

**UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA**  
**Faculté des Sciences et Technologie et Sciences de Matière**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire**  
**MASTER PROFESSIONNEL**

Domaine : Sciences et Technique  
Filière : Génie Mécanique  
Spécialité : Maintenance Industrielle

Présenté par : LADFAR Mohamed

**Thème**

**Influence des Caractéristiques Mécaniques  
sur Le comportement Mécanique des  
Structures Sandwich**

Soutenu publiquement

Le : 26/06/2013

Devant le jury :

M. L. MEBARKI  
M. A. HECINI  
M. F. BENTALEB

M.A  
M.A  
M.A

Président  
Encadreur  
Examineur

UKM Ouargla  
UKM Ouargla  
UKM Ouargla

**Année universitaire : 2012 /2013**

# Remerciement

Je remercie Dieu avant tout.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur **Mr : Adel HECINI** Pour son aide et ses conseils au long de ce travail.

Je remercie vivement tous les membres de mon jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et toute la famille.

Un grand merci à tous les enseignants du département de Génie Mécanique et mes collègues et tous mes amis.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# الإهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات.

بتوفيق من الله عز و جل و بعون من الله تعالى تم انجاز هذا العمل المتواضع.

الذي أهديه إلى كل من:

الوالدين الكريمين و إلى إخوتي.

و إلى كل الأحبة و الأصدقاء و كل من اعرفه من قريب أو بعيد.

TABLE DES MATIERES

**Remerciements**

**Dédicace**

**Introduction générale**

<b>Chapitre I : Généralités</b> .....	2
I.1 Définition de Sandwich .....	3
I.2 Les constituants de structure sandwich .....	3
I.2.1 L'âme .....	4
I.2.2 Les peaux .....	9
I.2.3 Adhésive .....	10
I.3 Procédés de fabrication .....	11
I.3.1 Technologies par voie humide (imprégnation directe) .....	11
I.3.2 Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte) .....	11
I.3.3 Assemblage par collage .....	12
I.3.4 Moussage (in situ) .....	12
I.3.5 Moulage de panneaux en continu .....	13
I.4 Comparaison entre structure sandwich et stratifié simple .....	13
I.5 Utilisations des structures sandwich .....	14
I.6 Le rôle de constituante .....	16
I.6.1 Influence de module de cisaillement de l'âme .....	16
I.6.2 L'influence de module d'élasticité .....	17
I.7 Les modes de rupture .....	17
I.7.1 Rupture de la peau sous traction ou compression .....	17
I.7.2 Flambage des peaux .....	18
I.7.3 Flambage générale .....	18
I.7.4 Rupture de noyau par cisaillement .....	19
I.7.5 Délaminage .....	19

I.7.6 Impression de noyau ou de peaux .....	20
I.7.7 Repliement de cisaillement .....	20
I.7.8 Dimpling des peaux .....	20
I.7.9 Vibration .....	21
I.7.10 Fatigue .....	21
I.7.11 Dommages par impact .....	21
<b>Chapitre II : Modélisation</b> .....	<b>22</b>
II.1 Champ des déformations et des contraintes : .....	23
II.1.1 Hypothèses .....	23
II.1.2 Champ des déplacements .....	23
II.1.3 Champ des déformations .....	24
II.1.4 Champ des contraintes .....	26
II.2 Relations fondamentales des plaques sandwiches .....	27
II.2.1 Equation constitutive .....	27
II.2.2 Relation fondamentales .....	29
<b>Chapitre III : Résultats et Perspectives</b> .....	<b>31</b>
III.1 Influence du module de Young transversale $E_t$ .....	33
III.2 Influence du module de Young longitudinale $E_l$ .....	34
III.3 Influence du module de cisaillement $G_{lt}$ .....	35
III.4 Influence du module de cisaillement $G_{13}$ .....	36
III.5 Influence du module de cisaillement $G_{23}$ .....	37
III.6 Influence du rapport $E_l/E_t$ .....	38
III.7 Influence de rapport $G_{13}/G_{23}$ .....	39
III.8 Influence du rapport $E_l/G_{13}$ .....	40
<b>Conclusion générale</b> .....	<b>41</b>
<b>Annexe</b> .....	<b>42</b>
<b>Références bibliographies</b>	

**Résumé**

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure I.1 :</b>	Présentation de matériaux composites sandwich.....	3
<b>Figure I.2 :</b>	Constituants des structures sandwich.....	3
<b>Figure I.3 :</b>	Déférent formes de l'âme.....	5
<b>Figure I.4 :</b>	Différents types de structure sandwich.....	6
<b>Figure I.5 :</b>	Structure sandwich avec une âme de mousse laminaire renforcé.....	6
<b>Figure I.6 :</b>	Structure sandwich en bois de balsa et peaux en stratifié.....	7
<b>Figure I.7 :</b>	Structure sandwich à âme Nida et peaux en stratifié.....	8
<b>Figure I.8 :</b>	Mode de production des nids d'abeilles.....	8
<b>Figure I.9 :</b>	La rigidité de cisaillement des matériaux typique de la mousse en fonction de densité.....	9
<b>Figure I.10 :</b>	Mécanismes d'adhésion.....	10
<b>Figure I.11 :</b>	Section transversale d'un sandwich et d'un stratifié simple.....	13
<b>Figure I.12 :</b>	Application des matériaux sandwich dans les domaines Aérospatial et naval.....	15
<b>Figure I.13 :</b>	Glissement des couches sans résistance.....	17
<b>Figure I.14 :</b>	Rupture des faces.....	18
<b>Figure I.15 :</b>	Flambage des peaux.....	18
<b>Figure I.16 :</b>	Flambage Générale.....	19
<b>Figure I. 17 :</b>	Rupture par cisaillement de noyau.....	19
<b>Figure I.18:</b>	Impression de noyau ou peaux.....	20
<b>Figure I.19 :</b>	Repliement de cisaillement.....	20
<b>Figure I.20:</b>	Flambage intercellulaire.....	20

<b>Figure II.1 :</b>	Notation d'une plaque sandwich.....	23
<b>Figure III.1 :</b>	Structure sandwich simplement appuie.....	32
<b>Figure III.2 :</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du module de Young transversale $E_t$ .....	33
<b>Figure III.3 :</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du module de Young longitudinale $E_l$ .....	34
<b>Figure III.4:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement $G_{lt}$ .....	35
<b>Figure III.5:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement $G_{13}$ .....	36
<b>Figure III.6:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement $G_{23}$ .....	37
<b>Figure III.7:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du rapport $E_l/E_t$ .....	38
<b>Figure III.8:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du rapport $G_{13}/G_{23}$ .....	39
<b>Figure III.9:</b>	La variation de la flèche maximale en fonction du rapport $E_l/G_{13}$ .....	40
<b>Figure 1 :</b>	Essai de Traction.....	43
<b>Figure 2 :</b>	Extensomètre.....	44
<b>Figure 3:</b>	Diagramme type contrainte – déformation lors d'un essai de traction pour un matériau ductile.....	44
<b>Figure 4:</b>	Essai de traction simple sur éprouvette normalisée.....	45
<b>Figure5 :</b>	Schéma qui représenté le repère $R (e_1, e_2, e_3)$ .....	47
<b>Figure 6 :</b>	axes principaux (1, 2,3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1',2',3)=(x, y, z) du stratifié.....	49



**LISTE DES TABLEAUX**

**Tableau I.1** : Matériaux constitutifs des structures sandwich .....4

LISTE DES SYMBOLES

Symbole	désignation	unité
E	module d'Young	Mpa
	L'allongement relatif	
	Contrainte	Mpa
	coefficient de Poisson	
$\Delta \ell$	Déférence de longueur de l'éprouvette	mm
$\Delta e$	Déférence de diamètre de l'éprouvette	mm
G	module de cisaillement	Mpa
$\sigma_e$	Contrainte élastique	Mpa
$\sigma_r$	Contrainte à rupture	Mpa
$\sigma_{max}$	Contrainte maximale	Mpa
$\varepsilon$	Déformation	
C	matrice de rigidité	
S	matrice de souplesse	
$\delta_{ij}$	Symboles de Kronecker	
et $\mu$	coefficients de Lamé	
$t_f$	épaisseur de peau	mm
h	épaisseur de l'âme	mm
$q_0$	la charge appliquée	Mpa

### Introduction générale

De nos jours les applications technologiques et industrielles ainsi que courantes des matériaux composites ne cessent de prendre de l'importance. Tout d'abord, leur fabrication permet d'offrir des solutions de conception nécessitant moins de pièces qu'une solution métallique. L'intégration de fonctions est un autre avantage que ces matériaux procurent : il est possible de choisir la formulation de résine ou les renforts en fonction de la situation dans laquelle la pièce se trouvera lors de son utilisation. L'avantage principal qu'offrent ces matériaux pour l'industrie aéronautique est leur faible poids pour d'excellentes qualités mécaniques. Une application très populaire de cet avantage est l'utilisation de structures sandwich qui combine légèreté et bonnes propriétés en flexion. Les matériaux composites à structure sandwich sont constitués de deux peaux en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible.

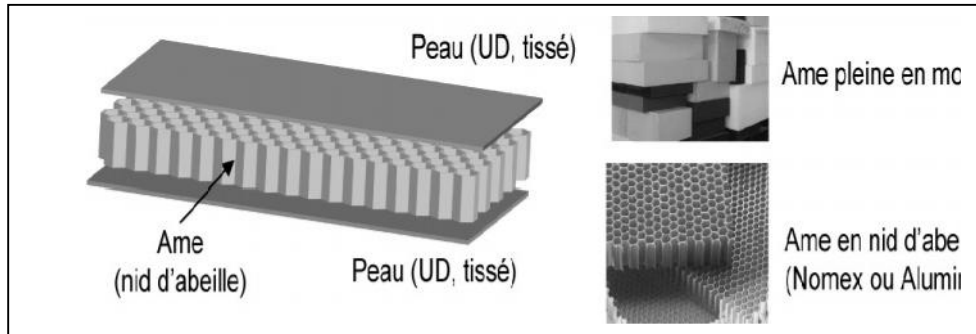
L'objectif de notre travail est d'étudier l'influence de propriétés mécaniques sur le comportement des structures sandwich. Le premier chapitre 'Généralités' est dédié à une revue sur les structures multicouches sandwich, procédés de fabrication et types d'endommagements, le deuxième chapitre dans ce mémoire est le plus important dans lequel on donne le démarche de modélisation de manière détaillé et clair en donnant les équations fondamentales au bout de ce chapitre. Dans le troisième chapitre 'résultats conclusion et perspectives' on étudie l'influence des modules de l'ingénieur ainsi que les rapports de l'anisotropie sur le comportement mécanique d'une plaque sandwich simplement supportée. Une conclusion et perspectives sont dressées à la fin de ce chapitre.

# **Chapitre I**

# **Généralités**

**I.1 Définition de Sandwich :**

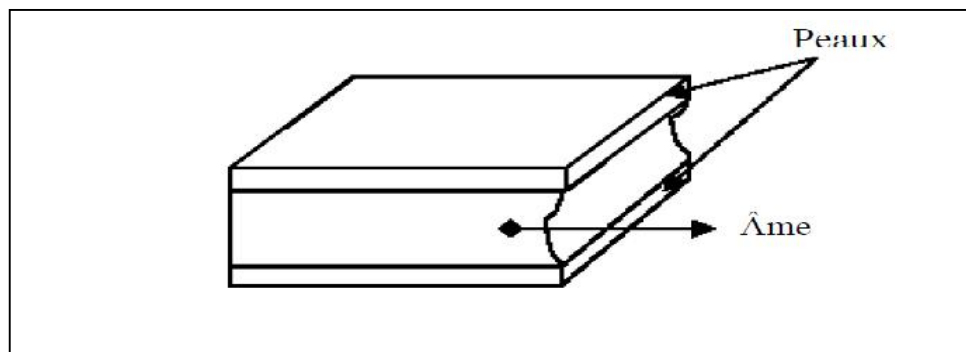
Une structure sandwich est obtenue à partir de deux peaux ou semelles, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques mécaniques, collées sur une âme réalisée avec un matériau très léger et ayant de faibles caractéristiques mécaniques, Une telle structure présente en flexion des rapports résistance/masse et rigidité/masse très importants.



**Figure I.1 :** Présentation de matériaux composites sandwichs. [1]

**I.2 Les constituants de structure sandwich :**

Une structure sandwich simple est composée en deux faces et une âme (figure I.2):



**Figure I.2 :** Constituants des structures sandwich [2]

Tableau I.1 : Matériaux constitutifs des structures sandwichs [13]

Âmes		Peaux
Nid d'abeilles	aluminium aramide polypropylène	acier aluminium
Mousse plastique	polystyrène expansé polychlorure de vinyle polyéthylène acrylique polyuréthane phénolique	stratifié bois, laminé contre-plaqué alliages ultra légers
Bois de balsa		plastiques renforcés ...

### I.2.1 L'âme :

L'âme est le matériau sandwiché et adhésivement lies aux peaux pour assurer le transfert des chargements entre peaux, elle doit être rigide pour les raisons suivantes :

- Pour conserver les peaux parallèle l'un par rapport à l'autre sur la distance perpendiculaire correcte.
- pour éviter le glissement (slipage) des peaux l'un par rapport à l'autre quant le panneau fléchit. Si cette condition n'était pas respectée les peaux comportent indépendamment et on perdra le panneau.

Donc, si l'âme a la rigidité adéquate, elle peut faire une contribution utile à la rigidité de flexion du panneau.

Les formes de l'âme peuvent être classifiées comme suites (voire figure I.3) [4]

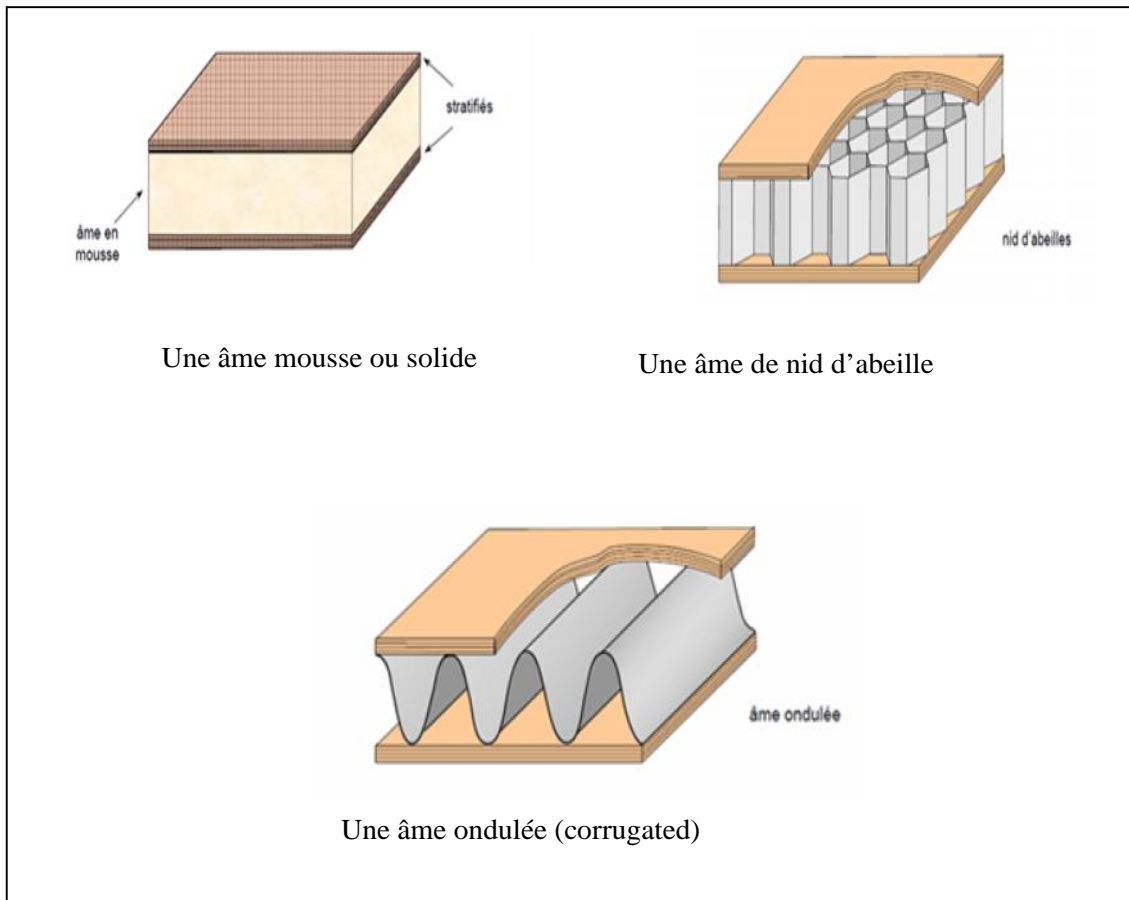
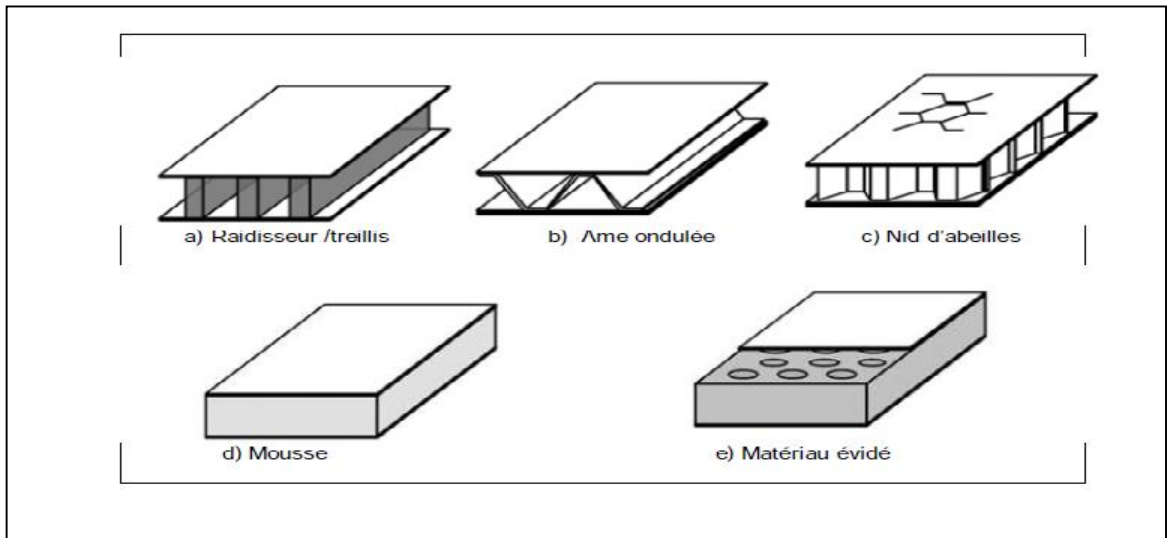


Figure I.3 : Différentes formes de l'âme [4]

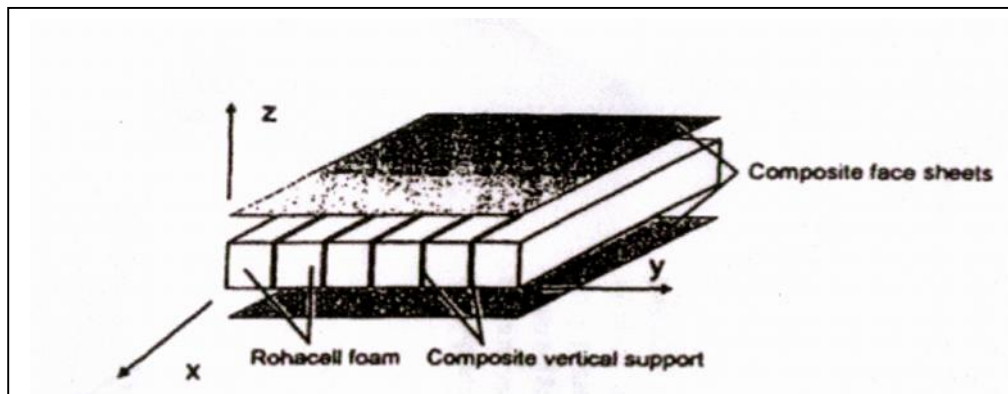
Depuis la deuxième guerre mondiale l'architecture de nid d'abeille a été largement utilisée. La plupart des types utilisés sont la cellule de forme hexagonale (hex cell) et la cellule carrée. L'âme d'une structure ondulée est montrée dans la figure I.4. [6]

En ce qui concerne les structures à âme d'enchaînement ou l'âme ondulée l'espace dans l'âme peut être utilisé pour le stockage de liquide pour l'utiliser comme un échangeur de chaleur.



**Figure I.4 :** Différents types de structure sandwich [6]

En plus de ces Cinq types d'âme illustrées dans la figure 1.4, il y a d'autres architectures pour l'âme. Sun, Hasebe, et Hua ont étudié des panneaux sandwich avec une âme composé vertical d'une mousse Rohacell renforcé (figure I.5).



**Figure I.5 :** Structure sandwich avec une âme de mousse laminaire renforcé

### I.2.1.1 Quelques matériaux pour la fabrication de l'âme :

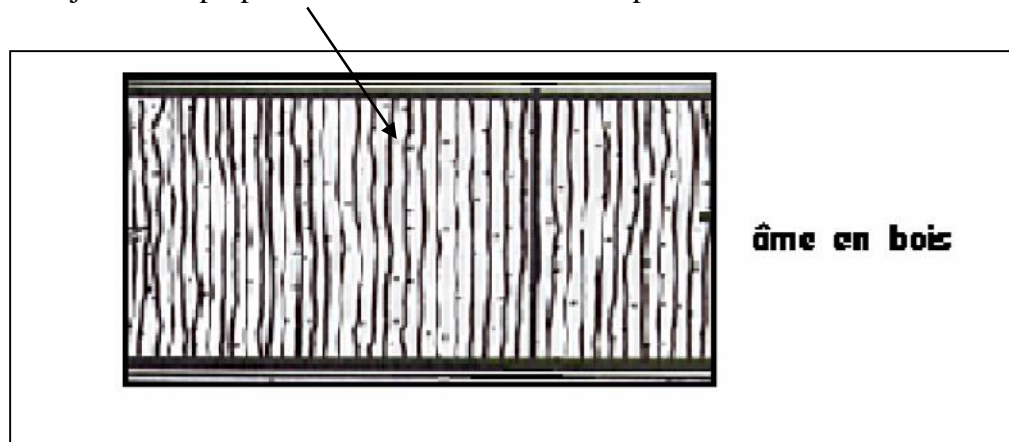
Les matériaux utilisés pour la fabrication de l'âme peuvent être classés comme suit :

#### a. Bois de Balsa (Balsa Wood) :

Le bois de balsa est utilisé pour sa très bonne résistance à la compression dans le sens des fibres du bois. Ayant une structure cellulaire, le bois de balsa permet de fabriquer des sandwichs hautement résistants et très légers. Le masse volumique de ce type d'âme varie entre 40 et 250 kg/m<sup>3</sup>.



Le bois de balsa est aussi un isolant thermique mais pour conserver cette propriété, il doit être traité avec un produit hydrofuge puisqu'il est très hygroscopique. Le sens des fibres du balsa doit toujours être perpendiculaire à la direction des peaux.



**Figure I.6 :** Structure sandwich en bois de balsa et peaux en stratifié [13]

#### **b- Mousse de PVC lié Croisé :**

La mousse de polyvinyle chlorites est manufacturée par combinaison polyvinyle copolymère avec stabilisateur, plastifieur, cross linking, des composés et agent de soufflage. Ils offrent une combinaison magnifique de renforcement et poids avec des rangs des densités entre (64 et 477 Kg/m<sup>3</sup>).

#### **c- Mousse thermoplastique :**

C'est une matière très légère sa densité est 2lb/ft<sup>3</sup> (32Kg/m<sup>3</sup>). Elle offre de basses propriétés mécaniques. Le polystyrène peut être attaqué et déssolu par le polyester. Elle a des applications à implantation et non structurel.

#### **d- Mousse de polyuréthane :**

Elle a une large gamme de densités (32 jusqu'à 320.4Kg/m<sup>3</sup>), mais elle n'offre par de bonnes caractéristiques pour être utilisée dans les applications de structure.

#### **e- Mousse syntactique :**

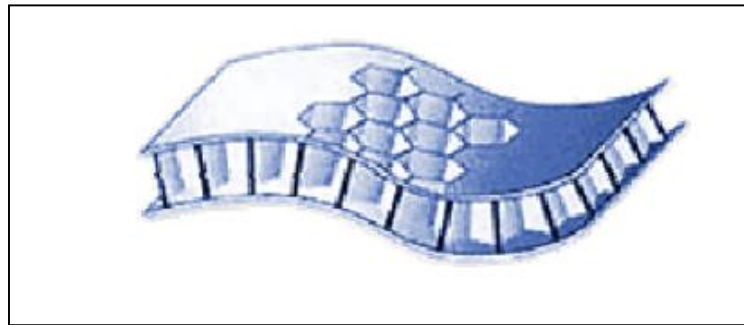
Elle est fabriquée par mixage d'une cavité de micro sphère en résine.

**f- Mousse de PVC linéaire :**

Elle est produite principalement pour l'industrie marine et elle permet le débattement significatif devant la fatigue. A la comparaison avec le PVC croix lies, la PVC linéaire donne des propriétés statiques favorables et la meilleure capacité à l'absorption de l'impact.

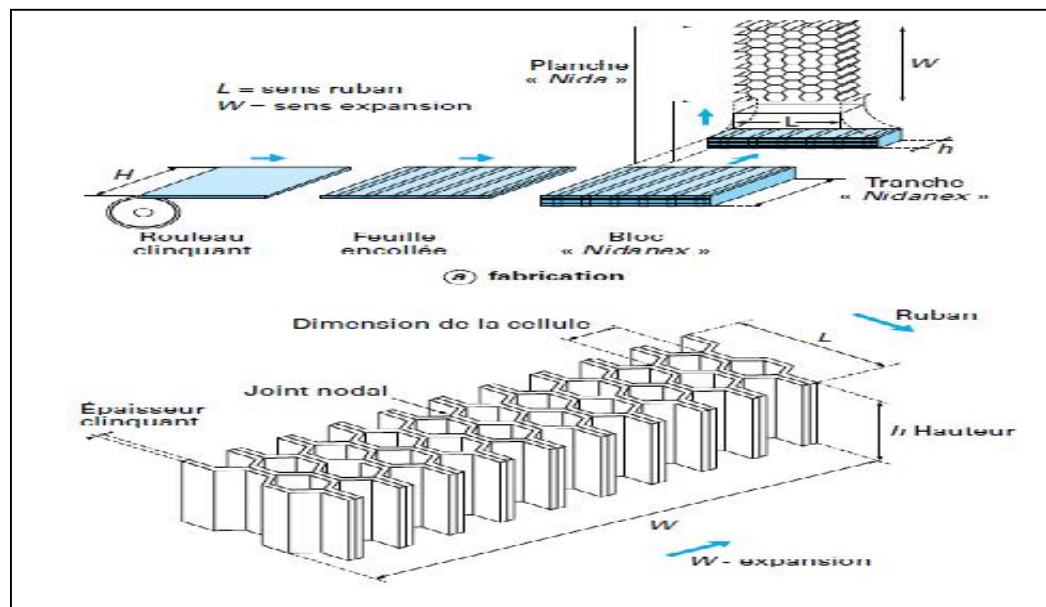
**g- Nid d'abeille:**

L'âme en nid d'abeilles, connue sous le nom «Nida », est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales, réalisée à partir de différents matériaux comme par exemple le papier ou l'aluminium.



**Figure I.7 :** Structure sandwich à âme Nida et peaux en stratifié [13]

Le Nida a des propriétés mécaniques supérieures à celles des mousses. Sa masse volumique peut varier entre 15 et 160 kg/m<sup>3</sup> ; son épaisseur entre 3 et 150 mm.



**Figure I.8 :** Mode de production des nids d'abeilles [9]

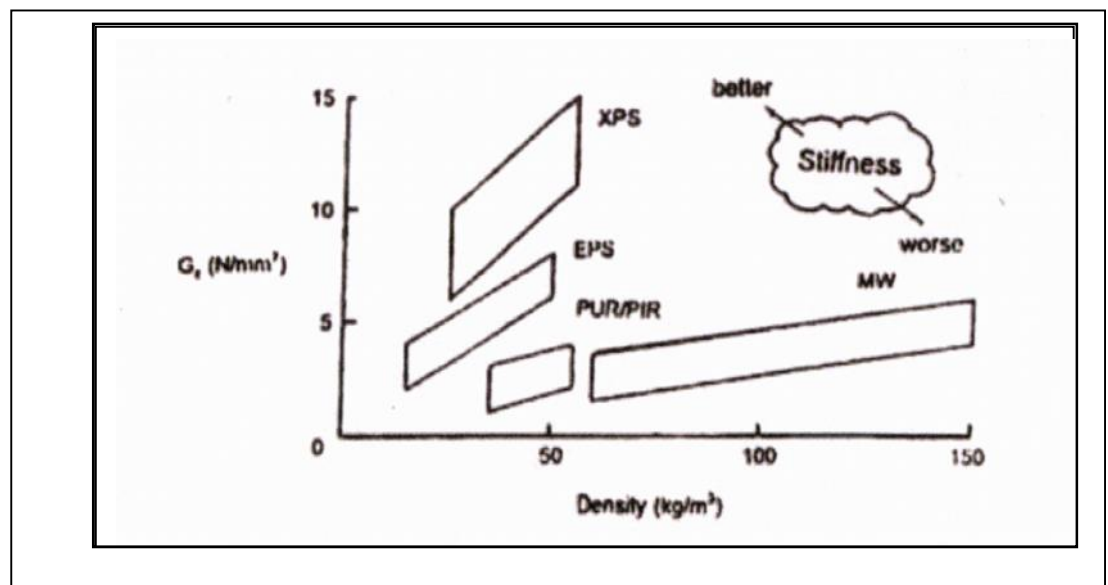
Lorsque des structures sandwich constituées d'une âme Nida sont soumises à un chargement, les efforts en flexion sont absorbés par les deux peaux tandis que les efforts en cisaillement se répartissent entre les peaux et l'âme en Nida. L'ensemble confère à cette structure sandwich légèreté, rigidité, stabilité dimensionnelle et résistance à la corrosion (Nidas non métalliques).

#### h- Mousse de PMI :

La mousse de poly méthacrylate imide (PMI) est généralement utilisée pour des composites de construction avancés de fait de sa capacité à résister à des températures au-dessous de 176°C.

#### J. Contre plaque :

En regardant l'absorption de l'humidité, c'est un matériau pauvre pour les applications d'extérieur. Autres types d'âmes peuvent être comparés par le graphe de module de cisaillement en fonction de la densité (la figure I.9)



**Figure I.9 :** La rigidité de cisaillement des matériaux typiques de la mousse en fonction de densité

#### I.2.2 Les peaux :

Une structure sandwich doit contenir deux faces (figure I.1). Ces deux faces sont en premier lieu pour résister aux charges planes. Ils peuvent être identiques ou différents en épaisseur et en propriété mécanique. Cependant, dans des cas spéciaux les peaux doivent être différents car l'un des deux peaux doit être le porteur des charges primaires exercées à une

base température quand l'autre face elle doit résister à haute température et à la corrosion de l'environnement etc....

Les faces peuvent être fabriqués par aramide, les fibres de verre, les fibres de carbone, acier inoxydable et l'aluminium, donnant une surface durable à la structure. Les propriétés demandées pour les faces sont :

- Haute rigidité
- Haute module de Young pour le compression et traction
- résistance à l'impact
- résistance environnementale
- résistance d'usage

### I.2.3 Adhésive :

Les conditions de l'adhésive sont fréquemment décrites comme étant la ligne de la liaison qui doit avoir au moins les même efforts de tension et cisaillement que celle du matériau de l'âme.

Les caractéristiques de la matière utilisée comme "adhésive" sont très importants pour la performance de la structure sandwich puisque les faces et l'âme doivent agir comme une ensemble ainsi que la prise en compte de la compatibilité avec les matériaux de faces et de l'âme.

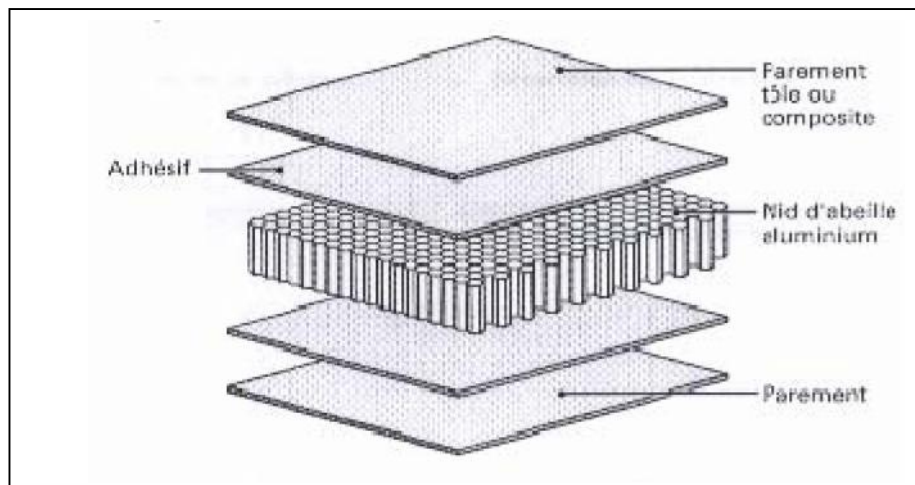


Figure I.10 : Mécanismes d'adhésion [5]

Cet élément est d'une importance cruciale, il solidarise l'âme et les peaux. Il doit permettre un bon assemblage de la structure en formant une liaison continue, non poreuse et d'épaisseur constante. Par ailleurs, et une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre est nécessaire, Pour cela, la principale caractéristique de l'adhésif doit être une bonne résistance au cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive. [8]

### **I.3 Procédés de fabrication:**

La fabrication de structures sandwiches fait appel, dans un grand nombre de cas, à des technologies de transformation standard des composites (moulage au contact, moulage au sac sous vide, moulage par injection de résine, moulage à la presse, moulage par enroulement filamentaire ou centrifugation...), qui permettent d'intégrer une âme dans l'épaisseur de la structure ainsi fabriquée. On citera dans cette partie les procédés les plus utilisés pour l'élaboration d'un sandwich. [8]

#### **I.3.1 Technologies par voie humide (imprégnation directe) :**

Les sandwichs peuvent être obtenus traditionnellement par des procédés de mise en œuvre dits par « voie humide », les renforts secs étant imprégnés par la résine thermodurcissable au cours de la mise en forme, soit par moulage au contact, soit par projection simultanée, soit encore par injection de résine, ou par enroulement filamentaire.

Les structures obtenues par contact ou projection simultanée présentent des propriétés mécaniques moyennes, en particulier si les peaux ont été fabriquées à partir de fibres coupées. Le taux de résine, le taux de porosité et, plus généralement, la qualité du stratifié, dépendent de l'habileté du mouleur.

Celles produites par enroulement filamentaire ou par injection de résine (sous vide ou sous pression) présentent des propriétés mécaniques plus élevées du fait de l'utilisation possible de renforts à fibres continues (unidirectionnels, tissus) et de l'obtention de taux de fibres plus importants. [8]

#### **I.3.2 Technologies par voie sèche (imprégnation indirecte) :**

Les procédés de mise en œuvre par voie sèche (ou procédés d'imprégnation indirecte) consistent à réaliser des structures sandwiches dont les peaux sont obtenues à partir de pré-imprégnés. La mise en œuvre peut s'effectuer sous vide en étuve, sous presse chauffante, ou sous vide en autoclave. Le recours aux pré-imprégnés permet de garantir une imprégnation

des renforts uniforme et de qualité, et confère à la pièce sandwich de bonnes propriétés mécaniques résultant du taux de fibres élevé. L'excès de résine contenu dans le pré-imprégné, qui sera extrait par l'application de la pression et de la température adéquates, peut être utilisé pour assurer le collage âme/peau. [8]

### I.3.3 Assemblage par collage :

L'assemblage des sandwichs par collage reste un procédé très répandu, qui consiste à associer à l'aide d'un adhésif l'âme et les peaux préalablement préformées. Les phases de mise en forme et d'assemblages sont alors bien distinctes. La préparation des surfaces est une étape importante qui permet d'assurer une adhésion de qualité :

- ✚ Nettoyage afin d'éliminer les matières grasses ou la poussière ;
- ✚ Augmentation de la rugosité ;
- ✚ Apprêt par attaque chimique des peaux métalliques...

L'adhésif, dont la nature est fonction des matériaux constitutifs du sandwich, doit être appliqué uniformément. L'empilement (âme + adhésif + peaux) est chauffé et mis sous pression, l'application de la pression pouvant se faire à la presse, en autoclave sous vide, par moulage au sac. [8]

### I.3.4 Moussage (in situ) :

La mise en œuvre de sandwichs par expansion « in situ » de la mousse formant l'âme est un procédé initialement développé pour les composites thermodurcissables, et essentiellement appliqué aux mousses polyuréthanes et phénoliques.

Le principe consiste à injecter le polymère d'âme mélangé à son agent gonflant entre les peaux préformées préalablement positionnées dans un moule ou un caisson de coulée.

Cette technologie de mise en œuvre permet d'obtenir aisément des structures de géométries complexes ne se limitant pas à des panneaux plans, et de réaliser des pièces présentant un bon aspect de surface, si les peaux ont été moulées sur leur face extérieure. Elle conduit cependant à la fabrication de pièces pouvant présenter des âmes à densités hétérogènes, et ce d'autant plus que la géométrie est complexe avec des variations d'épaisseurs. [8]

### I.3.5 Moulage de panneaux en continu :

La fabrication de panneaux sandwichs peut également être réalisée en continu, au moyen d'un procédé pouvant être totalement automatisé. Une grande liberté est laissée au concepteur quant au choix des matériaux constitutifs des peaux (feuilles métalliques, pré-imprégnés, tissus secs, polymères...) qui se présentent sous forme de rouleaux. Un film adhésif est inséré, si nécessaire, entre l'âme et les peaux. La mise en forme des panneaux s'effectue généralement par compression entre rouleaux de calandrage. L'ensemble est dans un premier temps, chauffé sous pression afin d'assurer l'adhésion entre l'âme et les peaux, puis refroidi, toujours sous pression, de manière à consolider le sandwich. [8]

### I.4 Comparaison entre structure sandwich et stratifié simple :

La théorie de la RDM montre que la rigidité de flexion de n'importe quel panneau est proportionnelle au cube de son épaisseur. Les structures sandwich jouent un rôle de plus en plus important en constructions grâce à son rapport élevé de rigidité de flexion par son poids comparé aux stratifiés simples et autres architectures.

Généralement, l'âme en mousse et en nid d'abeille ne portent pas les charges membranaires appliquées à la structure, l'intérêt primaire est d'assurer l'espacement entre les faces (les peaux) pour transmettre les charges de cisaillement transverse pour lesquels la structure est sollicitée. Le poids de l'âme représente un pourcentage très petit par rapport au poids de la structure. Il est intéressant de comparer une structure sandwich isotrope avec un stratifié simple en utilisant deux faces d'épaisseur  $t_f$  identique et une âme d'épaisseur  $h_c$  pour le sandwich. Le stratifié simple à droite (figure. I.11) est une feuille plate d'une épaisseur  $2t_f$ . Du fait du poids faible de l'âme le stratifié a approximativement le même poids avec le sandwich car les mêmes matériaux de peaux sont utilisés.

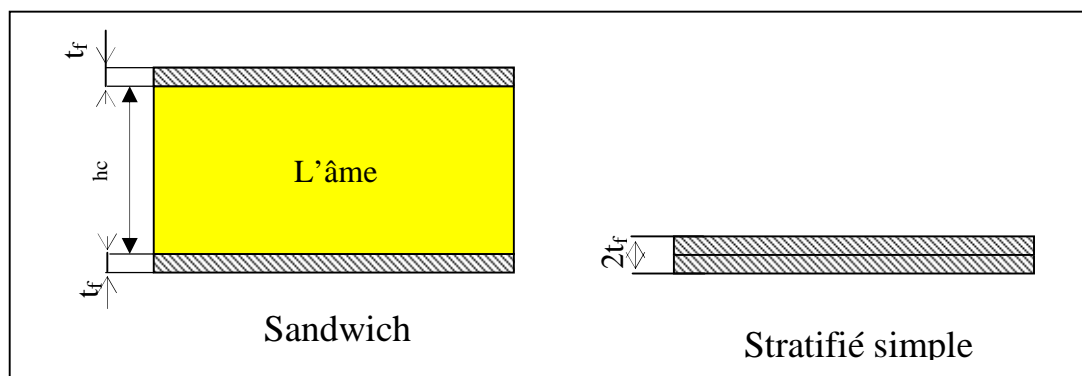


Figure I.11 : Section transversale d'un sandwich et d'un stratifié simple

Pour des chargements de traction et compression plane les deux structures ont la même rigidité, Par contre, il y a une différence remarquable dans la rigidité de flexion par unité de largeur  $D$ . Pour une plaque de stratifié simple (figure I.11) la rigidité de flexion est :

$$D_{str} = \frac{E_f (2t_f)^3}{12(1 - \nu_f^2)} = \frac{2E_f t_f^3}{3(1 - \nu_f^2)} \quad (I.1)$$

Quant à la rigidité de flexion pour un sandwich avec une mousse ou nid d'abeille la rigidité est donnée par :

$$D_{sand} = \frac{2E_f t_f (h_c/2)^2}{(1 - \nu_f^2)} = \frac{E_f t_f h_c^2}{2(1 - \nu_f^2)} \quad (I.2)$$

Si nous calculons le rapport de la rigidité de flexion d'une structure de sandwich de mousse ou nid d'abeille par rapport une plaque stratifié simple avec approximativement le même poids et en utilisant le même matériau de construction pour les faces, on obtient :

$$\frac{D_{sand}}{D_{str}} = \frac{3}{4} \left( \frac{h_c}{t_f} \right)^2 \quad (I.3)$$

Par exemple, si,  $t_f/h_c = 1/20$ , la rigidité de flexion de sandwich est 300 fois la rigidité de flexion d'un structure stratifié simple.

### I.5 Utilisations des structures sandwich :

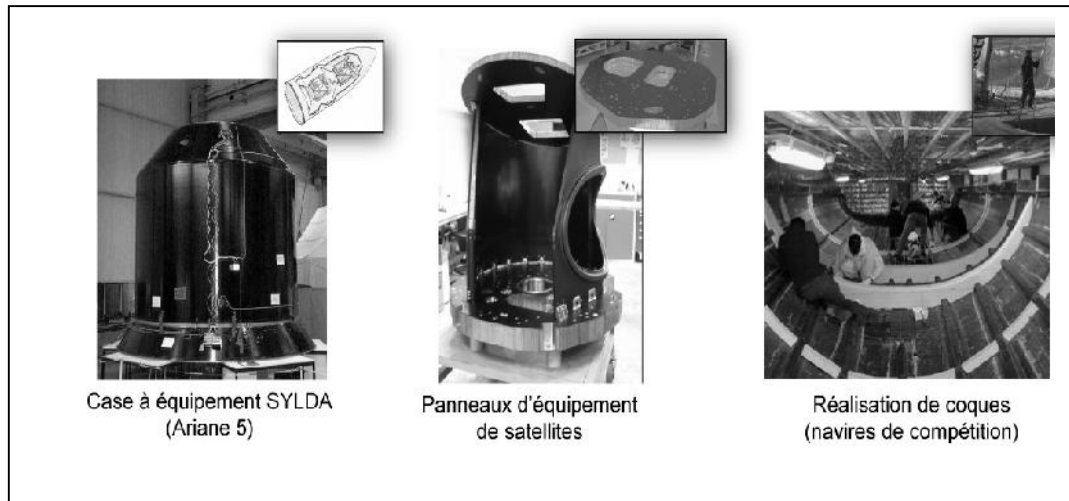
Les structures sandwich ont été employées principalement dans l'industrie aéronautique depuis les années 1940, et plus tard l'utilisation a été prolongée aux structures de missile et de vaisseau spatial. Au cours des années, la structure sandwich de noyau de nid d'abeilles est devenue extensivement utilisée sur les avions commerciaux et militaires.

L'Europe a utilisé les structures sandwich pour les rails de cars légers, alors qu'aux États-Unis certains des trains rapides emploient le sandwich à nid d'abeilles. La marine américaine emploie le sandwich à nid d'abeilles pour réduire le poids de bateau. Les bateaux à voiles, et des voitures d'emballage automatiques emploient les structures sandwich.

La structure sandwich à nid d'abeilles est également excellente pour absorber l'énergie mécanique et réduire les ondes de son. Elle peut également être employée pour transmettre la chaleur ou pour être un isolateur. En 1995, il a été rapporté l'utilisation des structures de sandwich à nid d'abeilles pour un bateau de navigation ultraléger, avec une réduction de poids de 70 pour cent d'une construction plus conventionnelle de composé de graphite. Plus



récemment, la construction sandwich est employée dans des projets de réadaptation de génie civil tels que des plates-formes de pont.



**Figure I.12 :** Application des matériaux sandwich dans les domaines aérospatial et naval [1]

Les matériaux sandwich sont très utilisés dans le domaine aérospatial pour les lanceurs (réalisation de la case à équipement Sylda en sandwich nid d'abeille Nomex), pour les satellites (réalisation de panneaux supports d'instruments) ou dans le domaine naval pour la réalisation de coques. Les matériaux sandwich sont très sensibles au décollement entre les peaux et l'âme qui induit généralement la ruine totale de la structure. [1]

L'application consommant le plus de balsa demeure l'isolation des immenses réservoirs de gaz liquide des méthaniers. Une seule sphère nécessite pas moins de 100 mètres cubes de bois. Le bois de balsa est aussi utilisé pour la fabrication de planchers d'avion comme sur le BOEING 747 (sandwich de balsa et de feuille d'aluminium) et la fabrication de containers transportables pour les avions et les hélicoptères cargos. La construction en sandwich est un concept qui a été qui existe depuis 1820. Cependant, il a fallu un siècle pour que l'utilisation en masse commence. En effet, l'une des premières applications de la construction en sandwich est la fabrication d'un avion militaire britannique de la Seconde Guerre Mondiale, le Mosquito. Contrairement aux structures métalliques, sa structure en panneaux sandwichs avec des peaux de placage en bois et une âme en balsa, lui confère une grande légèreté et par voie de conséquence une vitesse plus élevée. [8]

Au cours des années 1940, l'apparition de nouveaux matériaux d'âme a encouragé les principaux constructeurs d'avions militaires à utiliser davantage les composites sandwichs. En effet, en 1943, la base aérienne américaine Wright-Patterson (WPAFB) a commencé à utiliser

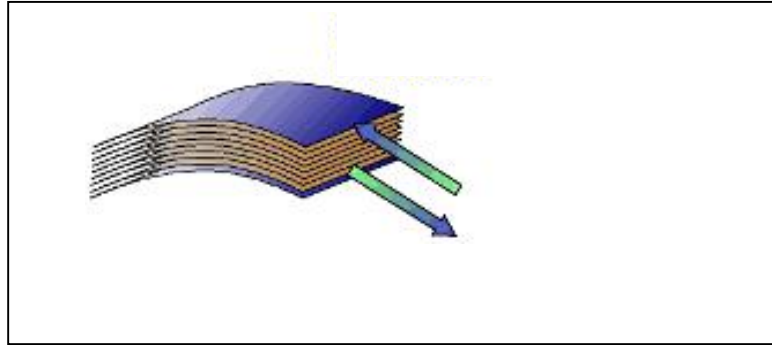
des structures sandwich avec des peaux stratifiées en résine polyester renforcée de fibres de verre liées entre elles par une âme de faible densité (balsa ou nid d'abeille en fibres de verre) pour fabriquer le fuselage de leur VULTEE BT-15. Ces dernières années, la plupart des avions civils ont également adopté cette construction pour de nombreux composants. Par exemple, les planchers de l'avion Boeing 747 sont fabriqués à partir d'un panneau sandwich de balsa et de feuille d'aluminium. Dans le domaine de la construction navale, les caractéristiques de légèreté et surtout d'absence de corrosion des structures sandwich, lorsque les divers constituants ne sont pas métalliques, commencent à susciter de l'intérêt. Une étude expérimentale et analytique a montré que le remplacement d'une construction en acier conventionnelle par une construction en sandwich peut apporter des gains de masse jusqu'à 40 à 50%. L'utilisation de construction 20 sandwich à âme en nid d'abeille pour la fabrication des voiliers a pour conséquence de diminuer la masse de la structure de 70% comparativement à la construction traditionnelle en composite à base de fibres de graphite (carbone). De nos jours, pratiquement tous les bateaux de plaisance américains de moins de 43 mètres sont construits en sandwichs composites en fibres de verre. [8]

Les structures sandwichs sont également utilisées dans la construction des articles de sports et de loisirs, tels que les skis acrobatiques, les kayaks, les planches de surf, les tables de billard, et les raquettes de tennis. Dans le secteur ferroviaire, les structures sandwich ont été sélectionnées pour la fabrication des cabines de trains à grande vitesse (TGV). Les propriétés exceptionnelles de ces structures en font le matériau idéal pour atténuer les problèmes de la propagation des ondes de pression lors de croisement de deux trains dans un tunnel. De plus, la bonne résistance au feu et la grande résistance à des températures très élevées de certaines mousses thermoplastiques, ont permis par exemple la conception du train allemand « Transrapid ». Grâce à une structure en matériaux sandwichs, ce dernier peut atteindre des vitesses supérieures à 550 Km/h. Plus récemment, la construction sandwich est de plus en plus utilisée dans les projets de réhabilitation des infrastructures routières (Génie civil) telles que la fabrication des tabliers de ponts où la légèreté, la durabilité et la résistance à la corrosion sont indispensables. [8]

## **I.6 Le rôle de constituante :**

### **I.6.1 Influence de module de cisaillement de l'âme :**

La méthode la plus facile pour éclaircir la manière par laquelle l'âme supporte les contraintes de cisaillement est de prendre un paquet de papiers et le plier, vous constaterez comment les couches individuelles de solide glissent l'un par rapport à l'autre.



**Figure I.13 :** Glissement des couches sans résistance

Les peaux fabriquées par des matériaux d'un module d'élasticité élevé sont mieux utilisables par conjonction avec des âmes avec des modules de cisaillement élevé. Cet équilibre est important pour que ni l'un ni l'autre matériau n'endommage avant l'autre.

Par exemple, les peaux en graphite ou en kevlar collées sur un noyau de mousse de styrol seront mauvais compléments. En effet, un tel bas module de cisaillement de noyau échouerait toujours avant que la peau soit soumise à une contrainte de un pour cent de sa charge potentielle. Naturellement, pour cette raison la mousse de styrol n'est pas considérée comme un matériau adéquat pour la fabrication du noyau.

### **I.6.2 L'influence de module d'élasticité :**

On peut remarquer que les déformations dans l'âme et les peaux sont égales mais les deux peaux et l'âme ont généralement des propriétés mécaniques différentes ce qui traduit par une discontinuité des contraintes entre âme et peaux. La discontinuité de contrainte à la limite âme/peaux est une indication claire que les peaux absorbent les efforts de traction et compressions plus que l'âme.

### **I.7 Les modes de rupture :**

Il y a différents modes d'endommagement qui peuvent être considérés, dépendant de la géométrie du panneau de sandwich et de la configuration de chargement. La structure endommagera quelque soit le mode de rupture produit à la plus basse charge.

#### **I.7.1 Rupture de la peau sous traction ou compression :**

On considère la face ou le noyau endommagé si la rupture commence ou si le composant a réellement rompu. Par conséquent pour chaque matériau utilisé, il y aura un effort maximal admissible, que ce peut être un point ou un effort de rupture. Le critère de rupture est quand

l'effort maximum atteint cette valeur permise. Pour la plupart des situations de chargement, les efforts normaux dans les faces sont habituellement plus grands que les efforts de cisaillement dans le noyau et les faces.

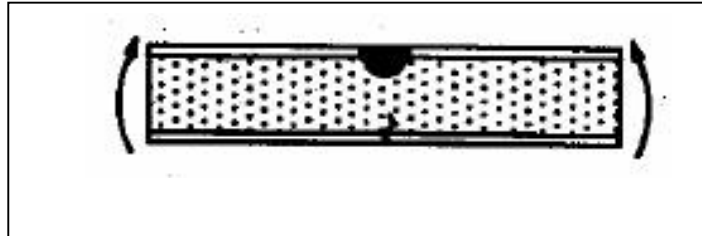


Figure I.14 : Rupture des faces

### I.7.2 Flambage des peaux :

Une poutre sandwich soumise à une compression peut céder sous l'effet des conditions d'instabilité concernant toute la poutre : le flambement. Le flambement généralisé peut aussi survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures aux résistances à la rupture. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions dans le plan de la poutre et les conditions aux limites. Ce type de déformation est causé par une épaisseur insuffisante de la structure, ou la faible rigidité de l'âme. [8]

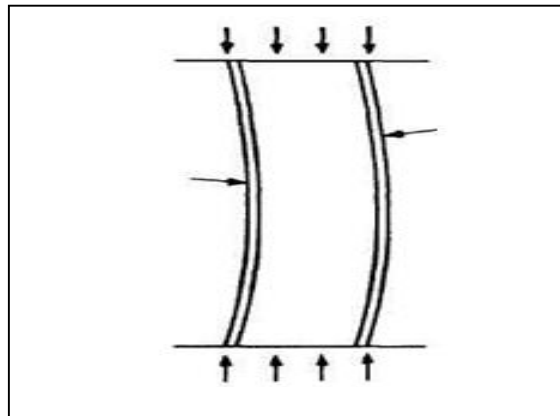


Figure I.15 : Flambage des peaux [8]

### I.7.3 Flambage générale :

Il faut éviter ce phénomène puisqu'une structure qui flambe perd ses possibilités d'accomplir son but. La charge de flambage peut être la charge finale que la structure peut soutenir, parce que dans sa forme flambée elle ne peut pas supporter des chargements additionnels. [8]

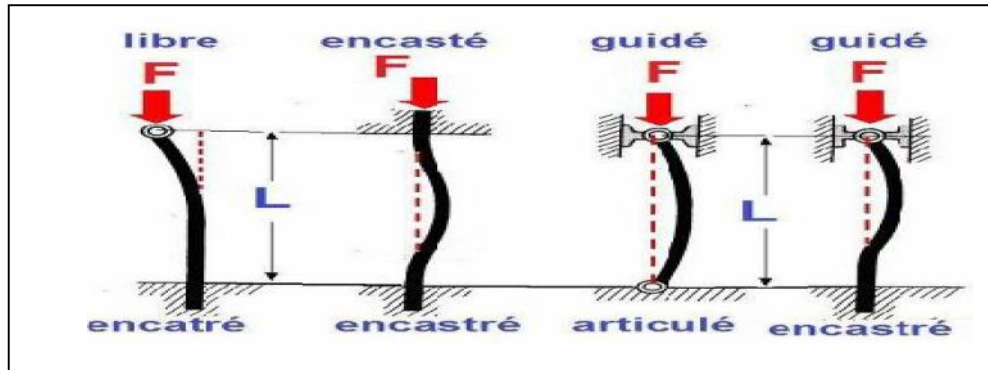


Figure I.16 : Flambage Générale [8]

#### I.7.4 Rupture de noyau par cisaillement :

Le matériau du noyau est principalement soumis au cisaillement puisqu'il supporte presque la force transversale entière. D'une façon générale les efforts de cisaillement dans le noyau sont grands comparés aux efforts normaux; donc la rupture se produira quand l'effort de cisaillement maximum excède la force maximale supportée par le noyau. Cette force maximale dépend de la densité de la mousse.

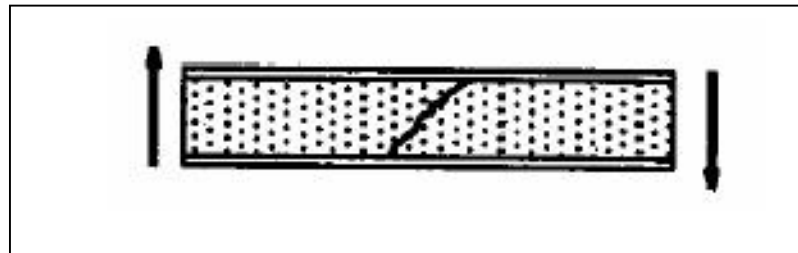


Figure I.17 : Rupture par cisaillement de noyau

#### I.7.5 Délaminage :

L'endommagement du lien entre les faces et le noyau s'appelle le délaminage, il est dû à la surcharge. L'effort de cisaillement dans la ligne de liaison est presque aussi haut qu'au milieu du noyau, et si le joint adhésif a moins de résistance que le noyau il endommage avant le noyau. Ceci devrait être évité en choisissant le meilleur adhésif et les bonnes méthodes de mise en œuvre. Le lien sera également soumis aux efforts élevés exercés à hautes températures sur les faces, par exemple soleil. Le noyau est habituellement un très bon isolateur thermique, en contraire des peaux, particulièrement si ces faces sont métalliques. Le joint adhésif endommagera également en raison de la fatigue, de l'impact ou du vieillissement. Le problème principal de l'endommagement de l'adhésif est qu'il est occulté. Il peut commencer à accroître et atteindre des niveaux critiques avant d'être détecté.

### I.7.6 Impression de noyau ou de peaux :

L'impression possible des peaux et du noyau est due aux concentrations d'effort induit quand des charges sont fortement localisées. Quand une charge est appliquée directement, il y a également la possibilité du courbement de la face où la charge est localisée,

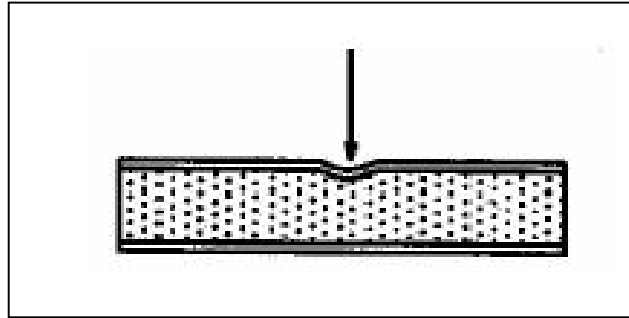


Figure I.18 : Impression de noyau ou de peaux

### I.7.7 Repliement de cisaillement :

La rupture par repliement de cisaillement est réellement identique au mode de flambage considérant les faces minces. Le repliement de cisaillement est un endommagement d'instabilité de cisaillement. L'endommagement par cette manière se produit en raison de grandes forces transversales induites par de grandes déformations hors-plan. L'endommagement apparaîtra où cette force transversale a une valeur maximale.

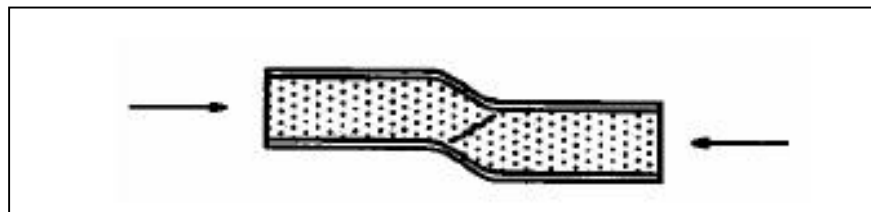


Figure I.19 : Repliement de cisaillement

### I.7.8 Dimpling des peaux :

Connu également comme le flambage intercellulaire, ce phénomène d'instabilité peut se produire en structures de sandwich avec le nid d'abeilles ou les noyaux ondulés.

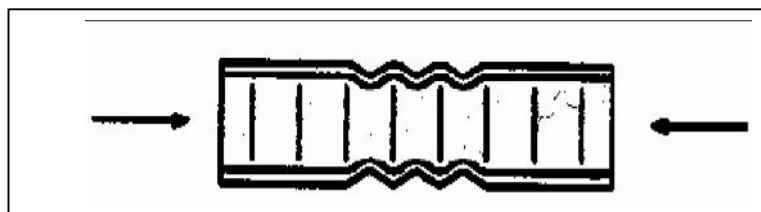


Figure I.20: Flambage intercellulaire

**I.7.9 Vibration :**

En structures mobiles il y a souvent un mouvement imposé dans une marge de fréquence donnée, donc il vaut mieux éviter d'avoir une fréquence normale de vibration pour la pièce de charpente se trouvant en dessous de la marge.

**I.7.10 Fatigue :**

On dit généralement que la fatigue cause plus de 90 pour cent de toutes les défaillances des structures. Pour des matériaux de tels composés de fibre, où il y a un manque de données disponibles, une manière conservatrice doit employer une limite de fatigue sous laquelle le matériau peut passer par un certain nombre de cycles en dehors exhibe n'importe quels dommages considérables.

**I.7.11 Dommages par impact :**

Un impact peut créer un endommagement visible comme une bosselure sur la face du panneau, ou il peut ne pas laisser aucune marque évidente du tout. Les dommages ne sont pas toujours dans la proximité directe de l'impact, mais ils peuvent causer de bonding, rupture de noyau, délaminage ou flambage intercellulaire loin du point réel d'impact. La résistance à l'impact dépend du matériau de la peau, le noyau, la géométrie de la structure, et naturellement de la taille et de la vitesse de l'impact.

# **Chapitre II**

# **Modélisation**



## II.1 Champ des déformations et des contraintes :

### II.1.1 Hypothèses :

La théorie des plaques sandwiches repose sur les hypothèses fondamentales suivantes :

1. L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux  $h \gg h_1, h_2$ .
2. Les déplacements de l'âme  $u_a$  et  $v_a$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
3. Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
4. Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $V_{zz}$  est négligée.
5. L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  les contraintes  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{zz}$  sont négligées.
6. Les contraintes de cisaillement transverse  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  sont négligées dans les peaux.
7. Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticité de faibles déformations.

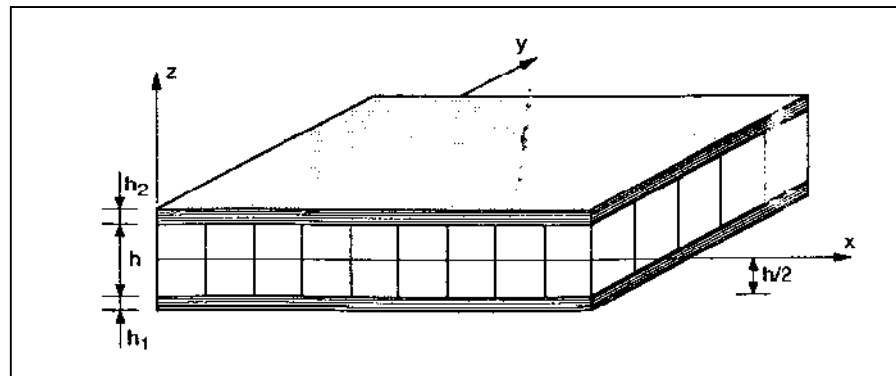


Figure II.1 : Notation d'une plaque sandwich [4]

### II.1.2 Champ des déplacements :

L'hypothèse 2 implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \epsilon_x(x, y) \\ v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \epsilon_y(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$$\begin{aligned}u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0) \\v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0)\end{aligned}$$

La continuité des déplacements aux interfaces âme-peaux, associée à l'hypothèse 3, conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

➤ Peau inférieure :

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \xi_x(x, y) \\v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \xi_y(x, y)\end{aligned}\tag{II.2}$$

➤ Peau supérieure :

$$\begin{aligned}u_2(x, y, z) &= u_0(x, y) + \frac{h}{2} \xi_x(x, y) \\v_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + \frac{h}{2} \xi_y(x, y)\end{aligned}\tag{II.3}$$

➤ L'hypothèse 4 s'écrit :

$$W(x, y, z) = w_0(x, y)\tag{II.4}$$

La théorie des plaques sandwich est donc basée sur la détermination de cinq fonctions de déplacement et rotation  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\xi_x$  et  $\xi_y$ .

### II.1.3 Champ des déformations :

Le champ des déformations dans la peau inférieure est déduit du champ (II.2) des déplacements. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}v_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} & \chi_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \\v_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \xi_y}{\partial y} & \chi_{yz}^1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\v_{zz} &= 0 & \chi_{xz}^1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x}\end{aligned}\tag{II.5}$$

Le champ de déformations s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{bmatrix} v_{xx}^1 \\ v_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ |_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Avec des notations :

$$\begin{aligned} v_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & |_{x} &= \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \\ v_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & |_{y} &= \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \\ \chi_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} & |_{xy} &= \frac{\partial \xi_y}{\partial x} + \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Les déformations en cisaillement transverse sont négligées.

De même le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} v_{xx}^2 \\ v_{yy}^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xx}^0 \\ v_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ |_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Le champ de déformations dans l'âme se déduit du champ(II.1) de déplacement Soit :

$$\begin{aligned} v_{xx}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \\ v_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \\ v_{zz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \chi_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \\ \chi_{yz}^a &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \xi_y \\ \chi_{xz}^a &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_a}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \xi_x \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Le champ de déformation est la superposition de deux champs de déformations :

- ✓ Le champ de déformation en membrane-flexion :

$$\begin{bmatrix} V_{xx}^a \\ V_{yy}^a \\ X_{xy}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx}^0 \\ V_{yy}^0 \\ X_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

- ✓ Le champ de déformations en cisaillement transverse :

$$\begin{bmatrix} X_{yz}^a \\ X_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \gamma_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \gamma_x \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

#### II.1.4 Champ des contraintes :

Le champ des contraintes dans l'âme et déduit de l'hypothèse 5 :

$$\dagger_{xx}^a = \dagger_{yy}^a = \dagger_{xy}^a = \dagger_{zz}^a = 0 \quad (\text{II.12})$$

L'âme ne transmet que le contrainte en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \dagger_{yz}^a \\ \dagger_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^a & C_{45}^a \\ C_{45}^a & C_{55}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{yz}^a \\ X_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Ou les coefficients  $C_{ij}^a$  s'expriment en fonction de coefficients  $C_{ij}^a$  rapporté aux axes principaux de l'âme suivant :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{44}^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta \\ \bar{C}_{45}^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{C}_{55}^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Ou  $\theta$  est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec e axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients  $C_{ij}^a$  dans les axes principaux s'exprime eux même en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme mesuré dans les axe principaux. Selon :

$$\begin{aligned} C_{44}^a &= G_{23}^a \\ C_{55}^a &= G_{13}^a \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

L'hypothèse 6 implique que les contraintes en cisaillement transverse sont nulles dans toute les couches k de la peau inférieure ou supérieure :

$$\dagger_{xz}^k = \dagger_{yz}^k = 0 \quad (\text{II.16})$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} \dagger_{xx}^k \\ \dagger_{yy}^k \\ \dagger_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} & \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{16} \\ \dot{Q}_{12} & \dot{Q}_{22} & \dot{Q}_{26} \\ \dot{Q}_{16} & \dot{Q}_{26} & \dot{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} v_{xx}^i \\ v_{yy}^i \\ v_{xy}^i \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Pour la couche k de la peau inférieure (i=1) ou de la peau supérieure (i=2).

Les coefficients  $Q_{ij}$  s'écrivent en fonction des caractéristiques mécaniques de chaque couche (voir Annexe).

## II.2 Relations fondamentales des plaques sandwichs :

### II.2.1 Equation constitutive :

L'équation constitutive des plaques sandwichs fait intervenir les résultantes et moments :

- Les résultantes en membrane :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}+h_1}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.18})$$

- Les moments en flexion-torsion :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}+h_1}^{-h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (\text{II.19})$$

➤ Les résultantes en cisaillement:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \dagger_{xz} \\ \dagger_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.20})$$

L'équation constitutive :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xx}^0 \\ V_{yy}^0 \\ X_{xy}^0 \\ |_x \\ |_y \\ |_{xy} \\ X_{yz}^a \\ X_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= B_{ij}^1 + B_{ij}^2 \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \\ D_{ij} &= \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Et :

$$A_{ij}^1 = \int_{-\left(\frac{h}{2}+h_1\right)}^{-\frac{h}{2}} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k \quad (\text{II.23})$$

$$A_{ij}^2 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k \quad (\text{II.24})$$

$$C_{ij}^1 = \int_{-\left(\frac{h}{2}+h_1\right)}^{-\frac{h}{2}} (Q'_{ij})_k z dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k Z dZ = \sum_{k=1}^{n_1} (Q'_{ij})_k e_k Z_k \quad (\text{II.25})$$

$$C_{ij}^2 = \int_{\left(\frac{h}{2}\right)}^{\frac{h}{2}+h_2} (Q'_{ij})_k z dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k Z dZ = \sum_{k=1}^{n_2} (Q'_{ij})_k e_k Z_k \quad (\text{II.26})$$

$$F_{ij} = h C_{ij}^a \quad (\text{II.27})$$

Ou  $n_1$  et  $n_2$  sont les nombres de couches respectivement dans la peau inférieure et dans la peau supérieure, et  $C_{ij}^a$  sont les coefficients relatifs au cisaillement transverse de l'âme.

Coefficients  $f_{ij}$  sont parfois corrigés par des facteurs de correction  $k_{ij}$ , et remplacés par les paramètres de cisaillement  $H_{ij}$ .

$$H_{ij} = K_j F_{ij} \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas de plaques sandwiches symétriques, les peaux inférieure et supérieure sont identiques d'où :

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= A_{ij}^2 \\ C_{ij}^1 &= -C_{ij}^2 \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^1 = 2A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= 0 \\ D_{ij} &= hC_{ij}^2 \\ C_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas des plaques sandwiches symétriques, il y a donc découplage des comportements en membrane et en flexion. L'équation constitutive prend alors une forme identique à l'équation constitutive de stratifiés symétriques avec cisaillement transverse [Berthelot].

### II.2.2 Relation fondamentales :

Les relations fondamentales des plaques sandwiches sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (II.21).

- On obtient :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{16}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\ 2B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
& (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{II.32}$$

$$\begin{aligned}
& C_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
& 2D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\
& F_{45} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{II.33}$$

$$\begin{aligned}
& C_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \\
& (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \\
& F_{44} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{II.34}$$

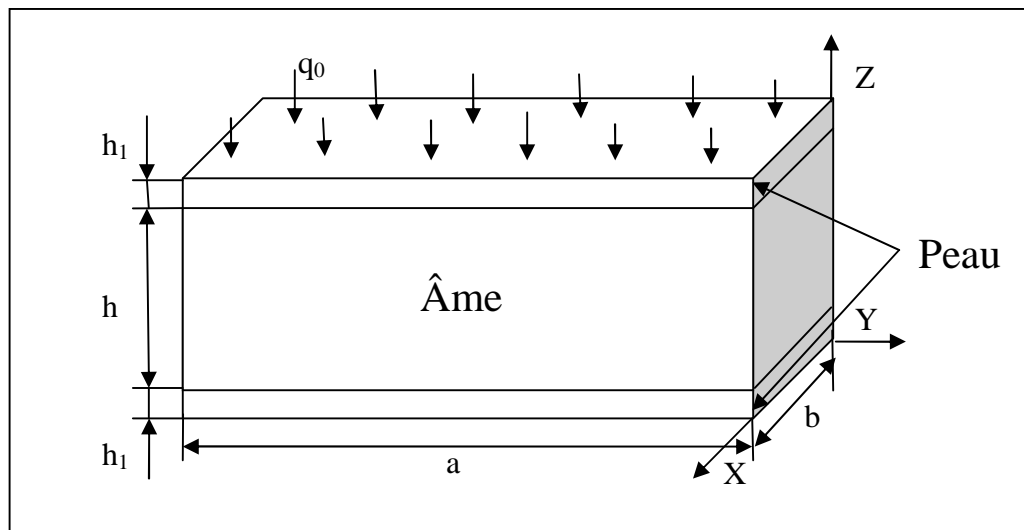
$$F_{55} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = 0 \tag{II.35}$$



# Chapitre III

## Résultats et Perspectives

Soit une structure sandwich simplement appuyée sur les quatre cotés et sous une charge uniformément répartie sur la surface supérieure (voir Figure III.1).

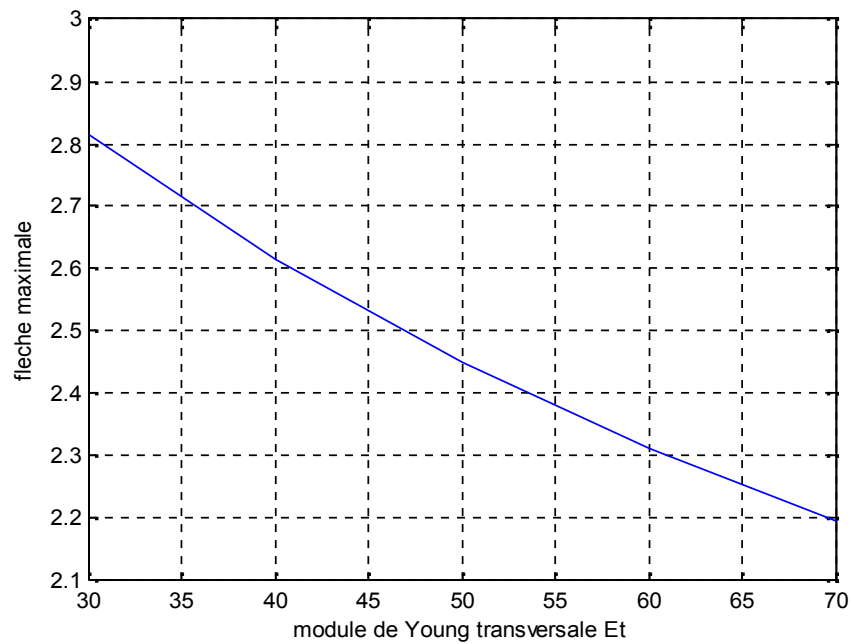


**Figure III.1 :** Structure sandwich simplement appuyée

On étudie l'influence des caractéristiques mécaniques des constituants de sandwich en utilisant le l'environnement Matlab.

### III.1 Influence du module de Young transversale $E_t$ :

$E_l = 30 \text{ Mpa}$ ;  $G_{lt} = 10 \text{ Mpa}$ ;  $G_{13} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20 \text{ Mpa}$ ;  $a = 20\text{mm}$ ,  $b = 20\text{mm}$ ,  
 $h = 10\text{mm}$ ,  $h_1 = 1\text{mm}$  et  $q_0 = 10\text{Mpa}$ .

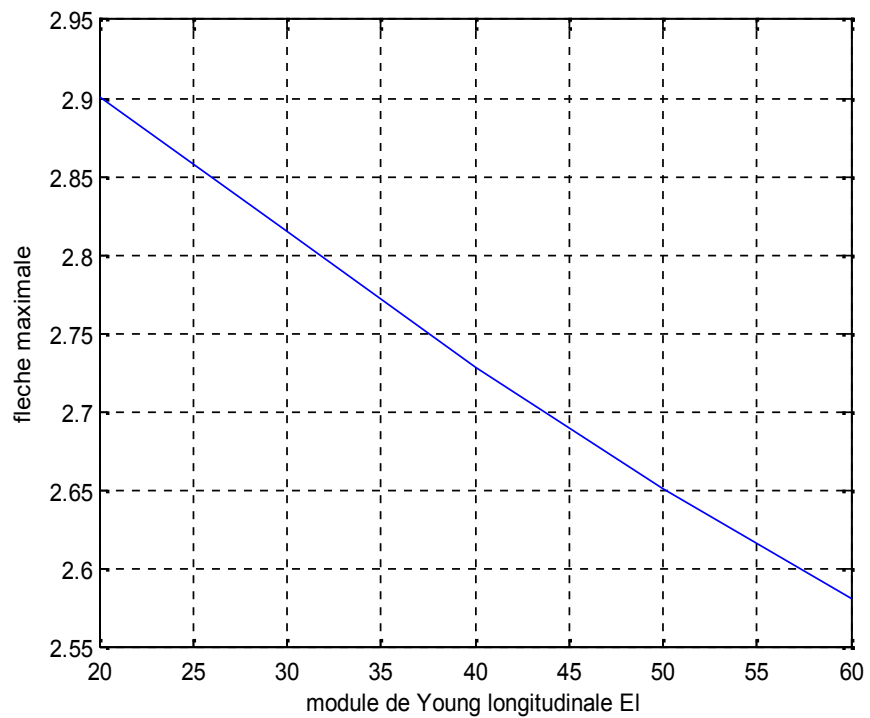


**Figure III.2 :** La variation de la flèche maximale en fonction du module de Young transversale  $E_t$

- Ce graphe nous permet de voir l'influence du module de Young transversal sur la flèche au milieu de la plaque sandwich, on peut voir clairement que la flèche décroît quand la valeur du module de Young transversal de la peau augmente.

### III.2 Influence du module de Young longitudinale $E_1$ :

$E_t = 30$  Mpa,  $G_{1t} = 10$  Mpa,  $G_{13} = 20$  Mpa,  $\nu_{1t} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20$  Mpa,  $a = 20$ mm,  $b = 20$ mm,  $h = 10$  mm,  $h_1 = 1$ mm et  $q_0 = 10$ Mpa.

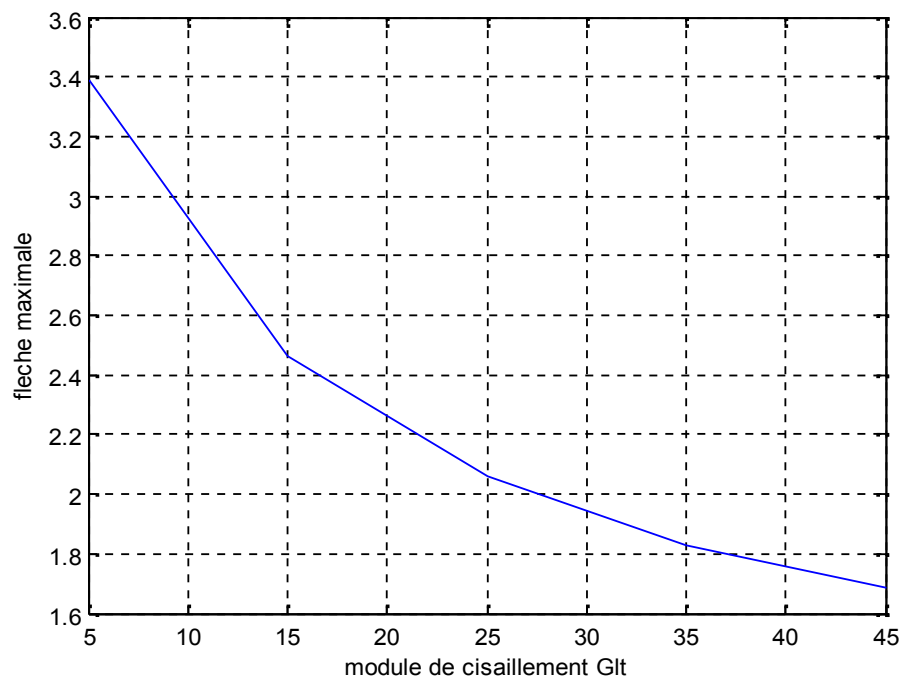


**Figure III.3** : La variation de la flèche maximale en fonction du module de Young longitudinale  $E_1$

- Ce graphe représente l'influence du module de Young dans le sens longitudinal sur la flèche au milieu de la plaque sandwich, on peut voir que la flèche décroît quand la valeur du module de Young longitudinal augmente.

### III.3 Influence du module de cisaillement $G_{lt}$ :

$E_t = 30 \text{ Mpa}$ ,  $E_l = 30 \text{ Mpa}$ ,  $G_{13} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $a = 20\text{mm}$ ,  
 $b = 20\text{mm}$ ,  $h = 10\text{mm}$ ,  $h_1 = 1\text{mm}$  et  $q_0 = 10\text{Mpa}$ .

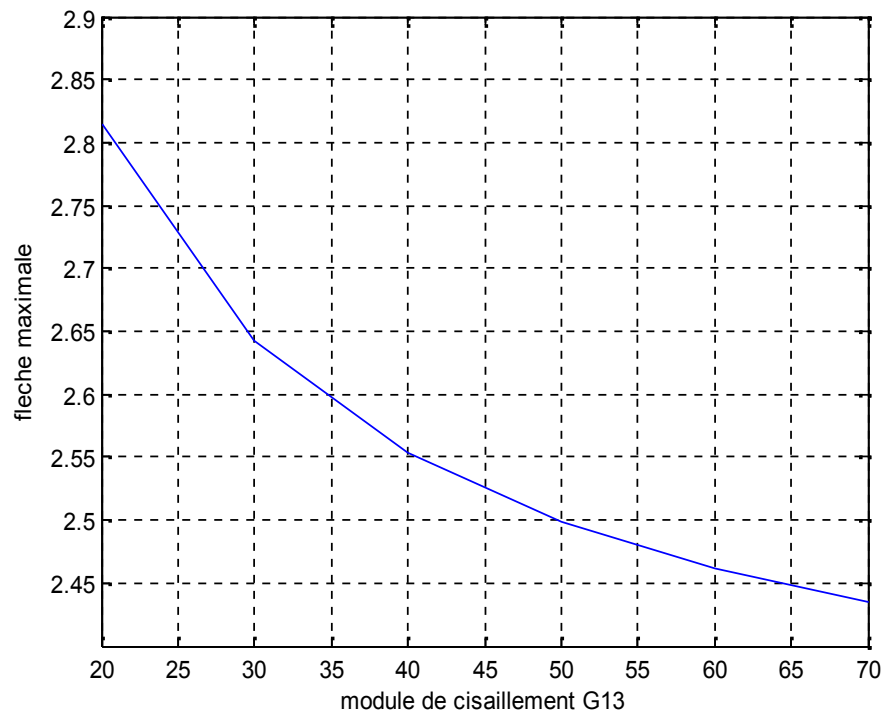


**Figure III.4:** La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement  $G_{lt}$

- Sur la figure ci-dessus, on a le graphe représentant l'influence du module de cisaillement de la peau sur la flèche au milieu de la plaque sandwich, on peut voir que la flèche décroît quand la valeur du module de cisaillement augmente

### III.4 Influence du module de cisaillement $G_{13}$ :

$E_t = 30 \text{ Mpa}$ ,  $E_l = 30 \text{ Mpa}$ ,  $G_{lt} = 10 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $a = 20\text{mm}$ ,  $b = 20\text{mm}$ ,  
 $h = 10\text{mm}$ ,  $h_1 = 1\text{mm}$  et  $q_0 = 10\text{Mpa}$ .

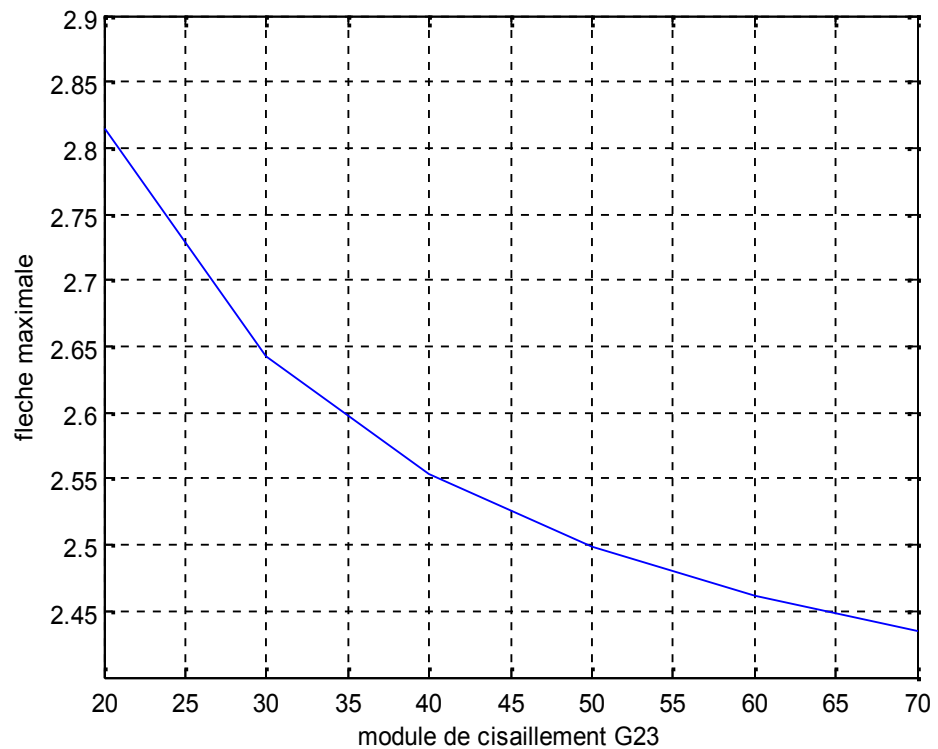


**Figure III.5:** La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement  $G_{13}$

- Ce graphe représente la relation inversement proportionnelle entre l'augmentation de la valeur de module de cisaillement de l'âme et la décroissance du déplacement transversal du plaque sandwich.

### III.5 Influence du module de cisaillement $G_{23}$ :

$E_t = 30 \text{ Mpa}$ ,  $E_l = 30 \text{ Mpa}$ ,  $G_{lt} = 45 \text{ Mpa}$ ,  $G_{13} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $a = 20\text{mm}$ ,  
 $b = 20\text{mm}$ ,  $h = 10\text{mm}$ ,  $h_1 = 1\text{mm}$  et  $q_0 = 10\text{Mpa}$ .

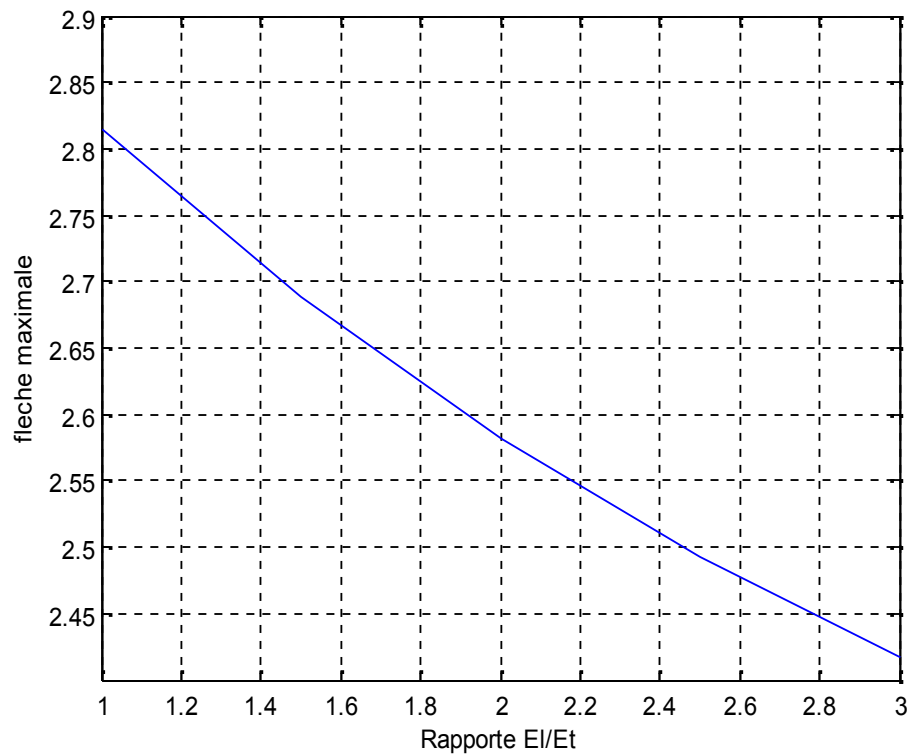


**Figure III.6:** La variation de la flèche maximale en fonction du module de cisaillement  $G_{23}$

- Ce graphe représente l'influence du module de cisaillement sur la flèche au milieu de la plaque sandwich, on peut voir que la flèche décroît quand la valeur du module de cisaillement augmente, on peut dire qu'on a obtenu le graphe même de la figure III.5.

### III.6 Influence du rapport $E_l/E_t$ :

$E_t = 30 \text{ Mpa}$ ,  $G_{1t} = 10 \text{ Mpa}$ ,  $G_{13} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $a = 20 \text{ mm}$ ,  
 $b = 20 \text{ mm}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 1 \text{ mm}$  et  $q_0 = 10 \text{ Mpa}$ .



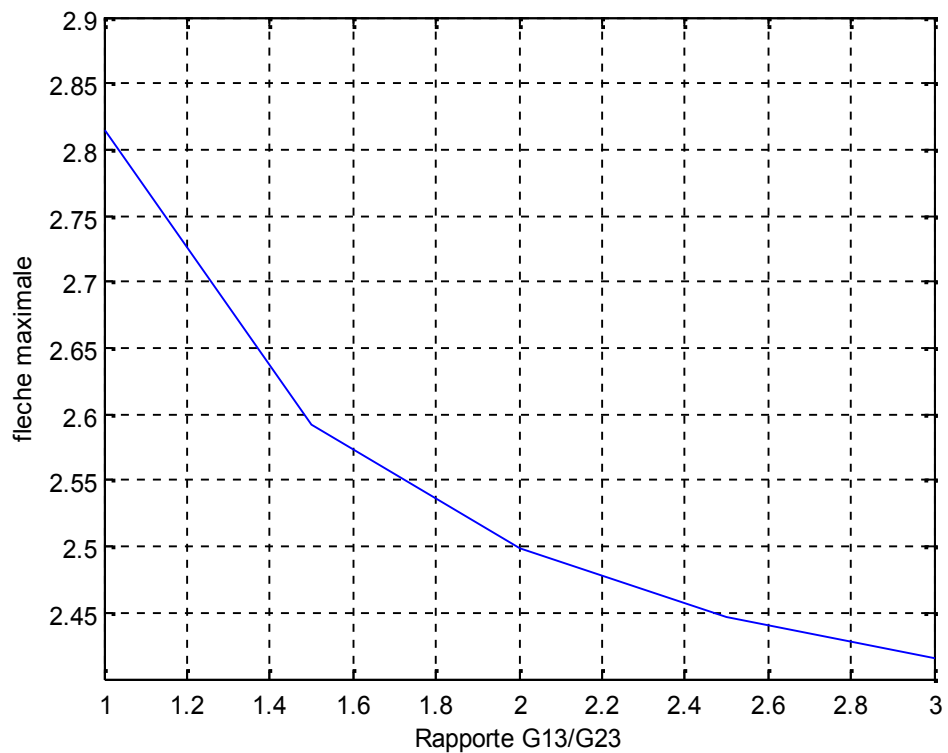
**Figure III.7:** La variation de la flèche maximale en fonction du rapport  $E_l/E_t$

- Sur ce graphe on peut voir l'influence du rapport de l'anisotropie dans la peau du sandwich sur le déplacement transversal maximal, la relation entre ce rapport et la flèche est inversement proportionnelle mais on peut voir que le graphe est presque linéaire.



### III.7 Influence de rapport $G_{13}/G_{23}$ :

$E_t = 30 \text{ Mpa}$ ,  $E_l = 30 \text{ Mpa}$ ,  $G_{lt} = 10 \text{ Mpa}$ ,  $\nu_{lt} = 0.3$ ,  $G_{23} = 20 \text{ Mpa}$ ,  $a = 20 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$ ,  
 $h = 10 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 1 \text{ mm}$  et  $q_0 = 10 \text{ Mpa}$ .

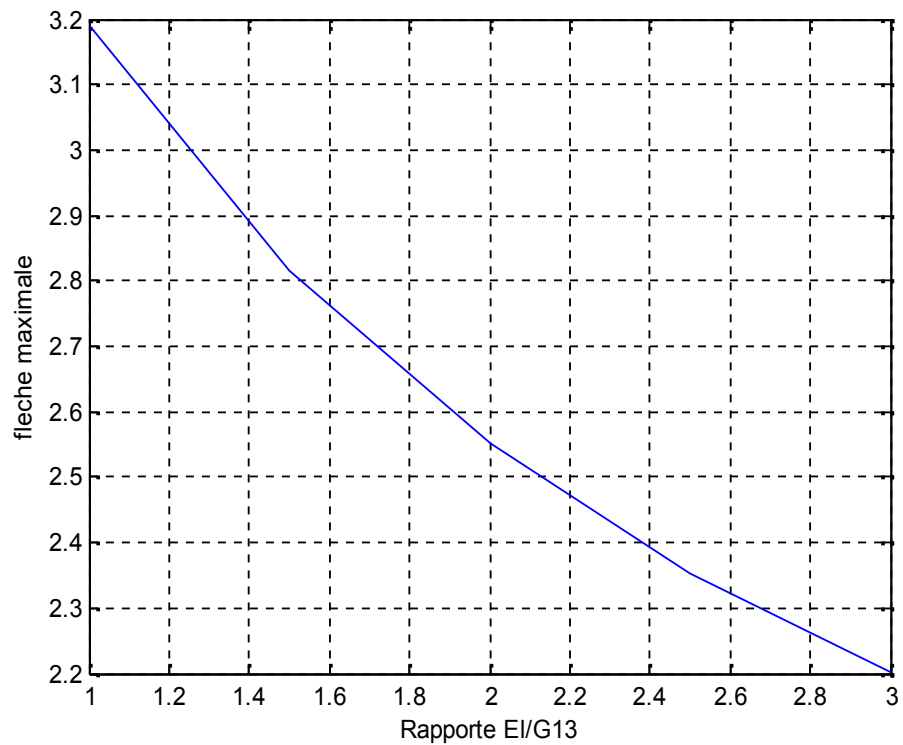


**Figure III.8:** La variation de la flèche maximale en fonction du rapport  $G_{13}/G_{23}$

- Sur ce graphe on peut voir l'influence du rapport de l'anisotropie dans l'âme du sandwich sur le déplacement transversal maximal, la relation entre ce rapport et la flèche est inversement proportionnelle mais la variation de ce graphe est clairement non linéaire.

### III.8 Influence du rapport $E_l/G_{13}$ :

$G_{1t} = 10$  Mpa,  $G_{13} = 20$  Mpa,  $t_t = 0.3$ ,  $G_{23} = 20$  Mpa,  $a = 20$ mm,  $b = 20$ mm,  
 $h = 10$ mm,  $h_1 = 1$ mm et  $q_0 = 10$ Mpa.



**Figure III.9:** La variation de la flèche maximale en fonction du rapport  $E_l/G_{13}$

- Généralement, les structures sandwich sont construites en matériaux différents, sur ce graphe on a le rapport qui représente la différence de l'anisotropie entre les peaux et l'âme où on peut voir que la valeur du déplacement transversal au milieu de la plaque décroît quand on augmente le rapport de l'anisotropie entre âme et peau.

### Conclusions générale:

Les structures sandwich sont très importantes dans les constructions industrielles modernes, notamment dans les secteurs maritimes et spatiales où le gain de masse est très important. Une structure sandwich simple est composée en deux faces et une âme. Dans ce travail, on a étudié l'influence des caractéristiques mécanique des constituants de sandwich sur le déplacement transversal au milieu d'une plaque simplement supportée sur les quatre cotés et sous un chargement uniformément réparti, on a conclu que tous les caractéristiques influent sur la flèche, on a remarqué aussi que les rapports de l'anisotropie de l'âme et les peaux ainsi que le rapport de l'anisotropie entre peau et âme influe sur le comportement mécanique de la plaque. Dans ce travail on a choisi d'étudier la plaque sans tenir compte l'effet de l'épaisseur de l'âme ainsi que de la peau, c'est pour cette raison on doit étudier l'influence des caractéristiques géométriques dans des travaux ultérieurs en posant la question, est ce que les dimensions de peaux et de l'âme peuvent changer l'allure de ces graphes ?

# **Annexe**

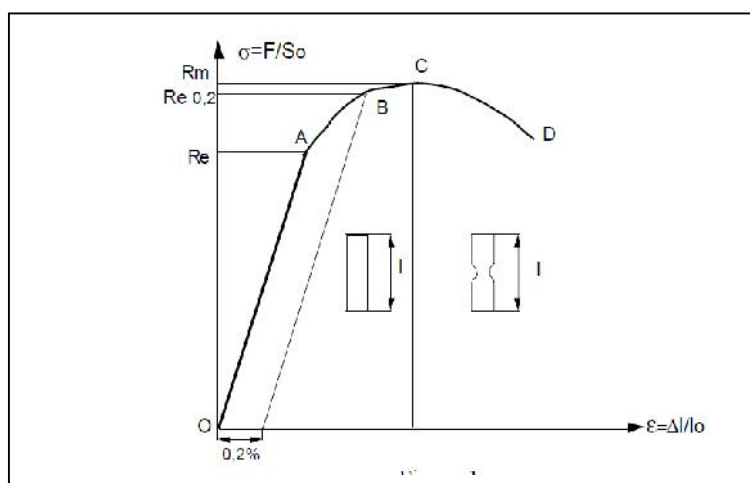
## 1. Propriétés mécaniques des matériaux:

Le comportement d'un métal est fonction des forces extérieures appliquées et traduit les évolutions de la cohésion de l'édifice cristallin. Pour les métaux, les forces qui assurent cette cohésion résultent de l'ionisation des atomes du métal qui perdent des électrons de valence et circulent entre les ions. Les propriétés mécaniques dépendent de la température d'utilisation, de l'état de surface, des conditions d'application des efforts, de la vitesse de déformation...Elles sont déterminées, avec un certain intervalle de précision, au moyen d'essais normalisés. [12]

### 1.1 Caractéristiques mécaniques $E, G$ :

#### a) $E$ : module d'Young

La pente de la partie linéaire OA (Figure 1) représente le **module d'Young  $E$**  (en Mpa ou en GPa) ou module d'élasticité. [12]



**Figure 1 : Essai de Traction [12]**

On appelle **loi de Hooke** la relation

$$\sigma_{\text{élastique}} = E \varepsilon_{\text{élastique}}$$

Ou :

$$\sigma = E \eta$$

L'allongement relatif :

$$\eta = \Delta l / l$$

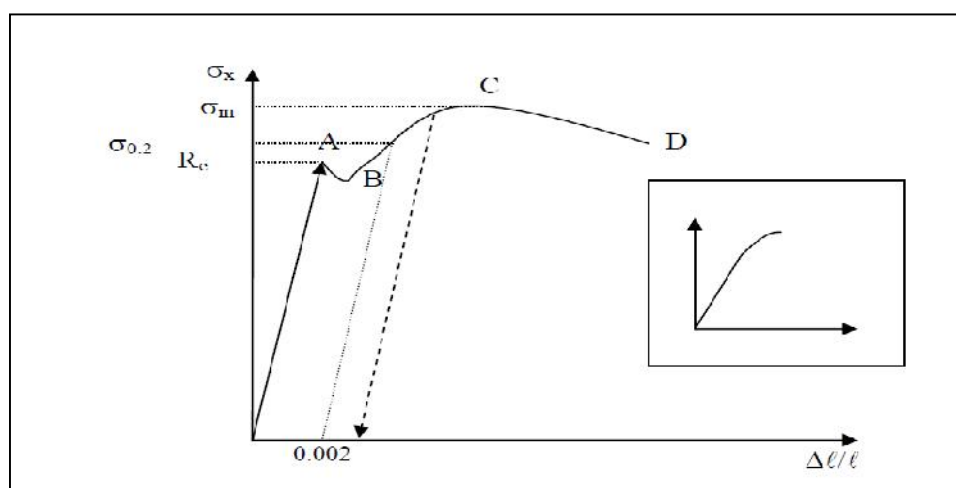
La mesure de  $E$  est obtenue à l'aide d'un extensomètre (voire figure 2).



**Figure 2 :** Extensomètre [7]

Le module d'Young est presque de 4 Mpa pour le caoutchouc et 500 GPa pour les céramiques (SiC). Cette variation importante est due aux intensités très variables des forces de liaison entre les atomes ou molécules au sein des matériaux: liaisons covalentes, ioniques. La rigidité d'une structure en traction, compression, flexion, est proportionnelle au module d'Young. La valeur de ce dernier, pour les matériaux isotropes, est indépendante de la direction de l'effort. Par contre, pour les matériaux anisotropes, tels les stratifiés, les composites orientés, les monocristaux, E varie avec l'orientation. [12]

Dans le domaine OA (Figure 3), la déformation est élastique et il y a proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation (ou entre l'allongement et l'effort de traction), le phénomène de déformation reste réversible, et si la contrainte est relâchée l'éprouvette retrouve sa longueur initiale et  $l = l_0$ . [11]



**Figure 3:** Diagramme type contrainte – déformation lors d'un essai de traction pour un matériau ductile. [11]

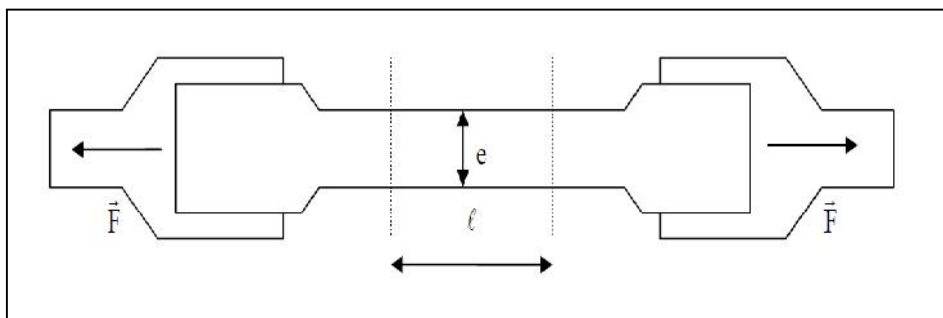
Une valeur de E élevée indique une rigidité élevée du matériau (le diamant par exemple). En revanche le plomb ou l'étain sont des matériaux de rigidité faible. Pour les aciers, on atteint typiquement des modules de Young de  $2.10^5 \text{ N/mm}^2$ , soit quelques 200 GPa. Les

fontes en revanche présentent des modules d'Young typiques de  $8.10^4 \text{ N/mm}^2$ , et sont moins élastiquement déformable. [11]

### b) : coefficient de Poisson (Module d'élasticité transverse)

L'éprouvette subit aussi des déformations latérales: **le coefficient de Poisson**.

Ce coefficient, compris selon les matériaux entre  $10^{-2}$  et  $4 \cdot 10^{-1}$ , dépend légèrement de la température.



**Figure 4:** Essai de traction simple sur éprouvette normalisée [11]

La déformation latérale est caractérisée par une relation de proportionnalité:

$$\frac{\Delta e}{e} = - \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de Poisson et est sans dimension. Le signe moins dans cette équation rend compte de la diminution de diamètre lorsque la contrainte augmente. [11]

**N.B :** il y 'a des matériaux ayant un coefficient de poison négatif.

### c) G: module de cisaillement

Le module de cisaillement **G** ou module de Lamé ou module de Coulomb, exprimé en Mpa ou Gpa, définit le cisaillement élastique consécutif à l'application d'une sollicitation de cisaillement. Il varie sensiblement comme E en fonction de la température et le type de matériau. Pour les matériaux isotopes, on a la relation :

$$G = E / 2(1 + \nu)$$

On peut définir alors un module d'élasticité transversal G, lui aussi dépendant du matériau (G vaut typiquement  $8.10^4 \text{ Nmm}^{-2}$  pour les aciers). [11]

## 2. Loi de Hooke généralisée :

La relation entre contraintes et déformations peut être caractérisée par : [3]

$$\sigma(M) = C(M). \varepsilon(M)$$

Soit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad (1)$$

Ou bien:

$$\varepsilon(M) = S(M). \sigma(M)$$

Soit:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{54} & S_{64} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{65} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R$$

C est la matrice de rigidité; S la matrice de souplesse. C et S sont des matrices symétriques : il y a donc 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$  ou constantes de souplesse  $S_{ij}$ . [3]

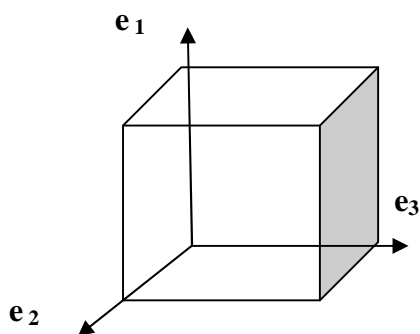
## 3. Caractérisation de matériaux :

### 3.1 Matériau monoclinique :

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan.

Supposons le plan (e1, e2) plan de symétrie du matériau. [3]





**Figure 5** : schéma qui représenté le repère R ( $e_1, e_2, e_3$ )

La matrice de rigidité de la relation(1) devient :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{sym}}$$

13 constantes d'élasticité [3]

### 3.2 Matériau orthotrope :

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. Pour un matériau orthotrope la matrice de rigidité est : [3]

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{sym}}$$

9 Constantes d'élasticité [3]

### 3.3 Matériau isotrope :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_R$$

2 constantes d'élasticité (coefficients de Lamé ou E. [3]

### 3.4 Matériau élastique homogène isotrope:

Toutes les directions sont équivalentes, de telle sorte que la loi de comportement est invariante dans toute rotation de la configuration de référence. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux: acier, béton, ... Si la configuration est libre de contraintes, alors la loi de comportement s'écrit: [10]

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

On définit les symboles de Kronecker par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les coefficients matériels  $\lambda$  et  $\mu$ , qui dépendent de la particule considérée, sont appelés les **coefficients de Lamé**. Leur expression en fonction du **module d'Young E** et du **coefficient de Poisson  $\nu$** , est :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

ou :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad [10]$$

### 3.5 Matériau élastique homogène orthotrope:

Le matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. La loi de comportement est invariante par les symétries par rapport aux plans orthogonaux construits à partir de ces directions. Dans ces matériaux, on peut classer les tôles laminées, les composites tissés, le bois, certains bétons structurés, ... [10]

Dans ce cas on montre que la matrice de comportement est définie par 9 paramètres indépendants. Dans le repère principal d'orthotrope, la loi se met sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

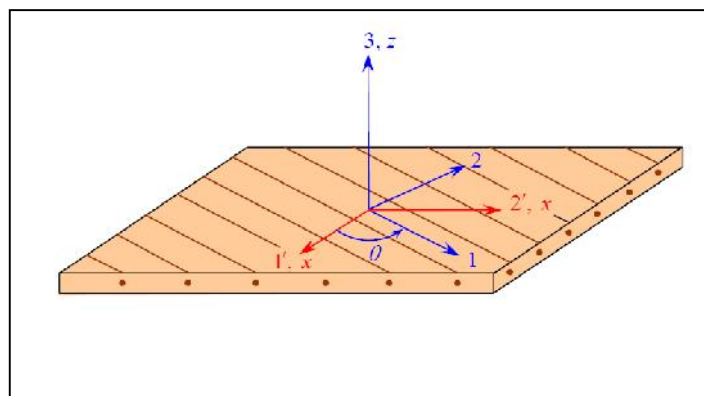
Avec les conditions de symétrie [10]:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

- Les constituantes de rigidité réduites en fonction des modules d'élasticité dans les axes principaux : [4]

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{TL}^2}, \quad Q_{22} = \frac{E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{1-\frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1-\nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT}Q_{22}, \quad Q_{66} = G_{LT}$$



**Figure 6:** axes principaux (1, 2,3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1',2',3)=(x,y,z) du stratifié [4]

$$Q_{11}' = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$Q_{12}' = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

$$Q_{16}' = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$

$$Q_{22}' = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta$$

$$Q_{26}' = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$

$$Q_{66}' = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

**Références bibliographies**

- [1] : F. LAURIN, introduction générale sur les matériaux composites, onera.
- [2] : S. SAHRI, étude du comportement mécanique d'un matériau composite thermoplastique (pp) /verre : effet de différents milieux, thèse, tizi-ouzou, 2012.
- [3] : J. MOLIMARD, Mécanique des Matériaux composites, Version 2, EMSE 2004.
- [4] : J.M. BERTHELOT, Matériaux Composites, Comportement mécanique et analyse des structures, 3<sup>ème</sup> édition, tec&doc, paris, 1999.
- [5] : A. LAMURE, adhésion et adhérence des matériaux.
- [6] : R. FILIPPI, Le panneau sandwich structurel, Ecole des Mines de Douai.
- [7] : M. SOLA, caractérisation de matériaux composites à structure sandwich comportant des modifications, thèse, 2011.
- [8] : A. LACHGUER, M. AKYOUN, les matériaux sandwich et les risques d'instabilités géométriques locales, école des mines de Douai, 2012.
- [9] : M. CHATAIN, Matériaux composites : présentation générale.
- [10] : G. FREDERIC– B. STEPHANE, Mécanique des Milieux Continus, 2011.
- [11] : Résistance des Matériaux, IUT Mesures Physiques, Université de Caen Basse-Normandie, Laboratoire, 2012.
- [12] : caractéristique et choc des matériaux,  
[mediamef.utt.fr/...2/.../Caracteristiques\\_materiaux.pdf](http://mediamef.utt.fr/...2/.../Caracteristiques_materiaux.pdf)
- [13] : Structure sandwich, technique .ingénieur. fr

# **Influence des caractéristiques mécaniques sur les comportements mécanique des structures sandwich :**

## **Résumé:**

L'utilisation des structures sandwich en matériaux composites dans les domaines industriels afin de répondre aux besoins des technologies modernes est essentielle et indispensable. Il est donc nécessaire de connaître profondément le comportement mécanique de ces structures, L'objectif principal de cette étude est de comprendre l'influence des propriétés mécaniques des peaux et âme sur le comportement mécanique des structures sandwich. On a utilisé l'approche par couche en utilisant la théorie de premier ordre avec cisaillement transverse.

**Mots clés :** structure sandwich, structure tri-couche, théorie de premier ordre avec cisaillement transverse, l'approche par couche, matériaux composites

## **Influence of the mechanical characteristics on the mechanical behavior of a sandwich structure**

### **Abstract:**

The using of the composite sandwich structures in the industrial fields to resound the technological needs is essential and indispensable, so it is necessary to understand profoundly the mechanical behavior of these structures, the principal aim of this study is to understand the influence of the mechanical proprieties of the skin and core on the mechanical behavior of a sandwich structure using the first order shear deformation theory in a layer-wise approach

**Key words:** sandwich structure, three-layered structure, first order shear deformation theory, layer-wise approach, composite materials

تأثير الميكانيكية التصرف الميكانيكي للبنية ساندوي

:

استعمال التركيبات ساندويتش المصنوعة من المواد المركبة في المجالات الصناعية لتلبية حاجيات التكنولوجيا الحديثة هو شيء أساسي ولا مفر منه لذلك من الضروري الفهم المعمق لتصرف هذه المركبات. الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو فهم تأثير الخصائص الميكانيكية للغشاء و اللب على التصرف الميكانيكي لتركيبه الساندويتش. الموضوعي مستخدمين النظرية من الدرجة الأولى اخذين بعين الاعتبار القص الجانبي.

**كلمات مفتاحية:** بنية ساندويتش بنية ثلاثية- النظرية من الدرجة الأولى التقريب