P. Y. Cai, A. Inomata and R. Wilson, Phys. Lett A**96**, (983) 117.

[34] F. Steiner, Phys. Lett. A**106**, (984) 363.

[35] A. Inomata and M. A. Kayed, Phys. Lett. A **108**, (985) 9.

[36] N. Bouchemla, L. Chetouani, Acta Physica Polonica B**40**, (2009) 2723.

[37] Susskind and E. Witten, The Holographic bound in anti-de Sitter space, e-print arXiv:hep-th/9805114; A. W. Peet.

[38] Douglas and N. A. Nekrasov, e-print arXiv:hep-th/0106048.

[39] Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **66**, (2002) 026003.

[40] Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A **72**, (2005) 012104.

[41] Kh. Nouicer, J. Phys. Lett. A **354**, (2006) 399.

[42] Kh. Nouicer, J. Math. Phys. **48**, (2007) 112104.

[43] M. Merad, F. Zeroual, and H. Benzair, Electron J. Theor. Phys. 7(**23**), (2010) 41.

[44] L. Chetouani, L. Guechi, A. Lecheheb, T.F. Hammann and A. Messouber; Physica A **234** (1996) 529-544.

[45] F. Benamira, L. Guechi, S. Mameri and M. A. Sadoun; Journal of Mathematical Physics **51**, (2010) 032301.

[46] Babatunde James Falaye, Few-Body Syst **53**, (2012) 563.

[47] J. J. Peña, J. Morales, and J. García-Ravelo, J. Math. Phys **58**, (2017) 043501.

[48] O. Bayrak, A. Soylu, and I. Boztosun, J. Math. Phys **51**, (2010) 112301.

[49] Akpan N. Ikot, Chin. Phys. Lett. **29**, (2012) 060307.

[50] S. Mignemi, Phys. Rev. D **84**, (2011) 025021.

[51] H. Kleinert, *Path Integral in quantum mechanics, statistics and polymer physics*,World Scientific, Singapore (1990).

[52] H. Benzair, M. Merad and T. Boudjedaa, Int. J. Mod. Phys. A **29**, (2014) 1450037.

[53] H. Benzair, T. Boudjedaa and M. Merad, J. Math. Phys. **53**, (2012) 123516.

[54] H. BenzairT. BoudjedaaM. Merad, Eur. Phys. J. Plus, **94** (2017) 132.

# ملخص :

في إطار ميكانيكا الكم الغير نسبي حيث السبين $(2/1)$ ، قمنا بمعالجة حالة جسيم ذو كتلة m و شحنة e يتحرك في حقل مغناطيسي غير متجانس باستعمال تقنية تكامل المسالك في تمثيل فظاء العزم.

**في الجزء الأول**، النظام عانى بعض المشاكل تم حلها عبر العديد من المراحل مثل مشكل التناظر والانقطاع في المسار عند النقطة $(1/a)$ ... الخ، دالة غرين تم بناءها استنادا إلى تقنية فاينمان المعممة وكذالك باستعمال تحويل مكاني الذي جعل الأخيرة تخضع لكمون *Rosen-Morse*. عبارة الطاقة والدوال الموجية تم إيجادها بدقة والنتائج كانت جد مرضية. **أما في الجزء الثاني**، فان الهدف كان يرتكز على معالجة نفس النظام السابق ولكن في وجود البعد الأصغري حسب تقريب *Kempf*، قمنا ببناء دالة غرين حيث وجدنا أن هذا التقريب جعل الكتلة متعلقة بالعزم ونتيجة لذالك طبقنا تحويل زمكاني من اجل الحصول على نفس الناشر المعتاد لفاينمان. وقد قمنا بحساب التصحيحات الكمية و هذه الأخيرة كانت متعلقة ايضا بالنقطة التفريد. وكان الكمون الفعلي لها جد صعب، لذا قمنا بوضع بعض الاقتراحات التي تمكن من وجود حل دقيق في الأعمال القادمة.

**الكلمات المفتاحية :** تكامل المسالك، دالة غرين، الطول الاصغري، تحويل زمكاني.

# Abstract:

In the framework of non relativistic quantum mechanics with spin 1/2, we have treated by the path integrals formalism of the behaviour of a particle of mass m and of charge e moving in a non-homogeneous magnetic field in the momentum space representation. **In the first part**, the system has some the problems solved by several steps, such as the singularity problem, the symmetry and the point of discretization ... ect. The Green function was constructed by adopting the standard technique of *Feynman*, with the more appropriate choice of the spatial transformation, which brings it back to that of *Rosen-Morse* propagator, energy spectra as well as the corresponding wave functions of the bound states have been exactly obtained. **In the second part**, the aim is to treat the above system in the presence of the uncertainty minimal length following the *Kempf* approach. We have determined the Green's function and also we found that this approach attributed the mass dependent on the momentum, therefore we use the spatio-temporal transformation method to obtain the usual *Feynman* propagator. We have evaluated the quantum corrections and the latter is dependent on $\eta$-point discretization, we found a Green function relative to the very difficult potential. We have therefore to propose ideas which contribute to the existence of the exact solution in later works.

**Key words:** Path integral, Green function, Minimal length, Spatio-Temporal transformation.