UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

N° d'ordre :

N° de série :

Faculté des Sciences et de la Technologie et des Sciences de la Matière

DEPARTEMENT DE :
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse fondamentale

Présentée par :

BEDOUI Zouleikha

Thème

Caractéristique d'Euler-Poincaré

soutenue publiquement le : 03 /10/2013

Devant le jury :

Mr. BENSAYEH Abdellah	M.C à l'université KASDI M- Ouargla	**Président de jury**
Mr. MERABET Ismail	M.C à l'université KASDI M- Ouargla	**Examinateur**
Mr. BAHAYOU Mohamed Amine	M.C à l'université KASDI M -Ouargla	**Directeur de mémoire**

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire et à la réussite de cette année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement mon vertueux professeur, Monsieur *Mohamed Amine BAHAYOU*, qui en tant que directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et était très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je remercie Messieurs les membres de jury : Dr.*Abdallah BENSAYEH* et Dr.*Smail MERABET* qui ont eu la gentillesse de lire et évaluer ce travail.
Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers tous mes respectueux professeurs.

J'exprime ma gratitude à toutes les personnes rencontrées lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches, à mes parents pour leur soutien, mes frères et leurs familles, mes chers collègues de C.E.M Imame Ali Touggourt et mes amis dévoués, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Je n'oublie pas mes précieux élèves.

J'ai une pensée émue à mes parents à qui je dédie ce mémoire.

à toutes et à tous.

Table des matières

Introduction

Un problème fondamentale en géométrie (et en topologie) est le problème de classification des objets selon leur formes pour les organiser en familles, en classe, de manière à en déduire des propriétés. L'idée de base remonte à Euler lorsqu'il a définit ce qu'on appel aujourd'hui la caractéristique d'Euler-Poincaré. Ce dernier est un invariant numérique associé à toute variété, un nombre entier qui décrit un aspect d'une forme d'un espace topologique ou de la structure de cet espace. Elle est communément notée par χ.
La caractéristique d'Euler fut définit à l'origine pour les polyèdres et fut utilisée pour démontrer divers théorèmes, incluant la classification des solides de Platon. Léonard Euler, par qui le concept eut son nom, fut responsable pour beaucoup dans ce travail de pionnier.
En mathématique plus modernes la caractéristique d'Euler apparaît dans l'homologie et les méthodes cohomologiques. Elle est donnée en générale par la somme alternée des dimensions des groupes de cohomologie considérés :

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M).$$

Une *décomposition cellulaire* d'une variété M de dimension n, de type fini (à savoir un espace topologique localement homéomorphe à une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et qui est réunion finie de parties homéomorphes à de telles boules) est une partition finie de cette variété en sous ensembles homéomorphe à $\mathbb{R}^p$, $(p \leq n)$. Notons $c_p(M)$ le nombre des sous-ensembles homéomorphes à $\mathbb{R}^p$. On démontre que le nombre :

$$\chi(M) = c_0(M) - c_1(M) + c_2(M) + ... + (-1)^n c_n(M)$$

est indépendant de la décomposition cellulaire ; il est appelé *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la variété. C'est un invariant topologique dans le sens que toute autre variété N homéomorphe à M possède la même caractéristique $\chi(N) = \chi(M)$.
La caractéristique d'Euler-Poincaré est "réunion-additive", à savoir que la caractéristique d'une variété qui est réunion disjointe de deux variétés est la somme des caractéristiques de ces deux variétés.

Exemples.

1. *La caractéristique de* $\mathbb{R}^n$ *et de toutes ses boules ouvertes est* $(-1)^n$ *(*1 *pour le point,* -1 *pour la droite ou un intervalle ouvert,* 1 *pour le plan ou un disque ouvert,* $(-1)^n$ *pour* $\mathbb{R}^n$ *et ses boules ouvertes).*
2. *La caractéristique de* S^n *(sphère de* $\mathbb{R}^{n+1}$*), réunion d'une copie de* $\mathbb{R}^n$ *et un point, est* $(-1)^n + 1$ *(*0 *pour le cercle ou toute courbe de Jordan,* 2 *pour la sphère* S^2 *et toutes les surfaces qui lui sont homéomorphes).*
3. *La caractéristique d'une boule fermée non réduite à un point de* $\mathbb{R}^n$ *(réunion d'une boule ouverte et d'une copie de* S^{n-1}*) est* 1 *; ceci vaut donc pour un segment ou un disque fermé).*
4. *La caractéristique du cylindre (plan + droite) est nulle, donc aussi celle du cylindre à un ou deux bords, du ruban de Möbius (qu'il soit fermé ou ouvert), du tore et de la bouteille de Klein.*
5. *La caractéristique du plan projectif est* 1 *(ruban de Möbius ouvert plus un point).*
6. *La caractéristique d'une surface* T_g *de* genre g *est* $\chi(T_g) = 2 - 2g$.

Le but de ce mémoire est d'exposer les méthodes géométriques pour le calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré des variétés compactes. Pour cela, nous allons utiliser :

1. La cohomologie de De Rham avec l'outil d'algèbre homologique (suite exacte de Mayer-Vietoris), l'intégration des formes différentielles (Théorème de Stokes). Sans toutefois arriver jusqu'à la théorie raffinée de Hodge.
   La dualité de Poincaré est importante pour montrer "la symétrie" des nombres de Betti : $b_k(M) = b_{n-k}(M)$, il en résulte en particulier que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte de dimension impaire est nulle. Pour une surface compacte, une décomposition cellulaire de la surface est ici une partition finie de cette surface en sous-ensembles homéomorphes au plan (les *faces*, en nombre F), à la droite (les *arêtes*, en nombre A), ou au point (les *sommets*, en nombre S) et la caractéristique d'Euler-Poincaré se calcule par la relation
   $$c = S - A + F.$$
2. La théorie de Morse. Si M est une variété compacte de dimension n et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse dont tout ces points critiques sont non

dégénérés (une telle fonction existe toujours en vertu du Théorème de Sard). On montre alors que la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est donnée par

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(f),$$

où $c_k(f)$ désigne le nombre de points critiques de f d'indice k. Ceci généralise la relation dite *du montagnard* : pour une surface S immergée dans $\mathbb{R}^3$ telle que la fonction altitude possède un nombre fini de singularités qui sont des fonds (en nombre f), des sommets (en nombre s) ou des cols (en nombre c), la caractéristique d'Euler Poincaré de S est

$$\chi(S) = f - c + s.$$

Ainsi, pour le tore T^2, la fonction hauteur possède 1 minimum, 2 points cols et 1 maximum. Sa caractéristique d'Euler est donc

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

3. Le Théorème de Poincaré-Hopf. Elle est aussi égale à la somme des indices des singularités d'un champ de vecteurs à nombre fini de singularités tracé sur la surface (théorème de Hopf).

   Un champ de vecteurs sur une surface de caractéristique non nulle possède donc au moins une singularité ; par exemple, on ne peut pas coiffer une sphère chevelue sans singularité.

1

Homologie et cohomologie singulière

1.1 Homologies, cohomologies et topologie

Nous allons introduire dans ce chapitre les homologies et cohomologies les plus courantes définies sur les espaces topologiques et les variétés différentiables.

1.1.1 Homologie simpliciale

L'homologie simpliciale fait partie des premières idées qui donnent des invariants topologiques. Cette homologie est de nature entièrement géométrique, et consiste à considérer des « blocs élémentaires » (points, triangles, tétraèdres,...) à partir desquels on reconstruit l'espace à étudier. On parle de triangulation de l'espace. Nous allons donc définir ces blocs élémentaires puis le complexe différentiel à partir duquel on calcule cette homologie.

Simplexes de $\mathbb{R}^N$

Dans ce qui suit, on se place dans $\mathbb{R}^N$. Soient $v_0, \ldots, v_p$ $(p+1)$ points distincts de $\mathbb{R}^N$. On dira qu'ils sont *géométriquement indépendants* si les p vecteurs $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0, \ldots, v_p - v_0$ de $\mathbb{R}^N$ sont linéairement indépendants.

Un *p-simplexe* σ^p est l'enveloppe convexe des points $v_0, \ldots, v_p$ de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\sigma^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^N,\ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$

où les v_i sont $(p+1)$ points de $\mathbb{R}^N$ géométriquement indépendants. Les λ_i sont les *coordonnées barycentriques* de $x \in \sigma^p$, p est la dimension du simplexe. On note $\sigma^p = [v_0 v_1 ... v_p]$ un tel p-simplexe. C'est un compact de $\mathbb{R}^N$. On dira que les v_i sont les *vertex* de σ^p, et que le sous-espace

$$f_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^N,\ x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1,\ \lambda_j = 0 \right\}$$

est la j-ième *face* de σ^p (face opposée au vertex v_j. L'objet de gauche n'est pas un complexe simplicial. L'objet de droite est un complexe simplicial.

Les simplexes de dimension 0 de $\mathbb{R}^N$ sont les points. En dimension 1 on a les segments, en dimension 2 les triangles (pleins), en dimension 3 les tétraèdres (pleins), etc...

Complexe simplicial

Un *complexe simplicial* K est un ensemble fini de simplexes de $\mathbb{R}^N$ tel que :

- Si $\sigma^p \in K$, alors toutes les faces de σ^p sont aussi dans K.
- Si $\sigma^p, \sigma^q \in K$, alors ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q = \emptyset$, ou bien $\sigma^p \cap \sigma^q$ est une face commune à σ^p et σ^q (donc un élément de K).

La dimension de K est la dimension maximale de ses simplexes.

Afin de définir une opération bord sur les complexes simpliciaux, il faut orienter les simplexes. Pour cela, on se donne un ordre sur les vertex du simplexe. On note $\sigma^p =< v_0 ... v_p >$ un *p-simplexe orienté*. Si on change l'ordre des vertex, on sort un signe ± 1 selon la signature de la permutation qui change l'ordre. Ainsi, avec cette règle on a $< v_0 v_1 >= - < v_1 v_0 >$ et $< v_0 v_1 v_2 >=< v_1 v_2 v_0 >$ etc...

Soit maintenant K un complexe simplicial de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. On note $\ell(p)$ le nombre de p-simplexes dans K. Le groupe des *p-chaînes* de K, noté $C_p(K)$, est le groupe abélien libre engendré par les p-simplexes orientés de K. En d'autres termes, une p-chaîne de $C_p(K)$ est une somme formelle

$$c = \sum_{i=1}^{\ell(p)} n_i \sigma_i^p$$

où les σ_i^p sont les $\ell(p)$ p-simplexes de K et $n_i \in \mathbb{Z}$.

On peut alors définir une opération *bord*

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

en posant

$$\partial_p \langle v_0 ... v_p \rangle = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle v_0 ... \widehat{v_i} ... v_p \rangle$$

où $\widehat{v_i}$ signifie qu'on omet le vertex v_i (on obtient donc un $(p-1)$-simplexe) et $\partial_0 \langle v_0 \rangle = 0$. On prolonge ∂_p par linéarité sur $\mathbb{Z}$ sur tout $C_p(K)$:

$$\partial_p c = \sum_{i=0}^{\ell(p)} n_i \partial_p \sigma_i^p.$$

On peut alors montrer que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. On obtient ainsi un complexe différentiel (décroissant)

$$C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Dans ce complexe différentiel, les espaces $C_p(K)$ ne sont pas des espaces vectoriels mais seulement des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. L'homologie de ce complexe est *l'homologie simpliciale* de K, que l'on note $H_*(K)$. On peut aussi introduire la *cohomologie simpliciale* de K comme la cohomologie adjointe du complexe $C_*(K)$ (à valeurs dans $\mathbb{Z}$). On la note $H^*(K)$.

Pour un complexe simplicial K de $\mathbb{R}^N$ donné, l'union des simplexes de K est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^N$, qu'on appelle le *polyèdre* de K, et qu'on note $|K|$. On dira qu'un espace topologique X est *triangulable* s'il existe un complexe simplicial K tel que X soit homéomorphe à $|K|$. On peut montrer que toute variété compacte est triangulable. On définit alors *l'homologie simpliciale* de X comme l'homologie simpliciale de K. L'homologie simpliciale de X est un invariant topologique, c'est à dire que si X' est un espace topologique homéomorphe à X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On peut montrer en effet que si K et K' sont deux complexes simpliciaux qui fournissent toutes les deux des triangulations de X, alors leurs homologies simpliciales sont isomorphes. On définit la *cohomologie simpliciale* de X comme la cohomologie simpliciale de K. C'est aussi un invariant topologique.

1.1.2 Homologie singulière

Contrairement à l'homologie simpliciale, l'homologie singulière s'applique à tout espace topologique. Elle généralise l'homologie simpliciale en considérant non plus des « triangles » mais des applications partant de triangles standards à valeurs dans l'espace topologique étudié.

Complexe singulier

Simplexes singuliers

Dans $\mathbb{R}^N$, on considère la base canonique $e_1,...e_N$ avec $e_i = (0,...,1,...,0)$ où 1 est à la i-ème position. On ajoute à cette base, considérée comme des points de $\mathbb{R}^N$, l'élément 0, noté e_0. On peut de façon canonique inclure $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ en posant $(x_1,...,x_N) \longmapsto (x_1,...,x_N,0)$. On note donc par les mêmes symboles les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{N+1}$ qui viennent de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathbb{R}^\infty$ la « limite » des inclusions $\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$.

Le p-simplexe standard de $\mathbb{R}^\infty$ est défini comme

$$\Delta_p = \left\{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i,\ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\right\}.$$

Pour $p = 0$ Δ_0 est donc le point origine e_0 de $\mathbb{R}^\infty$; pour $p = 1$, Δ_1 est le segment qui joint e_0 à e_1, etc...

Étant donnés $n+1$ points $v_0,...,v_n$ de $\mathbb{R}^N$, on note $[v_0,...,v_n]$ l'application $\Delta_n \to \mathbb{R}^N$ définie par

$$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i.$$

On appelle cette application un *n-simplexe singulier affine*. On remarquera que l'image de $[v_0,...,v_n]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^N$ engendré par les combinaisons convexes des points $v_0,...,v_n$. Ici, on ne suppose pas que ces points soient géométriquement indépendants, ce qui signifie que cette image puisse être dégénérée. Par exemple, l'image de $[e_0,e_1,e_2,e_2]$ est un triangle, et non un tétraèdre. C'est de là que vient le mot « singulier ».

Une expression du type $[v_0,...,\hat{v}_i...,v_n]$ signifie que l'on omet le point v_i. Ainsi par exemple, $[e_0,...\hat{e}_i...,e_n]$ est un $(p-1)$-simplexe singulier affine dont l'image est contenue dans Δ_p. On note $F_i^p = [e_0,...,\hat{e}_i,...,e_n]\ :\ \Delta_{p-1} \mapsto \Delta_p$ ce simplexe singulier affine, et on l'appelle la *i-ème face* de Δ_p. En effet, l'image de F_i^p est la face de Δ_p opposée au sommet e_i. On a alors $F_i^p(e_j) = e_j$ pour $j < i$ et $F_i^p(e_j) = e_{j+1}$ pour $j \geq i$. On vérifie que pour $j > i$ on a

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0,...,\widehat{e_i},...,\widehat{e_j},...,e_p]$$

et pour $j \leqslant i$

$$F_j^{p+1} \circ F_i^p = [e_0,...,\widehat{e_j},...,\widehat{e_{i+1}},...,e_p].$$

Soit maintenant X un espace topologique. Un *p-simplexe singulier* sur X est une application continue $\sigma_p : \Delta_p \to X$. En considérant toutes les sommes formelles finies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de tels p-simplexes singuliers, on engendre un groupe abélien que l'on note $\Delta_p(X)$. C'est le *groupe des p-chaînes singulières* sur X. Une p-chaîne singulière de X s'écrit donc sous la forme $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ où les σ sont des p-simplexes singuliers et les n_σ des entiers. La somme porte sur un nombre fini de p-simplexes singuliers.

Si $\sigma : \Delta_p \to X$ est un p-simplexe singulier, on définit la i-ème *face* de σ comme le $(p-1)$-simplexe singulier

$$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \to F$$

Le *bord* de σ est alors la combinaison

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

C'est une $(p-1)$-chaîne. on prolonge ∂_p par linéarité à toute p-chaîne

$$\partial_p \left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma \right) = \sum_\sigma n_\sigma \partial_p \sigma.$$

Donc ∂_p définit un morphisme de groupes

$$\partial_p : \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$$

On montre alors que

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$$

Pour $p < 0$, on pose $\Delta_p(X) = 0$, et pour $p \leqslant 0$, $\partial_p = 0$. Par la suite, on notera ∂ pour tous les morphismes ∂_p. On a donc le complexe différentiel décroissant

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \Delta_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_p(X) \xrightarrow{\partial} \Delta_{p-1}(X) \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial} 0.$$

Son homologie est *l'homologie singulière* de X, notée $H_*(X)$. Cette homologie est un invariant topologique de X. La *cohomologie singulière* de X *à valeurs dans* $\mathbb{Z}$ est la cohomologie adjointe du complexe $\Delta_*(X)$. C'est un invariant topologique aussi.

Si X a plusieurs composantes connexes par arcs X_α, alors le groupe $\Delta_p(X)$ est la somme directe des groupes $\Delta_p(X_\alpha)$. Cette décomposition est préservée par le passage à l'homologie, et on a $H_*(X) = \oplus_\alpha H_*(X_\alpha)$. Il suffit donc, pour étudier cette homologie, de considérer des espaces connexes par arcs.

Homologie singulière à valeurs dans un groupe abélien quelconque.

L'homologie simpliciale est construite à partir des modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$. On peut généraliser cette construction en remplaçant l'anneau $\mathbb{Z}$, dont en réalité seule la structure de groupe abélien intervient, par n'importe quel groupe abélien G. En particulier, il est possible de définir l'homologie singulière de X à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, etc... Pour différentier ces différentes homologie, on note parfois $H_*(X, \mathbb{Z})$ l'homologie singulière à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui vient d'être définie.

Soit G un groupe abélien dont l'opération interne est notée additivement. On définit le groupe $\Delta_p(X, G)$ des *p-chaînes singulières* à valeurs dans G sur X comme le groupe engendré par les sommes formelles finies $c = \sum_\sigma g_\sigma \sigma$ où les σ sont des p-simplexes singuliers et les g_σ sont des éléments de G. La définition de l'homologie singulière de X à valeurs dans G reprend celle à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais cette fois on prolonge ∂ par linéarité sur G. On note $H_*(X, G)$ le *groupe d'homologie singulière de X à valeurs dans G*.

En définissant ainsi une homologie singulière à valeurs dans n'importe quel groupe abélien G. On n'introduit pas nécessairement de nouveaux invariants topologiques de X si on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Certains types de groupes abéliens (par exemple les groupes $\mathbb{Z}_p$) peuvent conduire à des nouveautés.

Nombres de Betti, caractéristique d'Euler-Poincaré.

Dans le cas $G = \mathbb{R}$, $\Delta_p(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont la dimension est **finie** et notée $b_p = \dim_\mathbb{R} H_p(X, \mathbb{R})$ (ou $b_p(X)$ s'il y a besoin de préciser l'espace topologique). C'est le p-ième *nombre de Betti* de X. Le nombres de Betti sont donc des invariants topologiques (entiers) de X.

Le calcul des nombres de Betti n'est pas aisé, car il faut bien souvent déterminer une bonne partie de la structure de $H_*(X, \mathbb{R})$. Par contre, il existe une combinaison de ces nombres à laquelle on peut accéder par d'autres méthodes (combinatoires ou géométriques). Ce nombre est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X, définie par

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p.$$

Dans le cas où X est triangulable, on peut calculer ce nombre de façon très simple. Soit K un complexe simplicial qui triangule X. Soit $\ell(p)$ le nombre de

p-simplexes dans K. Alors on peut montrer que

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p \ell(p).$$

Il s'agit d'une façon purement combinatoire de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de X.

2

Cohomologie de De Rham

Soit M une variété différentielle de dimension n. On considère la suite des applications ci-dessous qu'on appelle le *complexe de De Rham* de M

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

On note $Z^k(M)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^k(M)$ constitué des k-formes différentielles ω telles que $d\omega = 0$. Une telle forme est dite *fermée*.
Par exemple $\omega = ydx + xdy \in Z^1(\mathbb{R}^2)$.

On note $B^k(M)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^k(M)$ constitué des k-formes différentielles ω de la forme $d\alpha$ où $\alpha \in \Omega^{k-1}$. Une telle forme est dite *exacte* (par convention $B^0(M) = 0$).
Par exemple $\omega = dx \wedge dy = d(xdy) = d\left(-\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy\right) \in B^2(\mathbb{R}^2)$.

Autrement dit, $Z^k(M)$ est le noyau de $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ et $B^k(M)$ est l'image de $d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$.
Comme $d \circ d = 0$, on voit que $B^k(M) \subset Z^k(M)$: toute forme exacte est fermée.
On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

qu'on appellera le k-ième *groupe de cohomologie* de M.

Exemples. *Soit sur* $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ *la* 1*-forme* $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. *On a*

$$d\omega = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx,$$

$d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy$ et $d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$, de sorte que $d\omega = 0$. La forme ω est donc fermée, mais nous allons voir qu'elle n'est pas exacte, ce qui montrera que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \neq 0$.

Lemme 2.1. *Soit M une variété différentielle et ω une 1-forme différentielle sur M. Pour que ω soit exacte, il faut que son intégrale le long de toute courbe fermée soit nulle, i.e. si $\gamma : [a,b] \to M$ est une courbe différentiable fermée ($\gamma(a) = \gamma(b)$) alors $\int_\gamma \omega = 0$.*

Démonstration. Si γ est exacte, i.e. $\omega = df$ où $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^* df = \int_a^b d(\gamma^* f) = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

□

Pour l'exemple ci-dessus, si γ est le cercle unité ($\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$), alors

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \gamma^*\omega = \int_0^{2\pi} -\sin t\, d(\cos t) + \cos t\, d(\sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Nous allons voir que précisément $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{R}$.

2.1 Fonctorialité de la cohomologie

Soit $f : M \to N$ une application lisse. Comme l'image réciproque commute avec la différentielle extérieure : $d \circ f^* = f^* \circ d$, on voit que

$$f^*\left(Z^k(N)\right) \subset Z^k(M) \text{ et } f^*\left(B^k(N)\right) \subset B^k(M)$$

de sorte que f^* induit, par passage au quotient, une application $\mathbb{R}$-linéaire notée

$$f^* : H^k(N) \to H^k(M).$$

Soient maintenant $f : M \to N$ et $g : N \to V$ deux applications lisses. On vérifie que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \text{ et que } \mathrm{Id}_M^* = \mathrm{Id}_{H^*(M)}.$$

Ces propriétés se résument en disant que le k-ième groupe de cohomologie est un *foncteur contravariant* de la catégorie des variétés différentielles dans la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

En particulier, si M et n sont difféomorphes, les groupes de cohomologie $H^k(N)$ et $H^k(M)$ sont isomorphes pour tout k. nous allons voir qu'en fait il suffit de beaucoup moins d'un difféomorphisme entre M et N pour assurer l'isomorphisme entre $H^*(N)$ et $H^*(M)$.

Dans toute la suite, lorsque $H^k(N)$ et $H^k(M)$ sont isomorphes on écrira $H^k(N) = H^k(M)$.

2.2 Invariance par homotopie

Soient $f, g : M \to N$ deux applications lisses. On dit que f et g sont (différentiablement) ***homotopes*** s'il existe une application lisse $H : M \times [0,1] \to N$ telles que

$$H(x,0) = f(x) \text{ et } H(x,1) = g(x).$$

Théorème 2.2.1. *Soient $f, g : M \to N$ deux applications homotopes, alors f^* et g^* de $H^k(N)$ dans $H^k(M)$ sont égales pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration. Soit l'intervalle $I = [0,1]$ et soit pour tout $t \in I$, l'application

$$\begin{array}{cccc} i_t : & M & \to & M \times I \\ & x & \mapsto & (x,t). \end{array}$$

Comme $f = H \circ i_0$ et $g = H \circ i_1$ et par fonctorialité : $f^* = i_0^* \circ H^*$ et $g^* = i_1^* \circ H^*$, il suffit de montrer le théorème pour i_0^* et i_1^*.

Lemme 2.2. *Pour toute variété différentielle M il existe un opérateur d'homotopie $h : \Omega^*(M \times I) \to \Omega^{*-1}(M)$ pour lequel*

$$h(d\omega) + d(h\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega \tag{2.1}$$

Une fois le lemme démontré, on constate alors que si ω est une k-forme fermée ($d\omega = 0$) les formes fermées $i_0^*\omega$ et $i_1^*\omega$ diffèrent de la forme exacte $d(h\omega)$. Elles ont donc même classe dans le groupe de cohomologie $H^k(M)$, ce qui montre que les deux applications en cohomologie i_0^* et i_1^* sont égales.

Soit S le champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ donné par $S(x,t) = (0, \partial_t)$. Soit ω une k-forme différentielle sur $M \times I$ ($k \geq 1$). On définit $h\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ par

$$h\omega = \int_0^1 i_t^*(i_S\omega)\, dt$$

i.e. pour tout $x \in M$

$$(h\omega)_x = \int_0^1 i_t^*\Big((i_S\,\omega)_{(x,t)}\Big)\,dt$$

où l'intégrant est considéré comme fonction de t à valeur dans $\wedge^{k-1}(T_x^*M)$. Dans toute carte locale, les composantes de l'intégrant sont des fonctions lisses de $(x,t) \in U \times I$ et donc l'intégrale définit une $(k-1)$-forme différentielle sur M.

On peut calculer $d(h\omega)$ en tout point de M, en dérivant sous le signe intégrale en coordonnées locales, ce qui donne :

$$d(h\omega) = \int_0^1 d\,i_t^*(i_S\,\omega)\,dt.$$

Par le formule magique de Cartan

$$\begin{aligned} h(d\omega) + h(d\omega) &= \int_0^1 \Big[i_t^*(i_S\,d\omega) + d\,i_t^*(i_S\,\omega)\Big]\,dt \\ &= \int_0^1 \Big[i_t^*(i_S\,d\omega) + i_t^*(d\,i_S\,\omega)\Big]\,dt \\ &= \int_0^1 i_t^*(\mathscr{L}_S\,\omega)\,dt. \end{aligned}$$

Comme le flot (global) de S est $F_t(x,s) = (x, s+t)$ et comme $i_t = F_t \circ i_0$, alors

$$i_t^*(\mathscr{L}_S\,\omega) = i_0^* \circ F_t^*(\mathscr{L}_S\,\omega) = i_0^*\frac{d}{dt}(F_t^*\omega) = \frac{d}{dt}i_0^*(F_t^*\omega) = \frac{d}{dt}(i_t^*\omega),$$

et donc

$$h(d\omega) + d(h\omega) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(i_t^*\omega)\,dt = i_1^*\omega - i_0^*\omega.$$

$\square$

Conséquences. Il résulte du théorème ci-dessus que deux variétés différentiablement homotopes ont même caractéristique d'Euler-Poincaré. Par le Théorème d'approximation de Whitney (Voir [3], Théorème 6.26) toute application continue est homotope à une application lisse, on déduit alors

Théorème 2.2.2 (Invariance par homotopie). *Si M et N sont deux variétés lisse homotopes alors $H^k(M) \simeq H^k(N)$ pour tout k.*

Rétraction par déformation. Un exemple important et intuitive d'homotopie entre deux espaces est la rétraction par déformation. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Une rétraction de X sur A est une application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x$ pour $x \in A$. L'application $r : X \to A$ est appelée une *rétraction par déformation* si de plus $i \circ r : X \to X$, où $i : A \to X$ est l'injection canonique, est homotope à Id_X. On dit que A est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation $X \to A$.

Exemples.

1. *$\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\{pt\}) = 1$ ($\mathbb{R}^n$ est homotope à un point).*
2. *La sphère S^n est un rétracte par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. La rétraction $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ est définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Donc,*
$$\chi(\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}.$$
3. *$\chi(\text{bande de Mobius}) = \chi(S^1) = 0$.*
4. *$\chi(S^n \setminus \{pt\}) = \chi(\mathbb{R}^n) = 1$.*
5. *$\chi(\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$.*
6. *$\chi(S^n \setminus \{\text{deux points}\}) = \chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$.*

2.3 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soient U et V deux ouverts d'une variété différentielle M tels que $M = U \cup V$. Alors il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{r} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{d} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

où $r : \omega \mapsto (\omega_{|_U}, \omega_{|_V})$ et $d : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha_{|_{U\cap V}} - \beta_{|_{U\cap V}}$.

Seule la surjectivité de d n'est pas immédiate. Pour l'établir on considère une partition de l'unité $\{\psi_1, \psi_2\}$ subordonnée au recouvrement ouvert $\{U, V\}$ ($\mathrm{Supp}\psi_1 \subset U$, $\mathrm{Supp}\psi_2 \subset V$, $\psi_1 + \psi_2 = 1$) puis il suffit de remarquer que $(\psi_1\omega, -\psi_2\omega) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ et $d(\psi_1\omega, -\psi_2\omega) = \psi_1\omega - (-\psi_2\omega) = \omega$. La suite exacte courte de Mayer-Vietoris donne au niveau de la cohomologie, la suite exacte longue suivante :

$$
\begin{tikzcd}
H^{k+1}(M) \arrow[r, "i^*"] & \cdots & \\
H^k(M) \arrow[r, "i^*"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r, "j^*"] & H^k(U \cap V) \arrow[llu, rounded corners, "d^*"] \\
& \cdots \arrow[r, "j^*"] & H^{k-1}(U \cap V) \arrow[llu, rounded corners, "d^*"]
\end{tikzcd}
$$

où $\delta : H^k(U \cap V) \to H^{k+1}(M)$ est l'opérateur dit *connectant.*

Application. Soit $\Sigma_k = \{m_1, ..., m_k\}$ un ensemble de k-points du plan $\mathbb{R}^2$. On peut recouvrir $\mathbb{R}^2$ par deux ouverts $U = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$ et V la réunion de k-disques disjoints $D_1, ..., D_k$ centrés respectivement en $m_1, ..., m_k$.
En écrivant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à ce recouvrement, nous obtenons :

$$H^1(U) = \mathbb{R}^k.$$

Il en résulte que si $k \neq \ell$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_k$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\ell$ ne sont pas homéomorphes.

2.4 Degré d'une application

Soient M et N deux variétés orientées C^∞ compactes de dimension $n \geqslant 1$, avec N connexe, et $f : M \to N$ une application continue.

Comme $H^n(M) = H^n(N) = \mathbb{R}$ (voir [3] Théorème 17.30, c'est aussi une conséquence directe du Théorème de dualité de Poincaré), alors f^* induit une application linéaire $m_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m_d(x) = dx$. Nous appellerons *degré* de f, et noterons $\deg f$, le nombre réel a.

Par définition de f^*, si g est une application différentiablement homotope à f, alors

$$\int_M g^* \omega = \deg f \int_N \omega,$$

pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$ tel que $\int_N \omega \neq 0$. On peut étendre cette définition au cas où M n'est pas compacte, mais en considérant une application $f : M \to N$ *propre* (l'image réciproque par f de tout compact de N est un compact de M).

Remarque. *Le degré des applications vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Le degré d'une application constante est nulle. Si f est constante, alors* $\deg f = 0$, *car* $f^* : H^n(N) \to H^n(M)$ *est l'application nulle.*

   Plus généralement, le degré d'une application continue non surjective f de M dans N est nul. En effet, soit ω une forme différentielle à support compact contenu dans le complémentaire de l'image de f, telle que $\int_N \omega = 1$ (qui existe, car ce complémentaire est un ouvert non vide de N, car M est compacte). Soit $g : M \to N \setminus \operatorname{Supp} \omega$ une application C^∞ homotope à f. Alors $\deg f = \int_M g^* \omega = 0$.

2. *Le degré dépend en général de l'orientation des variétés M et N. Plus précisément, pour ε dans $\{-1, 1\}$ et P une variété orientée C^∞, notons εP la variété orientée P si $\varepsilon = +1$, et la variété P où chaque composante connexe de P est munie de l'orientation opposée si $\varepsilon = -1$. Soient ε, ε' dans $\{-1, 1\}$ et notons g l'application f de la variété orientée εM dans la variété orientée $\varepsilon' M$. Alors par construction*

$$\deg g = \varepsilon \varepsilon' \deg f.$$

   Par exemple, si f est un C^∞-difféomorphisme, alors $\deg f$ *vaut* 1 *si f préserve l'orientation, par la formule de changement de variable globale, et donc* -1 *sinon (car alors f préserve l'orientation de M dans la variété orientée opposée de N).*

   En particulier, comme l'antipodie $-\mathrm{id} : S^n \to S^n$ *renverse l'orientation si et seulement si n est pair, on en déduit que*

$$\deg(-\mathrm{id} : S^n \to S^n) = (-1)^{n-1}.$$

   Remarquons aussi que si $N = M$, alors le degré de f ne dépend pas de l'orientation de M (à condition de prendre la même à la source et au but).

3. *Le degré est additif. Plus précisément, si $M_1, \ldots, M_k$ sont les composantes connexes de M, alors pour toute application continue $f : M \to N$, on a*

$$\deg f = \sum_{i=1}^{k} \deg f_{|M_i}.$$

   En effet, si $g : M \to N$ est une application C^∞ homotope à f, alors $g_{|M_i}$ est C^∞ et homotope à $f_{|M_i}$, et pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$ tel que $\int_N \omega = 1$,

$$\deg f = \int_M g^* \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} (g_{|M_i})^* \omega = \sum_{i=1}^{k} \deg f_{|M_i}.$$

4. *Le degré est invariant par homotopie. Plus précisément, si $g : M \to N$ est une application continue, qui est homotope à f, alors*

$$\deg g = \deg f.$$

Ceci découle de l'invariance par homotopie de la cohomologie de de Rham.

Par exemple, si $M = N$, alors l'application $id : M \to N$, de degré 1, n'est pas homotope à une application continue non surjective (par exemple constante), qui est de degré 0.

5. *Le degré est invariant par cobordisme, au sens suivant : si M est le bord orienté d'une variété D et si M est compacte, alors*

$$\deg f = 0.$$

(Remarquons que M n'est pas forcément connexe, et qu'elle est orientée par la normale sortante). En effet, on plonge la variété à bord D dans $\mathbb{R}^N$ (par le Théorème de Whitney), on prolonge une application lisse $g : M \to N$ homotope à f en une application lisse $G : \mathbb{R}^N \to N$. On a $G \circ i = g$, pour l'inclusion $i : M = \partial D \to \mathbb{R}^N$. D'où, pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$, qui est en particulier fermée, on a par le théorème de Stokes,

$$\int_M g^*\omega = \int_M i^*G^*\omega = \int_D d(G^*\omega) = \int_D G^*(d\omega) = 0.$$

6. *Le degré est multiplicatif pour la composition. Si P est une variété orientée C^∞ compacte connexe de dimension $n \geqslant 1$, et $g : N \to P$ une application continue, alors*

$$\deg(g \circ f) = (\deg f)(\deg g).$$

Ceci découle immédiatement du fait que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, et que $m_{dd'} = m_{d'} \circ m_d$. En particulier, si $M = N$ et si $g : M \to P$ est un homéomorphisme, alors

$$\deg(g \circ f \circ g^{-1}) = \deg f.$$

Donnons maintenant un moyen pratique de calculer le degré d'une application, ce qui montrera aussi que le degré est un nombre entier.

Par égalité des dimensions de M et N, pour tout point x de M, pour que l'application linéaire $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ soit bijective, il suffit que f soit une immersion ou une submersion en x. Nous appelons *indice* de f en x, et notons $\mathrm{Ind}(f, x)$, le nombre $+1$ si $T_x f$ préserve l'orientation, et -1 sinon.

Théorème 2.4.1. *Soient M et N deux variétés lisses orientées compactes de dimension $n \geqslant 1$, avec N connexe, et $f : M \to N$ une application lisse. Si $y \in N$ est une valeur régulière de f, alors*

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{Ind}(f, x).$$

Démonstration. Si y est une valeur régulière, alors $F = f^{-1}(y)$ est une sous-variété de dimension $n - n = 0$ de M, donc est discrète, et comme M est compacte, la fibre F est finie. Pour tout x dans F, l'application f est une submersion en x, donc $T_x f$ est bijective. Donc le membre de droite est bien défini (et appartient à $\mathbb{Z}$).

Par le théorème d'inversion locale et par finitude de F, il existe un voisinage ouvert connexe V de y, que nous supposerons contenu dans un domaine de carte de N, et, pour tout x dans F, un voisinage ouvert V_x de x, avec les V_x deux à deux disjoints, tels que $f_{|V_x} : V_x \to V$ soit un C^∞-difféomorphisme pour tout x dans F. Soit $\omega \in \Omega^n(N)$ à support contenu dans V telle que $\int_N \omega = 1$, ce qui existe. Alors le support de $f^*\omega$ est contenu dans $f^{-1}(V)$, qui est réunion disjointe des V_x pour x dans F.

Par le théorème de changement de variable local, on a

$$\begin{aligned}\deg f = \int_M f^*\omega = \int_{f^{-1}(V)} f^*\omega = \sum_{x \in F} \int_{V_x} (f_{|V_x})^*\omega \\ = \sum_{x \in F} \mathrm{Ind}(f, x) \int_V \omega = \sum_{x \in F} \mathrm{Ind}(f, x).\end{aligned}$$

Ce théorème est utilisable à cause du théorème de Sard, qui dit que l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N. □

Proposition 2.1.

1. *Le degré de f est un élément de $\mathbb{Z}$.*
2. *Le cardinal d'une fibre régulière est constant modulo 2.*
3. *Si le degré de f est non nul, alors f est surjective. En particulier, si f est homotope à une application non surjective, alors $\deg f = 0$.*
4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ qui vaut l'identité au voisinage de l'infini (i.e. en dehors d'un compact), alors f est surjective.*

5. *Si f est un revêtement à n feuillets préservant l'orientation, alors* $\deg f = n$.

Démonstration. Par le théorème de Sard, l'application f admet au moins une valeur régulière. L'assertion (1) est alors immédiate à partir du théorème (2.4.1). Celui-ci montre aussi que si $\deg f$ est non nul, alors l'image réciproque $f^{-1}(y)$ de toute valeur régulière de f est non vide. Or tout élément de N qui n'est pas dans l'image de f est une valeur régulière de f, donc l'assertion (3) en découle.

L'assertion (2) est immédiate, car $\deg f \equiv \mathrm{card} f^{-1}(y)[2]$ pour toute valeur régulière y, puisque $1 \equiv -1[2]$.

En identifiant $\mathbb{R}^n$ avec le complémentaire d'un point dans S^n (par projection stéréographique), on prolonge f en une application $g : S^n \to S^n$ de classe C^∞, valant l'identité au voisinage d'un point. Donc le théorème (2.4.1) appliqué en ce point (qui est régulier) montre que le degré de g vaut 1, donc est non nul. Par conséquent g est surjective par (3), donc f est surjective, ce qui montre (4).

La dernière assertion découle du fait que pour tout y dans N, le point y est une valeur régulière de f, d'image réciproque de cardinal n, en tout point de laquelle l'application tangente de f préserve l'orientation, par définition d'un C^∞-difféomorphisme local préservant l'orientation. En particulier, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, l'application $f : S^1 \to S^1$ définie par $f(z) = z^n$ est de degré n. $\square$

3 Théorème de dualité de Poincaré

On dit qu'une variété différentielle M de dimension n est de ***type fini*** s'il existe un recouvrement (dit admissible) de M par un nombre fini d'ouverts $U_1, \ldots U_p$ avec la propriété que toutes les intersections non vide de la forme $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_\ell}$ est contractile (homotope à un point). Le cardinal minimal d'un recouvrement ouvert admissible s'appelle le *type minimal* de M.

Exemples. 1. *La sphère S^n est de type fini. On peut vérifier que le recouvrement ouvert :*

$$U_k^{\pm} = \{x \in S^n, \ \pm x > 0\}, k = 1, \ldots, n+1$$

est admissible.

2. *Plus généralement, toute variété compacte est de type fini. La preuve est extrêmement technique : On construit un recouvrement admissible à l'aide d'une métrique riemannienne et de voisinages géodésiquement convexes.*
3. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas de type fini (sa cohomologie de De Rham n'est pas finie).*

Le résultat qui suit, couplé avec la suite exacte de Mayer-Vietoris et le *Lemme des cinq* (voir appendice), est la clé pour la plupart des théorèmes concernant la cohomologie des variétés de type fini.

Lemme 3.1. *Soit M une variété différentielle de dimension n de type fini. Si M n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, il existe un recouvrement ouvert de M par deux ouverts U et V tel que les trois ouverts $U, V, U \cap V$ soient de type minimal strictement inférieur à celui de M.*

Démonstration. Soit $p \geq 2$ le type minimal de M et $U_1, \dots, U_p$ un recouvrement ouvert admissible. On définit $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \dots \cup U_p$. L'ouvert U est contractile (donc de type minimal égal à 1) et V et $U \cap V$ ont des recouvrements admissibles de cardinal $p-1$. □

Proposition 3.1. *La cohomologie de de Rham d'une variété de type fini est de dimension finie.*

Démonstration. Par récurrence sur le type minimal de la variété. L'initialisation étant évidente, supposons que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $p-1$ et soit M une variété de type minimal p. On utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris au recouvrement ouvert donné par le lemme précédent :

$$H^{k-1}(U \cup V) \to H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V).$$

Les deux extrémités sont de dimension finie et la suite est exacte, on déduit que $H^k(M)$ est de dimension finie. □

Théorème 3.0.2 (Dualité de Poincaré). *Soit M une variété orientée de type fini de dimension n. L'application linéaire $\varphi : \Omega^k(M) \to (\Omega_c^{n-k}(M))^*$ définie par*

$$\varphi(\omega)(\tau) = \int_M \omega \wedge \tau, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \tau \in \Omega_c^{n-k}(M)$$

induit un isomorphisme $\varphi : H^k(M) \to (H_c^{n-k}(M))^*$

Démonstration. On peut vérifier que l'application bilinéaire

$$([\omega], [\tau]_c) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau,$$

ne dépend pas du choix de $\omega \in \Omega^k(M), \tau \in \Omega_c^{n-k}(M)$

Pour montrer que l'application $\varphi : H^k(M) \to (H_c^{n-k}(M))^*$ est un isomorphisme, on procède par récurrence sur le type minimal de M. L'initialisation revient au fait (bien connu maintenant) que

$$[\omega] \in H_c^n(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$$

est un isomorphisme. On suppose que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $p-1$ et soit M une variété de type minimal

p. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant au recouvrement ouvert donné par le lemme précédent :

$$H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V) \longrightarrow H^{k-1}(U\cap V) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U)\oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U\cap V)$$

ainsi qu'une partie du dual de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact (lemme 2) correspondant au même recouvrement :

$$\begin{aligned}(H_c^{n-k+1}(U) \oplus H_c^{n-k+1}(V))^* \longrightarrow (H_c^{n-k+1}(U \cap V))^* \longrightarrow \\ (H_c^{n-k}(M))^* \longrightarrow H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V)^*) \longrightarrow H_c^{n-k}(U \cap V))^*.\end{aligned}$$

On peut mettre ces deux suites exactes dans un même diagramme et on vérifie que ce diagramme est commutatif et on conclut par le Lemme des cinq. □

Par une méthode similaire on démontre le

Théorème 3.0.3 (Formule de Künneth). *Soient M et N deux variétés différentielles, et supposons que N est de type fini. On appelle p_1 et p_2 les projections canoniques de $M \times N$ sur M et N respectivement et on définit les applications linéaires*

$$H^k(M) \otimes H^\ell(N) \to H^{k+\ell}(M \times N)$$

par $[\omega] \otimes [\tau] \mapsto [p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\tau)]$. Alors l'application induite

$$\bigoplus_{k+\ell=p} H^k(M) \otimes H^\ell(N) \to H^p(M \times N).$$

est un isomorphisme pour chaque p.

Démonstration. On procède par récurrence sur le type minimal de N. Si le type minimal de N est 1, le résultat est équivalent au Lemme de Poincaré. Supposons qu'il soit vrai pour toutes les variétés N de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit N une variété de type minimal k. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant à un recouvrement ouvert de N donné par le lemme précédent :

$$H^{\ell-1}(U)\oplus H^{\ell-1}(V) \longrightarrow H^{\ell-1}(U\cap V) \longrightarrow H^\ell(N) \longrightarrow H^\ell(U)\oplus H^\ell(V) \longrightarrow H^\ell(U\cap V)$$

puis on tensorise cette suite exacte avec $H^k(M)$ et on prend la somme directe des suites obtenues pour $k + \ell = p$. Le résultat est une suite exacte (grâce au lemme 2). De plus, il existe des applications linéaires de chaque espace de cette suite exacte vers l'espace correspondant dans la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement ouvert $(M \times U) \cup (M \times V)$ de $M \times N$, et le diagramme ainsi obtenu est commutatif grâce aux propriétés des applications d'image réciproque. L'hypothèse de récurrence nous dit que les deux applications de gauche et les deux applications de droite sont des isomorphismes, donc le Lemme des cinq permet de conclure. $\square$

Applications

Si M est une variété compacte orientée de dimension $4k$, la *forme d'intersection* de M est la forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$ définie par

$$([\omega],[\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}$$

D'après la dualité de Poincaré, cette forme est non-dégénérée, et sa signature en tant que forme bilinéaire symétrique (c'est à dire la différence entre la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie positive et la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie négative) s'appelle la *signature* de M. La signature est un invariant important de la classe de difféomorphisme des variétés compactes orientées.

Avant la signature, les invariants les plus simples de la classe de difféomorphisme des variétés différentiables sont les *nombres de Betti*, définis par

$$b_i(M) := \dim(H^i(M)).$$

La dualité de Poincaré nous permet aussi d'obtenir des relations entre les nombres de Betti :

Théorème 3.0.4. *Soit M une variété différentielle compacte et orientée de dimension n.*

1. $b_i(M) = b_{n-i}(M)$ *quel que soit* i.
2. *Si* $n = 4k+2$ *alors* b_{2k+1} *est pair.*

Démonstration.

1. Le premier point est conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $H^i(M)$ et le dual de $H_c^{n-i}(M) = H^{n-i}(M)$.

2. D'après la dualité de Poincaré, l'application

$$([\omega],[\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}.$$

est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur $H^{2k+1}(M)$. Une telle forme ne peut exister que sur un espace de dimension paire.

□

La formule de Künneth donne un moyen simple de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré des variétés produits

Proposition 3.2. *Soient M et N deux variétés de type fini, on a :*

$$\chi(M \times N) = \xi(M)\xi(N)$$

Démonstration. En effet, de la formule de Künneth on a

$$\begin{aligned}
\chi(M \times N) &= \sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k \dim H^k(M \times N) = \sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k \dim\left(\bigoplus_{p+\ell=k} H^p(M) \otimes H^\ell(N)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m+n}(-1)^k \left(\sum_{p+\ell=k} \dim H^p(M) \dim H^\ell(N)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{p+\ell=k} (-1)^p \dim H^p(M) \cdot (-1)^\ell \dim H^\ell(N) = \chi(M) \cdot \chi(N)
\end{aligned}$$

Ainsi, par exemple, la caractéristique d'Euler-Poincaré du tore T^2 est nulle :

$$\chi(T^2) = \chi(S^1 \times S^1) = \chi(S^1)^2 = 0.$$

□

4 Calcul de la caractéristique d'Euler

Dans ce chapitre on va développer les méthodes géométriques essentielles pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de certains variétés compactes.

4.1 Cohomologie de De Rham

L'invaraince par homotopie, la suite exacte de Mayer-Vietoris couplés avec le lemme suivant, vont nous permettre de calcul la cohomologie de de Rham (et donc la caractéristique d'Euler) des variétés compactes.

Lemme 4.1. *Pour toute suite exacte*

$$0 \to E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \to 0$$

associées à une famille finie d'espaces vectoriels (de dimension finie), on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Démonstration. Il suffit d'écrire la condition d'exactitude de la suite avec le

Théorème du rang (premier théorème d'isomorphisme)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim E_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (\dim\ker f_k + \dim \operatorname{Im} f_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\Big((-1)^k \dim\ker f_k - (-1)^{k+1}\dim\ker f_{k+1}\Big) + (-1)^n \dim\ker f_n \\
&= (\dim\ker f_0 - (-1)^n \dim\ker f_n) + (-1)^n \dim\ker f_n = \dim\ker f_0 = 0
\end{aligned}$$

□

Passons maintenant aux exemples

Proposition 4.1. *On a*

1. $\chi(\mathbb{R}^n) = 1$.
2. $\chi($*bande de Mobius*$) = \chi(S^1) = 0$
3. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.
4. $\chi($*tore*$) = 0$.

Démonstration.

1. Il suffit de vérifier que $\mathbb{R}^n$ est contractile (a le même type d'homotopie d'un point) et comme $H^0(\{pt\}) = \mathbb{R}$ et $H^k(\{pt\}) = 0$ pour $k \geq 1$, alors $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\{pt\}) = 1$.
2. De la même façon, comme la bande de Mobius se rétracte par déformation en un cercle, alors $\chi(\text{bande de Mobius}) = \chi(S^1)$, il suffit de vérifier que $\chi(S^1) = 0$. Par les projections stéréographiques, on a $S^1 = U \cup V$ (où $U = S^1 \setminus \{(0,1)\}$ et $V = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$ sont contractiles). La suite de Mayer-Vietoris donne :

$$0 \to H^0(S^1) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(S^1) \to 0,$$

puisque $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$. On a donc

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to H^1(S^1) \to 0,$$

car S^1, U et V sont connexes et $U \cap V$ possède deux composantes connexes. Par le Lemme 4.1, on a $1-2+2-\dim H^1(S^1) = 0$, ce qui donne $\dim H^1(S^1) = 1$ et donc $\chi(S^1) = \dim H^0(S^1) - \dim H^1(S^1) = 1 - 1 = 0$.

On aurait pu conclure rapidement par le Théorème de dualité de Poincaré : $\dim H^1(S^1) = \dim H^0(S^1)$, ou de son corollaire : la caractéristique d'Euler-Poincaré de toute variété compacte de dimension impaire est nulle !

3. Le recouvrement de S^n par deux ouverts U et V contractiles (donnés par les projections stéréographiques) et la suite exacte de Mayer-Vietoris donnent pour $2 \le k \le n-1$:

$$0 \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(S^n) \to 0,$$

et comme $U \cap V$ à le même type d'homotopie que S^{n-1}, alors

$$H^k(S^n) \simeq H^{k-1}(S^{n-1}).$$

Donc on peut vérifier par récurrence que

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{pour } k = 0 \text{ ou } k = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Pour le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, il suffit d'appliquer la formule de Künneth $\chi(T^2) = \chi(S^1)^2 = 0$.

□

4.2 Théorie de Morse

Soit M une variété différentielle et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur M. Un point $a \in M$ est un ***point critique*** de f si $T_x f$ est l'application nulle (f n'est pas une submersion en a). De manière équivalent, dans toute carte locale de a, $\partial_{x_i} f(a) = 0$, $(i = 1, \ldots, n)$. Un point critique a de f est ***non dégénéré*** si la hessienne de f en a dans une carte locale (et donc dans toute carte locale de a) est inversible, i.e. si

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(a) \neq 0.$$

Une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ est dite de Morse si tout ses points critiques sont non dégénérés. On a le lemme important suivant :

Lemme 4.2. *Si $a \in M$ est un point critique non dégénéré de $f : M \to \mathbb{R}$, alors il existe une carte locale (U, φ) centrée en a telle que, pour tout $x \in U$*

$$f(x) = f(a) - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1} + \ldots + x_n,$$

où k désigne le nombre des valeurs propres < 0 de la hessienne de f en a.

Démonstration. Pour une preuve, voir [7]. □

Il résulte du Lemme de Morse que les points critiques non dégénérés sont isolés et donc sur une variété compacte, toute fonction de Morse admet un nombre fini de points critiques non dégénérés.
le nombre k dans le Lemme de Morse est appelé *indice* du point critique a. On a le Théorème important suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit M une variété différentielle compacte et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse. La caractéristique d'Euler de M est donnée par :*

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(f),$$

où $c_k(f)$ désigne le nombre de points critiques de f d'indice k.

Démonstration. Pour une preuve, voir [7]. □

Application. Si on prend la fonction hauteur h sur le tore T^2, qui est une fonction de Morse, elle possède 4 points critiques : un minimum d'indice 0 ($c_0(h) = 1$), deux points col d'indice 1 ($c_1(h) = 2$) et un maximum d'indice 2 ($c_2(h) = 1$). La caractéristique d'Euler du tore est donc

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

4.3 Théorème de Poincaré-Hopf

4.3.1 Indices des champs de vecteurs

On considère un champ de vecteurs ξ de classe C^∞ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, tel que m soit un zéro isolé de ξ.

L'indice de ξ en m, $\mathrm{Ind}_m\xi$ est le degré de l'application

$$\begin{array}{rccc} F: & S^d & \to & S^d \\ & x & \mapsto & \frac{X(m+\varepsilon x)}{\|X(m+\varepsilon x)\|} \end{array}$$

degré qui est le même pour tout ε tel que ξ ne s'annule qu'en m sur $B(m,\varepsilon)$.

Lemme 4.3. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme, alors*

$$\mathrm{Ind}_m\xi = \mathrm{Ind}_{\varphi(m)}\,\varphi_*\xi$$

Grâce à cette invariance par difféomorphisme, on peut donner un sens à l'indice d'un champ de vecteurs sur une variété différentielle.

Théorème 4.3.1. *Soit ξ un champs de vecteurs C^∞ sur R^d, dont les zéros dans $B(0,1)$ sont isolés et notés $x_1,...,x_n$, et rentrant sur S^{d-1}. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{x_i}\xi = (-1)^d.$$

Démonstration. Les zéros étant en nombre fini, on peut trouver un ensemble de boules $(B_i)_{i=1..n}$ de centre x_i et de rayon $\varepsilon_i > 0$ telles que $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \varnothing$. On note $D = B(0,1) \setminus \cup_{i=1}^{n} \{x_i\}$.

Le champ étant rentrant, il ne s'annule pas sur un voisinage U de la boule unité privé des points $(x_i)_{i=1..n}$. On peut donc définir une fonction lisse f de $U \setminus \cup_{i=1}^{n} \{x_i\}$ à valeur dans S^{d-1} comme suit :

$$f(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$$

En notant ω la forme volume canonique de S^{d-1}, le théorème de Stokes donne

$$\int_D d(f^*\omega) = \int_{S^{d-1}} f^*\omega - \sum_{i=1}^{n} \int_{S(x_i,\varepsilon_i)} f^*\omega$$

Or $\int_D d(f^*\omega) = 0$ car $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = f^*(0) = 0$ car ω est de degré maximal.

D'après la définition donnée ci-dessus de l'indice d'un champ de vecteurs, on trouve

$$\int_{S^{d-1}} f^*\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{x_i}\xi$$

Il reste donc à calculer le membre de gauche. On va montrer que $f_{|S^{d-1}}$ est homotope à l'antipodie σ qui est d'indice égal à $(-1)^d$; ce qui achèvera la démonstration. Soit donc

$$F(t,x) = \frac{(1-t)\xi(x) - tx}{\|(1-t)\xi(x) - tx\|}.$$

Le champ étant rentrant, le dénominateur de cette expression ne s'annule pas pour $t \in [0,1]$ et F définit donc une homotopie lisse entre $f_{|S^{d-1}}$ et l'antipodie. □

Le théorème suivant donne une généralisation intéressante des résultats précédents, mais sa démonstration n'est pas aisée. La caractéristique d'Euler d'une variété à bord peut être calculée à l'aide de la cohomologie de de Rham, en utilisant la notion de cohomologie relative (dans cette cohomologie, on considère les formes différentielles qui s'annulent sur un sous-espace de l'espace étudié, par exemple qui s'annulent sur son bord).

Théorème 4.3.2 (Théorème de Poincaré-Hopf). *Soit X une variété lisse compacte, à bord. Soit ξ un champ de vecteurs C^∞ sur X, sortant sur le bord, et dont les zéros sont isolés. Alors on a*

$$\chi(X) = \sum_{\{x,\ \xi(x)=0\}} \mathrm{Ind}_x \xi.$$

En particulier, si la caractéristique d'Euler est non nulle, tout champ de vecteurs doit s'annuler. Dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^{2n+1}$, il n'existe donc pas de champ de vecteurs jamais nul.

Démonstration. On peut trouver une démonstration détaillé dans le livre [2] □

Application. Le champ de vecteurs $X = y\partial_x - x\partial_y$ sur la sphère S^2 possède deux points singuliers d'indice 1 et donc

$$\chi(S^2) = 1 + 1 = 2.$$

En particulier, tout champ de vecteurs sur S^2 possède au moins un point singulier, sinon la caractéristique de S^2 serait nulle. Ce théorème est connu sous le nom de *Théorème de la boule chevelue*, en anglais «*Hairy Ball Theorem*». On déduit aussi de ce Théorème que la sphère S^2 ne supporte aucune structure de groupe de Lie (les groupes de Lie sont parallélisable et donc possède des champs de vecteurs sans singularités).

5 Annexe

5.1 Éléments de géométrie différentielle

Variétés différentielles

En géométrie, la notion de variété peut être appréhender intuitivement comme la généralisation de la classification qui établit qu'une courbe est dite variété de dimension un, et une surface est une variété de dimension deux. Une variété de dimension n, où n désigne un nombre entier, est un espace topologique localement euclidien, i.e. un espace muni d'un recouvrement par des parties ouverts homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Cette variété désigne donc l'ensemble des points qui appartiennent à une région s'apparente à un tel espace.

Les variétés différentielles sont des objets géométriques sur lesquelles il est possible d'effectuer les opérations du calcul différentiel et intégral.
Une variété (topologique) M est un espace topologique séparé à base dénombrable, tel que chacun de ses points admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément : pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x et un homéomorphisme $\varphi_x : U_x \longrightarrow \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$. On dit alors que (U_x, φ_x) est une *carte locale* de M. Donc les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systèmes de coordonnés locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable. Une famille de cartes (U_i, φ_i) qui recouvre M constitue un *atlas* de la variété M. Un

tel atlas est dit de classe $C^k, 1 \leq k \leq \infty$, si pour tous les indices i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, l'***application de changement de cartes***

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphismes de classe C^k, c'est-à-dire une bijection de classe C^k dont la bijection réciproque est aussi de classe C^k.

atlas compatibles Deux atlas de classe C^k sur une même variété topologique M sont dits *compatibles* lorsque leur réunion est encore un atlas de classe C^k. La relation de compatibilité ainsi introduite est une relation d'équivalence pour les atlas. Les classe d'équivalence définissent la structure de variété différentielle, une variété différentielle(ou variété différentiable)de classe C^k est une variété topologique munie d'une famille d'atlas de classe C^k tous compatibles avec un atlas donné.
Une variété *lisse* est une variété de classe C^∞.

Espace tangent et application tangente

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ dans un voisinage de $m \in \mathbb{R}^n$ et soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur, on leur associe la dérivée de f selon v en m :

$$lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(m+tv) - f(m)}{t} = v(f)$$

en coordonnées locales :

$$v(f) = \sum_{k=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(m)$$

On peut voir l'action de v comme étant une fonctionnelle (que l'on note encore v) de f, qui vérifie les propriétés de linéarité et de Leibniz :

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \tag{5.1}$$

$$v(fg) = f(m)v(g) + g(m)v(f) \tag{5.2}$$

L'espace tangent $T_m M$ en un point m de M est l'ensemble des applications $\varnothing$ de $C^\infty(m, \mathbb{R})$ à valeur dans $\mathbb{R}$ vérifiant les règles de linéarité et de Leibniz (1) et (2)
L'espace tangent en un point a d'une variété différentielle M est un espace

vectoriel qui intuitivement est l'ensemble de tous les vecteurs-vitesse possibles d'un "mobile" se déplaçant(sans pouvoir la quitter)dans la variété M quant il est en a.
Une façon commune en physique de décrire l'espace tangent est de dire que les vecteurs qu'il contient représentent les différences entre ce point et des points de la variété infiniment proches du premier. Cette façon d'interpréter l'espace tangent revient à considérer que la variété a localement une structure proche de celle d'un espace affine.
Lorsque la variété est plongée dans $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent en un point p est simplement l'ensemble des vecteurs tangents en p aux courbes(de classe C^1) tracées sur la variété et contenant p.

Définition géométrique. Supposons que M est une variété différentielle de dimension n et de classe C^1 et que p est une point de M. Soit (U,φ) une carte locale de M en p. Deux courbes $\gamma_1,\gamma_2 :]-1,1[\longrightarrow M$, telle que $\varphi\circ\gamma_1, \varphi\circ\gamma_2$ soit différentiables en 0, sont dites tangentes en p si

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = p$$

et

$$(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$$

Cette relation est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes est l'espace tangent en p à M, noté $T_p(M)$. La fonction $\gamma \longmapsto (\varphi\circ\gamma)'(0)$ induit par passage au quotient une bijection de $T_p(M)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui fait de l'espace tangent un espace vectoriel et elle notée $T_p\varphi$. La formule de changement de cartes montre que la structure vectorielle ne dépend pas de la carte locale choisie.

Application tangente Soient M et N deux variétés lisses et soit $f : M \to N$ une application lisse définie au voisinage d'un point $a \in M$.
Il existe une unique application linéaire, appelée *application tangente* à f en a et notée T_af définie de T_aM à valeurs dans $T_{f(a)}N$, vérifiant

$$T_af = \left(T_{f(a)}\phi\right)^{-1} \circ \left(D_{\varphi(a)}\phi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\circ T_a\varphi$$

Pour toutes cartes locales (U,φ) et (V,ϕ) de a et $f(a)$ respectivement. En d'autres termes,

$$\begin{array}{rccc} T_af : & T_aM & \to & T_{f(a)}N \\ & [\gamma] & \mapsto & [f\circ\gamma] \end{array}$$

Champs de vecteurs et flots

Un *champ de vecteurs* est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien ou généralement d'une variété différentielle. Pour la résolution des équation différentielles autonome du 1^{er} ordre, on utilise le champ des directions (appelé en physique champ des vitesses) qui représente les dérivées tangentes à la trajectoire de ces équation, ce qui permet de la tracer.
Les champs de vecteurs sont souvent utilisés en physique, pour modéliser par exemple la vitesse et la direction d'un fluide en mouvement dans l'espace, ou la valeur et la direction d'une force, comme la force magnétique ou gravitationnelle, qui évoluent point par point.

Un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction C^∞, notée X, définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'image d'un point $x \in U$ par X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vu comme élément de l'espace tangent T_xU. Cette notion se généralise aisément aux variétés.

Champ de vecteurs sur une variété différentielle Soit M une variété différentielle. L'union (disjointe)

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$$

de tous les espaces tangents s'appelle le ***fibré tangent*** de M et on montre que ce fibré possède canoniquement une structure de variété différentielle.
Un champ de vecteur X sur M est une application

$$X : M \longrightarrow TM$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $X(x) \in T_xM \; \forall x \in M$

(ii) X est lisse.

Si (U, φ) est une carte locale de x, alors l'espace tangent T_xM est engendré par les dérivations ∂_{x_i}, où pour tout $f \in C^\infty(U)$

$$\partial_{x_i} f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)).$$

Le vecteur $X(x) \in T_xM$ s'écrit alors

$$X(x) = X_1(x)\partial_{x_1} + ... + X_n(x)\partial_{x_n}$$

où les X_i sont des fonctions C^∞ de U dans $\mathbb{R}$.

On notera par $\mathscr{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M. Alors un champ de vecteurs sur une variété différentielle est une section du *fibré tangent* de cette variété.
Si la variété est compacte, les lignes de champ sont définies sur $\mathbb{R}$ entier.

courbes intégrales Soit M une variété différentielle et $\mathscr{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M. Une courbe γ (de classe C^∞) sur M est dite *courbe intégrale* de X si :

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \tag{5.3}$$

Exemples.

1. *$M = \mathbb{R}^2$, $X = y\partial_x - x\partial_y$. Une courbe lisse $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe intégrale de X si*
$$(x'(t), y'(t)) = (y(t), -x(t)),$$
ceci donne $x'' = y' = -x$ et $y = x'$ et donc
$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & A\cos t + B\sin t \\ y & = & -A\sin t + B\cos t \end{array}\right.$$
Comme $x^2 + y^2 = A^2 + B^2 = cte$, alors les courbes intégrales de X sont les cercles centrés à l'origine $(0,0)$
2. *$M = \mathbb{R}^2$, $X = x\partial_x + y\partial_y$. L'équation(5.3), de la courbe intégrale de X est dans ce cas*
$$(x'(t), y'(t)) = (x(t), y(t)),$$
et donc $((x(t), y(t)) = (Ae^t, Be^t)$. Les courbes intégrales sont les droites $x = 0$ et $y = \lambda x$ (les droites qui passent par l'origine $(0,0)$).

Flot local Soit M une variété différentielle et $X \in \mathscr{X}(M)$. Pour tout point $x_0 \in M$, il existe une unique courbe intégrale γ_{x_0} de X maximale, qui passe par x_0. i.e. γ_{x_0} est l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{lcc} \gamma'(t) & = & X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{5.4}$$

Le *flot local* de X est l'application C^∞, de M dans M notée $\exp(tX)$, qui est définie pour tout t fixé dans le domaine de γ_x par

$$\exp(tX)(x) = \gamma_x(t).$$

Exemples. *Pour les mêmes exemples ci-dessus, on a*

1. $M = \mathbb{R}^2$, $X = y\partial_x - x\partial_y$
$$\exp(tX)(x,y) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right).$$

2. $M = \mathbb{R}^2$, $X = y\partial_x - x\partial_y$
$$\exp(tX)(x,y) = \left(e^t x, e^t y\right) = e^t\,(x,y).$$

3. *Dans les deux exemples précédents, le champ de vecteurs X est complet (son flot est global, i.e. défini pour tout $t \in \mathbb{R}$). Voici un exemple d'un champ de vecteurs qui n'est pas complet. $M = \mathbb{R}$ et $X = x^2\partial_x$. Une courbe intégrale qui passe par $a \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation :*
$$x' = x^2,\ x(0) = a,$$
i.e. $x(t) = \frac{a}{1-at}$. Le flot local de X est donc
$$\exp(tX)(x) = \frac{x}{1-tx},$$
qui est défini pour $t \in I_x$, où
$$I_x = \begin{cases}]\frac{1}{x}, +\infty[, & \text{si } x < 0 \\ \mathbb{R}, & \text{si } x = 0 \\ ]-\infty, \frac{1}{x}[, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Formes différentielles et calcul de Cartan

Dans toute cette partie, le corps de base $\mathbb{K}$ de toute espace vectoriel est supposé égal à $\mathbb{R}$.

Application multilinéaire En algèbre linéaire, une application multilinéaire est une application à plusieurs variables et à valeurs vectorielles qui est linéaire en chaque variable. Une application multilinéaire à valeurs scalaires est appelée forme multilinéaire. Une application multilinéaire à deux variables est dite bilinéaire.

Nous noterons l'ensemble des applications k-linéaires de E dans F par
$$\mathscr{L}^k(E,F) = \Big\{f : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k\text{-fois}} \longrightarrow F,\ k\text{-linéaire}\Big\}.$$
Si $F = \mathbb{K}$, nous noterons simplement $\mathscr{L}^k E$.

Application alternée Une application $f \in \mathscr{L}^k(E,F)$ est dite *alternée* si elle s'annule à chaque fois qu'on l'évalue sur un k-uplet contenant deux vecteurs identiques : s'il existent $i \neq j \in \{1,...,k\}$ tels que $x_i = x_j$ alors $f(x_1,...,x_k) = 0$. L'application déterminant en est un example : c'est une forme multilinéaire alternée des colonnes (ou des lignes) d'une matrice carrée. D'une manière équivalente, une application $f \in \mathscr{L}^k(E,F)$ est alternée si pour toute permutation $\sigma \in S_k$, $f(x_1,...,x_k) = \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(k)})$.

Rappelons qu'on appelle permutation $\sigma \in S_n$ toute bijection de l'ensemble $\{1,...,n\}$. On note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

La Signature de σ notée $\varepsilon(\sigma)$ est donnée par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sharp\{\text{inversions de } \sigma\}}.$$

Une inversion τ est toute permutation vérifiant

$$\tau(i) > \tau(j), \text{ pour } i < j \text{ et } \tau(k) = k, \text{ pour } k \neq i, j.$$

Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ possède quatre inversions qui sont : $(1,3), (2,3), (2,4), (2,5)$ et donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

Nous noterons l'ensemble des formes k-linéaires alternées sur E par

$$\wedge^k E = \left\{ f \in \mathscr{L}^k E, \text{ avec } f \text{ alternée} \right\}$$

Alternateur Toute n-forme peut être rendu alternée, à l'aide de l'opérateur $A_n : \mathscr{L}^n E \longrightarrow \wedge^n E$, défini par :

$$(A_n f)(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Produit extérieur Soient $f \in \wedge^n E, g \in \wedge^m E$. Le produit extérieur de f et g, noté $f \wedge g$, est la $n+m$-forme définie par

$$f \wedge g\,(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = \frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) g(x_{\sigma(n+1)}, ..., x_{\sigma(n+m)}).$$

On a les propriétés suivantes, pour tout $f \in \wedge^n E, g \in \wedge^m E$:

1. Le produit extérieur est bilinéaire : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (\alpha f_1 + \beta f_2) \wedge g = \alpha f_1 \wedge g + \beta f_2 \wedge g \\ f \wedge (\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha f \wedge g_1 + \beta f \wedge g_2 \end{cases}$$

2. Le produit extérieur est associative : $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.
3. Le produit extérieur n'est pas commutatif : $f \wedge g = (-1)^{nm} g \wedge f$.

Formes différentielles Les formes différentielles se définissent comme une extension en géométrie différentielle des formes multilinéaires alternées.
Pour une variété différentielle M, une forme différentielle ω de degré k sur M est un champ d'applications k-linéaires alternées sur les espaces tangents T_xM avec une dépendance régulière en x : pour tout champs de vecteurs $X_1, ..., X_k$, la fonction $x \longmapsto \omega_x(X_1(x), ..., X_k(x))$ est de classe C^∞.
L'ensemble des applications k-linéaires alternées sur T_xM forme un espace vectoriel noté $\wedge^k T_x^* M$. L'ensemble de ces espaces forme ce qu'on appelle un *fibré vectoriel* sur M, noté $\wedge T^*M$. Une forme différentielle de degré k peut se redéfinir comme une *section globale* de ce fibré vectoriel.
Cette approche permet non seulement de donner une meilleure signification à la régularité de la forme différentielle, mais permet aussi d'étendre la définition des formes différentielles. Si E est un fibré vectoriel sur M, une forme différentielle de degré k à valeurs dans E est une section globale du produit tensoriel $\wedge^k T^*M \otimes E$. C'est donc un champ d'applications multilinéaires alternées à valeurs dans les fibres de E.

Opérations sur les formes différentielles La manipulations des formes différentielles en pratique exige un ensemble d'opérations élémentaires. Certaines sont purement algébriques et se définissent en réalité pour toutes applications multilinéaires alternées. D'autres sont propres à la topologie différentielle et aux formes différentielles.
Opérations algébriques
Par définitions, l'ensemble des formes différentielles de degré k sur une variété différentielle M est noté $\Omega^k(M)$, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un module sur $C^\infty(M)$.

Image réciproque

Définition Soient M et N deux variétés différentielles de dimension m et n respectivement. Toute k-forme différentielle ω sur M s'écrit en coordonnées

locales
$$\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \omega_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$
Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application lisse. L'application image réciproque $\varphi^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ est définie par
$$\varphi^*\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \left(\omega_{i_1\ldots i_k} \circ \varphi\right) d\varphi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi^{i_k}.$$
On a les propriétés suivantes :

1. Si $M = N$ et φ est l'identité alors φ^* est l'identité de $\Omega^k(M)$ pour tout entier k. Si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications lisses Alors
$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$
2. Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre les algèbres graduées $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ et on a $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Différentielle extérieure

À toute k-forme ω on associe la $(k+1)$-forme $d\omega$ définie par la formule :
$$d\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_\ell} dx_\ell \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$
On définit ainsi, pour tout k, un opérateur linéaire $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$, appelé *différentielle extérieure* sur M.

La différentielle extérieure est caractérisée par :

1. Pour tout $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df est la différentielle de f usuelle.
2. Pour $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\beta \in \Omega^\ell(M)$ on a :
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$
ce qui veut dire que d est une *dérivation* sur l'algèbre graduée $\Omega^*(M)$.
3. Pour tout k, l'opérateur composé
$$d^2 = d \circ d : \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(M)$$
est nul.

4. La différentielle d commute à avec l'image réciproque φ^* pour toute application différentielle $\varphi : M \longrightarrow N$, i.e. pour toute forme $\omega \in \Omega^*(M)$,

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Calcul de Cartan

Produit intérieur. Soit $X \in \mathscr{X}(M)$. Le Produit intérieur d'une k-forme ω par X, noté $i_X\omega$ est défini par

$$(i_X\omega)(X_1, ..., X_{k-1}) = \omega(X, X_1, ..., X_{k-1}).$$

Ceci définit un opérateur linéaire $i_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$ qui vérifie :

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge i_X\beta.$$

Dérivée de Lie. Soit $X \in \mathscr{X}(M)$. La dérivée de Lie suivant X, notée $\mathscr{L}_X$ est définie, pour tout k-forme différentielle ω par :

$$(\mathscr{L}_X\omega)(X_1, ..., X_k) = \mathscr{L}_X(\omega(X_1, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, ..., [X, X_i], ..., X_k).$$

La dérivée de Lie définit une dérivation sur $\Omega^*(M)$, i.e.

— pour tout k, $\mathscr{L}_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ est linéaire.
— $\mathscr{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathscr{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathscr{L}_X\beta)$.

On a les propriétés suivantes :

1. $\mathscr{L}_X\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(tx))^*\omega$.
2. $\mathscr{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$ (Formule magique de Cartan).

Bibliographie

[1] R. Bott & L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer (1995).

[2] V. Guillemin & A. Pollack, *Differential Topology*. Prentice Hall (1974).

[3] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer (2013).

[4] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences ,(1996).

[5] I. H. Madsen & J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology : De Rham Cohomology and Characteristic Classes*. CRC (1997).

[6] T. Masson, *Introduction aux (Co)Homologies : Cours et exercices*, Hermann (2008).

[7] J. W. Milnor, *Morse Theory*, Princeton 1963.

[8] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable view point*. Princeton (1997).

[9] E. Outerelo & J. M. Ruiz, *Mapping degree theory* . AMS (2009).

[10] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 1, Publish or Perish (1999).

De Rham Cohomology

ABSTRACT

This Master thesis is devoted to the study of an important topological invariant, the Euler-Poincaré characteristic. We have developed the essential geometric methods to calculate the characteristic of compact manifolds.

We have developed some examples and outlined some important applications on the geometry and topology of certain manifolds, namely : The Hairy Ball Theorem.
keywords : Euler-Poincaré characteristic, homotopy, homology, de Rham cohomology, Poincaré duality, Morse theory, Poincaré-Hopf Theorem.

Cohomologie de de Rham

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un invariant topologique important, qui est la caractéristique d'Euler-Poincaré. Nous avons développé les méthodes géométriques essentielles pour calculer la caractéristique des variétés compactes.

Nous avons développé quelques exemples et exposé quelques applications importantes concernant la géométrie et la topologie de certaines variétés compactes, à savoir : le Théorème de la boule chevelue.
Mots-clés : Caractéristique d'Euler-Poincaré, homotopie, homologie, cohomologie de de Rham, dualité de Poincaré, Théorie de Morse, Théorème de Poincaré-Hopf.