UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des sciences et de la technologie et des sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Par : Meriem Chaoubi

Thème

Sur un problème d'évolution parabolique - hyperbolique.

Soutenu publiquement le : 19/09/2013

Devant le jury composé de :

Mr.Chacha Djamal Ahmed	Pr. universié KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr.Mrabet Ismail	M. C. université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr.Maflah Mabrouk	M. C. université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la
force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur
de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Kayoum "
Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse,
qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère
A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant
toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie
à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger.
Que dieu les gardes et les protège.
A mes soeurs........
A mes frères ....
A mes amies.
A tous ceux qui me sont chères.
A tous ceux qui m'aiment.
A tous ceux que j'aime. Je dédie ce travail

Remerciement

En préambule à ce mémoire nous remerciant ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.
Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté
Nous tenant à remercier sincèrement Monsieur, Maflah, qui, en tant que Directeur de mémoire, se sont toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire,
ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes

Table des matières

Introduction

On peut toujours formuler ces problèmes de la manière suivante : Trouver une fonction$u$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Au \\ u(0,x) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où u_0 est une fonction (ou une distribution) donnée et A un opérateur aux dérivées partielles en x, complété par des conditions aux limites (problème mixte) ou non (problème de Cauchy). On peut, en particulier, mettre sous cette forme le problème de Cauchy pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^2}{\partial^2 t}(t,x) = Bu \\ u(0,x) = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1 \end{cases} \tag{2}$$

où B est un opérateur elliptique du second ordre ; il suffit de prendre$\partial u/\partial t$ comme fonction inconnue auxiliaire.

Système à réaction diffusion

Un système à réaction diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentration d'une ou plusieurs substance spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réaction chimiques locales , dans lequel les différentes substances se transforment , et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace. Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie.cependant,ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente :la biologie, la physique,la géologie section diffusion ont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent.mathématiquement,les systèmes à réaction diffusion sont représentes par des équations différentielle partielle paraboliques semi linaires qui prennent la forme générale de

$$\partial_t q = D\Delta q + R(q)$$

Ou chaque composante du vecteur$q(x,t)$ représente la concentration d'une substances .D est une matrice diagonale de coefficients de diffusion .δ désigne le Laplacien et R représente toutes les réaction locale les solutions d'une equation de réaction diffusion peuvent présenter des comportements très divers parmi lesquels la formation d'ondes progressives et de phénomènes ondulatoires ou encore de motifs entropiques (bandes,hexagones et d'autres motifs plus complexes tels que les solutions dissipatifs)

L'équation des ondes et le type hyperbolique

L'équation des ondes (équation de d'Alembert) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) = 0 \tag{3}$$

régit le comportement de la densité dans une onde sonore, c'est-à-dire une perturbation de faible amplitude d'un gaz non visqueux au repos. Dans une série de phénomènes physiques représentés par des grandeurs vectorielles, chaque composante des vecteurs concernés obéit à cette même équation :ondes transversale et longitudinale dans un solide élastique, ondes électromagnétiques, etc. Il faut y ajouter les phénomènes analogues dépendant seulement d'une ou deux variables d'espace ; parmi eux, les vibrations transversales d'un fil élastique donnent lieu au cas particulier de l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{4}$$

la plus ancienne à avoir été explicitement étudiée (dans la décennie de 1740 par d'Alembert, Daniel Bernoulli et Euler). La possibilité d'écrire toutes les solutions de l'équation des cordes vibrantes sous la forme :

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

permet d'en voir facilement certaines propriétés :

a) Le problème de Cauchy est bien posé, tant dans le futur ($t > t_0$) que dans le passé ($t < t_0$). Ce problème s'énonce ici : « Trouver u vérifiant l'équation (4) et de plus les conditions :

$$u(t_0, x) = u_0 x \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) = u_1(x) \tag{5}$$

où u_0 et u_1 sont des fonctions données. »

b) Les solutions se propagent à la vitesse c. Cette affirmation délibérément vague peut se préciser de plusieurs façons. Par exemple en revenant au problème de Cauchy

Annexe

Nomenclature

C : Capacité calorifique à pression constante

k : Constante

q : Flux de chaleur

t : Temps

T : Température

x : Distance m Lettres grecques

α : Diffusivité thermique

λ : Conductivité thermique

ρ : Masse volumique du solide

ω : Pulsation

ξ : Température

Θ :Température

$H_\alpha := -D((-L))^\alpha)$ et $\| u \|_\alpha := \| (-L)^\alpha u \|$ aussi$(-L)^\alpha$ est un opérateur fermé est doncH_α un espace de Banach par rapport à la norme graphique $\| u \| + \| u \|_\alpha$ soi-disant .

Chapitre 1

Réaction Diffusion

1.0.1 Introduction

Une réaction-diffusion comporte une terme de réaction et une terme de diffusion, c-à-d. la forme typique est comme suit :

$$u_t = D\Delta u + f(u)$$

$u = u(x,t)$ est une variable d'état et décrit la densité/concentration des substances, une population ... à la position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ au temps $t((\Omega)$ est un ensemble ouvert).
Δ : dénote l'opérateur de Laplace. Ainsi la première terme du côté droit décrit la « diffusion »,
y compris D : comme coefficient de diffusion. Deuxième terme , $f(u)$ est lisse fonction$f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et décrit des processus avec vraiment le « changement » le u : présente, i.e.quelque chose arrive à lui (naissance, mort, réaction chimique ...), pour répandre pas simplement dans l'espace. Il est également possible, cela la limite de réaction dépend non seulement de u, mais également de la première dérivée de u, c-à-d. et/ou explicitement de x

Au lieu d'une équation scalaire, on peut également présenter des systèmes des équations de diffusion de réaction, qui sont de la forme $u_t = D\Delta u + f(x, u, \nabla u)$ ou $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$

Dans cette section, nous traiterons une telle réaction - la diffusion, de tous les deux, un point de vue analytique, mais apprennent également quelque chose au sujet de l'application d'une telle équation.

1.0.2 Équation de diffusion

la loi/conservation de Fick de la masse

L'approche classique à la diffusion est par l'intermédiaire de conservation de la masse et le Loi Fick que nous commençons $u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ (comme densité de population ou concentration de substance etc.) à l'intérieur d'un récipient. Il y a un flux, dénoté par $J(x,t) \in \mathbb{R}^3$, c.-à-d. un vecteur qui se dirige dans la direction générale du mouvement et du$\mid J(x,t) \mid$ est proportionnel à la quantité de particules qui entrent dans cette direction par temps d'unité. Nous choisissons un volume Ω d'essai avec la frontière Γ. Si aucune « réaction » n'ont lieu, alors le seul facteur qui influence le changement de la densité de Ω peut être un flux par Γ, i.e.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dV = -\int_{\Gamma} J(x;t)dS \tag{1.1}$$

là où le dV de dénote le volume intégral $(\mathbb{R}^{n=3}), dS$ l'intégration extérieure de $(\mathbb{R}^{3-1})$ que le théorème de divergence du Gauss indique :

$$\int_{\Gamma} J(x,t)dS = \int_{\Omega} divJ(x,t)dV.$$

ainsi (1.1) reformulé à :

$$\int_{\Omega}(\frac{d}{dt}u + divJ)dV = 0$$

puisque cette équation est satisfaisante pour tous les volumes Ω d'essai, l'intégrale peut être laissé de côté, conduisant à

$$\frac{d}{dt}u + divJ = 0 \tag{1.2}$$

la soi-disant première loi de Fick (le raccordement entre le premier temps-dérivé de la densité et le flux quand conservation de la masse arrogante) Fick deuxièmes indique que le flux a le direction du gradient négatif (de la distribution de particules), c.-à-d.

$$J = -D\nabla u \tag{1.3}$$

L'insertion de (1.2) dans (1.3) rapporte l'équation de diffusion :

$$u_t = D\Delta u.$$

(également appelée équation de la chaleur).

1.0.3 Principe de Maximum (faible)

[4] Comme exemple simple, nous considérons, d'équation de la diffusion 1D

$$u_t = Du_{xx}$$

A la propriété que célèbre de l'équation de diffusion est le principe de maximum.

Proposition 1 *(principe de maximum (faible) pour l'équation de diffusion) : Laisser $u(x,t)$ satisfont l'équation de diffusion dans rectangle $R = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ puis la valeur maximum de $u(x,t)$ est assumé ou sur la ligne initiale $(t = 0)$or sur les lignes de frontière$(x = 0$ ou $x = l)$*

Preuve. De l'analyse nous savons : Pour un maximum dans l'intérieur du secteur de notion, les premières dérivées doivent disparaître, et deuxième dérivé doivent satisfaire certain inégalité, par exemple $u_{xx} < 0$. Si nous savions (qui n'est pas le cas), ce $u_{xx} \neq 0$au maximum, puis nous avons de $u_{xx} < 0$ et simultanément de $u_t = 0$, i.e. $u_t \neq u_{xx}$ une contradiction. Mais $u_{xx} = 0$ est possible, ainsi avons-nous besoin de plus d'efforts . Laisser M être le maximum de $u(x,t)$ sur les trois frontières $t = 0, x = 0$ et $T = l$. Remarquer qu'une fonction continue qui est sur un ensemble borné et fermé, est borné et suppose son maximum sur cet ensemble, alors M existe. Nous devons prouver que $u(x,t) \leq M$ sur le rectangle entier R,. Laissé $\varepsilon > 0$et $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$ (le prochain but est de montrer que $(v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2)$ Évidemment, satisfis de v

$$v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2 \text{ pour } t = 0, x = 0, \text{ et } x = l$$

en outre

$$v_t - Dv_{xx} = u_t + \varepsilon x^2 - D(u + \varepsilon x^2)_{xx} = u_t - Du_{xx} - 2\varepsilon D = -2\varepsilon D < 0 \tag{1.4}$$

ce qui correspond à une inégalité de diffusion . Supposer que v assume son maximum à un point intérieur (x_0, t_0),, i.e. $0 < x_0 < l$, et $0 < t_0 < T$, . De analyse nous savent que $v_t = 0$ et $v_{xx} \leq 0$ en (x_0, t_0), mais c'est en contradiction à (1.4),. Ainsi, il n'y a aucun maximum possible à l'intérieur de R.. Supposer après que $v(x,t)$ a un maximum sur la frontière supérieure de $R(t_0 = T, 0 < x < l)$.. Encore $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$, comme $v(x_0, t_0) > v(x_0, t_0 - \delta)$, , nous obtient $v_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \to 0} \dfrac{v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \delta)}{\delta} \geq 0$ ce qui contredit 1.4. Mais quelque part en R, là doit être un maximum de $v(x,t)$, ainsi, il doit être sur la ligne de base ou sur frontières de R, et de $v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2$ est valide pour R Maintenant il suit immédiatement cela

$$u(x,t) \leq M + \varepsilon(l^2 - x^2)$$

cette inégalité est valide pour tout$\varepsilon > 0$ ainsi nous obtenons

$$u(x,t) \leq M \text{ pour } u(x,t) \in R$$

■

1.0.4 Unicité

Un point important est d'examiner l'unicité des solutions pour déceler un problème indiqué. En cas de Diffusion l'équation, un premier état et les états de frontière (pour des frontières de finite) doivent être prescriptible. Ici, nous considérons le soi-disant problème de Dirichlet pour l'équation de diffusion (y compris manque homogénéité f), c.-à-d.

$$u_t - Du_{xx} = f(x,t) \text{ pour } 0 < x < l, \text{ et } t > 0 \tag{1.5}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{1.6}$$

$$u(0,t) = g(t) \tag{1.7}$$

$$u(l,t) = h(t) \tag{1.8}$$

(nous considérons la théorie derrière plus tard en détail)

Proposition 2 *: (Unicité de la solution) Le problème de Dirichlet des Diffusion équation* (1.5) *diffusion*(1.8) *a tout au plus une solution*

. **Preuve.** Pour la preuve, nous employons le soi-disant méthode d'intégrale d'énergie : Supposer qu'il y a deux solutions $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$; laisser $w = u_1 - u_2$, . Selon le définition, satisfis de w :

$$w_t - Dw_{xx} = 0 \text{ pour } 0 < x < l \text{ et } t > 0$$

$$w(x,0) = 0 \text{ (condition initial)}$$

$$w(0,t) = 0 \text{ et } w(l,t) = 0 \text{ (d'états de frontière)}$$

En outre, nous obtenons

$$0 = 0; w = (w_t - Dw_{xx}).w = \left(\frac{1}{2}w^2\right)_t + (-Dw_xw_x)_x + Dw_x^2$$

. Cette équation est intégrable :

$$0 = \int_0^l \left(\frac{1}{2}w^2\right)_t dx - \underbrace{[Dw_xw]_0^t}_{=0 \text{ dù au cond aux bord}} + D\int_0^l w_x^2 dx$$

t-dérivé peut être pris hors de intégrale, ainsi

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \frac{1}{2}(w(x,t))^2 dx = -D\int_0^l (w_x(x,t))^2 dx \leq 0$$

Ceci signifie : L'intégrale $\int_0^l w^2 dx$ est monotone diminuant (en t), c.-à-d. dans chaque cas nous ont

$$0 \leq \int_0^l q(w(x,t))^2 dx \leq \int_0^l \underbrace{(w(x,0))^2}_{=0 \text{ dù au init . cond}} dx = 0$$

Il suit ce $w(x,t) = 0$, ainsi $u_1 = u_2$ pour tout $t \geq 0$. ■

1.0.5 Solution Fondamentale De l'équation de Diffusion

[4]

En cette sous-section, nous considérons l'équation du diffusion (1D) dans l'ensemble x-axis, c.-à-d. de $-\infty < x < +\infty$ et $t \geqslant 0$ évidemment, nous avons besoin seulement d'un condition initiale, aucun état de frontière ; ainsi nous considérons problème

$$u_t = Du_{xx} \text{ pour } -\infty < x < +\infty, t > 0 \tag{1.9}$$

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{1.10}$$

Idée : Dans une étape de première, nous résolvons le problème pour une fonction spéciale $\phi(x)$ et dans une deuxième étape dérivent solution générale. Dans ce but, nous employons cinq soi-disant propriétés d'invariance de l'équation de diffusion (1.9) :

a) la traduction $(u(x-y,t)$ de chaque solution $u(x,t)$ est également une solution

b) chaque dérivé $(u_x, u_t, u_{xx} \ldots)$ d'une solution est également une solution

c) chaque combinaison linéaire des solutions de (1.9) est également une solution (due aux linéarités de l'équation)

d) intégrale de chaque d'une solution est également une solution. $S(x,t)$ soit une solution de (1.9), puis également $S(x-y,t)$ et par conséquent aussi

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t))g(y)dy$$

pour chaque fonction $g(y)$ si l'intégrale converge de à façon proportionnée.

e) que chaque dilatation $u(\sqrt{a}x, at)(a > 0)$ d'une solution est également une solution, il peut être prouvé par l'application règle à chaînes : pose $v(x,t) = u(\sqrt{a}x, at)$ alors

$$v_t = \frac{\partial(at)}{\partial t} u_t = au_t, v_x = \frac{\partial(\sqrt{a}x)}{\partial x} u_x = \sqrt{a}u_x, v_{xx} = \sqrt{a}\sqrt{a}u_{xx} = au_{xx}$$

Nous recherchons une solution particulière (dénotée par $Q(x,t)$) de(1.9) remplissant la condition initiale spéciale

$$Q(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Q est déterminé dans trois étapes :

étape 1 : En raison de propriété(e) nous savons qu'une dilatation $x \to \sqrt{a}x, t \to at$ feuilles $Q_t = DQ_{xx}$ et condition initial (1.11) sans changement, tellement aussi $Q(x,t)$ devrait demeurer sans changement. C'est seulement possible si la dépendance de Qon x et t est du combinat $\frac{x}{\sqrt{t}}$ de dilatation de La dilatation mène$\frac{x}{\sqrt{t}}$ à$\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{at}} = \frac{x}{\sqrt{t}}$ au nous recherchons $Q(x,t)$ de la forme suivante :

$$Q(x,t) = g(p) \text{ pour } p = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \tag{1.12}$$

la fonction g doit encore être déterminée. (Remarque que $\sqrt{4D}$ comme facteur additionnel sera plus tardif utile ; au moment où il ne joue pas un rôle).

Étape 2 : Nous pouvons formuler une ODE pour g, utiliser (1.12) et (1.9) :

$$Q_t = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}}g'(p)$$

$$Q_x = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}}g'(p)$$

$$Q_{xx} = \frac{dQ_x}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{4Dt}g''(p),$$

ainsi

$$0 = Q_t - DQ_{xx} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}}g'(p) - \frac{1}{4t}g''(p) = \frac{1}{t}(-\frac{p}{2}g'(p) - \frac{1}{4}g''(p))$$

l'EDO pour g lit

$$g'' + 2pg' = 0$$

. Nous trouvons

$$g' = c_1.e^{-\int 2pdp} = c_1.e^{-p^2}$$

et

$$Q(x,t) = g(p) = c_1\int e^{-p^2}dp + c_2$$

Étape 3 : Pour les frontières intégrales nous choisissons

$$Q(x,t) = g(p) = c_1\int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-p^2}dp + c_2$$

ce qui est pour $t > 0$ tenant compte de l'état initial pour$Q(x,t)$, exprimé comme limiter $t \longrightarrow 0$, que nous obtenons :

$$\text{pour } x > 0 : 1 = \lim_{t\searrow 0} Q(x,t) = c_1\int_0^{\infty} e^{-p^2}dp + c_2 = c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2$$

$$\text{pour } x < 0 : 0 = \lim_{t\searrow 0} Q(x,t) = c_1\int_0^{-\infty} e^{-p^2}dp + c_2 = -c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2$$

Ainsi $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; c_2 = \frac{1}{2}$ et

$$Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-p^2}dp \text{ pour } t > 0$$

Ceci remplit toutes les conditions demandes.laisser

$$S = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

selon la propriété (b) c'est également une solution de (1.9). Pour un arbitraire(différentiable) fonction.ϕ avec $\phi(x) = 0$ pour large $\mid y \mid$, nous définissons

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy \text{ pour } t > 0 \tag{1.13}$$

Selon $(d), u$ est également solution de (1.9). Utilise les produits partiels d'intégration

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}[Q(x-y,t)]\phi(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\phi'(y)dy - \underbrace{[Q(x-y,t)]\phi(y)]_{y=-\infty}^{y=\infty}}_{=0} \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,0)\phi'(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(y)dy = \phi(x) \end{aligned}$$

Ainsi, en effet (1.13) correspond à la formule désirée de solution, où

$$s = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \text{ pour } t > 0$$

c-à-d.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2)/4Dt}\phi(y)dy \tag{1.14}$$

s s'appelle par exemple solution fondamentale ou la fonction Green Dans la plupart des cas, il est impossible de résoudre l'intégrale en (1.14) expliciter, mais pour un certain $\phi(x)$ il peut être écrit bien en employant la soi-disant fonction erreur (bien connue dans les statistiques) :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

Les propriétés principales de la fonction erreur sont

$$Erf(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} Erf(x) = 1$$

1.0.6 fondations Mathématiques

États de frontière

[2]

Si nous considérons une équation de diffusion de réaction sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i.e. $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, c.-à -d puis nous avoir besoin, additionnel aux conditions initiales, états de frontière bien adaptés (autrement, l'unicité ne peut pas être garanti). Nous considérons l'équation

$$u_t = \Delta u + f(u) \text{ pour } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0$$

dans les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega$$

. Généralement les états de frontière ont la forme

$$b(x, t, u, \nabla u) = 0, \text{ pour } x \in \partial\Omega, t > 0.$$

Les exemples typiques sont : états de frontière de Dirichlet :

$$u = b(x, t) \text{ pour } x \in \partial\Omega, t > 0,$$

là où b est un prescriptible fonctionner. Si $b = 0$, qu'ils s'appellent les états de frontière homogènes de Dirichlet. états de frontière de Neumann :

$$\nabla u.n = b(x, t) \text{ pour } x \in \partial\Omega, t > 0,$$

quand$n$ est la normale externeω au $x \in \partial\Omega$. Le cas homogène, $b = 0$, correspond au non état de flux - aucun particule/individu ne peut laisser ou écrire de domaineω par l'intermédiaire des frontières. états de frontière de Robin : (également appelé états de frontière mixtes) :

$$\alpha(x, t)u + \beta(x, t)\nabla u.n = b(x, t) \text{ pour } x \in \partial\Omega, t > 0,$$

notation comme ci-dessus. Une partie remarque :

• il est possible de combiner différents types de conditions de frontière sur les parties séparées de la frontière.

• Ici, les conditions de frontière ont état présentés en tant qu'étais linéaires in$u$; il est possible également aux états de frontière have non linéaire (mais à ceci fait l'analyse probablement plus compliquée).

• Pour l'existence des solutions des équations de réaction-diffusion, le choix de la frontière correctement posée les conditions et les données initiales raisonnables est essentielle. Nous verrons cela plus tard.

séparation de variable

[3][4]
Encore nous commençons par considération l'équation de la diffusion 1D

$$u_t = Du_{xx}$$

généralement, on essaye de déterminer la solution de certain facile-à -trouvent la solution. Un tour souvent utile est de rechercher une solution du formulaire spécial

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

. cette signifié : La dépendance sur variable $x$and variable$t$ soit séparée (une prétention !). remarque : le note de capitaux les fonctions, pas variables, dans le suivant, nous employons la perfection pour les dérivés en ce qui concerne t and$x$. utilise cette approche et l'insérer dans les rendements d'équation d'équation de diffusion

$$T'(t)X(x) = DT(t)X''(x) \Longleftrightarrow D\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \forall t, x$$

posons

$$\lambda := \frac{T'(0)}{T(0)}$$

L'équation se tient pour tout le t and$x$, ainsi particulièrement pour $t = 0$, ainsi nous obtenir pour le tout x :

$$D\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(0)}{T(0)} = \lambda$$

(car le coté de main gauche ne dépend pas de t, et de la même manière le coté droit ne dépend pas de x), concluant

$$D\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \forall t, x$$

. λ est fixe, mais jusqu'ici inconnu. Ceci signifie : x et T satisfont une ODE linéaire, chacune (avec le même λ, naturellement). (Pour la simplicité, nous prenons $D = 1$ dans le suivant ; mais aucun problème pour faire la même chose ne s'approchent pour $D \neq 0$) :

$$X'(x) = \lambda X(x)$$

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

. La deuxième équation peut être facilement résolue :

$$T(t) = T(0)e^{\lambda t}$$

, aussi pour la première équation, il est facile déterminer la solution générale : :

$$X(x) = ae^{+\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

a, b des constantes arbitraires. Si $\lambda < 0$, on peut réécrire cette solution en utilisant les fonctions trigonométriques :

$$X(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

. Considérons un exemple concret : Bactéries à l'intérieur d'une longueur émince π de tube qui est ouverte aux deux extrémités : En cela configuration, il est assumé qui le bactérie qui laissent le tube, sont " perdu " pour le système, correspondant à frontière conditions

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

à l'intérieur du tube, nous assumons la diffusion 1D, c-à -d.

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(encore nous employons pour la simplicité de $D = 1$).

Remarque : Avec des ces état de frontière homogène de Dirichlet, toujours de $u = 0$ si une solution. Nous voulons vérifier si les solutions liées encore $\neq 0$ sont possibles. Concrètement, nous recherchons une solution avec la séparation des variables nous approchons, $u(x,t) = X(x)T(t)$. Comme présenté ci-dessus, si une telle solution existe, puis un nombre fixe λ existe avec $X''(x) = \lambda X(x)$ and$T'(t) = \lambda T(t)$ pour tout le X, t. En raison de$T(t) = e^{\lambda t}T(0)$, il est nécessaire d'avoir $\lambda \leq 0$pour une solution liée..$\lambda = 0$ peut également être exclu, depuis $X''(x) = 0$ mène à $X(x) = ax + b$, mais aux conditions de frontière tiendrait compte seulement de $a = b = 0$ (pas une solution différente de zéro). Laisser $k = \sqrt{\lambda}$, nous connaissent déjà le général de de la solution de$X$:

$$X(x) = a \sin kx + b \cos kx$$

la condition de frontière à exige de $x = 0$

$$X(0)T(t) = 0$$

pour tous

$$t \rightsquigarrow X(0) = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

ainsi nous avons $X(x) = a \sin kx$ (et chould avoir $a \neq 0$). De la condition de frontière au $x = \pi$ il suit :

$$X(\pi)T(t) = 0 \forall t \rightsquigarrow X(\pi) = 0 \rightsquigarrow \sin k\pi = 0$$

. Ceci signifie : $k$must est nombre entier $\neq 0$.pris ensemble, si lÃ est solution de de séparé forme, alors il doit ressembler à

$$u(x,t) = ae^{-k^2 t} \sin kx, k \neq 0 \text{ un nombre entier}$$

.

Remarque : en tant qu'aucunes conditions initiales sont donnés, la solution n'est pas unique ; n'importe quel combinaison linéaire de telles solutions rapporte une solution :

$$\sum_{k \in Z} a_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

le choix d'un premier état peut se rétrécir en bas des possibilités Ã une solution unique. Comme exemple, nous choisissons en tant que états initial : :

$$u(x,0) = 3\sin 5x - 2\sin 8x$$

. Présence de deux fréquence (5 et 8) dans initial condition conseil sur cela solution pourrait être de forme

$$u(x,t) = a_5 e^{-25t}\sin 5x + a_8 e^{-64t}\sin 8x.$$

pendant que ce solution doit remplir la condition initiale donnée, nous pouvons immédiatement déterminer les coefficients : :

$$u(x,0) = a_5\sin 5x - a_8\sin 8x = 3\sin 5x - 2\sin 8x.$$

rapportant $a_5 = 3$ et $a_8 = -2$, ainsi

$$u(t,x) = 3e^{-25t}\sin 5x - 2e^{-64t}\sin 8x.$$

en effet, c'est la solution unique pour le problème donné. Ici nous avons eu l'état initial à « facile ». s'ils font pas se composer fini sum$\sum_k a_k \sin kx$. dans plus général cas, nous ont besoin Fourier analyse qui laisse pour écrire fonction sur $[0,\pi]$comme infini sum$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin kx$, où que l'idée fonctionne de la manière semblable. Nous ne considérons pas ceci en détail ici. Dans le prochain exemple, nous considérons une équation de réaction-diffusion ; la même situation comme ci-dessus, mais les bactéries se développent exponentiellement :

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

la question est, sous laquelle conditionne pour le taux de croissance bactérien α que la population peut se développer ? (Remarque au-dessus dont dans le cas, sans croissance, la population mourra dehors à long terme couru). Une question plus facile : Quels α tiennent compte des solutions illimitées du séparé de $u(x,t) = X(x)T(t)$ A, nous commençons par la séparation des variables : :

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + \alpha X(x)T(t)\forall x,t$$

a (vrai)λ doit exister tels que t

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \alpha = \lambda$$

rapportant maintenant remorquage a couplé équation

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

$$X''(x) = (\lambda - \alpha)X(s),$$

avec $X(0) = X(\pi) = 0$.

si$\lambda > 0$, alors $T(t) = e^{\lambda t}T(0) \to 0$pour $t \to 0$, la solution ne sera pas .additionnelle illimité que nous avons besoin de $\lambda < \alpha$ (dans l'ordre remplir la condition de frontière). C'est chown par contradiction. Supposer que $\lambda - \alpha \geq 0$. dans t est case , a real nombre μ existe tels que $\mu^2 = \lambda - \alpha$;X satisfis de

$$X'' = \mu^2 X.$$

si $\mu = 0, X$ devient linéaire, $X = a + bx$; encore, les conditions de frontière impliquent $a = b = 0$, que la solution reste liée. Pour $\mu \neq 0$ ils obtiennent

$$X = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}.$$

l'état de frontière doit être satisfaisant, i.e.$a + b = ae^{\mu\pi} + be^{-\mu\pi} = 0$, which peut être écrit dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu\pi} & e^{-\mu\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Due à

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu\pi} & e^{-\mu\pi} \end{pmatrix} = e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} = e^{-\mu\pi}(1 - e^{2\mu\pi}) \neq 0$$

la seule solution est $a = b = 0$, qui $X \neq 0$.. pris ensemble, $\lambda - \alpha \geq 0$ donne une contradiction, en chaque cas, ainsi $\lambda < \alpha$.Let $k$be un vrai nombre avec $k^2 = \lambda - \alpha$. Par conséquent, nous pouvons dériver :

$$X'' = k^2 X = 0 \rightsquigarrow X(x) = a \sin kx + b \cos kx$$

d'états de frontière les $X(0) = X(\pi) = 0$ Yied $b = 0$ et $k \neq 0$ doit être un nombre entier. Nécessairement, $\alpha \geq 1$ est a eu besoin ! Généralement la solution a la forme

$$ae^{\lambda t} \sin kx = ae^{(\alpha - k^2)t} \sin kx,$$

avec $a \neq 0, k \neq 0$ entier . Vice versa, chaque fonction de cette forme (ou une combinaison linéaire d'elle) est une solution (ceci doit cheched séparément). Remarque : D'un point de vue biologique, la solution semble seulement raisonnable si $k = 1$, autrement la solution contient des valeurs négatives, qui ne semble pas raisonnable pour des densités de population.

1.1 Existence et Unicité

[1]

Nous considérons l'exemple simple (avec des états de frontière homogènes de Neumann)

$$\begin{gathered} u_t = \Delta u + f(u,t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \end{gathered} \tag{1.15}$$

Évidemment, chaque solution de l'EDO $v' = f(v,t)$ est également solution (dans l'espace indépendant) d'équation (1.15) Pour des EDOs, nous savons déjà que quelques conditions pour f sont nécessaires pour garantir l'existence et unicité des solutions. Ainsi, aussi pour des équations de réaction-diffusion, des conditions sur f peuvent être prévues. Local l'existence (pour de petits intervalles de temps) est influencée par la douceur de f, tandis que l'existence globale est plus influencé par le comportement de croissance de f comme fonction de u.

1.1.1 formulation Du Problème

Ici, nous considérons des problèmes de la valeur marginale initiaux pour des systèmes des équations de réaction-diffusion,

$$u(t) = D\Delta u + f(t, x, u, \nabla u) \text{ pour } x \in \Omega, t > 0 \tag{1.16}$$

$$(x,t) = 0 pour x \in \partial\Omega t > 0 \tag{1.17}$$

$$u(x,t) = u_0 x pour x \in \Omega \tag{1.18}$$

là où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné avec la frontière douce. Laisser $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$ et tous les coefficients de diffusion être positif : $D = diag(D_1, D_2, D_3, \dots D_m) D_i > 0$.
pour $i = 1, \dots m$. que nous commençons $f = 0$. De la théorie des équations paraboliques linéaires (généralisation pour l'équation de diffusion) on le connaît : Ceci problème a unique solution pour chaque $u_0 \in L_2$ (pour être correct, on devrait écrire $L^2(\Omega)^m$, mais de m est omis, pour la simplification) ce qui peut formellement être écrit

$$u(t) = e^{Lt} u_0$$

l'opérateur L est donné près

$$D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), Lu := D\Delta u$$

Remarque 3 *souvent, EDPs ne peut pas être résolue dans les espaces de fonction classiques , puis les soi-disant espaces de Sobolev sont nécessaires et le concept des dérivés faibles. Ici, ils sont basés sur $L^2(\Omega)$. Deux fonctions sont identifié si $u(x) = v(x)$ pour $x \in \Omega$ excepté un nullité. Par l'intermédiaire du produit scalaire*

$$(u,v)_0 := (u,v)_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

$L^2(\Omega)$ devient un espace de Hilbert avec la norme

$$\| u \|_0 = \sqrt{(u,u)_0}$$

Le dérivé faible est défini comme suit$u \in L^2$ a un dérivé faible de $v = \partial^\alpha u$ dans $L_2(\Omega)$ si $v \in L_2(\Omega)$ et

$$(\phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \phi, u)_0 \text{ pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ est un soi-disant multiplexe avec

$$| \alpha | = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

e.g.elle peut être employé à gauche en tant que le $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ et $\partial^\alpha \phi = \left(\frac{\partial^{\alpha 1}}{\partial_{x1}^{\alpha 1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha n}}{\partial_{xn}^{\alpha 2}} \right) u$

L'idée derrière est : on multiplie le dérivé faible parϕ et intègre le produit par la cloison. Le dérivé faible est une généralisation du dérivé classique. Si une fonction u est classiquement différentiable sur un domaine borné$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors le dérivé classique correspond au dérivé faible. $C_0^\infty(\Omega)$ dénote le sous-espace de $C^\infty(\Omega)$ qui supposent seulement dans un sous-ensemble compact de valus$\neq 0$ de Ω. Si la fonction est différentiable dans le sens classique, alors le dérivé faible existe également et les deux dérivés correspondent entre eux.

Définition 4 *$H^m(\Omega)$(pour $m \geq 0$ entier) désigne l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ qui ont dérivés faibles $\partial^\alpha u$ pour tout $\mid \alpha \mid \leq m$. produit scalaire dans $H^m(\Omega)$ est définie par*

$$(u,v)_m := \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0,$$

avec la norme correspondante norme

$$\| u \|_m := \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \| \partial^\alpha u \|^2_{L^2(\ \Omega)}}$$

.

(la lettre H a été choisi en l'honneur de David Hilbert). Une proposition indiquent : Laisser$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert avec la frontière par morceaux douce, $m \geq 0$. Puis $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$. ainsi $H^m(\Omega)$ est « accomplissement » de $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ pour Ω. Cette idée peut être généralisée pour d'états de frontière de withvzero de fonctions $C_0^\infty(\Omega)$et est dénoté par le $H_0^m(\Omega)$ Encore plus d'analyse fonctionnelle, sans considérer tous les détails, obtenir juste une vue d'ensemble : Car l'opérateur L a un inverse symétrique compact, il y a un complet (en $L^2(\Omega)$) le système orthonormal de $\{\varphi_k, k = 1, 2, \cdots\}$ les fonctions propres. En outre,

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \text{ pour } u \in D(L),$$

là où $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots$ sont les valeurs propres de $L(\lim_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty)$ et $\langle ., . \rangle$ dénote le produit intérieur (produit scalaire) dans $L^2(\Omega)$.

pour vrai fonction g (avec un secteur de définition comporte l'éventail de L), nous définissent opérateur $g(L)$ par

$$g(L)u = \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k) \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k \text{ pour } u \in g(D(L)),$$

le secteur de définition de $g(L)$ lit

$$D(g(L)) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k)^2 \langle u, \varphi_k \rangle^2 < \infty \right\}$$

(en employant la soi-disant égalité Parseval). Pour des fonctions liées, c'est $Dg(L)) = L^2(\Omega)$. de solution de linéaire homogène valeur initial problème peut être écrit comme

$$u(t) = e^{Lt} u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle u_0, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

pour $t \geq 0$ c'est $u \in ([0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C^1(0, \infty), L^2(\Omega)), u(t) \in D(L)$ pour $t > 0$ et $du/dt(t) = Lu(t)$ pour $t > 0$. de famille$\left\{ e^{Lt}, t \geq 0 \right\}$ de liés peut être interprété en tant que semi-groupe (fortement continu) avec le générateur L, car les propriétés correspondantes sont satisfaisantes :

•$e^{L(t+s)} = e^{Lt} e^{Ls}, e^{L0} = I$ (semigroup)

•$\lim\limits_{t \to 0} e^{Lt} u = u$ (continuity)

•$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{Lt} - I}{h} u = Lu$ pour $u \in D(L)$

1.1.2 Résumé Problèmes Linéaires

Après, nous considérons des problèmes de valeur initiale pour de soi-disant équations ordinaires abstraites dans un Hilbert l'espace dénote(H), qui peut être écrit comme

$$\frac{du}{dt} = Lu(t) + f(t), t \in (0, T], \tag{1.19}$$

$$u(0) = u_0$$

Nous supposons que l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset H \to H$il défini près

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k u \in D(L)$$

comme ci-dessus, et $\{\varphi_k, k = 1, 2, \cdots\}$ forme un système orthonormal complet dans $H$and qu'il tient cela

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots, \lim_{k \to \infty} \lambda_k = -\infty$$

Avec ces prétentions, on obtient le lemme suivant :

Lemme 1 *la définition domaine $D(L)$ est dense dans H, et L est un opérateur fermé. La preuve est omise ici ; les opérateurs linéaires fermés sont une classe importante des opérateurs linéaires sur Banach les espaces (quelque chose plus générale que les opérateurs liés, mais par exemple le spectre peut être définie). Dans le suivant, l'homogénéisateur f est assumé à satisfisf $\in C([0,T],H)$. Une solution classique est définie comme suit :*

Définition 5 *A solution classique $u \in C([0,T],H) \cap C^1((0,T],H)$ le problème (1.19) doit satisfis $u(t) \in D(L)$ pour $t \in (0,T]$, et être solution de (1.19).*

Remarque 6 *$u(t) \in D(L)$ moyen : $u \in L^2(\Omega)$ et $Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle u, \varphi_k \rangle^2 < \infty$ Une idée de trouver une telle solution est la variation de la formule constante :*

$$u(t) = e^{Lt}u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds \tag{1.20}$$

Cette fonction s'appelle la solution douce, qui est dans un certain sens une généralisation du concept d'une solution.

Proposition 7 *là est tout au plus une solution classique de* (1.19). *Si elle existe, alors elle est égale au doux solution*(1.20).

Preuve. Supposer, cela qu'une solution classique u existe. Laisser $g(s) = e^{L(t-s)}u(s)$. En dérivant ce g, que nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -Le^{L(t-s)}u(s) + e^{L(t-s)}L(u(s) + f(s)) \\ &= e^{L(t-s)}f(s) \end{aligned}$$

Cette équation peut être intégrée (pour s de0 àt) et à rendements

$$e^0 u(t) - e^{Lt}u(0) = g(t) - g(o) = \int_0^t \frac{dg}{ds} ds = \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds$$

$$\Leftrightarrow u(t) = e^{L(t)}u_0 + \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds$$

à ce que correspond exactement (1.20). Nous mentionnons sous peu (sans preuve) un lemme auxiliaire qui aide à montrer l'existence de la solution classique :

Lemme 2 *pour chaque $\delta > 0$ là existe a $c > 0$ tels que*

$$\| Le^{Lt} \| \leq ct^{-1}e^{(\lambda_1+\delta)t} \text{ pour } t > 0.$$

Nous devons savoir localement une fonction continue de Hölder est définie :

Définition 8 *A functionf s'appelle localement Hölder continu, si pour tout $t \in (0, T]$ là existent $\delta, c, \alpha > 0$ tels que*

$$\| f(t_1) - f(t_2) \| \leq c \mid t_1 - t_2 \mid^\alpha \quad pour\ t_1, t_2 \in (t - \delta, t + \delta)$$

là où $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est la norme qui est induite par le produit scalaire dans H.

Proposition 9 *(solution classique d'existence) laissez f soit localement Hölder continu en $(0, T]$. alors problème (1.19) possesseurs une solution classique.*
Idée approximative pour la preuve de cette proposition : Il est suffisant de montrer cela

$$v(t) = \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds = v_1(t) + v_2(t) = \int_0^t e^{L(t-s)} [f(s) - f(t)] ds + \int_0^t e^{L(t-s)} f(t) ds$$

est une solution classique du problème avec homogène condition initiale pour que$v(t) \in D(L)$ pour $t > 0$ qui est nécessaire, et$Lv(t)$ est continue pour$t > 0$. Pour cela, le dernier lemme est utile.

■

1.1.3 Existence et Unicité Pour Des Problèmes De Réaction-Diffusion

Dans cette section, nous considérons un résultat concernant l'existence et l'unicité pour le problème $((1.16) - (1.18))$. Nous ne pas aller dans les détails, de profondeur, en essayant d'éviter trop de connaissances sur les espaces / intégration / Sobolev Théorie EDP, mais les idées de base. Les espaces de Sobolev (sur le domaine$\Omega \subset \mathbb{R}^n$) sont définis comme suit :

Définition 10 *Pour $1 < p < \infty$ et $k \in \mathbb{N}$*

$$W^{k.p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \mid \alpha \mid \leq k\}.$$

est appelé espace de Sobolev.
La norme correspondante$W^{k.p}(\Omega)$ en est noté $\| \, . \, \|_{k,p} = (\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \| \partial^\alpha u \|_{Lp}^p)^{\frac{1}{p}}$, alors $W^{k,p}(\Omega)$ est une espace de Banach. Nous avons besoin de savoir ce que signifie le fait de fixer à peu près :

Définition 11 *Soit $(X, \| X \|_X)$ et $(Y, \| Y \|_Y)$ des espaces de Banach.*

1. Si une carte injective linéaire$j : X \to Y$ existe, alors X est appelé noyé dans Y

2. Si cette carte est aussi continue, c'est à dire pour un $c > 0$, il est $\| j(x) \|_Y \leq c \| x \|_X \ \forall x \in X$,

alors X est appelé intégrée en continu dans Y, ce qui est indiqué par $X \to Y$.

Remarque 12 *Si X est incorporé en permanence dans Y, alors chaque élément de X peut être identifié de façon unique avec un élément de Y (interpréter X comme sous-espace de Y et écrire $X \subseteq Y$). Les premières propositions donne un résultat de régularité pour les solutions de problèmes aux limites elliptiques (nous considérons l'opérateur elliptique $L = \Delta$) :*

Proposition 13 *Il existe une constante $c > 0$ avec*

$$\| u \|_{2.2} \leq c \| Lu \|_{0.2} .$$

Ainsi, l'opérateur L satisfait aux conditions de la section concernant les problèmes linéaires abstraits pour $H = L^2(\Omega)$, et nous pouvons définir $(-L)^\alpha$ et H_α comme dans la section relative à la semi-linéaire abstrait problèmes. On peut montrer les résultats d'inclusion suivants :

Proposition 14 *Soit $0 < \alpha \leq 1$.*

a) Pour $k - \dfrac{n}{p} < 2\alpha - \dfrac{n}{2}$ et $p \geq 2$, il est $H_\alpha \to^{k,p} (\Omega)$

b) Pour $0 \leq \nu < 2\alpha - \dfrac{n}{2}$ est $H_\alpha \to C^\nu(\Omega)$.

Maintenant, nous pouvons formuler une proposition concernant l'existence et l'unicité (cas$n \leq 3$).

Proposition 15 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné à bord lisse, où $n \leq 3$. Supposons que pour la fonction $f : [0, T] \times \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue $\rho : [0, T] \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ existe, qui est monotone croissante dans le second argument, une constante$1 \leq \gamma < 3$ et $\vartheta \in (0, 1]$ existent, tels que*

$$| f(t, x, u, p) | \leq \rho(t, | u |)(1+ | p |^\gamma), \tag{1.21}$$

$$| f(s, x, u, p) - f(t, x, u, p) | \leq \rho(0, | u |)(1+ | p |^\gamma)|s - t|^\vartheta \tag{1.22}$$

$$| f(t, x, u, p) - f(t, x, u, q) | \leq \rho(t, | u |)(1+ | p |^{\gamma-1} + | q |^{\gamma-1}) | p - q | \tag{1.23}$$

$$| f(t, x, u, p) - f(t, x, v, p) \leq \rho(t, | u | + | v |)(1+ | p |^\gamma) | u - v | . \tag{1.24}$$

En outre, laissez la carte $x \to f(t, x, u, p)$ soit mesurable. Alors, il existe pour chaque $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ un problème que $t_0 > 0$, tel $((1.16) - (1.18))$ a une unique. solution classique dans$[0, t_0)$.

1.1.4 Solutions Globales

Comme un résultat auxiliaire, nous utilisons une généralisation du lemme de Gronwall (probablement connu dans un simple version pour EDO) :

Lemme 3 *(de Gronwall) Soit $a, b \geq 0, 0 \leq \alpha, \beta < 1$ et $0 < T < \infty$. Alors, il existe un constante $M = M(b, \alpha, \beta, T)$, telle que pour chaque fonction intégrable $u : [0, T] \to \mathbb{R}$, ce qui satisfait*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s) ds \text{ pour } 0 \leq t \leq T$$

il est

$$u(t) \leq aMt^{-\alpha} \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

Maintenant, nous nous occupons de l'existence d'une solution globale, c'est à dire pour tout $t > 0$.

Proposition 16 *Soit l'hypothèse (NONLIN) se contenter de $T = \infty$ et $U = H_\alpha$ Soit u une solution de* (1.21)
(le modèle semi-linéaire abstrait, du $\frac{du}{dt}(t) = Lu(t) + f(t, u(t)) \cdots$) tel que

$$\| f(t, u(t)) \| \leq K(t)(1 + \| u(t) \|_\alpha)$$

pour tout t, pour lequel il existe la solution ; $K : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Ensuite, la solution de (1.21) existe pour tout $t > 0$. Idée approximative de la preuve : En utilisant la représentation

$$u(\tau) = e^{L\tau} u_0 + \int_0^\tau e^{L(\tau - s)} f(s, u(s)) ds$$

on obtient une estimation de la forme

$$\| u(\tau) \|_\alpha \leq M_1(t) + M_2(t) \int_0^\tau (\tau - s)^{-\alpha} \| u(s) \|_\alpha ds.$$

Cela peut être réécrit de manière à ce que les hypothèses du lemme de Gronwall sont remplies, et ce rendements

$$\| u(t) \|_\alpha \leq M(t)$$

pour tout t, pour lesquels la solution u existe. L'hypothèse d'un intervalle borné de l'existence conduit à des contradictions (via solution légère qui est aussi une solution classique). Par conséquent, la non-linéarité pousse au maximum linéaire (le long de la solution), on obtient l'existence globale

Chapitre 2

Résolution D'une EDP Hyperbolique

2.1 Énoncé :

Soit à résoudre une équation hyperbolique donnée par :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E = 0 \tag{2.1}$$

2.2 Résolution par la méthode des différences finies :

Schéma numérique simplifié

Posons $a = c_1$ (la célérité), $b = 0, c = -1$ et $e = 0$, ce qui nous donne : $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(c_1)(-1) = 4c_1 > 0$ car $c_1 > 0$. C'est bien donc une équation hyperbolique qui n'est autre que l'équation d'ondes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Comme les deux dérivées sont des dérivées secondes, nous utilisons les approximations de Taylor trouvées dans les équations (2.1) pour établir le schéma numérique de cette EDP. Nous avons donc :

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$= c_1\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x^2)}$$

$$\Rightarrow u_i^{j+1} = c_1\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - 2(1 - c_1\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2})u_i^j - u_i^{j-1}$$

Ceci est l'équation numérique de l'équation d'ondes. Pour simplifier le schéma, posons :

$$c_1\frac{(\Delta t)^2}{\Delta x^2} = 1 \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{c_1}}$$

$$\Rightarrow u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1} \tag{2.2}$$

Remarque 17 *: Avec les différences finies, l'équation*(2.2) *est le schéma numérique utilisée pour la résolution de l'équation d'ondes* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Mais, il se pose un problème de mise en oeuvre de ce schéma vu que u est connu à$t = t_0 = 0$ *qui est la condition initiale. Or, pour calculer*u *à* $t = \Delta t = t_1$*, nous devons connaitre la valeur de*u *à*$t = t_{-1} = -\Delta t$.

Condition mixtes :

Connaître les valeurs de$u$ à $t = -\Delta t$ n'est plus un problème quand nous avons des conditions de Newmann, de type dérivée (une condition sur la vitesse de propagation) : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$,à $t = 0$

$$\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} = \frac{u(x_i, \Delta t) - u(x_i, -\Delta t)}{2\Delta t} = g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = g(x_i)$$

$$\Rightarrow u_i^{-1} = u_i^1 - 2\delta t \times g(x_i)$$

Remplaçons-le alors dans l'équation (2.2) il vient :

$$u_i^1 = u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0 - u_i^1 + 2\Delta t \times g(x_i)$$

$$\Rightarrow u_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0)\Delta t \times g(x_i).$$

Limite de la méthode de différences finies :

C'est avec une condition sur la vitesse, une approximation de quelques variables comme$b = 0$ et $e = 0$, une simplification de l'expression$c_1 \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ par1, que nous avons pu résoudre cette équation hyperbolique. Toutefois et malheureusement, ce n'est pas tout le temps pareil et la donnée d'une telle condition de type Neumann n'est pas usuelle. On sera donc souvent bloqué sur la résolution d'une équation hyperbolique si nous nous inspirons seulement de la méthode des différences finies.

2.3 Méthode des caractéristiques :

Il existe une classe d'équations aux dérivées partielles dont on peut obtenir les solutions en utilisant une méthode du type géométrique, la méthode des caractéristique. C'est une des plus grandes méthodes énumérées en introduction utilisées pour la résolution des équations différentielles partielles. Cette méthode des caractéristiques est une technique qui est particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou encore le transport de particules. Dans certains cas particuliers, cette méthode peut permettre la résolution purement analytique de l'EDP. Dans des cas plus complexes comme en modélisation des systèmes physiques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème. la méthode de résolution que nous présentons s'applique aux équations du premier et deuxième ordres avec un nombre des variables supérieur 'a deux, mais pour la clarté du rapport nous nous limitons à une équation aux dérivées partielles de deux variables.

2.3.1 Pourquoi la méthode des caractéristiques ?

la méthode des caractéristique est simple à appliquer, et demande peu de calculs et le résultat obtenu est remarquablement précis, contrairement à ceux des méthodes classiques des différences finies et de Galerkin.

2.3.2 Principe

En mathématique, la méthode des caractéristique est une technique pour résoudre les equations aux dérivées partielles, plus généralement la méthode des caractéristiques est valable pour toutes les équations les équations aux dérivées partielles hyperboliques. La méthode consiste à réduire une équation aux dérivées partielles à une famille d'équations différentielles ordinaires, le long de laquelle la solution peut être intégrée à partir des données initiales . Elle cherche des courbes appelées les courbes caractéristiques ou tout simplement les caractéristiques le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit en une équation simple à résoudre. La résolution de cette simple équation sur les caractéristiques nous permet de retrouver la solution globale du problème originale sur tout le maillage. comment pouvons-nous trouver les courbes caractéristiques ?

2.3.3 Méthode

En posant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u_{xt}$et en considérant que $u_{xt} = u_{tx}$, l'équation (2.1) prend la forme :

$$au_{xx} + bu_{xt} + cu_{tt} + e = 0 \tag{2.3}$$

Où a, b, c, e sont des fonctions ne dépendant pas de u et non toutes nulles. Posons :

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x,$$

et

$$q = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t$$

$$\Rightarrow dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt = u_{xx} dx + u_{xt} dt. \tag{2.4}$$

et

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial t} dt = u_{tx} dx + u_{tt} dt. \tag{2.5}$$

Ce qui nous donne, parées addition et soustraction :

$$(2.4) \Rightarrow u_{xx} = \frac{dp}{dx} - u_{xt} \frac{dt}{dx},$$

$$(2.5) \Rightarrow u_{tt} = \frac{dq}{dx} - u_{xt} \frac{dx}{dt}.$$

Substituons ces égalités dans l'équation 2.3 il vient :
$\Rightarrow -au_{xt} \frac{dt}{dx} + bu_{xt} - cu_{xt} \frac{dx}{dt} + a \frac{dp}{dx} + c \frac{dq}{dt} + e = 0$ En multipliant cette équation par $-\frac{dt}{dx}$ elle devient :

$$u_{xt}[a(\frac{dt}{dx})^2 - b(\frac{dt}{dx}) + c] - [a \frac{dp}{dx} \times \frac{dt}{dx} + c \frac{dq}{dx} + e \frac{dt}{dx}] = 0 \tag{2.6}$$

Grâce aux transformations précédentes, la résolution de l'équation (2.3) revient à ne résoudre(2.6). On suppose que, dans le plan$x; t$, on définit les courbes de sorte que le premier crochet soit nul. Sur ces courbes (2.3), il est équivalent à prendre le deuxième crochet aussi égal à0. Posons $m = \dfrac{dt}{dx}$ donc si $am^2 - bm + c = 0$, alors la solution de l'EDP (2.3) peut-être trouvée en résolvant :

$$amdp + cdq + edt = 0$$

Les courbes donnes par $am^2 - bm + c = 0$sont appelées les caractéristiques de l'équation (2.3). On se limite dans le cas o'u $b^2 - 4ac > 0$, ce qui fait donc que l'équation susmentionnée admet deux racines distinctes. Chaque point possèdera deux courbes caractéristiques dont les pentes sont les racines de l'équation précédente. Comment résoudre une EDP hyperbolique par la méthode des caractéristiques ?.

2.4 Stratégie généralement

Nous allons maintenant donner les grandes lignes pour résoudre l'EDP (2.3) par une intégration numérique le long des caractéristiques. On considèrent deux points P et Q , l'équation aux dérivées partielles (2.3) étant hyperbolique, il y a deux caractéristiques en chaque point. La courbe caractéristique à droite de P, de pentem_+, intersecte celle de gauche de Q, de pente m_- au point R. La solution du problème (2.3) peut-être trouvée en résolvant

$$amdp + cdq + edt = 0$$

le long de ces caractéristiques.

2.5 Modélisation d'équation hyperbolique

Présentons rapidement les deux principaux modèles hyperboliques que nous étudierons dans le premier modèle est l'équation des ondes dont l'origine physique .soitΩ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ .pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Le problème aux limites (2.7) modélise ,par exemple, la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique, ou bien de l'amplitude d'un champ électrique de direction constante. L'inconnue $u(t,x)$est ici une fonction scalaire. Le deuxième modèle est l'élastodynamique qui est la version d'évolution en temps des équations de l'élasticité linéarisée .Par application du principe fondamental de la dynamique, l'accélération étant la dérivée second en temps du déplacement, on obtient un problème d'évolution d'ordre deux en temps comme (2.7) .Néanmoins, une différence importante avec(2.7) est que l'inconnue $u(t,x)$est désormais une fonctions à valeurs vectorielles dans$\mathbb{R}^N$. Plus précisément ,si on note $f(t,x)$ la résultante (vectorielle) des forces extérieures, le déplacement$u(t,x)$ est solution de

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f dans \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

Où $u_0$est le déplacement initial,u_1 la vitesse initiale, et $e(u) = (\nabla(u) + (\nabla_u)^t)/2$le tenseur des dé formations. Supposant homogène isotrope le matériau qui occupeΩ ,sa densité est constante$\rho > 0$,de même que ses modules de lamé qui vérifient $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$.

Remarque 18 *On peut ajouter aux équations* (2.7) *et* (2.8) *un terme du premier ordre en temps, ce qui donne.*

Remarque 19 *On peut ajouter aux équations* (2.7) *et* (2.8) *un terme du premier ordre en temps, ce qui donne*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f dans \Omega \times \mathbb{R}^+$$

Lorsque le coefficient η est positif, ce terme du premier ordre correspond à une force de freinage proportionnelle à la vitesse. on dit aussi qu'il s'agit d'un terme d'amortissement. on parle alors d'équation des ondes amorties.

Remarque 20 *Il existe d'autres modèles physique donnant lieu à des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Cependant, tout modèle hyperbolique n'est pas nécessairement un problème d'évolution d'ordre deux. C'est le cas notamment des équation d'Euler linéarisées en acoustique, ou des équations de maxwell en électromagnétisme, qui sont des systèmes d'équations hyperboliques d'ordre un seulement en temps.*

2.6 Existence et unicité dans le cas hyperbolique

En démarche en deux étapes ; Premièrement , on établit une formulation variationnelle , deuxièmement ,on démontre l'existence et l'unicité de la solution de cette formulation variationnelle en utilisant une base hilbertienne de fonction propres,

2.6.1 Formulation variationnelle

L'idée est d'écrite une formulation variationnelle qui ressemble à équation différentielle ordinaire du deuxième ordre,......., nous multiplions donc l'équation(2.7) par une fonction test $v(x)$ qui dépend pas du temps t A cause de la condition aux limites nous demandons à ce qui v s'annule sur le bord de l'ouvert ω ,Un calcul formel conduit à

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\omega u(x,t)v(x)dx + \int_\omega \nabla u(x,t).\nabla v(x)dx = \int_\omega f(x,t)v(x)dx \tag{2.9}$$

Il est claire que l'espace naturel pour la fonction test v est $H_0^1(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$et la forme bilinéaire $a(w,v)$définis par

$$\langle w,v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x)v(x)dx \text{ et } a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x).\nabla v(x)dx.$$

Soit un temps final $T > 0$(éventuellement égal à $+\infty$) ; on se donne le terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$. On se donne aussi des conditions initiales $u_0 \in H_0^1$et$u_1 \in L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle déduite de (2.9)est donc :trouver une solution u dans $C([0,T];H_0^1\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = \langle f(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}\forall v \in H_0^1(\Omega), 0 < t < T, \\ u(t=0) = u_0, \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Remarque 21 *Les données initiales ont bien un sens dans* (2.10) *grâce au choix de l'espace d'énergie* $C([0,T];H_0^1\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$*pour la solution* u*.Nous justifierons encore ce choix un peu plus loin en établissant son lien avec des égalités d'énergie. Finalement , la dérivée en temps dans la formulation variationnelle* (2.10) *doit être prise au sens faible puisqu'a priori la fonctiont* $\to \langle u(t),v\rangle L^2(\omega)$ *n'est qu'une fois dérivable en temps puisqu'elle appartient à* $C^1(0,T)$*.*

2.6.2 Un résultat général

Pour démontrer l'existence de l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.10), nous revenons encore au carde générale pour "diagonaliser" l'opérateur laplacien et nous ramener à la résolution d'une famille de simples équations différentielles ordinaires du deuxième ordre. Soit$v$ et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection dense et compacte (typiquement $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$).

Théorème 22 *soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et$V$ est dense dans H .Soit une forme bilinéaire symétrique continue et coercitive dans$V$.Soit un temps final$T > 0$,une donnée initiale $a(u_0, u_1) \in V \times H$ et un terme source $f \in L^2(]0, T[; H)$.Alors le problème.*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_H + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_H \forall v \in V, 0 < t < T \\ u(t = 0) = u_0, \dfrac{du}{dt}(t = 0) = u_1 \end{cases} \tag{2.11}$$

(où l'équation de(2.11) a lieu au sens faible dans$]0, T[$) a une solution $u \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H)$.De plus , il existe une constante $C > 0$(qui ne dépend que deΩet de$T$) telle que

$$\| u \|_{C([0,T];V)} + \| u \|_{C^1([0,T];H)} \| \leq C \left(\| u_0 \|_V \| u_1 \|_H + \| f \|_{L^2(]0,T[,H)} \right) \tag{2.12}$$

Remarque 23 *.L'estimation d'énergie(2.12)prouve que la solution de (2.11)dépend continument des données ,et donc que le problème hyperbolique (2.11) est bien posé au sens de Hadamard. donnera une interprétation physique importante d'un cas particulier de cette estimation d'énergie.*

Remarque 24 *Comme dans le cas parabolique,on peut affaiblir l'hypothèse la coercitive de la forme bilinéaire symétrique .On obtient les mêmes conclusions en supposant seulement qu'il existe deux constantes positives $\nu > 0$ et $\eta > 0$ telles que*

$$a(v, v) + \eta \| v \|_H^2 \geqslant \nu \| v \|_V^2 \text{ pour tout } v \in V$$

Le changement d'inconnue $u(t) = e^{\sqrt{\eta}t}w(t)$transforme l'équation de (2.11) en

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle w(t), v\rangle_H + 2\sqrt{\eta}\frac{d}{dt}\langle w(t), v\rangle_H + a(w(t), v) + \eta\langle w(t), v\rangle_H = \langle f(t), v\rangle_H \tag{2.13}$$

où la forme bilinéaire $a(w, v) + \eta\langle w, v\rangle_H$est bien coercive sur V .L'équation (2.13)est une équation des ondes amorties .

Démonstration La démonstration est très semblable , aussi nous ne la détaillons pas autant Dans une première étape, on montre que tout solution u est une série de fonctions propres : Dans une deuxième étapes , nous démontrons la convergence de cette série dans l'espaces $C([0,T];V))$ et $C^1([0,T];H)$

Étape 1 Supposons que $u \in C([0,T];V)) \cap C^1([0,T];H)$ est solution de (2.11)introduisons la base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de H composée des fonction, propres de la formulation variationnelle qui vérifient

$$u_k \in V, \text{ et } a(u_k, v) = \lambda_k \langle (u_k, v) \rangle_H \forall v \in V$$

On écrit $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) u_k$ avec $\alpha_k(t) = \langle u_t, u_k \rangle_H$, En choisissant $v = u_k$ dans (2.11), et on notant $\beta_k(t) = \langle f(t), u_k \rangle_H, \alpha_k^0 = \langle u_0, u_k \rangle_H$, et $\alpha_k^1 = \langle u_1, u_k \rangle_H$,, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\alpha k}{dt^2} + \lambda_k \alpha_k = \beta_k \text{ dans }]0;T[\\ \alpha_k(t=0) = \alpha_k^0, \dfrac{d\alpha_k}{dt}(t=0) = \alpha_k^1 \end{cases} \tag{2.14}$$

(Attention a une confusion possible dans les notations :la donnée initiale u_1 n'a rien avoir avec la fonction propre u_k pour $k = 1$)Posant$w_k = \sqrt{\lambda}_k$ l'unique solution de(2.14)est

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 \cos(w_k t) + \frac{\alpha_k^1}{w_k} sin(w_k t) + \frac{1}{w_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(w_k(t-s)) ds \tag{2.15}$$

Ce qui donne une formule explicite pour la solution(qui est donc unique)

Étape 2 .Pour démontrer que la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j^0 \cos(w_j t) + \frac{\alpha_j^1}{w_j} sin(w_j t) + \frac{1}{w_j} \int_0^t \beta_j(s) \sin(w_j(t-s)) ds \right) u_j \tag{2.16}$$

Converge dans$C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$,on va montrer que la suite$w^k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t) u_j$ des sommes partielles de cette série est de Cauchy.Dans V nous considérons le produit scalaire$a(u,v)$ pour lequel la famille(u_j) est orthogonale .Par orthogonalité dans$H$ et dans V on obtient ,pour ,et pour$l > k$ tout temps t,

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) + \| \frac{d}{dt}(w^l - w^k) \|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l} \left(\lambda_j \mid \alpha_j(t) \mid^2 + \mid \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \mid^2 \right)$$

Or, en multipliant (2.14) par$d\alpha_k/dt$et en intégrant en temps, on obtient

$$| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) |^2 + \lambda_j | \alpha_j(t) |^2 = | \alpha_j^1 |^2 + \lambda_j | \alpha_j^0 |^2 + 2\int_0^t \beta_j(s)\frac{d\alpha_j}{dt}(s)ds.$$

De la formule (2.15)on infère que

$$| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) | \leq w_j | \alpha_j^0 | + | \alpha_j^1 | + \beta_j(s)ds$$

En combinant ces deux résultats on en déduit

$$| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) |^2 + \lambda_j | \alpha_j(t) |^2 \leq 2 | \alpha_j^1 |^2 + 2\lambda_j | \alpha_j^0 |^2 + 2\int_0^t | \beta_j(s) |^2 ds \tag{2.17}$$

Comme$u_0 \in V$, $u_1 \in H$ et $f \in L^2(]0,T[;H)$, on a

$$\| u_0 \|_V^2 = a(u_0, u_0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j | \alpha_j^0 |^2 < +\infty, \| u_1 \|_H^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j | \alpha_j^1 |^2 < +\infty$$

$$\| f \|_{L^2(]0,T[;H)}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T \beta_j(s) |^2 ds < +\infty$$

ce qui implique que la série, dont le terme générale est le membre de gauche de(2.17)est convergente, c'est-à-dire que la suitew^kvérifie

$$\lim_{k,l\to+\infty} \max_{0\leq t\leq T} \left(\| w^l(t) - w^k(t) \|_V^2 + \| \frac{d}{dt}(w^l(t) - w^k(t)) \|_H^2 \right) = 0$$

autrement dit, elle est de Cauchy dan s$C^1([0,T];H)$ et dans $C([0,T];V)$. Comme ces espaces sont complets, la suite de Cauchyw^k converge et on peut définir sa limites u En articuler, comme $(w^k(0), \frac{dw^k}{dt}(0))$ converge vers(u_0, u_1) dans $V \times H$, On obtient les conditions initiales values .D'autre part, il est claire que $u(t)$, en tant que somme de la série (2.16) vérifie la formulation variationnelle (2.11) pour chaque fonction de test $v = u_k$. Comme $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$ est une base hilbertienne de$V$, $u(t)$ vérifie donc formulation variationnelle (2.11) pour tout $u \in V$; c'est-à-dire que $u(t)$ est bien la solution recherche de (2.11) . Par ailleurs, on a en montré que

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) + \| \frac{d}{dt}(w^l - w^k) \|_H^2 \leq C \left(\| u_0 \|_V^2 + \| u_1 \|_H^2 + T \| f \|_{L^2(]0,T[;H)}^2 \right),$$

et l'estimation d'énergie (2.12)s'obtient alors facilement en prenant $k = 0$et en faisant tendre l vers l'infini.

Chapitre 3

Étude de la conduction dans un solide semi-infini en utilisant l'équation de Cattaneo-Vernotte

3.1 Introduction

L'étude de l'équation de non-Fourier (hyperbolique) pour la conduction de chaleur dans les solides est un thème qui intéressa beaucoup de chercheurs ces dernières années. En effet, ce problème fut considéré par Maxwell [5]et Morse et Feshbach [6]. La formulation de la conduction hyperbolique est attribuée à Vernotte [7] et Cattaneo [8]. Étude de la conduction dans un solide semi- infini en utilisant l'équation de Cattaneo-Vernotte

3.2 Équation du transfert de la chaleur par conduction :

L'étude de conduction de chaleur dans un solide est basée sur deux relations de base, à savoir, la première loi de la thermodynamique et la loi de Fourier. Dans la théorie classique de conduction de chaleur (conduction parabolique), l'équation phénoménologique du transfert de la chaleur est donnée par la loi de Fourier,

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.1}$$

Cette relation montre que le flux de chaleur$q$ est proportionnel au gradient de température, où λ est la conductivité thermique du milieu. L'application du premier principe de la thermodynamique pour le transfert de la chaleur peut être énoncée comme,

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{3.2}$$

Cette expression découle du fait que la variation de l'énergie interne d'un volume de contrôle est proportionnelle au flux de chaleur évacuée par conduction à travers la surface entourant le volume de contrôle. En substituant l'équation (3.1) dans l'équation (3.2), on obtient l'équation du transfert de chaleur par conduction dans un solide :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.3}$$

en divisant les deux membres de l'équation(3.3) par ρC_p , on obtient l'équation dite de Fourier :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

$\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique du milieu solide. Cette équation, dite de type parabolique, stipule que la chaleur est transmise instantanément dès qu'il y a application d'un gradient de température. Ceci résulte en une vitesse infinie de propagation de la chaleur dans le solide. Cependant, il existe des matériaux où le transfert de chaleur ne s ?effectue pas avec une vitesse infinie. C'est ce qu'on appelle le modèle hyperbolique de conduction de chaleur. Étude de la conduction dans un solide semi- infini en utilisant l'équation de Cattaneo-Vernotte

3.3 Équation du transfert de chaleur, modèle hyperbolique

: Dans le cas de la conduction hyperbolique, le flux de chaleur transitoire de la chaleur est donné par la relation [3.3, 3.4] :

$$\tau\frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.5}$$

Où τ est le temps de relaxation. Cette équation se réduit à celle de Fourier dans le cas où $\tau = 0$. En utilisant le premier principe de thermodynamique qui stipule que la variation de l'énergie interne d'un volume de contrôle est proportionnelle au flux de chaleur évacuée par conduction à travers la surface entourant le volume de contrôle :

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{3.6}$$

Dérivons l'équation 3.6 par rapport au temps$t$, on obtient la relation suivante :

$$\rho C_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial t\partial x} \tag{3.7}$$

De même, en dérivant l'équation 3.5 par rapport à la distance$x$:

$$\tau\frac{\partial^2 q}{\partial t\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.8}$$

En remplaçant l'équation (3.7) et l'équation (3.6) dans l'équation (3.8) on obtient :

$$\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.9}$$

En multipliant par moins un et en divisant par ρC_p , on aboutit à l'équation hyperbolique de la conduction ou l'équation dite de Cattaneo-Vernotte.

$$\tau\rho C_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.10}$$

Il est important de remarquer que si le temps de relaxation est nul, l'équation (3.10) se réduit à l'équation de Fourier (équation (3.4)).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.11}$$

3.4 Résolution de l'équation de Cattaneo-Vernotte pour un solide semi-infini

Considérons un solide semi-infini dans la direction x soumis à une température périodique$T(0,t)$. Pour déterminer la température$T(x,t)$ dans le solide, il est nécessaire de résoudre l'équation suivante :

$$\tau\rho C_p\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.12}$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont :

$$T(0,t)=T_m+(T_0-T_m)\cos\omega t \tag{3.13}$$

$$T(\infty,t)=0 \tag{3.14}$$

Définissons une nouvelle variable$\Theta = T - T_m$, la condition 3.9 se réduit à la relation suivante :

$$\Theta(0,t)=\Theta_0\exp(i\omega t) \tag{3.15}$$

où $\Theta_0$est l'amplitude complexe d'oscillation. De même, la condition aux limites pour l'infinie devient :

$$\Theta(\infty,t)=0 \tag{3.16}$$

Avec ce changement de variable, l'équation de Cattaneo-Vernotte dans ce cas, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tau\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}+\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \tag{3.17}$$

Cherchons la solution de l'équation (3.17) sous la forme d ?une fonction $\xi(x)$ multipliée par le terme périodique $\exp(i\omega t)$. Cette solution, alors peut s'écrire sous la forme :

$$\Theta(x,t)=\xi(x)\exp(i\omega t) \tag{3.18}$$

En substituant, la forme de la solution (équation 3.18), l ?équation différentielle de Cattaneo-Vernotte devient une équation différentielle ordinaire pour la fonction $\xi(x)$.

$$\frac{d^2\xi(x)}{dx^2}-\xi(x)\left[\frac{i\omega}{\alpha}-\frac{\tau\omega^2}{\alpha}\right]=0 \tag{3.19}$$

cette équation a une solution générale sous la forme :

$$\xi(x) = C_1 \exp\left(-x\sqrt{\left[\frac{i\omega}{\alpha} - \frac{\tau\omega^2}{\alpha}\right]}\right) + C_2 \exp\left(x\sqrt{\left[\frac{i\omega}{\alpha} - \frac{\tau\omega^2}{\alpha}\right]}\right) \tag{3.20}$$

L'application des conditions aux limites (3.12) et (3.14) et l'utilisation de l'équation, permettent d'écrire l'expression de la température $\Theta(x,t)$sous la forme suivante :

$$\Theta(x,t) = \xi(x)\exp(i\omega t) = \Theta_0 \exp(i\omega t) - x\sqrt{\left[\frac{i\omega}{\alpha} - \frac{\tau\omega^2}{\alpha}\right]} \tag{3.21}$$

En prenant la partie réelle de la solution, l?équation (3.21) devient :

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega k}{2\alpha}}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k\alpha}}\right) \tag{3.22}$$

où$k$est un coefficient qui dépend du temps de relaxation et la pulsation :

$$k = \sqrt{((\tau\omega)^2 + 1)} - \tau\omega \tag{3.23}$$

Dans le cas où le temps de relaxation est nul, la solution (3.22) se réduit à l'équation suivante :

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \tag{3.24}$$

qui est solution de l'équation de Fourier pour un solide semi-infini au quel on impose les conditions aux limites (3.12 et 3.14). En revenant à la définition de$\Theta(x,t) = T(x,t) - T_m$, la température peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$T(x,t) = T_m + (T_0 - T_m)\exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega k}{2\alpha}}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha k}}\right) \tag{3.25}$$

Résultats et interprétation

Pour étudier les variations de la température dans un solide semi-infini dans le cas de la conduction de la chaleur en modèle hyperbolique, il est nécessaire de comprendre l?effet qu'a le coefficient k , qui dépend du temps de relaxation, sur l?amplitude et le déphasage dans l'expression de la température

```
a=0:1:60;
k=nthroot(0.01*a.^2+1,2)-a*0.1;
plot(a,k);
title('K(T)');
ylabel('K');
xlabel('(s)');
```

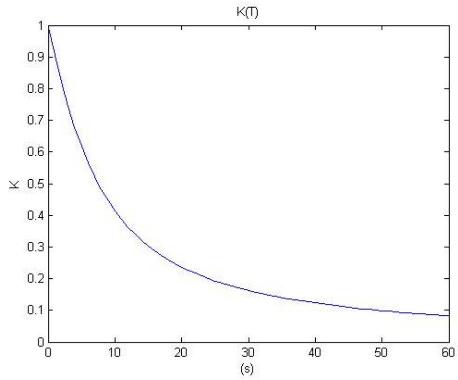

FIGURE 3.1 – Variation du coefficient k en fonction de τ .

```
t=0:60;
   k=nthroot((0.1.*t).^2+1,2)-0.1.*t;
   alpha=0.218e-6;
   cof=nthroot(0.1.*k./(2.*alpha),2);
   plot(t,cof);
```

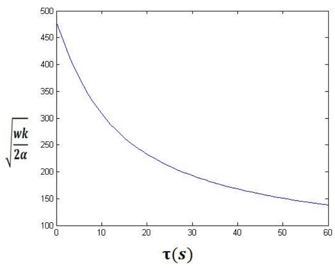

FIGURE 3.2 – Variation du coefficient $\sqrt{\dfrac{wk}{2\alpha}}$ en fonction de τ .

```
t=0:60;
   k=nthroot((0.1.*t).^2+1,2)-0.1.*t;
   alpha=0.218e-6;
   cof=nthroot(0.2./(2.*alpha.*k),2);
   plot(t,cof);
```

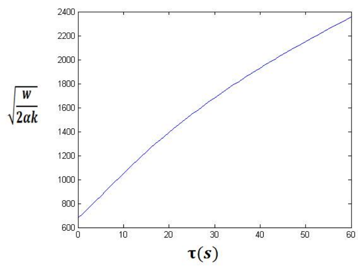

FIGURE 3.3 – Variation du coefficient $\sqrt{\dfrac{w}{2\alpha k}}$en fonction de τ

Pour cela, les variations du coefficient k en fonction du temps de relaxation τ sont représentées sur la figure 3.1. Il est à noter que ce coefficient diminue à fur et à mesure que le temps de relaxation augmente

Résume Ce travail présente l'étude de la conduction dans un solide semi-infini soumis à une température initiale sinusoïdale. Après avoir établi l'équation de la chaleur de type hyperbolique, appelée l'équation de Cattaneo-Vernotte, la température au sein du solide fut obtenue analytiquement. Les résultats obtenus montrent que la température dans le solide semi-infini présente une amplitude et un déphasage fonction de la distance, la diffusivité thermique et le temps de relaxation.

Bibliographie

[1] C. Schmeiser. Skriptum zur Vorlesung Reaktions-Diffusionsgleichungen. Universit¨at Wien, Fakult¨at f¨ur Mathematik,

[2] P. Grindrod. The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations. Oxford University Press, 1996

[3] E. Sontag. Lecture Notes on Mathematical Biology. Rutgers University, 2005.

[4] W. Strauss. Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, Braunschweig, 1995.

[5] J. C. Maxwell, On the dynamic theory of gases, Philosophical Transac-tion, London 157 (1967), pp. 49-88.

[6] P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Vol. 1, McGraw- Hill, New York, 1953.

[7] P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de l ?equation de la chaleur, Comp. Rend. 246, (1958), pp. 3154 ?3155.

[8] C. Cattaneo, A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, Comp. Rend., 247, (1958), pp. 431-433