

UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Sciences et de la Technologie et des Sciences de la

Matière

Département des Mathématiques et Informatique



Mémoire

MASTER ACADEMIQUE /Professionnel

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Spécialité : Analyse

Présenté par : Mazari Houda

Thème

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE EN DIMENSION 1 PAR LA METHODE DE DECOMPOSITION DE DOMAINE

Soutenu publiquement Le :

/ .. / 2013

Devant le jury :

Mr ACILA Mustafa	MCB	Président	Université Kasdi-Merbah Ouargla
Mr GUERFI Amara	MCA	Examineur	Université Kasdi-Merbah Ouargla
Mr SAID Mohamed Said	MCA	Encadreur	Université Kasdi-Merbah Ouargla

Année Universitaire : 2012/2013

REMERCIEMENTS

Au premier temps, je tene à remercier notre dieu, notre créateur, qui j'ai donnée la force pour réaliser ce travail.

Je remercier M^R Said Mohamed Said qui s'est fatigué surtout que le sujet est nouveau (au moins dans notre université) à je guider à réaliser ce travail, il était plus qu'un encadreur.

Que nos vifs remerciements aillent aux professeurs de ma département de Mathématiques et d'informatique, surtout les professeurs qui ont participés à ma formation nous leur sommes particulièrement reconnaissantes pour leurs conseils et leurs encouragements.

je ne saurions jamais oublié tous les étudiants de 2^{ème} année Master Mathématiques.

Enfin je remercie nos familles qui je porté soutien moral.

Table des matières

Notation	01
Introduction.....	02

CHAPITRE I *Généralité et rappels*

1.1 Méthode de décomposition de domaine :	
Généralité et historique.....	03
1.1.1 Principes généraux.....	03
1.1.2 Historique des méthode de décomposition de domaine.....	04
1.1.3 Motivation d'utilisation des méthode de décomposition de domaine.....	04
1.2 Utilisation des méthode de décomposition de domaine.....	05
1.2.1 Méthode avec recouvrement.....	06
1.2.2 Méthode de Schwarz	06
1.2.2.1 Méthode de Schwarz alternée	08
1.2.2.2 Méthode alternée générale.....	09
1.2.2.3 Méthode de Schwarz parallèle.....	11
1.2.2.4 Comparaison entre Schwarz alternée et Schwarz parallèle.....	13
1.2.3 Méthode sans recouvrement	15
1.2.3.1 Méthode de Schur primal.....	16
1.2.3.2 Méthode de Schur dual.....	18

CHAPITRE II *Résolution de l'équation de Laplace*

PREMIERE PARTIE : L'équation de Laplace en dimension 1

2.1 L'équation de Laplace.....	21
2.2 Les solutions classiques de l'équation de Laplace.....	23

Deuxième partie : Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de décomposition de domaine

3. Méthode de décomposition de domaine-cas continu.....	27
---	----

3.1 Reformulation avec des conditions de Dirichlet	28
3.1.1 Algorithme parallèle de résolution du problème P'(Algorithme de Schwarz)..	30
3.1.2 Etude de la convergence	31
3.2 Reformulation avec condition de Robin.....	33
3.2.1 Algorithme parallèle de résolution du problème P'(Algorithme de Schwarz) ...	35
3.2.1 Etude de la convergence.....	36
CHAPITRE III <i>Aspect numérique</i>	
4. Position du problème.....	33
4.1 Méthode de différences finies	33
4.1.1 Principe de la méthode de différences finies.....	39
4.1.2 La convergence de la méthode de différences finie.....	41
ANNEXE	42

Table des figures

1.1	Exemples des géométries.....	05
1.2	Décomposition avec recouvrement.....	07
1.3	Deux exemples à trois sous-domaines.....	10
1.4	Représentation graphique de la convergence de la méthode de Schwarz.....	14
1.5	Importance du recouvrement pour la méthode de Schwarz.....	14
1.6	Décomposition sans recouvrement.....	15
3.1	Quelque itérations de (5.11) et (5.12) (MPS) pour différents choix de L	33
4.1	Maillage différentielles finies en 1D.....	38

Listes des tableaux

1.1	Comparaison entre les méthodes de Schur primal et dual.....	20
------------	---	----

NOTATION

- p.p. : presque partout.
- t.q : telle que.
- EDP : Une équation aux dérivées partielles.
- MAS : La méthode alternée de Schwarz.
- MPS : La méthode parallèle de Schwarz.
- ∇u : $\overrightarrow{grad} u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.
- $D^\alpha u$: $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Δu : Laplacien de $u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- $\frac{\partial u}{\partial n}$: la dérivée normale extérieure.
- ∂_x : $\frac{\partial}{\partial x}$, la dérivée partielle par rapport à x .
- Resp : respectivement.
- $\Omega \in \mathbb{R}^n$: ouvert.
- $\partial\Omega$: La frontière de Ω .
- Ω_i : Un sous-domaine de $\Omega (i \in \mathbb{N})$.
- $\partial\Omega_i$: La frontière de $\Omega_i (i \in \mathbb{N})$.
- $L^p(\Omega)$: $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}, 1 \leq p < \infty$.
- $L^\infty(\Omega)$: $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$.
- $C^k(\Omega)$: fonction k fois continument différentiables sur Ω , (k entier ≥ 0).
- $C^k(\bar{\Omega})$: fonction k fois continument différentiables sur $\bar{\Omega}$.

Introduction générale

Notre projet offre l'application de la méthode de décomposition de domaine pour résoudre l'équation de Laplace en dimension 1. Le plan détaillé du mémoire est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous exposons quelques généralités sur les méthodes de décomposition de domaine, leur historique, les motivations de leur développement, et nous étudions la méthode avec recouvrement représentée dans la méthode de Schwarz alternée et parallèle et la méthode sans recouvrement représentée dans la méthode de Schur primal et dual.

Comme notre but est d'appliquer ces méthodes à la résolution de l'équation de Laplace en dimension 1, le deuxième chapitre se compose de deux parties :

-la première partie comprend la notion du Laplacien et son application de l'équation de Laplace en ajoutant certaines conditions aux limites.

-Dans la deuxième partie, nous utilisons la méthode de Schwarz parallèle pour résoudre l'équation de Laplace, en ajoutant des conditions de raccord du type Dirichlet, et du type Robin avec l'étude de la convergence.

L'objectif du troisième chapitre, est de trouver une approximation de la solution de l'équation de Laplace en tout point du domaine, pour ça on utilise la méthode des différences finies.

On termine ce travail par une annexe qui comprend des rappels de quelques définitions des espaces fonctionnels et certains des concepts.

CHAPITRE I

Généralité et rappels

Nous exposons ici les principes et généralités relatifs à la méthode de décomposition de domaine, la méthode permet de diviser le domaine de résolution des EDP en sous-domaines avec recouvrement représenté dans la méthode de Schwarz alternée et parallèle avec une comparaison entre les deux, ou sans recouvrement représenté dans la méthode de Schur primal et dual.

1.1 Méthode de décomposition de domaine

Généralité et historique

1.1.1 Principes généraux

Les calculateurs parallèles ont connu une grande évolution en puissance et en capacité de stockage au cours des dernières décennies. Les simulations de problèmes physiques de l'ordre de la dizaine de millions de degrés de liberté sont désormais chose courante et la vitesse d'exécution des codes scientifiques s'exprime aujourd'hui en centaines de Mégaflops (millions d'opérations flottantes par seconde) ou même en Teraflops ($1\text{Mflop} = 10^6 \text{ flop}$, $1\text{Tflop} = 10^{12} \text{ flop}$). Développer des algorithmes bien adaptés à de telles architectures parallèles est donc devenu un nouveau champ de recherche. Les méthodes de décomposition de domaines ont une implication évidente dans le développement de tels algorithmes. Elles fournissent de bons schémas faciles à implémenter sur les machines parallèles et ont une base mathématique très riche.

Par ailleurs, il faut noter que l'expression "*décomposition de domaine*" possède différentes significations dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

En calcul parallèle, la décomposition de domaine se réfère aux techniques pour décomposer les domaines et cela peut ne pas dépendre des méthodes numériques utilisées. Dans ce cas, le but est de créer des méthodes moins coûteuses que les méthodes directes et plus robustes que les méthodes itératives.

En analyse asymptotique, décomposer le domaine veut dire diviser le domaine physique en des domaines modélisés par des équations aux dérivées partielles différentes en y ajoutant des conditions bien appropriées sur les interfaces entre les sous-domaines.

1.1.2 Historique des méthodes de décomposition de domaine

La première méthode de décomposition de domaine a été développée à la fin du 19^{ème} siècle par le mathématicien H.A Schwarz dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée est d'étudier le problème dans le cas où Ω est la réunion de domaines simples par exemple : l'union d'un rectangle et d'un disque.

Les méthodes de Schwarz nécessite un recouvrement entre les sous-domaines. La convergence a été étudiée par H.A.Schwarz puis par P. L. Lion [5]. L'inconvénient de ce type de découpage est la complexité sa mise en œuvre numérique surtout dans le cas de problème 3-D, en outre il est difficile de définir les zones de recouvrement pour des géométries très complexes. De plus, la convergence de la méthode est très lent.

Vu la complexité de la première méthode, une autre méthode a été introduite: la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement des sous domaines. Dans ce cas, on doit choisir des opérateurs d'interface spécifiques pour que la méthode converge.

1.1.3 Motivation de l'utilisation des méthode de décomposition de domaine

L'objectif principal des méthodes de décomposition de domaine est de trouver des solutions aux problèmes issus des équations aux dérivées partielles définis sur des domaines à géométries compliquées ou de grande tailles. En effet, la résolution directe du problème dans le domaine global engendre des systèmes linéaires de grandes tailles difficiles à résoudre par des solveurs directs ou méthode itératives classique, d'autant plus que de tels systèmes sont souvent mal conditionnés, d'où l'utilité des méthode de décomposition de domaine. Elles permettent de décomposer le problème initial en des sous-problèmes de petite taille définis sur des domaines à géométries plus simples. En outre, les méthodes de décomposition de domaine ont récemment eu un grand intérêt du point de vue théorique et numérique car elle fournissent des algorithmes bien adaptés aux ordinateurs parallèles, elles peuvent s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries complexes, elle facilitent l'utilisation des schémas numériques

(élément finis, différences finis,...) pour chaque sous-problème et peuvent être combinées avec d'autres méthodes telles que le raffinement local du maillage.

Les méthodes de décomposition de domaine consistent à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles en sous-domaines. On peut alors traiter des problèmes de grande taille pour lesquels aucun ordinateur n'aurait suffisamment de place mémoire. On reformule le problème en un problème équivalent dont les inconnues sont des fonctions définies sur les interfaces des sous-domaines. La résolution du problème d'interface par des méthodes itératives s'effectue par des résolutions successives du problème dans chaque sous-domaine de façon indépendante: chaque sous-domaine est attribué à un processeur qui résout son problème d'interface, il est nécessaire de choisir des bonnes conditions de raccord sur les interfaces des sous-domaines pour avoir une vitesse de convergence optimale.

1.2 Utilisation de la méthode de décomposition de domaine

Généralement on utilise une méthode de décomposition de domaine lorsque le problème physique nécessite une résolution (élément finis, différences finies, etc.) dans un espace discret de très grande dimension. Lorsque le problème méritant un traitement particulier (coin, fissure, matériaux différents, etc.).

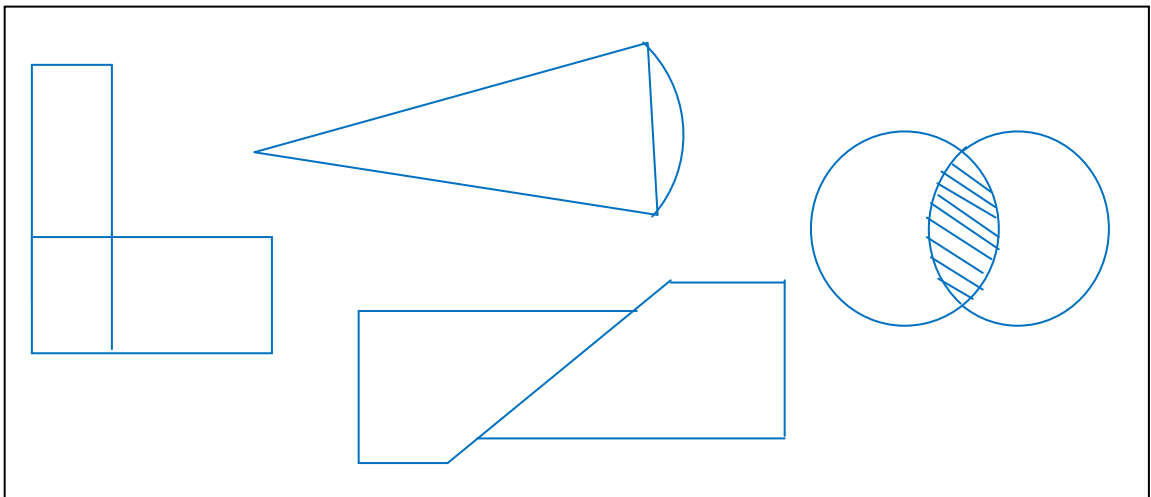


Figure 1.1 Exemples des géométries de quelques domaines.

Les méthodes de décomposition de domaine sont également intéressantes pour les problèmes numériques impliquant un couplage de modèles sur des domaines naturellement

disjoints car, dans ce cas, les équations à résoudre diffèrent d'un domaine à l'autre. L'algorithmique des méthodes de décomposition de domaine suit le principe classique "Diviser pour régner"¹. Cela conduit à une parallélisation très naturelle, particulièrement adaptée à des architectures parallèles à mémoire distribuée.

Pour utiliser une méthode de décomposition de domaine, il faut commencer par construire une partition du domaine (avec ou sans recouvrement), en tenant compte de critères mathématiques, qui ont une influence sur la convergence des méthodes, et de critères informatiques pertinents pour la parallélisation.

Ces critères conduisent en général à des sous-domaines relativement compacts, ce qui est numériquement favorable à l'efficacité des méthodes de décomposition de domaine, le prochain paragraphe présente des méthodes avec recouvrement (Schwarz alternée et Schwarz parallèle) et des méthodes sans recouvrement (Schur primal et Schur dual).

1.2.1 Méthode avec recouvrement

Ces méthodes ont été originellement proposées par Schwarz en 1870 pour démontrer l'existence de solution à des problèmes elliptiques sur des domaines complexes.

Le domaine global est divisé en régions avec recouvrement, et les problèmes sont résolus sur chaque sous-domaine. Le couplage entre les solutions des différents sous-domaines est assuré par la région commune dite le recouvrement. Dans ce document, nous nous limiterons à la méthode de Schwarz dont nous présentons deux variantes : la méthode alternée et la méthode parallèle.

1.2.2 Méthode de Schwarz

Beaucoup de problèmes d'ingénierie peuvent être formulés comme des problèmes aux limites sur des géométries complexes. Dans leur forme originale ces problèmes sont coûteux ou difficiles à résoudre et ne sont pas particulièrement adaptés au problème.

¹ est une méthode algorithmique classique, qui consiste à diviser le problème initial en un certain nombre de problèmes plus petits et à se servir de la solution de ces problèmes de taille réduite pour obtenir la solution au problème de départ.

Schwarz (1869) à été le premier à introduire un schéma de décomposition de domaine applicable à la résolution de problèmes d'EDP.

Dans cette méthode, on décompose le domaine ouvert, borné et connexe Ω en K sous-domaines ouverts $\Omega_k (k = 1, \dots, K)$ tel que :

$$\Omega = \bigcup_{k=1, \dots, K} \Omega_k.$$

Pour illustrer nos propos, nous considérons, par la suite, une décomposition du domaine principal en deux sous-domaines se recouvrant. Un exemple est proposé dans la figure 1.1. Soit $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω , et on distingue les parties γ_k^l de frontière de Ω_k

($k=1, \dots, K$) incluses dans les sous-domaines $\Omega_l (l = 1, \dots, K, l \neq k)$ des parties $\Gamma_k \subset \Gamma$, i.e. :

$$\begin{cases} \gamma_k^l = \partial\Omega_k \cap \Omega_l, \quad \forall l = 1, \dots, K, l \neq k, \\ \Gamma_k = \partial\Omega_k \cap \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

La méthode de Schwarz est une méthode itérative qui consiste à résoudre les problèmes d'EDP de façon alternée sur chaque sous-domaine, à chaque itération, des valeurs calculées sur Ω_l sont utilisées comme conditions aux limites imposées sur les parties de frontière γ_k^l sur Ω_k . Lors de l'itération suivante. L'itéré choisi pour mettre à jour les conditions aux limites détermine les variantes de cette méthode.

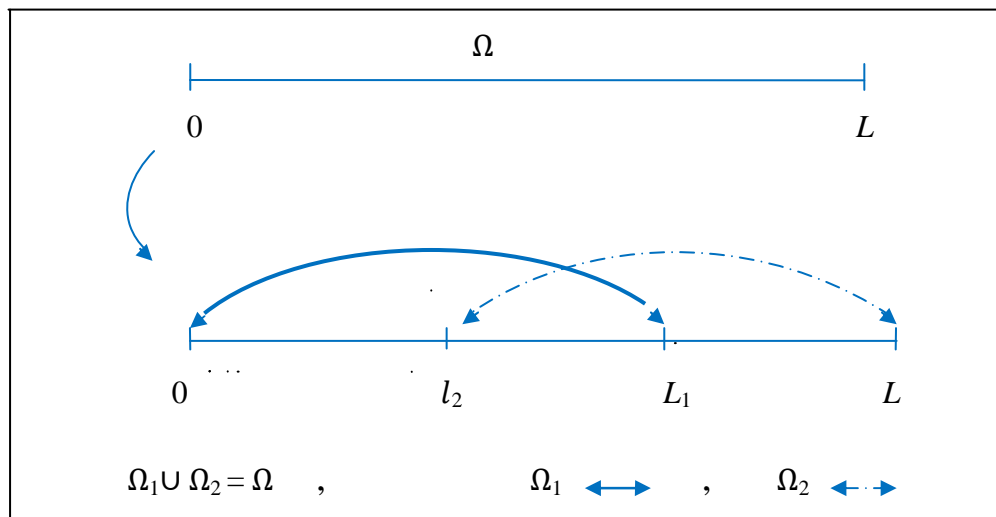


Figure 1.2 Décomposition avec recouvrement.

La création de la méthode originale de Schwarz provient de fonctionnelle, plus précisément de l'étude du théorème suivant.

Théorème 1.1 (Principe de Dirichlet) Soit u , une fonction solution du système

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^n et u, f sont des fonctions scalaire.

Alors, u minimise l'intégrale de Dirichlet :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Remarque 1.2 Pour une décomposition en deux sous-domaines, on rappelle l'algorithme de Schwarz.

1.2.2.1 Méthode de Schwarz alternée

L'idée de Schwarz étant de valider le principe de Dirichlet dans des régions composées de domaines simples (intervalle, rectangle, cercles, etc.) sur lesquels le théorème 1.1 est vérifié.

Prenons ce domaine comme étant Ω . Notons par $\Gamma = \partial\Omega$ frontière du domaine Ω . On remarque que le domaine Ω est séparé en deux sous-domaines (Ω_1, Ω_2) , avec une partie commune appelée recouvrement. On définit aussi les interfaces entre les sous-domaines par $\gamma_1^2 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ et $\gamma_2^1 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$.

Notons par u_1 et u_2 les restrictions de la fonction u dans Ω_1 et Ω_2 respectivement.

Sous ces conditions, la méthode s'écrit comme suit.

Pour initialiser la résolution on se donne u^0 dans tout le domaine et on construit les restrictions u_1^0 de u^0 dans Ω_1 et u_2^0 de u^0 dans Ω_2 . La méthode itérative consiste alors à calculer les $n^{\text{èmes}}$ itérés (u_1^n, u_2^n) .

Ceci étant dit, on résout itérativement sur $n = 1, 2, 3, \dots$. Les problèmes suivants :

Pour un n donné, on résout

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = g_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \gamma_1^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où f_1 est la restriction de f dans Ω_1 et g_1 est la restriction de g dans Γ_1 . Ceci nous permet d'obtenir u_1^{n+1} .

Ensuite, avec la solution obtenue, on résout le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = g_2 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} & \text{sur } \gamma_2^1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Notons que f_2 est la restriction de f dans Ω_2 et g_2 est la restriction de g dans Γ_2 . On obtient cette fois-ci u_2^{n+1} .

1.2.2.2 Méthode alternée générale

La méthode de Schwarz décrite précédemment peut être généralisée à plusieurs sous-domaine et plus particulièrement, à d'autres équations aux dérivées partielles (EDP). Ainsi, supposons que nous voulons résoudre l'EDP

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

Où \mathcal{L} est un opérateur linéaire bien défini sur le domaine Ω .

Pour bien réécrire la méthode de Schwarz alternée à N sous-domaines, où $N \in \mathbb{N}$, il faut d'abord faire attention à la notation utilisée. L'idée principale de l'algorithme est de résoudre le problème précédent sur chaque sous-domaine à tour de rôle en posant une condition aux interfaces de celui-ci tout en mettant la solution à jour à chaque résolution. Il faut donc faire attention de bien prendre l'information la plus récente à chaque itération. La difficulté réside dans le fait qu'il peut y avoir plus de deux sous-domaine qui s'intersectés, au même endroit. Le deuxième domaine (celui de droite) de la figure 1.3 donne un exemple d'une telle situation.

Pour régler ce problème, nous allons introduire une notation astucieuse proposée dans[8].

Pour un domaine Ω partitionné en N sous-domaine Ω_k , où $k= 1, 2, \dots, N$ et pour $l = 1, 2, \dots, N, l \neq k$, on définit

$$\gamma_{k,i}^l = \partial\Omega_k \cap (\Omega_i \setminus \cup_{l \in M_{k,i}} \Omega_l) \tag{1.6}$$

$$M_{k,i} \begin{cases} \{1, \dots, k-1, i+1, \dots, N\} & \text{si } k > i, \\ \{i+1, \dots, k-1\} & \text{si } k < i. \end{cases}$$

La figure 1.3 illustre deux exemples de nomenclature des interfaces en utilisant (1.6). Dans le premier domaine (celui de gauche), il n’y aurait évidemment pas eu d’ambiguïté dans le choix de l’interface. Toutefois, la définition de $\gamma_{k,i}^l$ reste cohérente dans ce cas.

Pour le deuxième domaine (celui de droit), en faisant la résolution sur les domaines Ω_1, Ω_2 et Ω_3 respectivement, le choix de l’interface devra être fait avec soin et la nomenclature proposée nous permettra de résoudre efficacement.

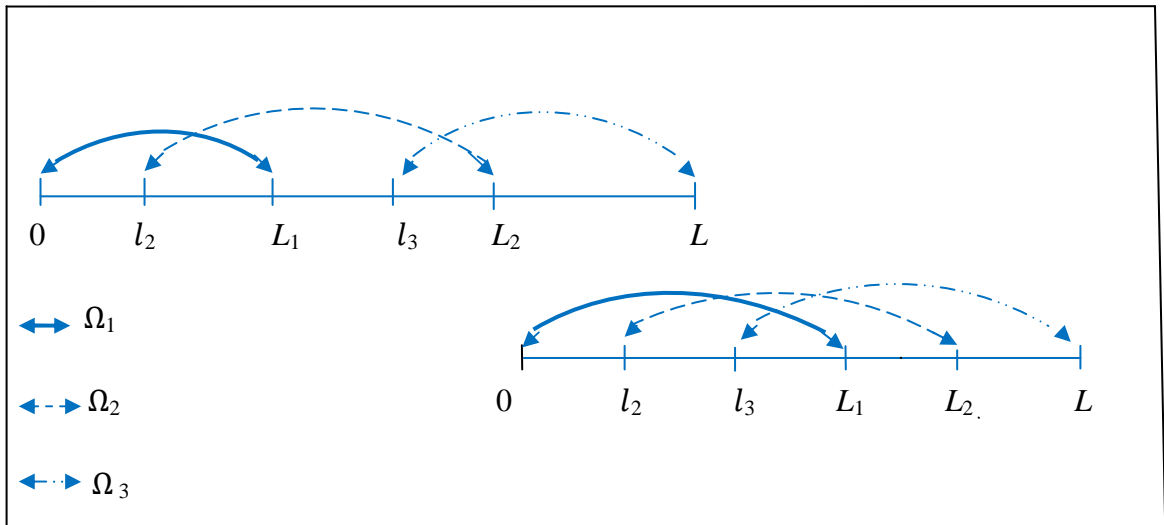


Figure 1.3 Deux exemples à trois sous-domaines.

Nous que nous allons effectuer les itérations sur chaque sous-domaine dans l’ordre prédéfini par la numérotation des sous-domaine, c’est-à-dire sur Ω_1, Ω_2 et ainsi de suite jusqu’à Ω_N . Ainsi, la définition de $\gamma_{k,i}^l$ donnée dans (1.6) représente bien la partie de l’interfacede Ω_k dans Ω_l dans laquelle on redonne les valeurs plus à jour dans l’algorithme. Maintenant, nous sommes en mesure de donner une version généralisée de la méthode alternée de Schwarz.

- **Algorithme 1.2 (Méthode alternée de Schwarz (MAS))**

Soit un domaine Ω subdivisé en N sous-domaines Ω_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Soit E_k , l'ensemble des indices l tel que $\Omega_k \cap \Omega_l \neq \emptyset$. Soit $\mathbf{1}_{l,k}$, une fonction qui vaut 1 si $k > l$ et 0 sinon.

Etant donné une solution de départ u^0 avec u_k^0 représentant la partie de cette solution dans Ω_k , on résout le système suivant pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Pour k allant de 1 à N , on résout, pour $l \in E_k$

$$\begin{cases} \mathcal{L} u_k^{n+1} = f_k & \text{dans } \Omega_k, \\ u_k^{n+1} = u_1^{n+1_{kl}} & \text{sur } \gamma_{k,i}^l, \\ u_k^{n+1} = g_k & \text{sur } \partial\Omega_k \setminus \cup_{l \in E_k} \gamma_{k,i}^l. \end{cases} \quad (1.7)$$

Notons finalement que la MAS peut s'appliquer aussi à la résolution des problèmes avec des conditions aux limites de Neumann, de Robin ou bien un mélange de conditions de Dirichlet, Neumann et Robin. On peut facilement réécrire l'algorithme 1.2 en conséquence. De plus, il est important de noter que l'étude de la convergence de la MAS dépend énormément de l'EDP à résoudre, plus particulièrement de l'opérateur \mathcal{L} et des conditions aux limites

1.2.2.3 Méthode parallèle

Plusieurs décennies plus tard, Pierre Louis Lions s'est intéressé aux méthodes élaborées par Schwarz. En plus de peaufiner les preuves existantes de la MAS, il fut le premier à proposer une extension moderne de cette méthode. Depuis plusieurs années, le calcul en parallèle est de plus en plus en vogue et Lions réalisa le potentiel que les méthodes par sous-domaines pourraient avoir avec cet outil.

Ainsi, il proposa une version *parallèle* de l'algorithme 1.2 qui pourrait être utilisée efficacement sur une grappe de serveurs. À titre d'exemple, nous allons résoudre le problème classique de Schwarz (1.2) à deux sous-domaines, comme présenté précédemment. La nouvelle version s'apparente beaucoup aux itérés (1.3) et (1.4) et s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^{n+1} = g_1 & \text{sur } \Gamma_1, \\ u_1^{n+1} = u_2^n & \text{sur } \gamma_1^2, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = g_2 & \text{sur } \Gamma_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n & \text{sur } \gamma_2^1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le seul changement réside dans (1.6) où la valeur à l'interface des deux sous-domaines n'est pas été mise à jour. Cette modification affecte évidemment la convergence de la méthode, mais l'algorithme est maintenant parallèle puisque, pour deux solutions de départ u_1^0 et u_2^0 , il est possible de calculer simultanément les solutions sur chaque sous-domaine.

Évidemment, cet avantage sera particulièrement intéressant pour la résolution d'un problème de grande envergure découpé en plusieurs petits sous-domaines. En s'inspirant de l'algorithme 1.2. On peut rédiger la méthode parallèle de Schwarz à plusieurs sous- domaines comme suit.

- **Algorithme 1.3 (méthode parallèle de Schwarz (MPS))**

Soit un domaine Ω subdivisé en N sous-domaines Ω_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Soit E_k , l'ensemble des indices l tel que $\Omega_k \cap \Omega_l \neq \emptyset$.

Étant donné une solution de départ u^0 avec u_i^0 représentant la partie de cette solution dans Ω_k , on résout le système suivant pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Pour k allant de 1 à N , on résout, pour $l \in E_k$,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_k^{n+1} = f_k & \text{dans } \Omega_k \\ u_k^{n+1} = u_l^n & \text{sur } \gamma_{k,i}^l, \\ u_k^{n+1} = g_k & \text{sur } \partial\Omega_k \setminus \bigcup_{l \in E_k} \gamma_{k,i}^l. \end{cases} \quad (1.10)$$

Il y a cependant un détail important auquel il faut faire attention dans le cas où $N \geq 3$. La convergence n'est pas assurée cette fois-ci lorsqu'une partie du recouvrement à l'intérieur de Ω est constituée de plus de deux sous- domaines. D'un point de vue algorithmique, il faut aussi décider comment imposer la condition aux limites dans de tels recouvrements.

Une solution nécessaire et suffisante serait d'imposer que, pour tous les points à l'interface d'un sous-domaine, il n'existe qu'un seul sous-domaine voisin dans lequel on peut prendre l'information. Par contre, cette solution est contraignante et très rare en pratique. De plus, la présence d'un recouvrement entre les sous-domaines est encore nécessaire pour avoir une chance de converger. Ceci limite encore le choix des partitions que nous pouvons considérer. Par contre, la définition (1.6) de l'interface $\gamma_{k,i}^l$ utilisée dans l'algorithme 1.3 nous assure de prendre l'information la plus récente dans un seul des sous-domaines traités. Ainsi, la MPS est bien définie, mais on peut encore s'interroger sur sa convergence. On verra plus loin que cette méthode ne servira pas à résoudre directement le problème, mais plutôt à s'approcher de la solution voulue (on utilise la méthode sous la forme d'un préconditionneur).

1.2.2.4 Comparaison entre Schwarz alternée et Schwarz parallèle

Les méthodes de Schwarz alternée et parallèle diffèrent en termes de vitesse de convergence. Pour examiner le comportement de convergence de ces méthodes, nous allons considérer la résolution du problème modèle dans un domaine unidimensionnel avec condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Dont la solution triviale est $u=0$.

La figure 1.4 illustre graphiquement la convergence des deux méthodes vers la solution exacte du problème. On vérifie que la méthode parallèle converge plus lentement que la méthode alternée. Selon [7], en pratique, pour des nombreux cas de décomposition en deux sous-domaine, la méthode de Schwarz parallèle exige le double du nombre d'itérations pour la convergence que la méthode de Schwarz alternée.

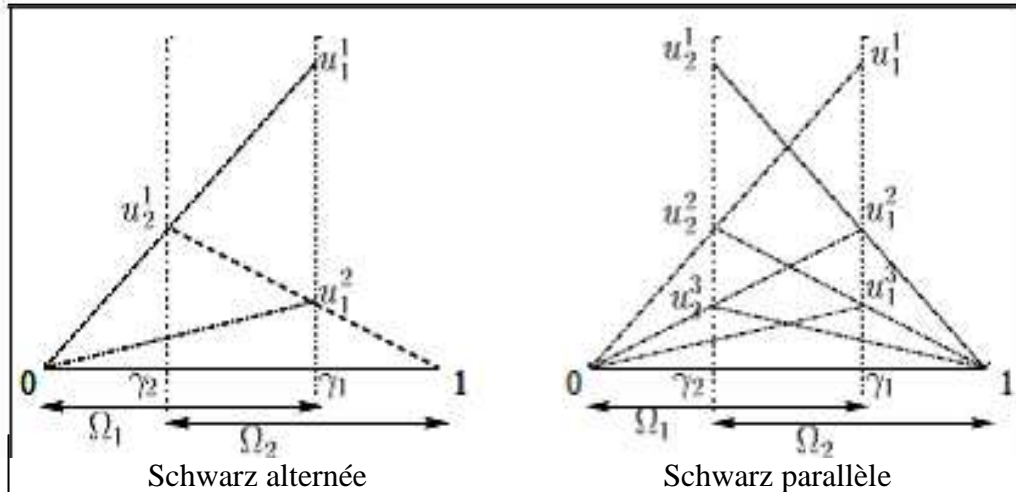


Figure 1.4 Représentation graphique de la convergence de la méthode de Schwarz.

La vitesse de convergence de ces méthodes est aussi fortement influencée par la taille du recouvrement. On vérifie, à l'aide des représentations graphiques de la figure 1.5, que la méthode converge plus vite lorsque le recouvrement est grand. Le recouvrement implique une redondance de calculs car les degrés de liberté sont associés à plusieurs sous-domaines.

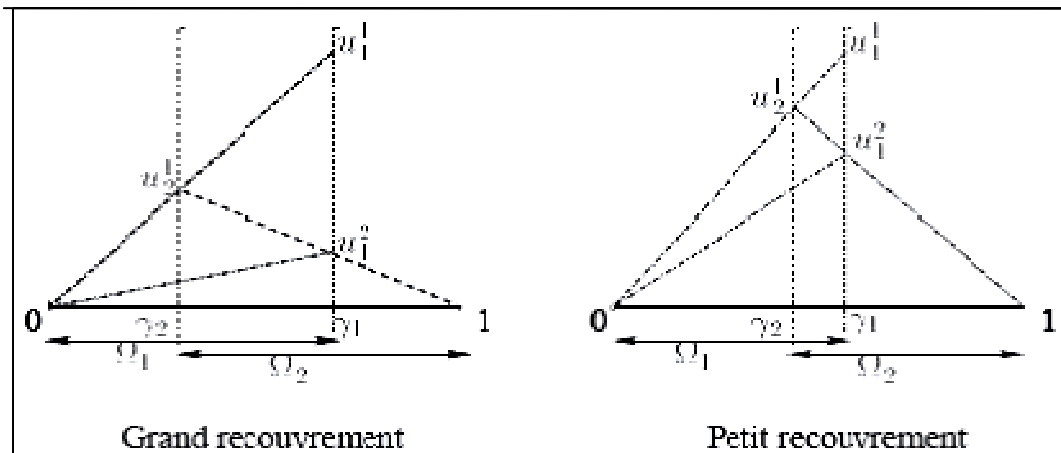


Figure 1.5 Importance du recouvrement pour la méthode de Schwarz.

1.2.3 Méthodes sans recouvrement

Ces méthodes ont été développées au cours de années 70 par des mécaniciens souhaitant effectuer des calculs sur des grandes structures les ressources de calcul disponibles étant généralement insuffisantes, les scientifiques ont eu l'idée d'effectuer des calculs par sous-structures pour tenir compte des performances des calculateurs de l'époque.

Dans une méthode sans recouvrement, on décompose Ω en K sous-domaines $\Omega_k (k=1, \dots, K)$ tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1, \dots, K} \bar{\Omega}_k$, et $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset (l = 1, \dots, K, l \neq k)$.

Lorsqu'elle existe, l'interface γ_{kl} entre les sous-domaines Ω_k et $\Omega_l (l \neq k)$ est définie par :

$$\begin{cases} \gamma_{kl} = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l, \forall l = 1, \dots, K, l \neq k, \\ \Gamma_k = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette approche implique que les nœuds des interfaces γ_{kl} soient connus aux sous-domaines Ω_k et Ω_l . Cependant, ce découpage est qualifié de non recouvrant car les intérieurs des différents sous-domaines sont totalement disjoints.

Un exemple de décomposition à deux sous-domaines est proposé dans la figure 1.6. Il nous sert de référence pour expliquer les méthodes.

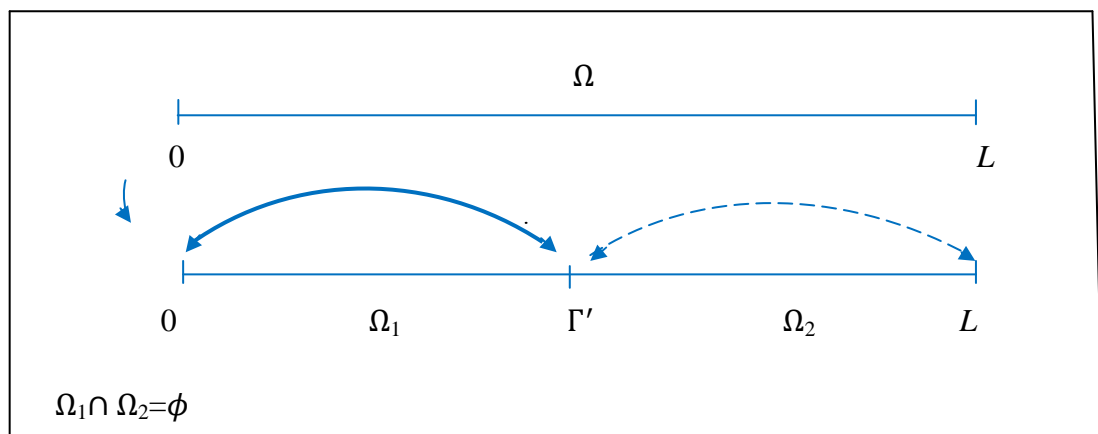


Figure 1.6 Décomposition sans recouvrement.

Toutes les méthodes sans recouvrement mènent à la construction d'un **système d'interface**. Une fois ce système identifié, les méthodes directes ou itératives classiques peuvent être

utilisées pour le résoudre. Dans ce paragraphe nous présentons deux méthodes sans recouvrement : la méthode du complément de Schur primal, la méthode de Schur dual et la méthode des joints. Pour plus de détails à propos de ces méthodes, nous renvoyons à [6] et à [7].

1.2.3.1 Méthode du complément de Schur ou Schur primal

Soit le domaine Ω est coupé en deux sous- domaines Ω_1 et Ω_2 par la frontière Γ' (figure1.6). Soit un système algébrique $AU = F$ se décomposant sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

avec $U_1 \in \Omega_1$, $U_2 \in \Omega_2$ et $U_3 \in \Gamma'$.

Dans la décomposition en blocs (1.11) on distingue :

- A_{11} (resp. A_{22}, A_{33}) est une matrice qui représente correspond à la relation entre les inconnues dans Ω_1 (resp. Ω_2, Γ').

-Le bloc A_{13} (resp. A_{23}) correspond à la relation entre Ω_1 (resp. Ω_2) et Γ' .

L'écriture (1.11) met en évidence l'absence de couplage direct entre les variables situées dans des sous-domaines différents : il n'est pas nécessaire d'assembler le système complet. Dans la résolution, on utilise alors les matrices de rigidité locales suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Dans l'écriture (1.12), la matrice $A_{33}^{(1)}$ (respectivement $A_{33}^{(2)}$) représente les interactions entre les nœuds de l'interface calculées à partir des éléments finis correspondant au domaine Ω_1 (respectivement Ω_2). Le sous-bloc A_{33} est la somme de ces deux contributions locales ($A_{33} = A_{33}^{(1)} + A_{33}^{(2)}$). Le vecteur F_3 peut être décomposé de la même manière.

En supposant que les matrices A_{kk} ($k = 1, 2$) sont inversibles, le système (1.11)

$$\begin{cases} A_{11}U_1 + A_{13}U_3 = F_1 \\ A_{22}U_2 + A_{23}U_3 = F_2 \\ A_{31}U_1 + A_{32}U_2 + A_{33}U_3 = F_3 \end{cases} \quad (1.13)$$

Pour éliminer la troisième équation, on exprime U_1 et U_2 en fonction de U_3 :

$$\begin{cases} A_{11}U_1 = F_1 - A_{13}U_3 \\ A_{22}U_2 = F_2 - A_{23}U_3 \end{cases} \quad (1.14)$$

Donc par (1.14) on obtient :

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}^{-1}(F_1 - A_{13}U_3) \\ U_2 = A_{22}^{-1}(F_2 - A_{23}U_3) \end{cases} \quad (1.15)$$

On en déduit que U_3 est solution de :

$$(A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} - A_{32}A_{22}^{-1}A_{23})U_3 = F_3 - A_{31}A_{11}^{-1}F_1 - A_{32}A_{22}^{-1}F_2,$$

On posant :

$$S = A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} - A_{32}A_{22}^{-1}A_{23},$$

$$G = F_3 - A_{31}A_{11}^{-1}F_1 - A_{32}A_{22}^{-1}F_2,$$

Et on définit

$$S^{(1)} = A_{33}^{(1)} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13}, \quad S^{(2)} = A_{33}^{(2)} - A_{32}A_{22}^{-1}A_{23}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$SU_3 = G \quad (1.16)$$

La matrice S est appelée **complément de Schur de A** . La résolution de ce sous-système est habituellement faite avec la méthode du Gradient Conjugué, lorsque A est symétrique définie positive.

Le complément de Schur est d'autant plus intéressant qu'il n'est pas nécessaire de le calculer explicitement. En effet, à chaque itération du Gradient Conjugué on multiplie S et un vecteur, disons v :

$$Sv = (A_{33} - A_{13}^T A_{11}^{-1} A_{13} - A_{23}^T A_{22}^{-1} A_{23})v.$$

Le produit $A_{33}v$ est facilement calculable, et pour obtenir $A_{13}^T A_{11}^{-1} A_{13}v$, il suffit de résoudre le système $\rho A_{11} = A_{13}v$, puis calculer $A_{13}^T \rho$. Il en est de même pour $A_{23}^T A_{22}^{-1} A_{23}$. De plus, ces systèmes étant indépendants, leur résolution peut se faire en parallèle.

- **Extension à n sous-domaines**

La méthode de Schur est extensible à n sous-domaines, numérotés de 1 à n . On alors

$$S = A_{n+1,n+1} - \sum_{i=1}^n A_{i,n+1}^T A_{i,i}^{-1} A_{i,n+1} = \sum_{i=1}^n S^{(i)} .$$

Où $A_{i,i}$ représente la relation entre les inconnues dans Ω_i , $A_{n+1,n+1}$ les relations entre les inconnues sur toutes interfaces et $A_{i,n+1}$ la relation entre Ω_i , et les interfaces.

1.2.3.2 Méthode de Schur dual

On distingue les deux méthodes de Schur, primal et dual, par la condition de "continuité" imposée sur les interfaces. Dans la méthode de Schur dual on relaxe la contrainte de continuité en cherchant des solutions telles que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \frac{\partial u_2}{\partial n_2} \quad \text{sur } \gamma_{12} . \quad (1.17)$$

Les dérivées normales sont habituellement calculées au milieu des arêtes, ce qui signifie que deux domaines ne s'échangeront des données que s'ils ont une arête en commun. Deux domaines partageant un unique point ne communiquent pas.

Comme l'indique le nom de la méthode, on utilise une formulation vibrationnelle pour déduire le système algébrique résultant. Dans cette formulation on introduit une variable supplémentaire, un multiplicateur de Lagrange λ , pour prendre en compte la contrainte à l'interface. On écrit alors un problème de minimisation dont la solution est (u_1, u_2, λ) . Sous forme matricielle, la méthode de Schur dual consiste à trouver la solution du système algébrique :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & B_1^T \\ 0 & A_{22} & B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

-Les sous-blocs A_{11} et A_{22} correspondant à la matrice de rigidité associée aux nœuds des sous-domaines locaux Ω_1 et Ω_2 (interface comprise).

-Les sous- blocs B_1 et B_2 correspondant à des matrices booléennes signées permettant de localiser les nœuds de l'interface γ_{12} .

-Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange Λ représentant les forces d'interaction entre les sous-domaines.

En supposant que les matrices $A_{kk}(k = 1, 2)$ sont inversibles, on déduit

de (1.18) les égalités :

$$\begin{cases} A_{11}U_1 = F_1 - B_1^T\Lambda \\ A_{22}U_2 = F_2 - B_2^T\Lambda, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\{B_1 U_1 + B_2 U_2 = 0 \quad (1.20)$$

En remplaçant U_1 et U_2 issus de (1.18) en fonction de Λ dans (1.19), on obtient un système d'interface dont les inconnues sont les multiplicateurs de Lagrange Λ .

$$(B_1 A_{11}^{-1} B_1^T + B_2 A_{22}^{-1} B_2^T) \Lambda = B_1 A_{11}^{-1} F_1 + B_2 A_{22}^{-1} F_2. \quad (1.21)$$

On posant :

$$\begin{cases} S = B_1 A_{11}^{-1} B_1^T + B_2 A_{22}^{-1} B_2^T, \\ G = B_1 A_{11}^{-1} F_1 + B_2 A_{22}^{-1} F_2, \end{cases} \quad (1.22)$$

On obtient alors le système suivant :

$$S\Lambda = G \quad (1.23)$$

La méthode de Schur dual est plus facile à mettre en œuvre que la méthode de Schur primal, car il n'y a pas besoin de numéroter les variables du système de façon à séparer les nœuds internes des nœuds interface. De plus, cette méthode est adaptée au calcul parallèle, car les échanges de données pour le calcul d'interface sont limités aux sous-domaines partageant

une arête. En ce sens, les interfaces entre sous-domaines sont gérées de manière disjointe.

Remarque 1.3 (sur les méthodes sans recouvrement)

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons utilisé les formalismes mathématiques habituels.

Au final, on cherche à résoudre un système linéaire du type :

$$CX = D \tag{1.24}$$

Dans le cas de deux sous-domaine, la matrice C et les vecteurs X et D sont définis comme suit :

CX=D	Schwarz primal	Schwarz dual
$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & B_1^T \\ 0 & A_{22} & B_2^T \\ B_1 & B_2 & A_{33} \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
$S = C_{33} - \sum_{k=1}^2 C_{3k} C_{kk}^{-1} C_{k3}$	$A_{33} - \sum_{k=1}^2 A_{3k} A_{kk}^{-1} A_{k3}$	$\sum_{k=1}^2 B_k A_{kk}^{-1} B_k^T$
$G = D_3 - \sum_{k=1}^2 C_{3k} C_{kk}^{-1} D_k$	$F_3 - \sum_{k=1}^2 A_{3k} A_{kk}^{-1} F_k$	$\sum_{k=1}^2 B_k A_{kk}^{-1}$

Tableau 1.1 comparaison entre les méthode de Schur primal et dual .

Ce formalisme permet d'utiliser les même algorithmes de point fixe ou gradient conjugué pour l'une ou l'autre méthode. Comme nous le verrons ci-dessous, cela reste vrai pour la méthode des joints.

Remarque 1.4 Les matrices A_{11} et A_{22} diffèrent d'une méthode à l'autre.

CHAPITRE II

CHAPITRE II

Résolution de l'équation de Laplace

PREMIERE PARTIE : L'équation de Laplace en dimension 1

Cette première partie comprend la notion de Laplace et son importance puis les solutions classiques de l'équation de Laplace en ajoutant certaines conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Robin, etc.).

2.1 L'équation de Laplace

Par définition une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est une équation faisant intervenir une fonction inconnue de plusieurs variables ainsi que certaines de ses dérivées partielles.

Les EDP évoquées plus haut sont classées en EDP elliptiques/ paraboliques / hyperboliques. Elles ont des propriétés mathématiques différentes, et leur résolution approchée par des techniques numériques requièrent aussi parfois des méthodes distinctes.

Des cas particuliers sont les équations elliptique de Poisson et de Laplace, qui peuvent être vues comme des cas limites lorsque la dépendance en temps est supprimée, ou remplacée par une dépendance harmonique. Leur résolution numérique intervient dans de nombreux domaines scientifiques et industrielles : météorologie, aéronautique, électronique, télécommunications, mathématiques financières, automobile, environnement, etc.

Définition 2.1 L'opérateur Laplacien, ou simplement le Laplacien, est la divergence du gradient. Il est souvent noté Δ que pour une fonction

$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fois différentiables sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^d .

$$\Delta u = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(u)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Soit l'équation $\Delta u = f$ (2.1)

Où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles défini par :

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, appelé Laplacien, et f est une fonction continue donnée.

Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématique. Du côté physique, la solution de l'équation (2.1) est par exemple le potentiel électrique engendré dans le plan par la répartition de charges $= \frac{1}{4\pi} f$.

On le retrouve systématiquement dans les expressions de l'équation de Poisson, de l'équation de la chaleur et d'onde.

Du point de vue mathématique, Le Laplacien apparaît dans de nombreuses disciplines théoriques, comme la géophysique, l'électrostatique, la thermodynamique, la mécanique classique et quantique, est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie.

Les solutions de (2.1) pour $f=0$ qui doivent être des fonctions de classe C^2 sont par exemple appelées harmoniques.

Pour trouver des solutions particulières d'une équation de Laplace, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les contraintes les plus fréquentes sont :

1. Les conditions aux limites : si v est fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ on a trois types de conditions:

-Condition de Dirichlet où v est fixé sur le bord de Ω : $u|_{\partial\Omega} = g$.

- Condition de Neumann où la dérivée normale de u est fixée : $\frac{du}{dn}|_{\partial\Omega} = g$.

-Condition de Robin ou Mixtes : $\alpha(x)u + \beta(x)\frac{du}{dn} = g$ sur $\partial\Omega$.

Si $g = 0$ on a des conditions homogènes au bord .

2. Conditions sur les interfaces : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, et si l'on a déterminé v sur Ω_1 et Ω_2 , alors pour pouvoir définir u sur \otimes on a des conditions sur u , resp. $\frac{du}{dn}$, sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.

- **Problème aux limites** : Se compose à EDP munie de condition aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur le quelle elle est posée, le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données aux bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continument de les donnés. Par exemple Problème de Dirichlet, problème de Neumann et problème de Robin ,etc.

2.2 Les solution classique de l'équation de Laplace

Nous considérons l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) signifie que la dérivée partielle de u par rapport à la première variable est nulle : $\partial_x(\partial_x u) = 0$.

Commençons donc par poser $v(x) = \partial_x u$. On doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\partial_x v(x) = 0.$$

On voit donc que nécessairement $v(x) = b$

Pour une certaine fonction b . On est ramené au problème suivant :

trouver u telle que :

$$\partial_x u(x) = b$$

En raisonnant de la même manière, on voit que nécessairement :

$$u(x) = bx + a$$

Donc l'équation (2.2) est une équation différentielle ordinaire en x dont la solution générale est : $u(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit les problème suivants

1-Problème de Dirichlet

$$(P_1) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ u(L) = g_L \end{cases}$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ u(L) = g_L \end{cases} \quad (2.3)$$

Sont des conditions de Dirichlet¹

Alors :

$$u(0)=a=g_0 \quad , \quad u(L)=a+\beta L=g_L$$

Donc :

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = \frac{g_L - g_0}{L} \end{cases}$$

On obtient :

$$u(x) = \frac{g_L x - g_0 x + g_0 L + L g_L - L g_L}{L}$$

Alors :

$$u(x) = g_L + \frac{g_L - g_0}{L}(x - L) \quad (2.4)$$

Le problème est bien posé², car il conduit à une solution unique.

2-Problème de Neumann

$$(P_2) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(0) = h_0 \\ u'(L) = h_L \end{cases}$$

¹ Johann Peter Gustav Dirichlet, mathématicien allemand, né à Düren en 1805 et mort à Göttingen en 1859. Il a effectué ses études supérieures à Paris où il a côtoyé les plus grands mathématiciens français de l'époque, dont Legendre, Laplace, Poisson et Fourier. Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier et l'arithmétique.

telle que :

$$\begin{cases} u'(0) = h_0 \\ u'(L) = h_L \end{cases} \quad (2.5)$$

Sont des conditions de Neumann

Si : $h_0 = h_L$, alors $u(x) = h_0 + c$, donc admet infinité de solutions.

Si : $h_0 \neq h_L$, alors n'est pas solution. Le problème n'est pas bien posé.

3-Problème de Dirichlet-Neumann (Mixte)

$$(P_3) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ u'(L) = h_L \end{cases}$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ u'(L) = h_L \end{cases} \quad (2.6)$$

Sont des conditions mixte (Dirichlet-Neumann)

Alors :

$$u(0) = a = g_0, \quad u'(x) = b \quad \text{et} \quad u'(L) = h_L$$

Donc :

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = h_L \end{cases}$$

On obtient :

$$u(x) = g_0 + h_L x \quad (2.7)$$

² Le problème est bien posé si pour toute donnée (second membre, domaine, données au bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continument de la donnée.

4-Problème de Robin

$$(P_4) \begin{cases} u''(x) = 0 \\ u(0) = g_0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)(L) = g_L \end{cases}$$

telle que :

$$\begin{cases} u(0) = g_0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)(L) = g_L \end{cases} \quad (2.8)$$

Sont des conditions de Robin³

Les conditions aux limites (2.8) sont satisfaites si et seulement si a et b vérifient

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b + \alpha(g_0 + bL) = g_L \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$\begin{cases} a = g_0 \\ b = \frac{g_L - \alpha g_0}{1 + \alpha L} \end{cases}$$

Donc on obtient :

$$u(x) = g_0 + \frac{g_L - \alpha g_0}{1 + \alpha L} x. \quad (2.9)$$

On montre que les problèmes (Dirichlet, Neumann, Robin, etc.) sont bien posés à l'aide de *principe du maximum*. Ce résultat permet aussi de démontrer un grand nombre de résultats sur l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des problèmes elliptiques.

³Victor Gustave Robin est un mathématicien français né 1855 et mort en 1897 qui a travaillé en particulier en thermodynamique et sur la théorie du potentiel.

DEUXIEME PARTIE : Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de décomposition de domaine.

Dans cette deuxième partie nous présentons la résolution de l'équation de Laplace par la méthode de décomposition de domaine. Nous présentons ici quelques algorithmes de méthodes de décomposition de domaine dans le cadre de l'équation de Laplace en dimension 1 d'espace. La méthode est présentée au niveau continu. Dans ce cas, on considère d'abord des conditions de raccord de Dirichlet (2.3) (continuité de la solution) puis de Robin (2.8) (raccord d'une combinaison linéaire du flux et de la valeur de la solution). Une méthode de décomposition en deux sous-domaines seulement est considérée.

3. Méthodes de décomposition de domaine-cas continu

Nous considérons l'équation unidimensionnelle

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (3.1)$$

Où u et f sont des fonctions scalaires de la variable d'espace $x \in [0, L]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet:

$$u(0) = g_0 \text{ et } u(L) = g_L. \quad (3.2)$$

Où $g_0, g_L \in \mathbb{R}$.

Le segment $\Omega = [0, L]$ est décomposé en deux sous-domaines $\Omega_1 = [0, L_1]$ et $\Omega_2 = [l_2, L]$ telle que $0 < l_2 \leq L_1 < L$. Nous désignerons par (P) le problème défini par (3.1)-(3.2).

$$(P) \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega \\ u(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous allons réécrire P de deux manières différentes sous la forme de deux problèmes couplés posés dans les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Puis, nous étudierons une méthode itérative de résolution de ces systèmes couplés adaptée aux architectures parallèles. On désigne par u_1 la restriction de u au domaine Ω_1 et par u_2 la restriction de u au domaine Ω_2 .

Le couple (u_1, u_2) vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après (3.3), la forme générale de u_1 est donnée par :

$$u_1 = u|\Omega_1 + b_1 x, \quad b_1 \in \mathbb{R}.$$

Et d'après (3.4), celle de u_2 est

$$u_2 = u|\Omega_2 + b_2(x - L), \quad b_2 \in \mathbb{R}.$$

On voit que les équations (3.3)-(3.4) ne suffisent pas pour déterminer de manière unique le couple (u_1, u_2) . Dans les paragraphes qui suivent, nous ajoutons des conditions de raccord aux interfaces (dites aussi conditions d'interface) $x=L_1$, et $x=l_2$ pour que le couple (u_1, u_2) soit déterminé de manière unique et soit égale aux restrictions de u aux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 . Pour chaque jeu de conditions d'interfaces, on propose une méthode itérative de résolution adaptée aux architectures parallèles.

3.1 Reformulation avec des conditions de Dirichlet

Nous ajoutons des conditions de raccord de type Dirichlet:

$$u_1(L_1) = u_2(L_1) \quad (3.5)$$

et
$$u_2(l_2) = u_1(l_2) \quad (3.6)$$

Nous désignerons par P' le problème (3.3)-(3.4)-(3.5)-(3.6).

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(L_1) = u_2(L_1) & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2(l_2) = u_1(l_2) & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \end{cases} .$$

Nous allons montrer que ce problème admet un couple solution unique (u_1, u_2) si et seulement si les sous-domaines se recouvrent ($L_1 > l_2$).

a) Existence

La solution v du problème P ((3.1)-(3.2)) étant continument dérivable, le couple (u_1, u_2) , où $u_1 = v|_{\Omega_1}$ et $u_2 = v|_{\Omega_2}$, est solution du problème P'. Remarquons que s'il y a unicité la solution de P' est la restriction de u aux sous-domaines.

b) Unicité

Par linéarité des équations, il suffit de considérer les équations homogènes: $g_0 = g_L = f = 0$. D'après (3.5) et (3.6), on a

$$u_1(x) = b_1 x$$

et

$$u_2(x) = b_2(x - L).$$

Où $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Les conditions de raccord (3.5)-(3.6) deviennent:

$$b_1 L_1 = b_2(L_1 - L)$$

et

$$b_2(l_2 - L) = b_1 l_2.$$

Il s'agit d'un système en b_1, b_2 :

$$\begin{cases} L_1 b_1 - (L_1 - L) b_2 = 0 \\ -b_1 l_2 + b_2(l_2 - L) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Le déterminant de (3.7) vaut :

$$L_1(l_2 - L) - l_2(L_1 - L) = L(l_2 - L_1)$$

Il est non nul ssi les sous-domaines se recouvrent, $l_2 < L_1$, (rappelons que l'on a déjà $(l_2 \leq L_1)$). Alors, on a

$$b_1 = \left(1 - \frac{L}{L_1}\right) b_2$$

Donc

$$b_2 L \left(\frac{l_2}{L_1} - 1 \right) = 0$$

Alors on obtient $b_1 = b_2 = 0$ et $u_1(x) = 0$ et $u_2(x) = 0$. Ceci prouve l'unicité.

Dans le cas où les sous-domaines sont adjacents ($l_2 = L_1$), le déterminant de (3.7) s'annule, et le système linéaire (3.7) admet une infinité de solutions $b_1 = \frac{b_2}{l_2} (l_2 - L)$, $b_1 = \frac{b_2}{L_1} (L_1 - L), \dots$

$$\text{et } b_2 = \frac{l_2 b_1}{l_2 - L}, \quad b_2 = \frac{L_1 b_1}{L_1 - L}, \dots$$

Donc le problème (P') aussi admet une solution unique ssi les sous-domaines se recouvrent. Dans ce cas, la solution (u_1, u_2) de (P') est composée des restrictions, aux sous-domaines, de la solution u du problème P (i.e. $u_1 = u$ sur Ω_1 et $u_2 = u$ sur Ω_2).

3.1.1 Algorithme parallèle de résolution du problème P'

(Algorithme de Schwarz)

Nous considérons une méthode itérative de résolution du problème P'. On part de u_1^0 et u_2^0 quelconques et on pose :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_1, \\ u_1^{n+1}(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ u_1^{n+1}(L_1) = u_2^n(L_1) & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \Omega_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_2^{n+1}}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_2, \\ u_2^{n+1}(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ u_2^{n+1}(l_2) = u_1^n(l_2) & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \Omega_1. \end{cases}, \quad (3.9)$$

Les problèmes définissant l'algorithme sont du type P_1 et sont donc bien posés.

Remarque 3.1 Une solution stationnaire de l'algorithme est solution du problème P'. Ceci prouve que si l'algorithme converge, il converge vers l'unique solution (quand les sous-domaines se chevauchent) de P' qui est la restriction aux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 de la solution u du problème P. L'algorithme de Schwarz (3.8)-(3.9) sera donc une méthode

itérative de résolution du problème P.

3.1.2 Etude de la convergence

Pour étudier la convergence, on pose $e_1^n = u_1^n - u_1$ et $e_2^n = u_2^n - u_2$ où (u_1, u_2) est la solution du problème P'. Par linéarité des équations, l'erreur (e_1^n, e_2^n) vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 e_1^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ e_1^{n+1}(0) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ e_1^{n+1}(L_1) = e_2^n(L_1) & \text{sur } \gamma_2^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 e_2^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ e_2^{n+1}(L) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ e_2^{n+1}(l_2) = e_1^n(l_2) & \text{sur } \gamma_1^2 \end{cases}$$

On a ainsi, pour $n \geq 2$, $e_1^n = \delta_1^n x$ et $e_2^n = \delta_2^n (x - L)$. Les conditions de Dirichlet en $x=L_1$ et $x=l_2$ donnent :

$$\delta_1^{n+1} L_1 = \delta_2^n (L_1 - L)$$

$$\delta_2^{n+1} (l_2 - L) = \delta_1^n l_2.$$

On a :

$$\delta_1^{n+1} = (L_1 - L) \frac{\delta_2^n}{L_1} \quad \text{et} \quad \delta_2^n = (l_2 - L) \frac{\delta_1^{n-1}}{l_2}$$

Donc :

$$\delta_1^{n+1} = \frac{(L-L_1)l_2}{(L-l_2)L_1} \delta_1^{n-1} \equiv \beta \delta_1^{n-1}$$

La relation est aussi valable pour δ_2^{n+1} . Comme $l_2 \leq L_1$, le terme β est toujours positif et on a : $\beta < 1$ $l_2 < L_1$.

Pour $l_2=L_1$, on a $\beta=1$ et l'algorithme stagne. On a prouvé le

Théorème 3.2 *L'algorithme de Schwarz (3.8)-(3.9) converge si et seulement si les sous-domaines se recouvrent ($l_2 < L_1$).*

Exemple 3.3 Soit le problème

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } [0,1] \\ u(0) = g_0 \\ u(1) = g_1 \end{cases}$$

Où g_0, g_1 sont des nombres réels. On pose $\Delta u - f = \Delta v$, $u(0) - g_0 = v(0)$ et $u(1) - g_1 = v(1)$

Alors on obtient le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } [0,1] \\ v(0) = 0 \\ v(1) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Ce problème a pour solution $v \equiv 0$. Nous allons essayer de résoudre le problème en décomposant le domaine $[0,1]$ en deux sous-domaines de la manière suivante :

$$\Omega_1 =]0, L[, \text{ et } \Omega_2 =]1 - L, 1[,$$

Où $L \in [\frac{1}{2}, 1]$. Les itérations de la MPS pour le problème proposé sont, pour u^0 donné et

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } [0, L], \\ v_1^{n+1}(0) = 0 \\ v_1^{n+1}(L) = v_2^n(L) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } [1 - L, 1] \\ v_2^{n+1}(1) = 0, \\ v_2^{n+1}(1 - L) = v_1^n(1 - L). \end{cases} \quad (3.12)$$

La figure 3.1 illustre le résultat de quelques itérations de la méthode précédente avec la condition initiale $v^0 = 4x(1-x)$ pour trois choix de L . Notons ici que v^0 respecte les conditions aux limites. Pour les deux premiers cas, les fonctions v_1^n et v_2^n tendent vers zéro lorsque n augmente, tandis que pour le dernier cas ($L = \frac{1}{2}$), la méthode stagne dès les premières itérations. On remarque que la méthode semble converger lorsqu'il y a un recouvrement entre les deux sous-domaines.

D'abord, on remarque que la vitesse de convergence dépend énormément de la taille du recouvrement. Plus le recouvrement est grand, plus la méthode converge rapidement. Ceci semble cohérent puisque les sous-problèmes à résoudre se rapprochent de plus en plus du problème de départ lorsqu'on augmente la taille du recouvrement. Dans notre exemple, si $L=1$, alors les itérés de la méthode reviennent à résoudre directement le problème (3.10), puisque $\Omega_1 = \Omega_2 =]0,1[$.

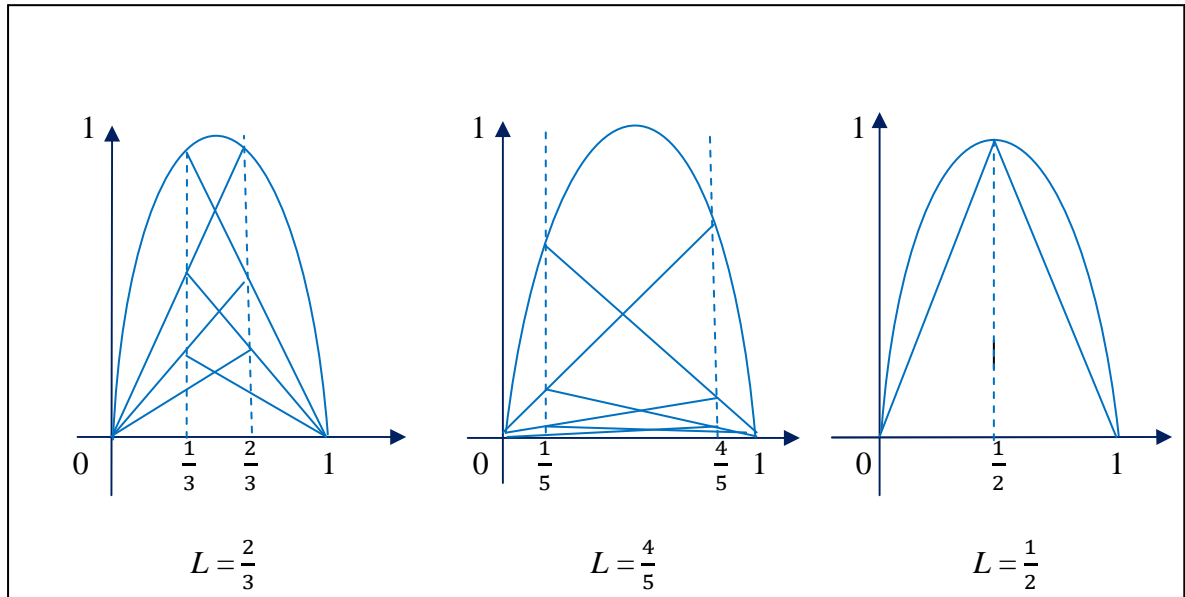


Figure 3.1 Quelques itérations de (3.11) et (3.12) (MPS) pour différents choix de L .

Ensuite, on remarque que la méthode ne converge pas pour $L = \frac{1}{2}$, soit le cas où le recouvrement entre les sous-domaines est nul (le recouvrement se limite à un point dans ce cas-ci). Nous verrons plus loin que pour la méthode classique de Schwarz, la présence d'un recouvrement est primordiale pour convergence. Notons finalement que le choix de la fonction de départ v^0 ainsi que l'équation aux dérivées partielles que l'on étudie peuvent faire varier énormément la vitesse de convergence.

3.2 Reformulation avec des conditions de Robin

Pour fermer le système d'équations (3.3)-(3.4), nous ajoutons des conditions de raccord de type Robin :

$$\left(-\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha u_1\right)(L_1) = \left(-\frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \alpha u_2\right)(L_1) \tag{3.13}$$

et
$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \alpha u_2\right)(l_2) = \left(-\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha u_1\right)(l_2) \tag{3.14}$$

Où α est une constante strictement positive, n_1 (resp. n_2) désigne la normale extérieure au domaine Ω_1 (resp. Ω_2). Les signes-devant les dérivées normales viennent du fait que $n_1 = -n_2$.

Nous désignerons par P'' le problème (3.3)-(3.13)-(3.4)-(3.14).

$$(P'') \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha u_1\right)(L_1) = \left(-\frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \alpha u_2\right)(L_1) & \\ -\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \alpha u_2\right)(l_2) = \left(-\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha u_1\right)(l_2) & \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que ce problème admet un couple solution unique (u_1, u_2) avec ou sans recouvrement des sous-domaines.

a) Existence

La solution u du problème P étant continument dérivable, le couple (u_1, u_2) , où $u_1 = u|_{\Omega_1}$ et $u_2 = u|_{\Omega_2}$, est solution du problème P''. Remarquons que s'il y a unicité de la solution de P'' est la restriction de u aux sous-domaines.

b) Unicité

Par linéarité des équations, il suffit de considérer le cas homogène $f = g_0 = g_L = 0$. D'après (3.3) et (3.4), on a :

$$u_1(x) = b_1 x$$

et
$$u_2(x) = b_2(x - L).$$

Où $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Les conditions de raccord (3.13)-(3.14) deviennent :

$$b_1 + \alpha b_1 L_1 = b_2 + \alpha b_2 (L_1 - L)$$

et
$$-b_2 + \alpha b_2 (l_2 - L) = b_1 + \alpha b_1 l_2$$

Il s'agit d'un système en b_1, b_2 :

$$\begin{cases} (1 + \alpha L_1)b_1 - (1 - \alpha(L - L_1))b_2 = 0 \\ (-1 + \alpha l_2)b_1 + (1 + \alpha(L - l_2))b_2 = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Le déterminant de (3.15) vaut $\alpha L(2 + \alpha(L_1 - l_2))$ et est strictement positif ($l_2 \leq L_1$). Le système (3.15) admet comme unique solution la solution nulle $b_1 = b_2 = 0$,

$u_1(x) = 0$ et $u_2(x) = 0$. On a montré le :

Lemme 3.4 Le problème P'' admet une unique solution, (u_1, u_2) elle est composée des restrictions, aux sous-domaines, de la solution u du problème P (i.e. $u_1 = u$ sur Ω_1 et $u_2 = u$ sur Ω_2).

Remarque 3.5 Il est important de noter que le problème P'', contrairement au problème P', admet une solution unique même quand les sous-domaines ne se recouvrent pas.

3.2.1 Algorithme parallèle de résolution du problème P''

Nous considérons une méthode itérative de résolution du problème P''. On part de u_1^n et u_2^n quelconques et on pose

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1}(0) = g_0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \left(\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial n_1} + \alpha u_1^{n+1}\right)(L_1) = \left(-\frac{\partial u_2^n}{\partial n_2} + \alpha u_2^n\right)(L_1). \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_2^{n+1}}{\partial x^2} = f & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1}(L) = g_L & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \left(\frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial n_2} + \alpha u_2^{n+1}\right)(l_2) = \left(-\frac{\partial u_1^n}{\partial n_1} + \alpha u_1^n\right)(l_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

Les problèmes aux limites définissant l'algorithme sont du type P_4 et donc bien posés.

Remarque 3.6 Une solution stationnaire de l'algorithme est solution du problème P'. Ceci prouve que si l'algorithme converge, il converge vers l'unique solution (quand les sous-domaines se chevauchent) de P' qui est la restriction aux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 de la

solution u du problème P. L'algorithme (3.8)-(3.9) sera donc une méthode itérative de résolution du problème P.

3.2.2 Etude de la convergence

Pour étudier la convergence, on pose $e_1^n = u_1^n - u_1$ et $e_2^n = u_2^n - u_2$ où (u_1, u_2) est la solution du problème P'. Par linéarité des équations, l'erreur (e_1^n, e_2^n) vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 e_1^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_1, \\ e_1^{n+1}(0) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \left(\frac{\partial e_1^{n+1}}{\partial n_1} + \alpha u_1^{n+1}\right)(L_1) = \left(-\frac{\partial e_2^n}{\partial n_2} + \alpha u_2^n\right)(L_1) & \text{sur } \gamma_2^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 e_2^{n+1}}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ e_2^{n+1}(L) = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \left(\frac{\partial e_2^{n+1}}{\partial n_2} + \alpha u_2^{n+1}\right)(l_2) = \left(-\frac{\partial e_1^n}{\partial n_1} + \alpha u_1^n\right)(l_2) & \text{sur } \gamma_2^1 \end{cases}$$

On a ainsi, pour $n \geq 2$, $e_1^n = \delta_1^n x$ et $e_2^n = \delta_2^n (x - L)$. Les conditions de Robin en $x=L_1$ et $x=l_2$ donnent :

$$\delta_1^{n+1} + \alpha \delta_1^{n+1} L_1 = \delta_2^n + \alpha \delta_2^n (L_1 - L)$$

$$-\delta_2^{n+1} + \alpha \delta_2^{n+1} (l_2 - L) = -\delta_1^n + \alpha \delta_1^n l_2.$$

On a donc

$$\delta_1^{n+1} = \frac{1+\alpha(L_1-L)}{1+\alpha L_1} \delta_2^n = \frac{1+\alpha(L_1-L)}{1+\alpha L_1} \frac{-1+\alpha l_2}{1+\alpha(L-l_2)} \delta_1^{n-1}.$$

$$\delta_1^{n-1} = \beta \delta_1^{n-1}.$$

Où

$$\beta = \frac{1-\alpha l_2}{1+\alpha L_1} \frac{1-\alpha(L-L_1)}{1+\alpha(L-l_2)}.$$

La relation est aussi valable pour δ_2^{n+1} . Le paramètre α étant positif, on peut montrer qu'avec ou sans recouvrement des sous-domaines, $-1 < \beta < 1$.

On a ainsi prouvé le :

Théorème 3.6 Pour $\alpha > 0$, l'algorithme (3.16)-(3.17) converge.

Remarque 3.7 Contrairement à l'algorithme de Schwarz, le recouvrement des sous-domaines n'est pas nécessaire pour assurer la convergence de l'algorithme. Dans le cas sans recouvrement :

$(l_2 = L_1)$ on a

$$\beta = \frac{1-\alpha l_2}{1+\alpha l_2} \frac{1-\alpha(L-l_2)}{1+\alpha(L-l_2)}.$$

Remarque 3.8 Il est possible d'annuler β et donc d'avoir une convergence en deux itérations en choisissant $\alpha = \frac{1}{l_2}$ où bien $\alpha = \frac{1}{(L-l_1)}$.

CHAPITRE III

CHAPITRE III

Aspect numérique

Dans ce dernier, afin de trouver la solution à l'équation, nous utilisons des méthodes numériques, qui sont implicitement utilisés la méthode de décomposition de domaine.

Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe une infinité des méthodes de discrétisations d'une équation. Les méthodes les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont (méthode des différences finies, éléments finis et volumes finis).

Dans ce chapitre nous utilisons la méthode des différences finies.

4.1 Position du problème

On considère le problème unidimensionnel

$$-u''(x) = f(x) \quad , \quad x \in [0, L] \quad (4.1)$$

$$u(0) = g_0 \quad , \quad u(L) = g_L \quad (4.2)$$

où $f \in C([0, L])$, les conditions aux limites (4.2) considérées ici sont de type Dirichlet non homogène.

4.2 Méthode de différences finies

On se donne une subdivision de $[0, L]$, c'est-à-dire une suite de points

$(x_i)_{i=0, \dots, N+1}$ tels que $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = L$.

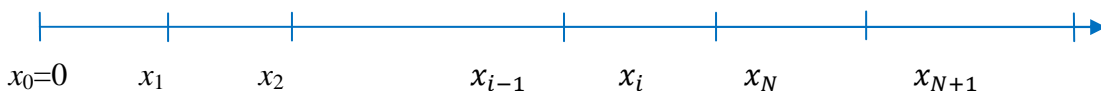


Figure 4.1 *Maillage différentielle finies en 1D.*

4.2.1 Principe de la méthode des différences finies

La méthode consiste à écrire l'équation aux dérivées partielles (4.1) aux points de discrétisation (x_i) :

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Puis à approcher l'opérateur différentiel (ici $-u''$) par un quotient différentiel, de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de u aux points de discrétisation. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un faible coût de calcul.

Par le développement de Taylor en x_i , on suppose que $u \in C^4([0, L])$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\xi_i)$$

avec $\xi_i \in [x, x + h]$.

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}(\eta_i)$$

avec $\eta_i \in [x - h, x]$. On en déduit

$$u'' = \frac{u(x-h) + u(x+h) - 2u(x)}{h^2} + O(h^3). \quad (4.3)$$

Le principe de la méthode consiste à calculer un vecteur $U = (U_1, U_2, \dots, U_N)$ tels que U_i soit une bonne approximation de $u(x_i)$. En faisant $x = x_i$ dans (4.3) on obtient le schéma numérique

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

avec les conditions aux limites (4.2) qui permettent de déterminer U_0 et U_{N+1}

$$\begin{cases} U_0 = g_0 \\ U_{N+1} = g_L \end{cases}$$

Donc le système complet d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i = f(x_i) & (4.4) \\ U_0 = g_0, U_{N+1} = g_L. & (4.5) \end{cases}$$

C'est un schéma à 3 points (U_{i-1}, U_i, U_{i+1})

Alors on obtient :

pour $i = 1$: $-\frac{1}{h^2}[U_2 - 2U_1] = F_1 + \frac{g_0}{h^2}$.

pour $i = 2$: $-\frac{1}{h^2}[U_3 - 2U_2 + U_1] = F_2$.

⋮

pour $i = N - 1$: $-\frac{1}{h^2}[U_N - 2U_{N-1} + U_{N-2}] = F_{N-1}$.

pour $i = N$: $-\frac{1}{h^2}[-2U_N + U_{N-1}] = F_N + \frac{g_L}{h^2}$.

Matriciellement, le problème (4.3) s'écrit sous la forme :

$$AU = F \tag{4.5}$$

avec A matrice tridiagonale symétrique et inversible d'ordre N donnée par :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{g_L}{h^2} \end{pmatrix}$$

On veut calculer un vecteur $U = (U_1, U_2, \dots, U_N)$ tel que les nombres $|U_i - U(x_i)|$ tendent uniformément vers 0 lorsque h tend vers 0.

4.2.2 La convergence de la méthodes de différences finies

La preuve de convergence du schéma utilise la notion de consistance, ainsi qu'une notion de stabilité.

Définition 4.2.1 On dira que le schéma numérique (4.4) est stable au sens de la norme l^∞ si

$$\|U\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |U_i| \leq C.$$

avec C constante indépendante de N .

Définition 4.2.2 Le schéma numérique (4.4) est consistant avec l'équations (4.1)-(4.2) si pour tout fonction u suffisamment régulière, on a

$$\left| -u''(x_i) + \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \right| \leq Ch^p, \quad i = 1, \dots, N.$$

$p \geq 1$, le nombre p s'appelle l'ordre du schéma numérique.

Proposition 4.2.1 Le schéma numérique (4.4) est consistant avec l'équation (4.4)-(4.5) et il est d'ordre 2. En outre on a si $u \in C^4([0,L])$

$$\left| -u''(x_i) + \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{[0,L]} |u^{(4)}|.$$

Preuve 4.2.1 Voir[9].

Proposition 4.2.2 La matrice A est inversible et si on note $A^{-1} = (b_{ij})$, on a $A^{-1} \geq 0$

et

$$0 < \sum_{j=1}^N b_{ij} \leq \frac{1}{8} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Preuve 4.2.2 Voir[9].

Proposition 4.2.3 Le schéma numérique (4.4) est stable au sens de la norme l^∞ .

Preuve 4.2.3 Voir[9].

Proposition 4.2.4 La méthode est convergente et on a si $u \in C^4([0,L])$.

$$|u(x_i) - U_i| \leq \frac{h^2}{96} \max_{[0,L]} |u^{(4)}|.$$

Preuve 4.2.4 Soit $E_j = U_j - U(x_j)$ l'erreur numérique; on d'après la proposition 4.2.1

$$\left| \frac{2E_j - E_{j+1} - E_{j-1}}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{[0,L]} |u^{(4)}|$$

En posant

$$V_j = \frac{2E_j - E_{j+1} - E_{j-1}}{h^2}$$

On a

$$E_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} V_j$$

Si bien que

$$|E_i| \leq \left(\sum_{j=1}^N b_{ij} \right) \max_{j=1,\dots,N} |V_j| \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On conclut alors avec la proposition 4.2.2 .

CONCLUSION

Conclusion

Les méthodes de décomposition de domaine sont des méthodes itératives couplées à une approche par sous-domaines. Elles représentent non pas une alternative mais un choix incontournable pour résoudre les problèmes de grande taille.

Ces méthodes sont plus efficaces qu'une méthode itérative appliquée au problème global, car elles allient des méthodes directes et une méthode itérative pour résoudre un problème d'interface mieux conditionné que le problème global.

Notre étude portée sur l'application de la méthode de décomposition de domaine pour résoudre l'équation de Laplace en dimension 1.

Dans un premier temps, nous présentons la méthode de Schwarz (avec recouvrement) on deux variantes alternée et parallèle tel que les deux diffèrent on terme de convergence où la méthode parallèle converge plus lentement que la méthode alternée, puis nous présentons la méthode de Schur primal et dual où la méthode dual est plus facile à mettre en œuvre que la méthode primal, car il n'y a pas besoin de numéroter les variables du système de façon à séparer les nœuds internes des nœuds interface.

Dans un deuxième temps, nous présentons quelques algorithmes de méthode de décomposition de domaine dans le cadre de l'équation de Laplace en dimension 1 on ajoutant des conditions de raccord de type Dirichlet, dans ce cas l'algorithme est convergent si et seulement si les sous-domaines se recouvrent contrairement à des conditions de type Robin le recouvrement des sous-domaines n'est pas nécessaire pour assurer la convergence de l'algorithme.

En fin, ces méthodes sont en fait très générales et s'appliquent à des équations plus complexes et à des géométries plus générales que celles présentées ici.

Bibliographie

Les mémoires

[1] « *Méthode de décomposition de domaine en temps et en espace pour la résolution de systèmes d'EDO non-linéaire* » Appliquées : P.Linel Université CLAUDE BERNARD – Promotion 2011.

[2] « *Méthode de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire* » Appliquées : P.Gosselet Université Paris 6 – Promotion 2003.

[3] « *Méthode de décomposition de domaine pour les équations du transport simplifié en neutronique* » Appliquées : B.Lathulière Université de Bordeaux I – Promotion 2010.

[4] « *Méthode de décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes en jonction fleuve / océan et les lois de conservation scalaires* » Appliquées : S.Doucouré Université Neuchâtel Promotion 2010.

Les livres

[1] Baddou (R.), BEN Hammouda (Z.). – *Etude de quelques problèmes aux limites de la physique Mathématique*. –19 May 2011, pp11-17.

[2] Roux (F. –X.). – *Méthodes de décomposition de domaine pour des problèmes elliptiques*. *Calculateurs Parallèles*, Vol. 7, n3,1995, pp237–253.

[3] Baptiste (P.). – *Méthode de Sous-domaines pour calculer le flux dans des milieux poreux hétérogènes*, pp 6-10.

[4] Choki (C.) – *Version Unifiée de traitement des singularités en décomposition de domaine*. –27 juillet 2005, pp11-21.

[5] Pierre –Louis LIONS : On the Schwarz alternating method. III . A Variant for nonoverlapping Subdomains. *In Third International Symposium on Domain Decomposition Equations (Houston, TX, 1989)* , Page 202-223.SIAM, Philadelphia, PA, 1990.

-
- [6] Farhat (C.) et Roux (F.-X.). – *Implicit parallel processing in structural mechanics*. Computational Mechanics advance, Vol.2, 1994, pp.1-124.
- [7] Smith (B.), Bjorstad (P.) et Gropp (W.). – *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. – Cambridge University Press, 1996.
- [8] Lucquin (B.) et Pironneau (O.). – *introduction au calcul Scientifique*. – Paris, Masson, 1996.
- [9] Daveau (C.). – *cours Methodes D'approximation Des Equations aux derivees Partielles par differences finies et volumes finis*, pp 7-13.
- [10] Nicolas (C.). – *Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en IMAFA*, 15 octobre 2010.
- [11] Raphaële (H.). – *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. – Université Aix Marseille1, 26 octobre 2011.
- [12] Andréa Schwertner (C.). – *Multiprogrammation parallèle générique des méthodes de décomposition de domaine*. – 20 septembre 2001, pp 48-58.
- [13] Alexandre (P.). – *Equations aux Dérivées Partielles solutions classique. Différences finies*. – Université du Maine, le Mans.
- [14] Dominique (M.). – *Résolution par sous-domaines de problèmes linéaires par la méthode optimisées de Schwarz* – Université Laval quebec, 2012.
- [15] Thierry (R.) . – *Introduction aux équations aux dérivées partielles* – Université Paris-sud, Janvier-Mai 2007.

ANNEXE

ANNEXE

Cette partie se compose en deux sections, la première section, on rappelle la définition de certains espace fonctionnels.

Dans la deuxième section, proposons quelques concepts utilisés (principe du maximum et l'inégalité de Poincaré, etc.).

5. Rappels

5.1 Les espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un scalaire sur H c'est-à-dire $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive. On note par $|\cdot|_H$ l'application de H dans \mathbb{R}_+ définie par :

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{1/2}. \quad (5.1)$$

Et on rappelle que $|\cdot|_H$ est une *norme* sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (5.1).

5.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$, elle s'identifie à une distribution sur Ω , encore notée v , et on peut donc définir ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, en tant que distributions sur Ω . En général,

$\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas aux sous-espace $L^2(\Omega)$. On introduit alors la :

Définition 5.1 On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace

$$H^1(\Omega) : \{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}.$$

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Et la norme associée :

$$\|u\|_H = (\langle u, u \rangle_H)^{1/2}$$

5.3 L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 5.2 Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace

$$H^m(\Omega) : \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right\} dx$$

Et on note :

$$\|v\|_{m,\Omega} = (v, v)_{m,\Omega}^{1/2}.$$

La norme correspondante.

5.4 Les espace $L^p(\Omega)$

Définition 5.3 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

On vérifiera ultérieurement que $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme de l'espace L^p .

5.5 L'espace $L^\infty(\Omega)$

Définition 5.4 On pose :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C ; |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega .$$

$\| \cdot \|_{L^\infty}$ est une norme.

Remarque 5.5 Si $f \in L^\infty$ on a $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ p.p. sur Ω .

6. Quelques concepts

6.1 Inégalité de Poincaré

L'inégalité ci-dessous, dite inégalité de Poincaré, joue un rôle important dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 6.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , borné dans une direction. Alors, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

6.2 Principe du maximum

Théorème 6.2 (Principe faible) si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et $\Delta u \geq 0$ sur Ω , ouvert borné de \mathbb{R}^d , alors $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\Omega} u$.

Théorème 6.3 (Principe fort) si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et $\Delta u = 0$ sur Ω , ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d , alors

Soit u est constante dans $\bar{\Omega}$,

Soit $\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u$, pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 6.4 Soit $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Alors il existe au plus une solution

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ au problème suivant } \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

حل معادلة لابلاس في البعد 1 بواسطة طريقة تفكيك المجالات

ملخص : أخذت طريقة تفكيك المجالات اهتماما كبيرا مؤخرا من وجهة نظر نظرية و عددية لأنها توفر تكيف جيد مع خوارزميات الكمبيوتر الموازية ، يمكن تطبيقها على المشاكل المعرفة على هندسات معقدة . هي تسمح بتفكيك المشكل الأصلي إلى سلسلة من المشاكل الفرعية صغيرة الحجم معرفة على هندسة ابسط ، إذن يمكننا التعامل مع المشاكل الكبيرة التي لا توجد لها مساحة ذاكرة كافية في الكمبيوتر. في هذا العمل طبقنا هذه الطريقة لحل معادلة لابلاس في البعد 1 و ذلك بإضافة شروط حدية من نوع Dirichlet و من نوع Robin في حالة مجالات متداخلة ، ثم ندرس تقارب الطريقة في كلتا الحالتين .

الكلمات الدالة : طريقة تفكيك المجالات ، طريقة شوارتز ، طريقة شوار ، معادلة لابلاس .

Résolution de l'équation de Laplace en dimension 1 par la méthode de décomposition de domaine

Résumé : Les méthodes de décomposition de domaine ont récemment eu un grand intérêt du point de vue théorique et numérique car elles fournissent des algorithmes bien adaptés aux ordinateurs parallèles, elles peuvent s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries complexes. Elles permettent de décomposer le problème initial en des sous-problèmes de petite taille définis sur des géométries plus simples, on peut alors traiter des problèmes de grande taille pour les-quels aucun ordinateur n'aurait suffisamment de place mémoire[°] dans ce travail, nous appliquons cette méthode pour résoudre l'équation de Laplace en dimension 1 par ajoutant des conditions aux limites de type Dirichlet et Robin dans le cas avec recouvrement , puis on étudier la convergence dans les deux cas.

Mots clés : Méthode de décomposition de domaine, Méthode de Schwarz, Méthode de Schur, Équation de Laplace.

Resolution of the Laplace equation in one dimension by the method of domain decomposition

Abstract: Domain decomposition methods have recently been great interest from the theoretical and numerical view because it provides well adapted to parallel computer algorithm, they can be applied to problems defined on complex geometries. They allow to decompose the original problem into sub-problems of small size on simpler geometries, then we can deal with large problems for which no computer-would be enough memory space[°] in this work, we apply this method to solve the Laplace equation in one dimension by adding the boundary conditions of Dirichlet and Robin in the case with recovery, then study the convergence in both cases.

Key words: domain decomposition method, Schwarz method, Schur method, Laplace equation.