UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par :Zekri Salima

Thème

Traitement analytique du Problème d'écoulement par la transformation conforme.

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury composé de :

Tellab Ibrahim	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Badidja Salim	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	E xaminateur
Amara Abdelkader	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2016/2017

Dédicaces

Je dédie ce travail : À mes parents,

-Ma bougie de ma vie ma mère **Zineb Hafiane** et à mon père **Naser**

-À mes frères et soeurs et tous mes amis pour leurs encouragement qu'ils trouvent le témoignage de ma profonde affection et gratitude.

-Et tous qui ceux qui me soutenaient dans ce travail près ou de loin.

Remerciement

Tout d'abord, je tiens la grande remerciement au Dieu.
Je souhaite remercier les membres du jury, garants de la qualité de mon travail, et j'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Amara Abdelkader d'avoir proposer et encadrer ce travail et sa confiance et ses conseils et ses encouragements.
Je tiens aussi à remercier toute ma famille et mes amis et toute qu' encourage et aide moi au prés ou au loin à la réalisation de ce travail.

Notations et définitions

• $\nabla V = grad(V) = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y v \end{pmatrix}$:le gradient d'un vecteur V

• $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

• $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur $\vec{x}$ à l'instant t.

• $\vec{u}.\vec{v}$: Le produit scalaire de deux vecteurs

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$: Le produit vectoriel de deux vecteurs

• $r\vec{o}t(V) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

• $\cosh(x) = \dfrac{exp(x) + exp(-x)}{2}$

• $\sinh(x) = \dfrac{exp(x) - exp(-x)}{2}$

Table des matières

Introduction générale

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides, elle est la base du dimensionnement des conduites des fluides et des mécanismes de transfert des fluides. Les problèmes d'écoulement à surfaces libres se représentes dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines, sont étudiés d'une façon très intensive.
Ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques, qui doivent être trouvée comme faisant partie de la solution.
Dans notre mémoire on se propose d'étudier un traitement analytique du problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux en raison d'un jet devant deux plaque horizontales ; le plan des variables (x, y) d'écoulement est identifié au plan de la variable complexe $z = x+iy$. En négligent les tensions de surface et les forces de gravité, et on peut trouve la solution exacte en utilisant la transformation conforme.
Notre travaille est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on présenté un définition générale sur les mécaniques des fluides et quelque définition préliminaire autour l'analyse complexe et quelque définition sur les fluides et des propriétés de l'écoulement, et on parle aussi sur les potentiels complexe des vitesses et l'équation de Bernoulli.
Dans le chapitre 2, on donne des définitions de transformation conforme et quelque transformations classiques et des exemples sur les transformations conforme.
Dans le chapitre 3, on traite le problème d'écoulement potentiel avec des surfaces libres, Nous utilisons d'abord la méthode des lignes de courant libres basé sur la méthode hodographe et la transformation conforme pour obtenir la solution exacte.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre est consacré pour acquérir quelque notions fondamentales sur les mécaniques des fluides, et on fait un présentation sur l'analyse complexe et quelque propriétés de l'écoulement, et on défini les équations de potentielle et de potentielle complexe et l'équation de Bernoulli. Pour plus détail voir [1], [3], [5] et [7]

1.2 Initiation à l'Analyse Complexe

Un nombre complexe z est un doublet de nombres réels $z = (x, y) = x + iy$, où $i^2 = -1$
La fonction f d'une variable complexe z est une application $f(z)$ qui fait correspondre un nombre complexe f à un autre nombre complexe z .

Soit f une fonction d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ $\quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \Omega$
On peut écrire f qui est aussi un nombre complexe,comme

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où

u et v sont deux fonctions réelles de nombres réels

1.2.1 Dérivation des fonctions complexes

Une fonction f d'un ouvert Ω dans $\mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}-$dérivable au point $z_0 \in \Omega$ si 'l existe un voisinage V de z_0, tel que $V \subset \Omega$ et,

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite au point z_0 est notée $f'(z_0)$ la dérivée de f en z_0.

1.2.2 Définition de fonction holomorphe

f est dite holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}-$ dérivable en tout point de Ω.

1.2.3 Équations de Cauchy-Riemann

Si $f = u + iv$ est $\mathbb{C}-$dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ alors les équations suivantes sont vérifiées

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Alors $f'(z_0)$ donnée par

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Remarque

Soient $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2

Si $f = u + iv$ alors f holomorphe.

1.2.4 Théorème de Schwartz

Si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

1.2.5 Différentielle totale

On appelle différentielle totale du 1^{er} ordre d'une fonction $f(x, y)$ l'expression

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

1.3 Introduction à la mécanique des fluides

• Un écoulement en surface libre désigne un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau

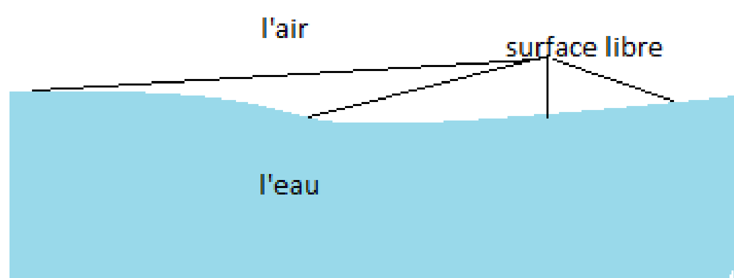

Figure 1.1 – Un écoulement en surface libre

• Considérons que V désigne un champ de vecteur vitesse de coordonnées $(u(x, y), v(x, y))$ à un point $M(x, y)$ d'un domaine ouvert du plan.

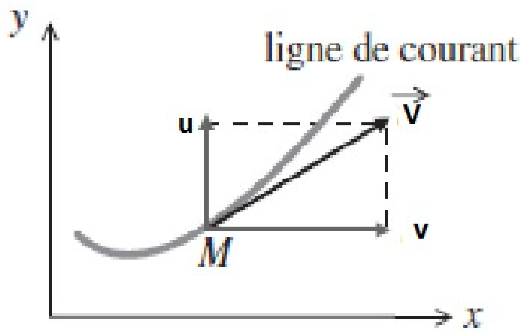

FIGURE 1.2 – Ligne de courant

1.3.1 Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement se traduit par l'équation $\vec{\nabla}.\vec{u} = 0$

1.3.2 Fluide irrotationnel

Un fluide est dit irrotationnel Si

$$rot(\vec{V}) = 0. \tag{1.1}$$

1.3.3 Ligne de courant

Sont les lignes qui en chaque point sont tangentes au vecteur vitesse en ce point(pour un instant fixe).Où par conséquent :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} \tag{1.2}$$

où t a une valeur fixée.

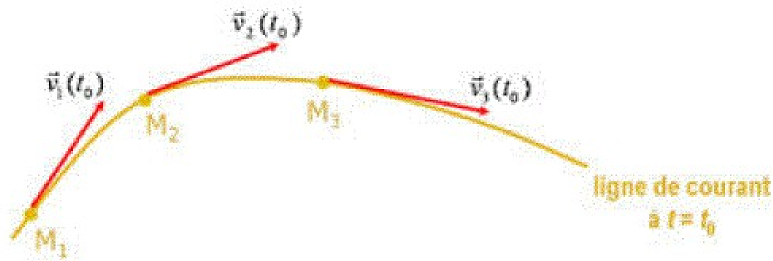

FIGURE 1.3 – Ligne de courant

1.3.4 Fonction de courant

si la domaine de l'écoulement est plan le vecteur de vitesse est vérifier

à l'instant t

$$div(\vec{V}) = 0$$

pour toutes les point de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

cela implique que la forme différentielle $udx + udy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d(\psi) = udx + vdy$$

implique

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{1.3}$$

ψ s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial\psi/\partial y \\ v = -\partial\psi/\partial x \end{pmatrix} = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$$

$\Rightarrow \Delta\psi = 0, \psi$ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.3.5 Fonction de Potentiel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel :$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$.

Peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$.

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel. On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \tag{1.4}$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction ϕ vérifie l'équation de Laplace.

1.4 Potentiel complexe des vitesses

On introduisons la fonction f telle que

$$f = \phi + i\psi,$$

appelée potentiel complexe des vitesses, qui est reliée à la vitesse complexe par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv. \tag{1.5}$$

1.5 Exemple

On considère l'écoulement plan défini en variable d'Euler par :

$$u = 2y; \qquad v = -2x$$

1) l'écoulement est incompressible car :

$$div(\vec{U}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

2)l'écoulement n'est pas irrotationnel car :

$$rot(\vec{U}) = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{e_z} = -4\vec{e_z} \neq \vec{0}.$$

donc n'est pas irrotationnel.

3) Fonction de courant ψ est :

$d\psi = udy - vdx$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 2x, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 2y$$

On intègre le première équation en x d'où :

$$\psi = x^2 + F(y)$$

avec $F(y)$ fonction arbitraire de y.

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $F'(y) = 2y$ d'où $F(y) = 2y^2 + k_1$, avec k_1 constante arbitraire.

La fonction de courant est donc

$$\psi = x^2 + y^2 + k_1.$$

4) Fonction de potentiel des vitesses ϕ est :

$d\phi = udx + vdy$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 2y, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -2x$$

on intègre le première équation en x d'où

$$\phi = 2xy + G(y)$$

avec $G(y)$ fonction arbitraire de y.
On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation : $G'(y) = 2y$ d'où $G'(y) = 0$ et $G(y) = k_2$, avec k_2 constante arbitraire.
La fonction de potentiel est donc

$$\phi = 2xy + k_2.$$

1.6 Équation de Bernoulli

[3] Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie au cas des fluides en mouvement.Un certain travail est fourni au fluide lorsqu'il passe d'un point à un autre et ce travail est égal à la variation d'énergie mécanique.
Dans le cas d'un fluide laminaire visqueux et incompressible, on obtient la relation suivant :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g Z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g Z_2$$

où P_i est la pression au points A_i où $i = 1, 2$.
Si le fluide non visqueux dans ce cas $\Delta p_i = 0$. l'équation de Bernoulli se réduit à :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g Z = const$$

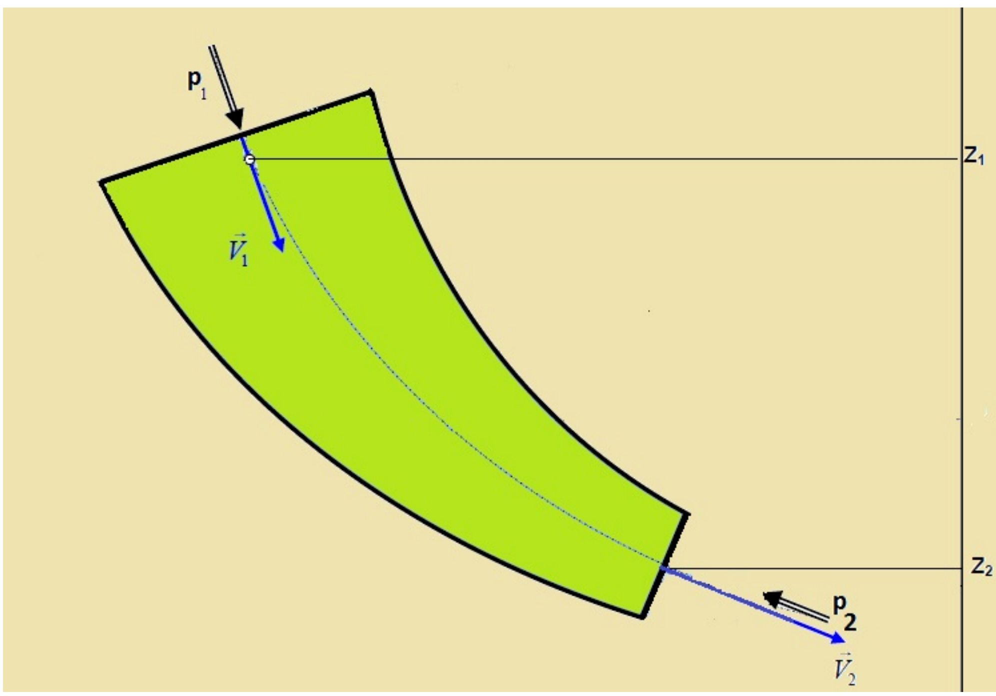

FIGURE 1.4 – théorème de Bernoulli au cas d'un écoulement

Chapitre 2

transformation conforme

2.1 introduction

l'objectif dans ce chapitre on parlée à propose de les définition de transformation conforme et des quelques transformations classiques et quelque exemples. Pour plus détail voir [2], [4], [5], [6] et [8]

2.2 définitions

Définition 1 *Soit f une fonction de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$). On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0), les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même angle oriente que les vecteurs tangentes aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$.*

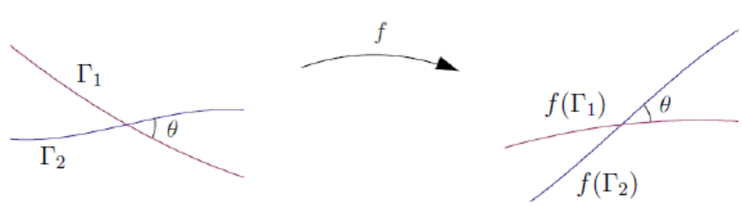

FIGURE 2.1 – transformation conforme

Définition 2 *La fonction complexe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite conforme (ou application conforme) dans le domaine D si elle préserve les angles pour toutes les points de D*

Théorème 2.2.1 *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D. Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D.*

2.3 quelques transformations classiques

2.3.1 Transformation linéaire

Toutes les applications linéaires $f = ax + b$, avec $a \neq 0$ sont transformations conformes car $f' = a$

2.3.2 Transformation linéaire fractionnelle

La fonction f définie par

$$f = \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c, d des complexes.
est transformation conforme pour $ad - bc \neq 0$

2.4 exemples

2.4.1 exemple

la fonction $f(z) = e^z$ est transformation conforme car la dérivée non nulle $f' \neq 0$
la transformation $f = e^z$ peut se représenter par

$$|f| = \rho = e^x \text{ et } arg(f) = \theta = y$$

alors

$$f = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Le point $(1, 0)$ se transforme à $(1, 0)$
Le point $(0, \pi/2)$ se transforme à $(0, 1)$

$y = \pi$ la droite horizontale est transforme à e^x voir le figure suivante

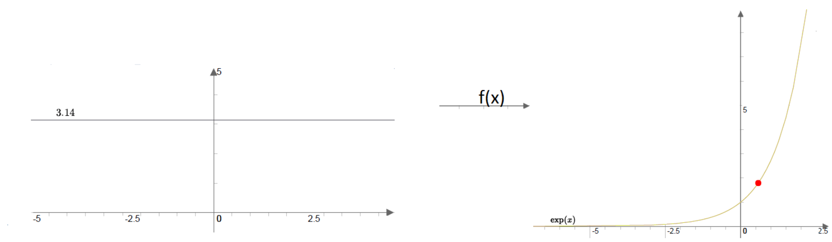

FIGURE 2.2 – Transformation la droite horizontale

2.4.2 exemple

Soit $ABCDE$ une bande infinie.

On a résoudre l'équation dans la demi-plan $y > 0$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, avec$$

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| > 1, \\ 1 & . \end{cases} \tag{2.1}$$

pour cela on utilise la transformation conforme :

$$Z = \ln\frac{z-1}{z+1},$$

qui transforme le demi-plan en une bande infinie comme le montre la figure suivante.

Donc pour résoudre le problème avec les conditions aux limites et compte tenu de l'invariance en x, et puisque la transformation est conforme

on suppose que :

$Z = X + iY$,

c'est à dire, $Z = X + iY = \ln\frac{z-1}{z+1} \Longrightarrow e^Z = \frac{z-1}{z+1}$

$$e^{X+iY} = \frac{(x+iy-1)(x-iy+1)}{(x+1)^2+y^2}$$

Et on a

$$\ln(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$$

Donc

$$X + iY = \ln(x^2 - y^2 - 1 + 2y) + iArg(x^2 - y^2 - 1 + 2iy)$$

Et on a

$$Arg(z) = \arctan \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$$

On a unicité de la solution de l'équation de Laplace, avec des conditions aux bords de Dirichlet. C'est le principe du maximum(la solution atteint ses maximum et minimum sur le bord, si elle est nulle au borde elle est nulle partout).

En remarquant que si on cherche ϕ indépendante de x, alors l'équation de Laplace

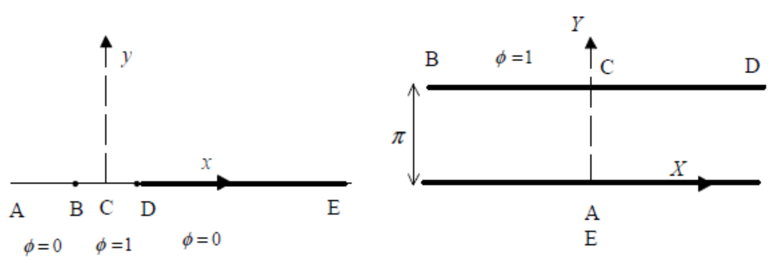

FIGURE 2.3 – transformation d'un demi-plan en bande

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} = 0,$$

devient la dérivée seconde en y est nulle.

c'est-à-dire $\phi(x,y) = ay + b$ avec les conditions aux borde

$$\phi(x,0) = 0 \quad et \quad \phi(x,1) = \pi.$$

On trouve : $\phi = \frac{y}{\pi}$.Il suffit de revenir à x et y, on obtient finalement :

$$\phi(x,y) = \arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}.$$

Chapitre 3

le problème d'écoulement par la transformation conforme

3.1 introduction

Dans ce chapitre, on étudier le problème d'écoulement au surface libre bidimensionnel et irrotationnel, d'un fluide incompressible et non visqueux qui est uniforme entre deux plaques horizontales semi-infinies dans domaine borné au-dessus d'un surface libre, on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan inférieur. Nous utilisons d'abord la méthode des lignes de courant libres basé sur la méthode hodographe et la transformation conforme pour obtenir la solution exacte.

3.2 position du problème

Considérons un écoulement bidimensionnel et incompressible entre deux plaques horizontales semi-infinies. En raison de la symétrie du flux par rapport à $y = 0$; les effet de la gravité et de la tension superficielle ne sont pas pris en compte.

Un système de coordonnées cartésiennes est défini avec l'axe des x le long de la paroi horizontale ACB et l'axe des y est perpendiculaire à celui-ci a point C. comme $x \to -\infty$, le flux approche un flux uniforme avec un vitesse constant U_∞ et un profondeur H.

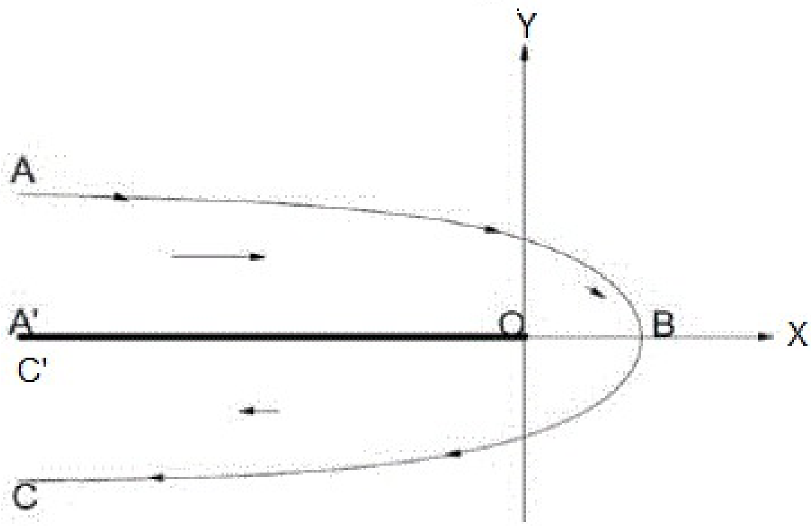

FIGURE 3.1 – Schéma de l'écoulement et des coordonnées.

Le débit est limite supérieurement par le fil de courant ABC (la surface libre). que tels flux peuvent être décrits par un potentiel complexe $f(z) = \phi + i\psi$ où ϕ et ψ le potentiel de vitesse et la fonction de courant ; et les composantes de vitesse sont alors données par

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

le problème mathématique consisté à déterminer la fonction de potentiel ϕ qui vérifie le condition suivant :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \ \ dans\ le\ domaine\ de\ flux \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \ \ sur\ A'O \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \ \ sur\ B \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{p}{\rho} = const\ \ sur\ \ la\ surface\ \ libre\ de\ la\ forme\ \ inconnue \end{cases}$$

3.3 Résolution de problème

Dans ce section, on s'intéresse à la résolution analytique du problème considéré. En négligeant l'effet de gravité et les tensions de surface, le problème admet une solution exacte qu'on peut la calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libres et la transformation de conforme, en utilisant La technique suivante

1^{ere} **étaps**

Normalisation notre problème voir figure 2 c'est à dire on suppose

$f'(z) = 1$ sur la surface libre ABC

$Im(f) = 1$ sur la surface libre

A=(1,0) et B=(-1,0)

$Im(f) = 0$ sur la paroiACB

$H = 1$

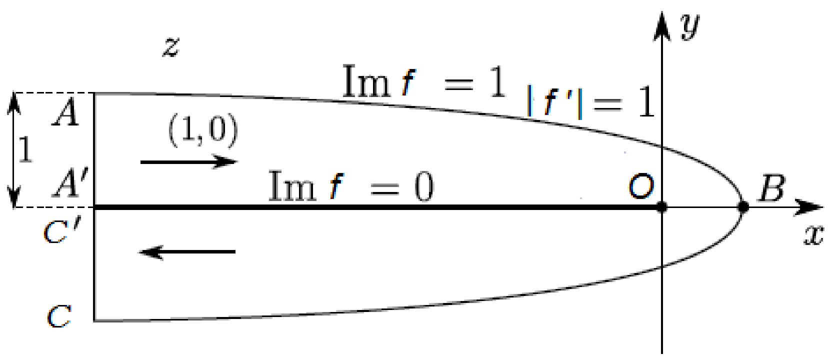

FIGURE 3.2 – modèle du flux normalisée

2^{me}étaps

On transforme le domaine d'écoulement réel (x,y) figure(1,1) à une bande de largeur HU dans le plan de variable $f = \phi + i\psi$ figure(1,3)

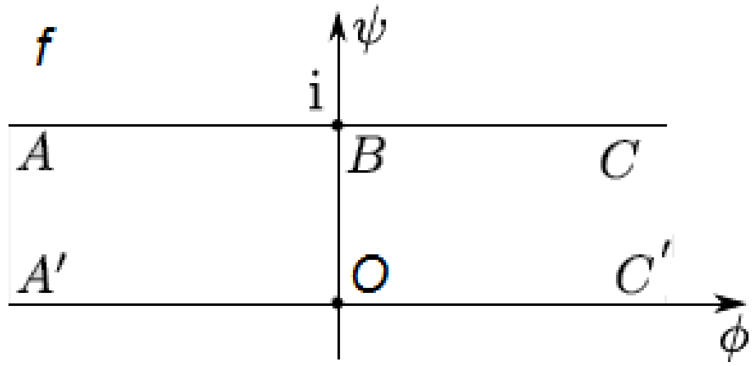

FIGURE 3.3 – plan de potentiel

3eme étaps

Nous utilisons la transformation Conforme $\zeta = \exp(\pi f)$ pour transforme le domaine potentiel f (figure 1,1) en un demi-plan supérieur de variable ζ (figure 1,4)

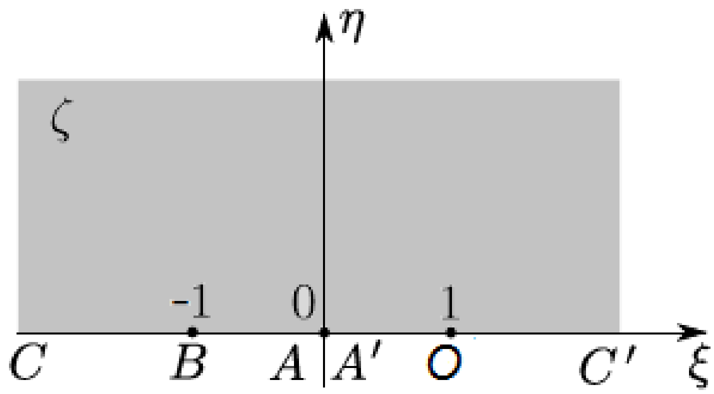

FIGURE 3.4 – demi-plan supérieure par le mappage $\zeta = exp(\pi f)$

4eme étaps

On utilise la transformation d'hodographe pour transforme le domaine d'écoulement z (figure 1,1) en un demi-plan supérieur de variable f' (figure 1,4)

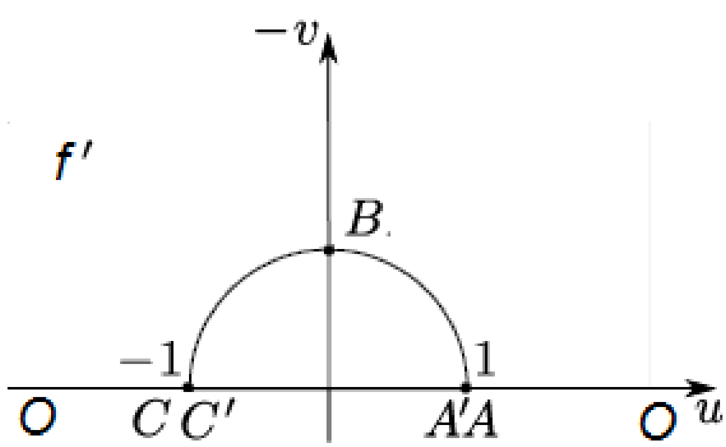

FIGURE 3.5 – hodographe-plan

5eme étaps

Nous utilisons la transformation Conforme $\zeta = (\dfrac{f'-1}{f'+1})^2$ pour transforme le domaine hodographe f' (figure 1,5) en un demi-plan supérieur de variable ζ (figure 1,4)

6eme étaps

le but pour la 6eme étape trouve la relation entre y et x

-On conclue qui le potentiel complexe et sa dérivée doivent satisfait la relation :

$$e^{\pi f} = \zeta = \left(\frac{f' - 1}{f' + 1}\right)^2$$

$$e^{\frac{\pi f}{2}} = \frac{f' - 1}{f' + 1}$$
$$\exp^{\frac{\pi f}{2}}(f' + 1) = f' - 1$$
$$e^{\frac{\pi f}{2}} f' + e^{\frac{\pi f}{2}} = f' - 1$$
$$f'(e^{\frac{\pi f}{2}} - 1) = -e^{\frac{\pi f}{2}} - 1$$

alors, on obtient une équation différentielle séparable suivant :

$$f' = \frac{1 + e^{\frac{\pi f}{2}}}{1 - e^{\frac{\pi f}{2}}}$$

et par l'intégration :

$$\int \frac{df}{dz} = \int -\frac{1}{\coth(\frac{\pi f}{4})}$$
$$\Longrightarrow \int df = \int -\frac{1}{\coth(\frac{\pi f}{4})} dz$$
$$\Longrightarrow \int \frac{df}{\coth(\frac{\pi f}{4})} = \int -dz$$
$$\Longrightarrow \frac{4}{\pi} \log\cosh(\frac{\pi f}{4}) = -z + z_0$$

On appliquons les conditions aux limites $f = 0$ quand $z = 0$.

$$\frac{4}{\pi} \log\cosh(\frac{\pi f}{4}) = -z$$

$$\Longrightarrow \cosh(\frac{\pi f}{4}) = e^{-\frac{\pi z}{4}}$$

Par quadrature des deux côtés

$$cosh^2(\frac{\pi f}{4}) = \left(e^{-\frac{\pi z}{4}}\right)^2$$

On a

$$cosh^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cosh(x)}{2}$$

Donc

$$cosh^2(\frac{\pi f}{4}) = \frac{1+\cosh(\frac{\pi f}{2})}{2}$$

Implique

$$1+\cosh(\frac{\pi f}{2}) = 2e^{-\frac{\pi z}{2}}$$

(3.1)

Sur la surface libre on a $f = \phi + i$ avec $\phi \in (-\infty, +\infty)$. Alors, on remplace dans (3.1)

$$2e^{-\frac{\pi z}{2}} = 1 + \cosh\left(\frac{\pi\phi}{2} + \frac{i\pi}{2}\right)$$

(3.2)

On a

$$cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + sinh(x)sinh(y)$$

Donc

$$\cosh\left(\frac{\pi\phi}{2} + \frac{i\pi}{2}\right) = \cosh(\frac{\pi\phi}{2}).\cosh(\frac{i\pi}{2}) + \sinh(\frac{\pi\phi}{2}).\sin(\frac{i\pi}{2}) \tag{3.3}$$

On a

$$\cosh(\frac{i\pi}{2}) = \frac{exp(i\pi/2) + exp(-i\pi/2)}{2}$$
$$\cosh(\frac{i\pi}{2}) = \frac{[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] + [\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)]}{2}$$

$$\cosh(\frac{i\pi}{2}) = 0 \tag{3.4}$$

Même manière on trouve

$$\sinh(\frac{i\pi}{2}) = i \tag{3.5}$$

Remplace (3.4) et (3.5) dans (3.3) on trouvons

$$\cosh\left(\frac{\pi\phi}{2}+\frac{i\pi}{2}\right)=i\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

(3.6)

D'après (3.6) la relation (3.2) devin

$$2e^{-\frac{\pi z}{2}}=1+i\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

(3.7)

Quand on prenant la partie réelle des deux côtés, on déduit que la position de la surface libre est donnée comme suite :

$$2e^{-\frac{\pi(x+iy)}{2}}=1+i\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

$$e^{\frac{-\pi x}{2}}e^{\frac{-i\pi y}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

Et on a

$$e^{\frac{-i\pi y}{2}}=\cos(\frac{\pi y}{2})-i\sinh(\frac{i\pi y}{2})$$

Donc

$$e^{\frac{-\pi x}{2}}(\cos(\frac{\pi y}{2})-i\sinh(\frac{i\pi y}{2}))=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

Implique

$$e^{\frac{-\pi x}{2}} \times \cos(\frac{\pi y}{2}) - ie^{\frac{-\pi x}{2}} \times \sinh(\frac{i\pi y}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sinh(\frac{\pi\phi}{2})$$

Alors

$$e^{\frac{-\pi x}{2}} \times \cos(\frac{\pi y}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$cos(\frac{\pi y}{2}) = \frac{e^{\frac{\pi x}{2}}}{2}$$

$$\arccos(cos(\frac{\pi y}{2})) = \arccos(\frac{e^{\frac{\pi x}{2}}}{2})$$

$$\frac{\pi y}{2} = \arccos(\frac{e^{\frac{\pi x}{2}}}{2})$$

$$\boxed{y = \frac{2}{\pi}\arccos(\frac{e^{\frac{\pi x}{2}}}{2})}$$

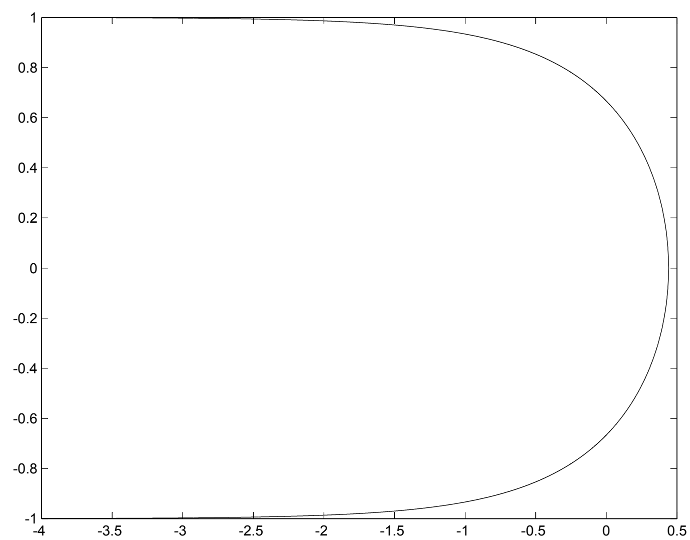

FIGURE 3.6 – Forme de La surface libre

Conclusion

Dans ce travail de mémoire, on s'intéresse à un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux avec négligent la gravité, Nous adoptons une méthode des transformations conformes qui réduit le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre. La solution de notre problème est exacte

Bibliographie

[1] Sakir Amiroudine, Jean-Luc Battaglia, Mécanique des Fluides, DUNOD, Paris,(2011).

[2] Christophe Ancey, *Analyse différentielle outils mathématiques pour la dynamique des fluides, école polytechnique Fédérale de Lausanne*.

[3] Riadh Ben Hamouda, Notions de Mécanique des Fluides (cours et exercices corrigés), Centre de publication universitaire.

[4] J.Bouttier, *Transformations Conforme Et Hydrodynamique*, (08/11/2010).

[5] Wilyame R. Dirick, Analyse complexe et leurs application, Université Elmalik Saoud, USA.

[6] Valdimir Dotsenko, Série de cours sur la théorie conforme, Université Pierre et Marie curie,Paris VI, Université DenisDiderot,Paris VII (12/09/2006).

[7] Christelle Melodelima, *Dérivées et différentielles des fonctions de plusieurs variables, Université Joseph FourierdeGrenouble* , (2011/2012).

[8] Vincent Runge, *Éléments d'analyse et de contrôle dans le problème de Hele-Shaw*, Autre, Ecole centrale de lyon, 2014.

ملخص

نقوم في عملنا هذا بدراسة تدفق سوائل كمونية غير قابلة للإنضغاط و عديمة اللزوجة في غياب تأثير الجاذبية وذلك على مستوى صفيحتين أفقيتين في مجال محدود تحت السطح الحر مجهول الشكل. حيث نعتمد في دراستنا هذه على طريقة التحويلات المحافظة مرورا بطريقة خطوط التيار الحرة وذلك للوصول إلى الحل المناسب التام.

الكلمات المفتاحية : سائل, تدفق كموني, خطوط التيار, سطح حر.

Résumé :

Dans ce présent travail, on fait un étude analytique pour le problème d'écoulement potentiel au surface libre bidimentionnel incompressible sans viscosité et sans effet de gravité entre deux plaques horizontales dans domaine borné au-dessus d'un surface libre. Où nousadoptons en cette étude à la méthode de transformation conforme et à l'aide de méthode d'hodographe etligne des courant libre pour obtenir la solution exacte.

Mot clé : écoulement , écoulement potentiel, ligne de courant , surface libre.

Abstract :

In this work, we study a probleme of the potential flow incompressible bidimentional inviscid and without gravity effect between two horizontal plates in a bouned domain over a free surface. Wher we adopt in this study to the méthod of conformal transformation and using the method of hodograph and free dtream-lines theory to obtain the exact solution.

Key words : potential flow, stream-lines, free surface.