N° d'ordre :
N° de série :

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر أكاديمي

فرع: رياضيات

اختصاص: تحليل

من إعداد الطالبة: الارقط نبيلة

الموضوع

تمديد المؤثر المبدّ المغلق

نوقشت يوم 21-05-2017 من طرف لجنة المناقشة :

عماره عبد القادر	أستاذ مساعد.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
مزابية محمد الهادي	أستاذ مساعد.أ.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
عسيلة مصطفى	أستاذ محاضر.ب.	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

الاهداء

إلاهي لا يطيب الليل إلا بشكرك، ولا يطيب النهار إلا بطاعتك..ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك..ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك..ولاتطيب الجنة إلا برؤيتك الله جل جلاله .

إلى من بلّغ الرسالة وأدى الأمانة..ونصح الأمة..إلى نبي الرحمة ونور العالمين..سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى ملاكي في الحياة..إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان و التفاني..إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعاؤها سر نجاتي ،و حنانها بلسم جراحي. إلى أغلى الحبايب أمي الحبيبة .

إلى من بها أكبر ،و عليها أعتمد..إلى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي..إلى من بوجودها أكتب قوة و محبة لا حدود لها..إلى من عرفت معها معنى الحياة .

إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار..و إلى من علمني العطاء بدون إنتظار..إلى من أحمل إسمه بكل إفتخار..أرجو من الله أن يمد في عمره ليرى ثمارا قد حان قطافه بعد طول إنتظار وستبقى كلمته نجوما أهتدي بها اليوم و في الغد وإلى الأبد..إلى والدي العزيز.

إلى من قاسموني حنان و عطف أمي و أبي و شاركوني سقف بيتنا سندي في الحياة إلى أغلى ما أملك إخوتي وأخواتي :

" زينب ، صليحة، عبد الرزاق، حسين، عواطف، منيرة، هناء ،مصطفى، جيلاني "

وإلى البراعم الصغيرة " مارية،أنيس ،رونق ،الساسي،بلقيس،أروى "

" وإلى روح أخي الطاهرة ربي يرحمه "

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

وإلى كل أساتذة وطلبة جامعة قاصدي مرباح ورقلة.

شكر وعرفان

الحمد لله الذي هدانا لهذا وماكنا لنهتدي لولا أن هدانا الله، الحمد لله و الشكر لله والصلاة والسلام على الرحمة المهداة والنعمة المسداة سيدنا وحبيبنا رسول الله.

اللهم لك الحمد حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه , ملء السموات وملء الأرض , وملء ما شئت من شيء بعد , أهل الثناء والمجد , أحق ما قال العبد , وكلنا لك عبد , أشكرك ربي على نعمك التي لا تعد , وآلائك التي لا تحد , أحمدك ربي وأشكرك على أن يسرت لي إتمام هذا العمل على الوجه الذي أرجو أن ترضى به عني.

أتوجه بالشكر والتقدير إلى من رعاني طالبة ومّهد لي هذه المذكرة أستاذي ومشرفي الفاضل الدكتور:

عسيلة مصطفى

الذي له الفضل عليّ – بعد الله تعالى – في هذه المذكرة منذ أن كانت موضوعا وفكرة إلى أن صارت مذكرة , فله مني كل الشكر والتقدير والعرفان.

كما أوجه الشكر والتقدير أساتذة اللجنة المناقشة : إلى الأستاذ عبد القادر عمارة رئيسا و مزابية محمد الهادي لتفضله بقبول مناقشة هذه المذكرة , فهم أهل لسد خللها وتقويم معوجها وتهذيب نتوآتها والإبانة عن مواطن القصور فيها و أسال الله الكريم أن يجزيهم الجزاء.

وأتوجه بالشكر الجزيل إلى جميع أساتذتي الفضلاء في قسم الرياضيات.

الرموز المستعملة

الرمز	معناه	اول صفحة
X	مجموعة كيفية	02
$P(X)$	المجموعات الجزئية من X	02
τ	طبولوجيا	02
(X,τ)	فراغ تبولوجي	02
$\vartheta(x)$	أسرة كل جوارات النقطة x	02
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	03
d	مسافة	03
$d(x,y)$	المسافة بين x و y	03
(X,d)	فراغ متري	03
d_A	إقتصار المسافة d على المجموعة A	04
$\Vert\Vert$	تطبيق النظيم	04
$\Vert x\Vert$	نظيم العنصر x	04
$(X,\Vert.\Vert)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	04
$\mathbb{K}$	الحقل $\mathbb{K}$, (إما $\mathbb{R}$ وإما $\mathbb{C}$)	04
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	04
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة	04
$\langle\ ,\ \rangle$	تطبيق الجداء السلمي	07
$(X,\langle\ ,\ \rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي	07
H	فراغ هيلبار	07
$x\perp y$	العنصر x عمودي على y	08
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	08
$A^{\perp}$	مجموعة العناصر العمودية على A	08
$P_{X_0}x$	المسقط العمودي لعنصر x على الفراغ X_0	08

$X_0^{\perp}$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H	09
$X^{\perp}$	المتمم العمودي للفراغ x بالنسبة للفراغ H	09
$F : X \to Y$	F مؤثر من X في Y	10
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	10
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	10
$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F	10
$ker(F)$	نواة المؤثر F	10
$L(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y	10
$L(X)$	فراغ المؤثرات الخطية من X في نفسه	11
X^*	فراغ الأشكال الخطية على X	11
$L(H)$	فراغ المؤثرات الخطية غير المحدودة من H في نفسه	11
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F	12
$\rho(T)$	مجموعة النقط النظامية للمؤثر T	13
F^*	المؤثر القرين للمؤثر F	15
$\oplus$	الجمع المباشر	15
$Ver(F^*)$	حالة المؤثر القرين لنفسه F	15
I	المؤثر الحيادي	15
$l(X,Y)$	فراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y	17
$l(X)$	الفراغ المؤثرات الخطية المحدودة من X في نفسه	17
$\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}, \mathcal{N}_{\lambda}$	الفراغات الناقصة للمؤثر F المرفقة بالقيم $\lambda, \overline{\lambda}$	20
V	تحويل كايلي	21
$\widehat{T}$	التمديد الموسع للمؤثر T	27
L_{λ}	مجموعة كل المؤثرات الموسعة من $\mathcal{N}_{\lambda}$في $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$	34
P_{λ}	الاسقاط العمودي على $\mathcal{M}_{\lambda}$	38
l_{λ}	صنف المؤثرات A المغلقة من الصنف Q_{λ}	39

المحتويات

مقدمة عامة

التحليل الدالي هو أحد فروع التحليل الرياضي المهتمة بدراسة فضاءات الدوال ،و من أهم المفاهيم الرياضية في التحليل الدالي مفهوم المؤثر ، وهو تعميما لمفهوم الداله والتطبيق.

دراسة المؤثرات تنقسم الى عدة أقسام عامة من حيث كونها خطية – غير خطية – محدودة – غير محدودة.

وجاءت هذه التقسيمات لتسهيل حلول المعادلات الدالية .ونقتصر في هذا العمل على نوع من أنواع المؤثرات الخطية غير المحدودة وهو المؤثر المغلق المبدّ.

إختيارنا للمؤثر المغلق ضروري ذلك لآن المؤثر غير المغلق معلوم أن طيفه هو كل المستوى المركب أي لا يملك نقط نظامية وهذا يجعل من قابلة الحل للمعادلة الدالية أمرا مستحيلا.

أما بالنسبة إلى المؤثر المغلق المبدّ F فهو مؤثر جيد من الناحية العملية ذلك كونه يعطي إمكانية مناقشة قابلية القلب للمؤثر $(F-\lambda I)$ أي وجود المؤثر $(F-\lambda I)^{-1}$، لكن هذا الوجود لا يرتقى إلى مرتبة قابلية القلب بالاستمرار لذا جاءت فكرة تمديد هذا المؤثر إلى مؤثر مبدد أعظمي ،الذي يملك صفات أكثر جودة من المؤثر المبدد ،من حيث قابلية الحل للمعادلات الدالية وعلى هذا الأساس أختير موضوع المذكرة :

" تمديد المؤثر المبدّ المغلق "

المذكرة تحتوي على فصلين.

الفصل الأول : " مفاهيم أساسية ".

يتناول أهم المفاهيم من التبولوجيا و التحليل الدالي (نظرية المؤثرات) الأساسية لتناول موضوع التمديد للمؤثر المغلق المبدّ.

الفصل الثاني : " تمديد المؤثر المبدّ المغلق ".

يتناول مفهوم التمديد على مراحل وهي:

- تمديد المؤثر المبدّ المعرف بكثافة.
- تمديد المؤثر المغلق المتناظر.
- تمديد المؤثر المبدّ في الحالة العامة.

الفصل 1

مفاهيم اساسية

مقدمة

يتناول هذا الفصل أهم المفاهيم الأساسية من التبولوجيا و التحليل الدالي و التحليل المركب و بالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية هذه المفاهيم وردت مختصرة بالقدر الكافي لإستعمالها في الفصل الثاني.

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X.

تعريف 1.1
تعرف التبولوجيا على X ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$، يحقق:

1. $X \in \tau, \varnothing \in \tau$.
2. $\forall O_1, O_2 \in \tau \longrightarrow O_1 \bigcap O_2 \in \tau$.
3. $(O_i \in \tau / i \in I) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$ ، حيث I مجموعة دلائل كيفية.
   - الزوج (X, τ) يسمى فراغا تبولوجيا.
   - عناصر الأسرة تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ).

تعريف 1.2
تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي على أنها متمم المفتوح فيه.

تعريف 1.3
ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا و x من X.

المجموعة الجزئية ϑ من X يقال أنها جوار للنقطة x إذا وجد مفتوح O، أي $O \in \tau$ ويحقق $x \in O \subset \vartheta$.

مجموعة كل جوارات النقطة x يرمز لها بالرمز $V(x)$ وتسمى أسرة جوارات x.

تعريف 1.4
ليكن $T=(X,\tau)$ فراغا تبولوجيا، M مجموعة جزئية غير خالية من X و x نقطة من X.

نقول إن النقطة x نقطة تلاصق للمجموعة M، إذا كان كل جوار للنقطة x يحوي نقطة على الأقل من M.

يرمز لمجموعة نقط تلاصق M، بالرمز $\overline{M}$.

المجموعة $\overline{M}$ تسمى لصاقة M، ونكتب:

$$x\in\overline{M}\Longleftrightarrow(\forall v\in\vartheta(x)\longrightarrow v\bigcap M\neq\varnothing)$$

1.1.1 قابلية الفصل

ليكن (X,τ) فراغا تبولوجيا و B,A مجموعتين جزئيتين من X.

تعريف 1.5
نقول إن:

1. المجموعة A كثيفة في المجموعة B، إذا كان $B\subset\bar{A}$.
2. المجموعة A كثيفة في كل مكان ، أو كثيفة في X، إذا كان $X=\bar{A}$.
3. الفراغ التبولوجي T قابل للفصل، إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة وعلى الأكثر قابلة للعد.

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية.

تعريف 2.6
يقال أن على المجموعة X أعطيت مسافة ، إذا عرفنا تطبيق d من $X\times Y$ في $\mathbb{R}$ يحقق من أجل كل x , y , z من X مايلي :

1. $d\left(x,y\right)\geqslant 0$
2. $d\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow x=y$
3. $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
4. $d\left(x,y\right)\leqslant d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$

التطبيق d يسمى مسافة ، والعدد الحقيقي $d\left(x,y\right)$ المسافة بين x وy ، والزوج (X,d) يسمى فراغا متريا.

نتيجة 2.1
إذا كان (X,d) فراغا متريا ، فإنه من أجل كل ، z,y,x من X يتحقق مايلي :

1. $d\left(x,y\right)\geqslant 0$
2. $\left|d\left(x,z\right)-d\left(z,y\right)\right|\leqslant d\left(x,y\right)$

نتيجة 2.2
إذا كانت A مجموعة جزئية من X ، فإن التطبيق d_A ، $\left(d_A\right.$ إقتصار المسافة d على المجموعة $\left.A\right)$ هو مسافة على المجموعة A.

تعريف 2.7
إذا كان (X,d) فراغا متريا و A مجموعة جزئية من X ، فإن الفراغ الجزئي المتري من الفراغ (X,d) الناتج عن المجموعة A يعرف بالزوج (A,d_A).

1.2.1 التمديد بالإستمرار المنتظم

نظرية 2.1
ليكن $(Y,d_Y),(X,d_X)$ فراغين متريين، و A مجموعة كثيفة في X.

إذا كان $f : A \longrightarrow (Y,d_Y)$ مؤثرا مستمرا بإنتظام، حيث الفراغ (Y,d_Y) تام، فإنه يوجد تمديد وحيد مستمر بإنتظام للمؤثر f على X.

يرمز لهذا التمديد بـ f^*.

البرهان :[1]

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 3.8
يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X,\|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K}$ أحد الحقلين ($\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}_+$ و يحقق الشروط التالية:

$$\|\| : X \mapsto \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \|x\|$$

1. $\forall x \in X, \|x\|_X = 0 \iff x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$ يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ يسمى نظيم العنصر x.

نتيجة 3.3
كل فراغ شعاعي نظيمي يكون فراغا متريا عندها يكون:

- $d(x,0) = \|x\|$
- $d(x,y) = \|x-y\|$

ملاحظة 3.1
الفراغ الشعاعي النظيمي ، إختصارا يكتب ف.ش.ن .

نتيجة 3.4
يكون الفراغ الشعاعي النظيمي ذو بعد منته ، إذا وفقط إذا كانت كرة الوحدة المغلقة فيه متراصة فيه.

1.3.1 التمديد بالإستمرار

ليكن X ف.ش.ن و Y فراغ لبناخ.

نظرية 3.2
لكل مؤثر f من $l(D(f),Y)$، حيث $\overline{D(f)}=X$، يملك تمديد f^* من $l(X,Y)$، يحقق :

$$\|f^*\|=\|f\|$$

أي :

$$\exists f^*\in l(X,Y)\ /\ f^*(x)=f(x)\ \ /\ \ x\in D(f)\ \ ,\ \ \|f^*\|=\|f\|$$

البرهان :

لدينا $f\in l(D(f),Y)$، يعني أن f مستمر بإنتظام.

بما أن X فراغ متري و Y فراغ متري تام، فإنه حسب النظرية (**2.1**) الفقرة (1 . 2 . 1)، يوجد تمديد f^* مستمرا بإنتظام على X.

ومنه لبرهان النظرية ، يكفي أن نبرهن أن:

f^* خطي و $\|f^*\|=\|f\|$.

نبرهن أن:

$$\forall x_1,x_2\in X\longrightarrow f^*(x_1+x_2)=f^*(x_1)+f^*(x_2)$$

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x\in X\longrightarrow f^*(\lambda x)=\lambda f^*(x)$$

بما أن $\overline{D(f)}=X$، فإن:

$$x_1,x_2,x\in X\Longrightarrow\exists(x_n^1)_{n\geq1},(x_n^2)_{n\geq1},(x_n)_{n\geq1}\subset D(f)/$$

$$/x_n^1\longrightarrow x_1,x_n^2\longrightarrow x_2\ ,x_n\longrightarrow x\ ,\lambda x_n\longrightarrow\lambda x\quad;(n\longrightarrow\infty)$$

لاحظ:

$$f^*(x_1)=\lim_{n\to\infty}f^*(x_n^1)=\lim_{n\to\infty}f(x_n^1)$$
$$f^*(x_2)=\lim_{n\to\infty}f^*(x_n^2)=\lim_{n\to\infty}f(x_n^2)$$
$$f^*(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}f^*(\lambda x_n)=\lim_{n\to\infty}f(\lambda x_n)$$

وبتالي :

$$f^*(x_1+x_2)=\lim_{n\to\infty}f(x_n^1+x_n^2)=\lim_{n\to\infty}f(x_n^1)+\lim_{n\to\infty}f(x_n^2)=f^*(x_1)+f^*(x_2)$$
$$f^*(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}f(\lambda x_n)=\lambda\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda f^*(x)$$

ومنه يكون : $f^*\in l(X,Y)$

نبرهن أن: $\|f^*\|=\|f\|$.

لدينا :

$$\|f^*\|=\sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\in X}}\|f^*(x)\|\ge\sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ x\in D(f)}}\|f^*(x)\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|f(x)\|=\|f\|$$

أي أن :

$$\|f^*\|\ge\|f\| \tag{1.1}$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\forall x\in D(f)\longrightarrow f(x)=f^*(x)$$

بما أن:

$$\|f(x)\|\le\|f\|\|x\|$$

فإن:

$$\|f^*(x)\|\le\|f\|\|x\|$$

ومنه من تعريف $\|f^*\|$، ينتج أن:

$$\|f^*\|\le\|f\| \tag{2.1}$$

(1.1) و (2.1) تعني :

$$\|f^*\|=\|f\|$$

نتيجة 3.5
كل شكل خطي $f\in(D(f))'=l(D(f),\mathbb{K})$، حيث $\overline{D(f)}=X$،
(X ف.ش.ن)، له تمديد $f^*\in X^*$ يحقق :

$$\|f^*\|=\|f\|$$

2.3.1 فراغ بناخ

ليكن $(X,\|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 3.9
يقال إن X فراغ بناخ إذاكانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

نتيجة 3.6
كل فراغ بناخ ،هو فراغ متري تام.

نظرية 3.3
(نظرية هان ـ بناخ)
إذا كان X ف.ش.ن.و X_0 ف.ش.ن. جزئيا منه، فإنه لكل f من X_0' يوجد f^* من X' يحقق:

$$\forall x\in X_0\ \longrightarrow\ f(x)=f^*(x)\quad,\quad\|f\|=\|f^*\|$$

نتيجة 3.7
ليكن X ف.ش.ن،و X_0 ف.ش.ن جزئيا منه .

X_0 لا يكون كثيفا في X، إذا وفقط إذا وجد f^* من $X', (f^* \neq 0)$

يحقق:

$$\forall x \in X_0 \longrightarrow f^*(x) = 0$$

4.1 الفراغ الهيلبرتي

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 4.10
يعرف الجداء السلمي على X بأنه تطبيق من الجداء $X \times X$ نحو $\mathbb{K}$ أي:

$$h : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

يحقق من أجل كل x , y , z من X ومن أجل كل α من $\mathbb{K}$ مايلي:

1. $h(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, h(x,x) \geqslant 0$
2. $h(\alpha x, x) = \alpha h(x,x)$
3. $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$
4. $h(x+y,z) = h(x,z) + h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي بالرمز $\langle , \rangle$ عندها الزوج $(X, \langle , \rangle)$ يسمى فراغا شبه هيلبرتيا.

نتيجة 4.8
كل فراغ شبه هيلبرتي يكون فراغا شعاعيا نظيميا مع النظيم:

$$\|x\| = \sqrt{h(x,x)}$$

2.4.1 الفراغ الهيلبرتي

تعريف 4.11
الفراغ الهيلبرتي هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام ، ويرمز له بالرمز H.

3.4.1 التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتيا، A و B مجموعتان من X حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعاريف

1. يقال إن العنصرين x , y من X متعامدان (ونكتب $x \perp y$) إذا كان جداؤهما السلمي معدوما، أي:
$$x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$
2. يقال أن العنصر x من X، عمودي على المجموعة A، إذا كان عموديا على كل عنصر من A، ونكتب:
$$x \perp A \Longleftrightarrow \{\forall y \in A \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0\}$$
يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A بالرمز $A^{\perp}$.
3. يقال إن B, A متعامدتان إذا تحقق:
$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$
ونكتب $B \perp A$.

قضية 4.1
إذا كان X فراغا شبه هيلبرتيا ، فإن:

1. $\forall x, y \in X \longrightarrow |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز).
2. $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (قانون متوازي الأضلاع).
3. $\forall x, y \in X, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle)$.
4. $\forall x, y \in X, 4\langle x, y\rangle = \|x+y\| - \|x-y\| + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$.

4.4.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار.

نظرية 4.4
إذا كانت A مجموعة مغلقة ومحدبة من H و x من H ، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A يكون أحسن تقريب للعنصر x في المجموعة A.

أي:
$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A / d(x, y_0) \equiv \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$
البرهان :[1]

نظرية 4.5
إذاكان X_0 فراغا جزئيا مغلقا من H ، وx عنصرا من H ، حيث $x \notin X_0$, فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للعنصر x في X_0 يحقق:
$$(x - y_0) \perp X_0$$
في هذه الحالة يسمى y_0 المسقط العمودي للعنصر x على الفراغ X_0 ، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.
البرهان :[1]

1.4.5 التحليل العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار ، و X_0 فراغا جزئيا مغلقا منه.

تعريف 12.4
يعرف المتمم العمودي للفراغ X_0 بالنسبة للفراغ H، بأنه مجموعة كل العناصر من H العمودية على X_0.
أي أنه المجموعة ${X_0}^{\perp}$.

نتيجة 9.4

1. ${X_0}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H.
2. كل عنصر x من H يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z / \ \ y \in X_0, \ z \in {X_0}^{\perp}$$

3. $H = X_0 \oplus {X_0}^{\perp}$.

عندها نقول أن ${X_0}^{\perp}$, X_0 ، هما التحليل العمودي للفراغ H، ونكتب:

$$y = P_{X_0}x, \ \ z = P_{X_0^{\perp}}x$$

حيث: $P_{X_0^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0^{\perp}$ و P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0.

قضية 2.4
تطبيق الإسقاط P_{X_0} هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

1. $P_{X_0} = P_{X_0}^2$
2. $\|P_{X_0}\| \leq 1$
3. $\forall x, y \in H \longrightarrow \langle P_{X_0}x, y\rangle = \langle x, P_{X_0}y\rangle$

1.5 الجمع المباشر التبولوجي لفراغ هيلبار

تعريف 13.5
يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفراغات هيلبار $H_1, ..., H_n$ بأنه الفراغ H .

حيث :

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n \tag{1.3}$$

(الصيغة (1.3) هي التحليل العمودي لـ H)

حيث:

$$H \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, \quad n \geqslant 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة.
الفراغ H لهيلبار وفق الجداء السلمي:

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{n \geqslant 1} \langle \xi_n, \eta_n \rangle_{H_n}, \quad \xi, \eta \in H; \; \xi_n, \eta_n \in H_n$$

6.1 المؤثرات الخطية

1.6.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ فراغان شعاعيان نظيميان على نفس الحقل $\mathbb{K}$.

ولتكنD مجموعة جزئية غير خالية من X.

تعريف 6.14
إذا أرفق بكل عنصر x من D عنصرا وحيدا y من Y , يقال إنه قد عرف مؤثرا من X في Y ، يرمز له بالرمز F.

ونكتب : $F(x) = y$ أو $Fx = y$.

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y حيث $Fx = y$ و $x \in D(F)$ تسمى مجموعة قيم المؤثر F ويرمز لها بالرمز $E(F)$، ونكتب:
$$E(F) = \{y \in Y / \; y = Fx, \; x \in D(F)\}$$
- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي:
$$X \supset D(F) \xrightarrow{F} E(F) \subset Y$$
- مجموعة الأزواج (x, Fx) من فراغ الجداء $X \times Y$ حيث $x \in D(F)$ تسمى بيان المؤثر F ويرمز لها بالرمز Γ_F ، ونكتب:
$$\Gamma_F = \{(x, Fx) / \; x \in D(F)\} \subset X \times Y$$
- مجموعة أصفار المؤثر F تسمى نواة المؤثر F ويرمز لها بالرمز $\ker F$
ونكتب:
$$\ker F = \{x \in D(F) / \quad Fx = 0\}$$

تعريف 6.15
المؤثر F من X في Y يقال أنه خطي ،إذا تحقق مايلي :

1. المجموعة $D(F)$ فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X.
2. $\forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k} \longrightarrow F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 (F x_2)$

يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y بالرمز $L(X, Y)$.

- في حالة $X = Y$ إختصارا نكتب $L(X,X) = L(X)$
- في حالة $Y = \mathbb{K}$ المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X ، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي ، ويرمز لها بالرمز X^* وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X.

7.1 مجموع وجداء المؤثرات

تعريف 7.16
من أجل كل مؤثرين كيفيين F_1 , F_2 من $L(X,Y)$.

يعرف:

1. جمع المؤثريين F_1 , F_2 كالتالي:

$$(F_1 + F_2)x = F_1x + F_2x \ , \ x \in D(F_1) \cap D(F_2)$$

2. جداء المؤثر F_1 بعدد α من $\mathbb{K}$ كالتالي:

$$(\alpha F_1)x = \alpha F_1 x \ / \ x \in D(F_1) \ , \ \alpha \in \mathbb{K}$$

نتيجة 7.10
$L(X,Y)$ فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

8.1 المؤثرات الخطية غير محدودة

ليكن F من $L(H)$، حيث $(D(F) \neq H)$ و F غير محدود على مجموعة تعريفه.

1.8.1 المؤثرالمغلق

تعريف 8.17
المؤثر F يقال أنه مغلق، إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. بيانه Γ_F مغلقة في $H \oplus H$.
2. من أجل كل متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$، حيث :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad , \quad Ff_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$$

يكون:

$$f \in D(F) \quad , \quad g = Ff$$

3. الفراغ $D(F)$ تام بالنسبة لـ F _ نظيم.

قضية 8.3
كل مؤثر محدود يكون مغلقا .

قضية 8.4
إذا كان $F \in L(H)$، حيث :

$$\exists F^{-1} \in l(H)$$

فإن المؤثر F مغلق.

مثال :

نفرض أن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية كيفية من $D(F)$، حيث :

$$Ff_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \quad , \quad f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

بوضع $g_n = Ff_n$ نجد $f_n = F^{-1}g_n$

بما أن F^{-1} محدود، فإن :

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n =$$

$$\lim_{n\to\infty} F^{-1}g_n = F^{-1}g$$

أي:

$$f \in D(F) \ , \ g = Ff$$

نتيجة 8.11

1. إذا كان المؤثر F مغلق، فإن المؤثر $(F - \lambda I)$ مغلق $(\lambda \in \Bbbk)$.
2. إذا كان F مغلق و F^{-1} موجود، فإن F^{-1} مغلق أيضا (العكس صحيح).

قضية 8.5
إذا كان F مؤثر خطي $F \in L(H)$ فإن :

1. في حالة :

$$\exists m > 0; \| Ff \| \geq m \| f \|, f \in D(F)$$

فإن F مؤثر مغلق $\Leftrightarrow$ $E(F)$ مغلق في H.

2. في حالة F مغلق فإن :

$$\overline{E(F)} = H \Leftrightarrow F^{-1} \in l(H)$$

و

$$\exists m > 0; \| Ff \| \geq m \| f \|, f \in D(F)$$

9.1 قابلية الإغلاق وتمديد المغلق

نعتبر المؤثر F غير مغلق ونبحث على إمكانية إغلاقه أي تمديد إلى مؤثر T يكون مغلق .إضافة إلى مجموعة تعريف $D(F)$ العناصر f من H التي يمكن إيجاد متتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$ توؤل إليها

$$\exists g \in H \ / \ g = \lim_{n\to\infty} Ff_n$$

عندها نضع $Tf = g$

تعريف 9.18
يقال أن المؤثر F قابل للإغلاق ،إذا تحقق أحد الشروط التالية :

1. وجود العنصر g من H غير متعلق بإختيار المتتالية $(f_n)_{n\geq 1}$ من $D(F)$.
2. إذا كانت $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية من $D(F)$، حيث:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \ , \ \lim_{n\to\infty} Ff_n = h$$

فإن $h = 0$.

3. إذا كانت غلاقة (لصاقة)بيانه Γ_F تمثل بيان لمؤثر خطي .

ونرمز لهذا المؤثر إن وجد بالرمز $\overline{F}$ ويسمى غلاقة F.

قضية 9.6
كل مؤثر F من $L(H)$ محدود على مجموعة تعريفه $D(F)$ يكون قابلا للإغلاق، عندها تكون غلاقته هي التمديد بالإستمرار على $\overline{D(F)}$.

نتيجة 9.12
إذا كان $\overline{F}$ موجود فإن :

1. المؤثر $\overline{F}$ مغلق.
2. $\overline{F}$ تمديد لـ F.
3. $\overline{F}$ أصغر تمديد مغلق لـ F

نظرية 9.6
لتكن H, H_1, H_2 فرغات هيلبار و F_1, F_2 مؤثرين من $L(H, H_1), L(H, H_2)$ على التوالي ،حيث $D(F_1) \subset D(F_2) \subset H$

إذا كان F_1 مغلقا و F_2 قابل للإغلاق فإنه يوجد ثابت c، بحيث يكون :

$$\|F_2 f\| \leq c(\|Ff\|^2 + \|f\|^2)^{1/2} \ , \ \ f \in D(F)$$

تعريف 9.19
ليكن T مؤثر مغلق و S مؤثر قابل للإغلاق في X حيث $\overline{S} = T$.

عندها يعرف الجزء المركزي للمؤثر T بأنه مجموعة تعريف المؤثر S أي $D(S)$.

قضية 9.7
ليكن T مؤثر مغلق في X.

إذا كانت $\rho(T) \neq \varnothing$ فإن المجموعة D من $D(T)$ تكون جزء مركزي للمؤثر T، إذا وفقط إذا كانت صورة كل $(T - \lambda I)$ كثيفة في X.

10.1 نظرية ريس للأشكال الخطية

نظرية 10.7
ليكن H فراغا لهيلبار.

1. إذا كان f شكلا خطيا ومحدودا على H $\left(\text{أي } f \in H'\right)$، فإنه يوجد عنصر وحيد y_f من H ، بحيث:

$$\forall x \in H \longrightarrow f(x) = \langle x, y_f \rangle, \ \|f\| = \|y_f\|$$

2. إذاكان y عنصرا كيفيا من H، فإن الصيغة التالية:

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle, \ x \in H$$

تعرف شكلا خطيا ومحدودا f_y ، عندها يكون:

$$\|f_y\| = \|y\|$$

البرهان :[2]

11.1 المؤثر القرين

ليكن المؤثر F من $L(X,Y)$ حيث $\overline{D(F)} = X$ و f ثابت من Y'.

من أجل كل x من $D(F)$ معلوم أن العبارة $f(Fx)$ تعرف شكلا خطيا g، أي g من X^* عندها نكتب:

$$f(Fx) = g(x)$$

لتكن D^* مجموعة جزئية من Y' بحيث من أجل كل f ثابت من D^* الشكل الخطي g يكون من X' ونكتب:

$$f(Fx) = g(x) \quad / \quad f \in D^* \tag{4.1}$$

قضية 11.8
الشرط $\overline{D(F)} = X$ شرط كاف ولازم لوحدانية g من X'.

البرهان :

- $[\Leftarrow]$ نفرض أن $\overline{D(F)} \neq X$ حسب النتيجة (**3.7**) الفقرة (3 . 1) يتحقق الآتي :

$$\exists g_0 \in X' \ , \ g_0 \neq 0 \ / \ \forall x \in D(F) \longrightarrow g_0(x) = 0$$

ومنه حسب الصيغة (4.1) يكون:

$$f(Fx) = g(x) + g_0 = (g + g_0)(x) \quad , \quad x \in D(F)$$

هذا يعني أن $g + g_0$ من X' ويحقق الصيغة (4.1) وهذا مناف لوحدانية g من X'.

- $[\Rightarrow]$ لدينا $\overline{D(F)} = X$ نفرض وجود g_1, g_2 من X'، حيث:

$$g_1(x) = f(Fx) = g_2$$

هذا يعني أن:

$$(g_1 - g_2)(x) = 0 \quad , \quad x \in D(F)$$

بما أن $\overline{D(F)} = X$، فإن حسب من النتيجة (**3.7**) الفقرة (3 . 1) يكون $g_1 - g_2 = 0$، أي $g_1 \equiv g_2$.

تعريف 11.20

ليكن H_2, H_1 فراغين لهيلبار و F من $L(H_1, H_2)$ غير محدودين و معرفين بكثافة (أي $\overline{D(F)} = H$).

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F، المؤثر F^* المعرف من H_1' في H_2'، بحيث من أجل كل (x, y) من $H_1 \times H_2$ يكون :

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_2 \longrightarrow \langle Fx, y \rangle = \langle x, F^* y \rangle$$

نظرية 11.8 [2]

إذا كان $F \in L(H_1, H_2)$ فإن F^* موجود ووحيد من $L(H_1', H_2')$ ويحقق :

$$\|F\| = \|F^*\|$$

نتيجة 11.13

1. $\Gamma_{F^*} = (w(\Gamma_F))^{\perp}$.
2. المؤثر F^* مغلق.
3. $H \oplus H = w(\Gamma_F) \oplus (\Gamma_{F^*})$.
4. $H = VerF^* \oplus \overline{E(F)}$.

خواص المؤثر القرين

إذا كان $F, T \in L(H)$ و α من $\mathbb{K}$ فإن:

1. $(F + T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \bar{\alpha} F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$

12.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 12.21
يقال أن المؤثر $F \in L(H)$ قرينا لنفسه إذا إنطبق مع قرينه أي $F = F^*$، عندها يكون :

$$\forall x, y \in H, \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

نتيجة 12.14

1. كل مؤثر قرين لنفسه يكون متناظر.
2. كل مؤثر قرين لنفسة يكون مغلق.

قضية 12.9
إذا كان المؤثر F متناظر، فإنه يكون قابلا للإغلاق عندها يكون $\overline{F}$ متناظر .

نظرية 12.9
يكون المؤثر F متناظر قرينا لنفسه ،إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين :

1. F مغلق و $ker(F \mp iI) = 0$
2. $E(F \pm iI) = H$

نتيجة 12.15
يكون المؤثر F متناظر رئيسا قرينا لنفسه ،إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين :

1. $ker(F^* \mp iI) = 0$
2. $\overline{E(F \mp iI)} = H$

قضية 12.10
من أجل المؤثر المتناظر F إذا وجد عدد λ، بحيث يكون من أجل كل $f, (F - \overline{\lambda}I), (F^* - \lambda I)$ بمسحات كل H تمسح $D(F)$، فإن F يكون قرينا لنفسه.

نظرية 12.10
إذا كان المؤثر F مغلق من $L(H)$ و $\overline{D(F)} = H$، فإن كل من المؤثرين (FF^*) و (F^*F) قرين لنفسه و المؤثرين $(I + F^*F)$ و $(I - FF^*)$ أيضا قرين لنفسه وكل منهما له مقلوب محدود.

خواص المؤثر القرين لنفسه

ليكن F , T مؤثرين قرينين لنفسهما من $L(H)$, لدينا:

1. من أجل كل α و β من $\mathbb{R}$ يكون المؤثر $\alpha F + \beta T$ قرين لنفسه.
2. إذا كان $FT = TF$, فإن المؤثر FT قرين لنفسه.
3. العدد $\langle Fx, x\rangle$ من $\mathbb{R}$ مهما يكن x من H.

4. $\|F\| = \max(\|M_F\|, \|m_F\|)$, حيث:

$$M_F = \sup_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle \quad , \quad m_F = \inf_{\|x\|=1} \langle Fx, x\rangle$$

13.1 المؤثر المتناظر

نتيجة 13.16
إذا كان $\overline{D(F)} = H$، فإن F يكون مغلقا ،إذا وفقط إذا كان :

$F = F^{**}$

تعريف 13.22
ليكن F مؤثر من $L(H)$، حيث $\overline{D(F)} = H$.

يقال أن المؤثر F متناظر ،إذا كان :

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle, \quad x, y \in D(F)$$

قضية 13.11
يكون المؤثر F متناظر ،إذا وفقط إذا كان : $F \subset F^*$ أي يكون F^* تمديد للمؤثر F.

قضية 13.12
إذا كان المؤثر F متناظرا فإنه يكون قابلا للإغلاق ويكون $\overline{F}$ متناظرا.

1.13.1 المؤثرالعكسي

ليكن F مؤثرا من X في Y , حيث X , Y ف.ش.ن.

تعريف 13.23
يقال أن المؤثر F قابل للقلب، إذا كانت المعادلة $Fx = y$ تقبل حلا وحيدا x من $D(F)$ وذلك من أجل كل y من $E(F)$.

يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$ الذي يلحق بـ y العنصر x مقلوب F ونرمز له بالرمز F^{-1}.

2.13.1 قابلية القلب بإستمرار

تعريف 13.24
المؤثر F من $L(X,Y)$ يقال أنه قابل للقلب بإستمرار ،إذا وجد له مؤثر عكسي معرف ومحدود على كل الفراغ أي:

$$\exists\ F^{-1} \in l(Y, X)$$

نظرية 13.11
إذا كان المؤثر F من $l(X,Y)$ تقابلا ،حيث X و Y لبناخ $(E(F) = Y)$ ، فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار.

نتيجة 13.17
ليكن المؤثر F من $l(X,Y)$ ، حيث X و Y فراغان لبناخ، إذا وجد مؤثر T من $l(X,Y)$ يحقق: $TF = I_Y$ و $FT = I_X$ ، فإن المؤثر F قابل للقلب باستمرار عندها يكون $F^{-1} = T$.

نظرية 13.12
إذا كان المؤثر F من $l(X)$، حيث X لبناخ و $\|F\| < 1$, فإن المؤثر $(I-F)$ قابل للقلب باستمرار.
عندها يكون:

$$\|I-(I-F)^{-1}\| \leqslant \frac{\|F\|}{1-\|F\|} \quad , \quad \|(I-F)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|F\|}\|$$

حيث I مؤثر الحيادي على X.

البرهان :

نبرهن أن السلسلة

$$I+F+F^2+F^3+.......+F^n+...... \tag{5.1}$$

متقاربة في $l(X)$، بما أن X بناخ ،فإن $l(x)$ بناخ أيضا ،لذا يكفي أن نبرهن أن السلسلة (5.1) متقاربة مطلقا.
لاحظ $\|F^k\| \leq \|F\|^k$، هذا يعني أن:

$$I+\|F\|+\|F^2\|+....+\|F^n\|+.... \leq 1+\|F\|+\|F\|^2+....+\|F\|^n+......$$

واضح أن السلسلة في الطرف الأيمن متقاربة ،هذا يؤدي إلى تقارب السلسة في الطرف الأيسر ،
أي أن السلسلة (5.1) متقاربة مطلقا ،ومنه فهي متقاربة .
لتكن S نهايتها ،أي:

$$S_n = I+F+......+F^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\begin{cases} (I-F)S_n = I-F^{n+1} \\ S(I-F) = I-F^{n+1} \end{cases} \tag{6.1}$$

بما أن

$$\|F\| < 1 \quad , \quad \|F^{n+1}\| \leq \|F\|^{n+1}$$

فإن: $\lim\limits_{n\to\infty} F^{n+1} = 0$.
بإدخال النهاية في (6.1) نحصل على:

$$(I-F)S = I \quad , \quad S(I-F) = I$$

حسب النتيجة (**13.17**) المؤثر $(I-F)$ قابل للقلب باستمرار، ويكون عندها:

$$\|S_n\| \leq 1 + \|F\| + ... + \|F\|^n = \frac{1 - \|F\|^{n+1}}{1 - \|F\|} \;\; , \;\; (I - F)^{-1} = S$$

$$\|I - S_n\| \leq \|F\| + ... + \|F\|^n = \frac{\|F\| - \|F\|^{n+1}}{1 - \|F\|}$$

بإدخال النهاية على المتراجحتين ،نحصل على:

$$\|I - (I - F)^{-1}\| \leq \frac{\|F\|}{1 - \|F\|} \quad ; \quad \|(I - F)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|F\|}$$

قضية 13.13
يكون للمؤثر F , $(F \in L(X, Y))$ مؤثرا عكسيا محدودا على $E(F)$ إذا وفقط إذا وجد عدد ثابت c $(c > 0)$ يحقق:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow \|Fx\| \geqslant c\,\|x\|$$

3.13.1 المؤثرالمتقايس

تعريف 13.25
يسمى المؤثر F في فراغ هيلبار H مؤثر متقايس ،إذا كان $\|Fx\| = \|x\|$, وذلك من أجل كل $x \in H$.

4.13.1 مؤثرالإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H.

يعرف مؤثر الإسقاط العمودي على M على أنه تطبيق الإسقاط على الفراغ M المعرف في القضية (**4.2**) ,

إختصارا يقال مؤثر إسقاط.

خصائص :

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \geqslant 0$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M x, x\rangle \leqslant \|x\|^2$
4. $P_M^2 = P_M$

قضية 13.14
إذا كان المؤثر F قرينا لنفسه في H و $F = F^2$, فإن F يمثل مؤثر إسقاط على فراغ جزئي مغلق من H.

الفصل 2

تمديد المؤثر المبدّ المغلق

1.2 تحويل كايلي و نظرية التمديد

1.1.2 النقط من الصنف النظامي والدليل الناقص للمؤثر

ليكن F مؤثرا من $L(H), (D(F) \neq H)$ و λ عددا كيفيا من $\mathbb{K}$.

نرمز بالرمز $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$ للمجموعتين $E(F-\lambda I)$, $E(F-\overline{\lambda}I)$ على التوالي .

نرمز للمتمم العمودي في H بالنسبة للمجموعة $\mathcal{M}_\lambda$, $\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$ بالرمز $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ أي أن:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\overline{\lambda}}^{\perp} = \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = H \ominus \mathcal{M}_{\overline{\lambda}} \\ \mathcal{M}_{\lambda}^{\perp} = \mathcal{N}_{\lambda} = H \ominus \mathcal{M}_{\lambda} \end{cases}$$

$\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ تسمى الفرغات الناقصة للمؤثر F المرفقة بالقيم $\lambda, \overline{\lambda}$ على التوالي .

تعريف 1.26
العدد λ من $\mathbb{K}$، يسمى نقط من الصنف النظامي للمؤثر F، إذا وجد عدد $(k = k(\lambda) > 0)$، بحيث من أجل كل f من $D(F)$ يكون :

$$\|F_\lambda f\| \geq k\|f\| \quad / \quad F_\lambda = F - \lambda I$$

مجموعة كل النقط من الصنف النظامي للمؤثر F تسمى حقل نظامية المؤثر F.

ونرمز له بالرمز $\rho_0(F)$.

نتيجة 1.18
النصف الأعلى والنصف الأسفل للمستوى المركب $(\beta \neq 0)$، يعتبران مركبتين مترابطتين لحقل نظامية أي مؤثر متناظر.

قضية 1.15
الفراغات الناقصة $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ للمؤثر المتناظر F هي الفراغات الذاتية للمؤثر F^* المرفقة بالقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$, λ على التوالي.

البرهان :

- إذا كان f كيفي من $\mathcal{N}_\lambda$، فإنه من أجل كل g من $D(F)$، يكون:

$$\langle Fg-\lambda g, f\rangle = 0 \tag{1.2}$$

أي:

$$\langle Fg, f\rangle = \langle\ g, \overline{\lambda}f\rangle \tag{2.2}$$

من تعريف F^* ومن الصيغة (2.2) نستنتج أن:

$$f\in D(F^*)\ ,\ F^*f=\overline{\lambda}f$$

أي أن f عنصر من الفراغ الذاتي للمؤثر F^* المرفق بالقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.

نفرض أن f من الفراغ الذاتي للمؤثر F^* مرفق بالقيمة الذاتية $\overline{\lambda}$.
أي:

$$F^*f=\overline{\lambda}f$$

من أجل لكل g من $D(F)$ تكون الصيغة (2.2) صحيحة ومنه الصيغة (1.2) صحيحة أيضا ، أي أن f من $\mathcal{N}_\lambda$.

- بنفس الطريقة نبرهن أن $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ هو الفراغ الذاتي للمؤثر F^* المرفق بالقيمة الذاتية λ.

2.1.2 تحويل كايلي و نظرية التمديد

ليكن F مؤثر متناظر و λ عدد غير حقيقيا.

ليكن V مؤثر من H و H معرف كتالي :

$$Vf=(F-\lambda I)(F-\overline{\lambda}I)^{-1}f\ \ ,\ \ \ f\in D(V)$$

$$(F_\lambda - F_{\overline{\lambda}}^{-1})(f)$$

بما أن $\overline{\lambda}\notin\mathbb{R}$ ومنه $\overline{\lambda}$ من $\rho_0(F)$، فإن المؤثر $F_{\overline{\lambda}}^{-1}$ موجود ومحدود على مجموعة تعريفه.

ومنه المؤثر V معرف جيدا على مجموعة تعريفه $D(V)$.

تعريف 1.27
يعرف تحويل كايلي للمؤثر F بأنه المؤثر V، حيث:

$$V=(F-\lambda I)(F-\overline{\lambda}I)^{-1}=F_\lambda - F_{\overline{\lambda}}^{-1}$$

نظرية 1.13

1. إذا كان V تحويل كايلي للمؤثر المتناظر F، فإن:
   - V تقايس ،حيث $E(V)=\mathcal{M}_\lambda \ , \ D(V)=\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$
   - $\overline{E(V-I)}=H$
2. كل تقايس يحقق $\overline{E(V-I)}=H$ يمثل تحويل كايلي لمؤثر ما متناظر .

البرهان :

- نبرهن أولا: $D(V)=\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$

من تعريف V واضح أن $D(V)\subset\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$.

من ناحية ثانية من أجل كل

$$f\in\mathcal{M}_{\overline{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad (F-\overline{\lambda}I)f\in D(F) \quad \Rightarrow \quad (F-\lambda I)(F-\overline{\lambda}I)^{-1}f\in E(V)$$

أي أن $f\in D(V)$ ومنه $D(V)=\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$.

نبرهن $E(V)=\mathcal{M}_\lambda$

من أجل $f\in D(F)$، نضع:

$$g=(F-\overline{\lambda}I)f$$

واضح أن:

$$g\in(\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}=D(V))$$

ومنه نكتب

$$Vg=(F-\overline{\lambda}I)f$$
$$E(V)=E(F-\lambda I)=\mathcal{M}_\lambda$$

- نبرهن التقايس: $\|Vg\|=\|g\| \quad / \quad g\in D(V)$

$$Vg=(F-\lambda I)f \quad / \quad g=(F-\overline{\lambda}I)f$$

$$\begin{aligned}\|Vg\|^2&=\|(F-\lambda I)f\|^2=\langle(F-\lambda I)f,(F-\lambda I)f\rangle\\&=\langle Ff,Ff\rangle-\overline{\lambda}\langle Ff,f\rangle-\lambda\langle f,Ff\rangle+|\lambda|^2\langle f,f\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|g\|^2&=\|(F-\overline{\lambda}I)f\|^2=\langle(F-\overline{\lambda}I)f,(F-\overline{\lambda}I)f\rangle\\&=\langle Ff,Ff\rangle-\overline{\lambda}\langle Ff,f\rangle-\lambda\langle f,Ff\rangle+|\lambda|^2\langle f,f\rangle\end{aligned}$$

$$\|Vg\|^2 = \|g\|^2$$

أي V تقايس.

ليكن V تقايس و $\overline{E(V-I)} = H$.

- نبرهن وجود $(I-V)^{-1}$ أي المعادلة $(I-V)g = 0$ تملك الحل الواضح ($g = 0$).

نفرض العكس $g \neq 0$ حل للمعادلة $g = Vg$، من أجل كل f من $D(V)$، يكون:

$$\langle Vf - f, g\rangle = \langle Vf, g\rangle - \langle f, g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle - \langle f, g\rangle = 0$$

$$\langle (Vf, f), g\rangle = 0$$

أي

$$g \perp E(V-I)$$

ومنه

$$g \perp H$$

أي $g = 0$ إذا $(I-V)^{-1}$ موجود.

نعرف المؤثر U كالتالي:

$$U = (\lambda I - \overline{\lambda} V)(I-V)^{-1} \tag{3.2}$$

- نبرهن أن U مؤثر متناظر، لاحظ:

$$D(U) = D(I-V)^{-1} = E(I-V)$$

ومنه $\overline{D(U)} = H$.

الصيغة (3.2) تكتب أيضا كالتالي:

$$U(g - Vg) = \lambda g - \overline{\lambda} Vg$$

$g \in D(V)$، و منه من أجل كل g_2, g_1 من $D(V)$ ، يكون:

$$\langle U(g_1 - Vg_1), g_2 - Vg_2\rangle = \langle \lambda g_1 - \overline{\lambda} Vg_1, \lambda g_2 - \overline{\lambda} Vg_2\rangle$$

$$= \lambda\langle g_1, g_2\rangle + \overline{\lambda}\langle Vg_1, Vg_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vg_1, g_2\rangle - \lambda\langle g_1, Vg_2\rangle$$

$$= (\lambda + \overline{\lambda})\langle g_1, g_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vg_1, g_2\rangle - \lambda\langle g_1, Vg_2\rangle$$

بنفس الطريقة نجد

$$\langle g_1 - Vg_1, U(g_2 - Vg_2)\rangle = (\lambda + \overline{\lambda})\langle g_1, g_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vg_1, g_2\rangle - \lambda\langle g_1, Vg_2\rangle$$

أي
$$\langle U(g_1 - Vg_1), g_2 - Vg_2\rangle = \langle g_1 - Vg_1, U(g_2 - Vg_2)\rangle$$
هذا يعني :
$$U \subset U^*$$

ومنه U متناظر.

- نبرهن أن V يشكل تحويل كايلي لـ U، أي:

$$V = (U - \lambda I)(U - \overline{\lambda} I)^{-1}$$
لدينا
$$U(g - Vg) = \lambda g - \overline{\lambda} Vg$$
ومنه
$$Uf - \overline{\lambda} f = \lambda g - \overline{\lambda} Vg - \overline{\lambda} Vg - \overline{\lambda} g + \overline{\lambda} Vg = (\lambda - \overline{\lambda})g$$
$$Uf - \lambda f = ... = (\lambda - \overline{\lambda})g$$
أي
$$Vg = (U - VI)(U - \overline{\lambda} I)^{-1} g$$
ومنه
$$V = (U - VI)(U - \overline{\lambda} I)^{-1}$$
إذا V يشكل تحويل كايلي لـ U.

نتيجة 1.19

1. يقال أن المؤثر المتناظر F^* تمديد للمؤثر المتناظر F، إذا وفقط إذا كان V^* تمديد لـ V، حيث V^*, V تحويل كايلي لـ F^*, F على التوالي.
2. يكون المؤثر F قرينا لنفسه ،إذا وفقط إذا كان تحويل كايلي له مؤثر وحدويا.
3. المؤثر المتناظر يكون مغلقا ،إذا وفقط إذا كان تحويل كايلي له مؤثر مغلقا، أي إذا وفقط إذا كان $\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}, \mathcal{M}_{\lambda}$ مغلقين.

نظرية 1.14
كل تمديد مغلق ومتناظر F^* للمؤثر المغلق والمتناظر F يعرف تقايس U مجموعة تعريفه $D(U)$ ومجموعة قيمه $E(U)$ فراغات جزئية مغلقة من $\mathcal{N}_{\lambda}, \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ على التوالي.

عندها يكون:
$$D(F^*) = \{h \in H, h = f + g - Ug \;/\; f \in D(f) \;;\; g \in D(U)\} \tag{4.2}$$

$$F^* h = Ff + \lambda g - \overline{\lambda} Ug \tag{5.2}$$

والعكس من أجل كل تقايس الصيغة $(4.2), (5.2)$ تعرفان تمديد مغلق و متناظر F^* لـ F.

عندها تكون الفراغات الناقصة لـ F^* هي :

$$\mathcal{N'}_{\overline{\lambda}} = \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ominus D(U) \ \ , \ \mathcal{N'}_{\lambda} = \mathcal{N}_{\lambda} \ominus E(U)$$

البرهان :

F مغلق ومتناظر F^* تمديد له مغلق ومتناظر، لتكن V^*, V تحويل كايلي لـ F^*, F على التوالي.

لاحظ أن $D(V) \subset D(V^*)$, $V \subset V^*$، نضع:

$$E = E(V^*) \ominus E(V) \quad , \quad D = D(V^*) \ominus D(V)$$

بما أن $E(V) = \mathcal{M}_{\lambda}$, $D(V) = \mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$, فإن $E \in \mathcal{N}_{\lambda}$, $D \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$.

نعرف على المجموعة D المؤثر التالي U، حيث $Uf = V^*f$.

بما أن V^* تقايس من $D(V)$ في $E(V)$ وأيضا تقايس من $D(V^*)$ في $E(V^*)$ أي تقايس من D في E ومنه U تقايس.

بما أن V^* تحويل كايلي لـ F^*، فإن:

$$D(F^*) = E(I - V)$$

بما أن $D = D(U) = D(V^*) - D(V)$، فإن h من $D(F^*)$. تكتب من الشكل:

$$h = h_0 + g - V^*(h_0 + g) = (h_0 + g) - (Vh_0 + Ug) = (h_0 - Vh_0) + g - Ug \qquad /$$

$$h_0 \in D(V) \ \ , \ \ g \in D(U)$$

بما أن

$$D(F) = E(I - V)$$

نضع: $h_0 \in D(V)$, $f = h_0 - Vh_0$، يكون: $h = f + g - Ug \ / \ f \in D(f) \ , \ g \in D(U)$

بما ان $Ug \in \mathcal{N}_{\lambda} \ \ , \ \ g \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$، فإن:

$$V^*h = Ff + \lambda g - \overline{\lambda} Ug$$

نفرض العكس U تقايس،حيث:

$$E(U) \subset \mathcal{N}_{\lambda} \quad , \quad D(U) \subset \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$

نعرف مؤثر V^* كالتالي:

$$V^*(f + g) = Vg + Ug \quad ; \quad f \in D(V^*) \ \ / \ \ g \in D(U)$$

واضح أن V^* تقايس وهو تمديد لتقايس V، ومنه هو يمثل تحويل كايلي لتمديد مغلق ومتناظر لـ F، نرمز له بـ F^*. المؤثر F^* تحدده الصيغتين $(5.2), (4.2)$.

نأخذ:

$$\mathcal{N'}_{\overline{\lambda}} = \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ominus E(U) \ \ , \ \ \mathcal{N'}_{\lambda} = \mathcal{N}_{\lambda} \ominus E(U)$$

نتيجة 1.20

$$D(F^*) = D(F) \oplus E(I + U_0) \ , \ (U_0 = U) \ h = D(F^*) \ h = f + g + U_0 g \ / \ g \in D(U) \qquad (6.2)$$

$$F^* h = Ff + \lambda g + \overline{\lambda} U_0 g$$

الصيغة (6.2) تسمى الصيغة الثابتة لنيومان.

3.1.2 المؤثر الموسع

ليكن T مؤثرا معرفا على مجموعة M من فراغ بناخ X.

تعريف 1.28
يقال أن T مؤثر موسع على M إذا تحقق الشرط :

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \ , \ x, y \in M$$

بخلاف المؤثر المقلص المعادله

$$Tx = x$$

في حالة T موسع يمكن أن لا تملك حل أو تملك عدة حلول أو مالانهاية من الحلول.

قضية 1.16
إذا كان المؤثر T من $L(H)$ موسع و x عنصرا كيفيا من $D(T)$، حيث:

$$\|Tx\| = \|x\|$$

فإنه من أجل كل y من $D(T)$، يكون:

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

البرهان :
من أجل كل y من $D(T)$ ومن أجل كل λ من $\mathbb{C}$، يكون :

$$\|T(\lambda x + y)\|^2 \leq \|\lambda x + y\|^2$$

أي:

$$\|\lambda x + y\|^2 - \|T(\lambda x + y)\|^2 \geq 0 \qquad (7.2)$$

بما أن $\|Tx\| = \|x\|$، فإن من الصيغة (7.2) يكون :

$$\|y\|^2 - \|Ty\|^2 - 2Re\{\lambda(\langle x, y \rangle - \langle Tx, Ty \rangle)\} \geq 0$$

بما أن الصيغة الأخيرة صحيحة من أجل كل λ من $\mathbb{C}$، فإن:

$$\langle x, y \rangle - \langle Tx, Ty \rangle = 0$$

أي أن:

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$$

نتيجة 1.21
المؤثر الموسع T من $L(H)$ يكون تمديدا لمؤثر مغلق و متقايس W في H، إذا وفقط إذا كان المؤثر T يكتب من الشكل :

$$T = W \oplus S$$

حيث S من $L(H)$ موسع و

$$D(S) = H \ominus D(W)$$
$$E(S) = H \ominus T(D(W))$$

نتيجة 1.22
لكل مؤثر T موسع يوجد تمديد $\widehat{T}$ موسع له معرف على $\overline{D(T)}$.

- إذا كان $D(T)$ مغلق يكون $D(\widehat{T}) = H$.
- إذا كان $\overline{D(T)} \neq D(T)$ نضع:

$$\widehat{T}y = 0 \ \ , \ y \in (D(T))^{\perp}$$

4.1.2 المؤثر المبدّد

ليكن F مؤثر من $L(H)$.

تعريف 1.29
يقال أن المؤثر F مبدّد إذا تحقق الشرط:

$$\forall x \in D(F) \longrightarrow Im\langle Fx, x\rangle \geq 0$$

المؤثر F يقال أنه مبدّد أعظمي إذا لم يملك في H تمديدا فعليا مبدّدا .

النتائج [12]

إذا كان المؤثر F مبدّد فإن :

1. من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب المؤثر F_λ يملك مؤثر عكسي F_λ^{-1} يكون محدود، عندها يكون :

$$\|F_\lambda^{-1}\| \leq \frac{1}{|Im\lambda|}$$

2. من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب المؤثر $T = F_{\overline{\lambda}}F_\lambda^{-1}$، يكون موسع ولا يملك نقطة ثابتة غير معدومه، عندها يكون :

$$F = (\lambda T - \overline{\lambda} I)(T - I)^{-1} \qquad (8.2)$$

والعكس إذا كان المؤثر الخطي T موسع في H ولا يملك نقطة ثابتة غير معدومه، فإن من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب ،المؤثر F المعرف كالتالي :

$$F = (\lambda T - \overline{\lambda} I)(T - I)^{-1}$$

يكون مبددّ عندها يكون : $T = F_{\overline{\lambda}}F_{\lambda}^{-1}$

3. إذا كان المؤثر المبددّ F مغلقه، فإن من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب ،تكون المجموعة $F_{\lambda}D(F)$ مغلقه.

4. إذا كان F مؤثرا مبددّا و من أجل بعض النقط λ من النصف الأسفل للمستوى المركب ،المجموعة $F_{\lambda}D(F)$ مغلقة فإن F يكون مغلق .

5. إذا كان المؤثر المبددّ F مغلق و أعظمي، فإن من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب، يكون :
$$F_{\lambda}D(F) = H$$

6. إذا كان F مؤثرا مبددّا ومن أجل بعض النقط λ من النصف الأسفل للمستوى المركب، يكون :
$$F_{\lambda}D(F) = H$$

7. إذا كان المؤثر المبددّ F يملك غلاقه، فإن من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب، فإن المؤثر الغلاقه $\overline{E}$، حيث:
$$E = F_{\overline{\lambda}}F_{\lambda}^{-1}$$
لا يملك نقطة ثابتة غير معدومه.

8. إذا كان المؤثر F مبددّ ومن أجل بعض النقط λ من النصف الأسفل للمستوى المركب ،المؤثر $\overline{E}$ غلاقه
$$E = F_{\overline{\lambda}}F_{\lambda}^{-1}$$
لا يملك نقط ثابتة غير معدومه، فإن المؤثر F يملك غلاقه.

9. كل مؤثر مبددّ معرف بكثافه يملك غلاقه.

10. إذا كان F مؤثر مغلق مبددّ أعظمي في H ،فإنه يكون معرف بكثافة.

11. كل مؤثر مغلق مبددّ يمكن تمديده إلى مؤثر مغلق مبددّ أعظمي.

تعريف 1.30
المؤثر F من $L(H)$، يقال أنه مبددّ إذا تحقق الشرط :
$$\langle Fx, x\rangle + \langle x \ , Fx\rangle \leq 0 \ , \quad x \in D(F)$$

نتيجة 1.23
المؤثر F من $L(H)$، يكون مبددّا ،إذا وفقط إذا كان:
$$Re\langle Fx, x\rangle \leq 0 \ \ , \quad x \in D(F)$$

نتيجة 1.24
المؤثر F من $L(H)$، يكون مبددّا حسب التعريف (**1.30**)، إذا وفقط إذا كان المؤثر iF مبددا حسب التعريف (**1.29**).

2.2 تمديد المؤثر المبدّ المعرف بكثافة إلى مؤثر مبدّ أعظمي

نعتبر في هذه الفقرة المؤثر المبدّ في مفهوم التعريف (**1.30**) الفقرة (4 . 1 . 2).

قضية 2.17
إذا كان F مؤثرا من $L(H)$ مبدّا، فإن:

1. من أجل المعادلة

$$y = \lambda x - Fx \,, \quad x \in D(F)$$

يكون:

$$\lambda \|x\| \leq \|y\|$$

2. المؤثر ψ المعرف من $\Gamma(F)$ في $E(\lambda I - F)$ كالتالي:

$$\psi((x, Fx)) = y$$

يكون هوميومورفيزميا أي يوجد ψ^{-1}، بحيث ψ و ψ^{-1} مستمرين.

البرهان :

1. لاحظ أن:

$$2\lambda\langle x, x\rangle \leq 2\lambda\langle x, x\rangle - (\langle Fx, x\rangle + \langle x, Fx\rangle) = \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle \leq 2\|x\|\|y\|$$

ومن يكون:

$$\lambda \|x\| \leq \|y\|$$

2. لاحظ أن:

$$\|y\| \leq \alpha(\|x\| + \|Fx\|) \qquad /\alpha = \max(1, \lambda) \tag{9.2}$$

$$\|x\| + \|Fx\| \leq \|x\| + \lambda\|x\| + \lambda\|y\| \leq (2 + \lambda^{-1})\|y\| \tag{10.2}$$

من الصيغة (9.2) و (10.2) نستنتج وجود ψ^{-1} ومحدودية ψ و ψ^{-1}، أي أن ψ هوميومورفيزم.

نتيجة 2.25

1. إذا كانت $\lambda > 0$، فإن المؤثر $(\lambda I - F)$ تقابل أي :

$$E(\lambda I - F) = H$$

2. F مغلق $\Leftrightarrow$ $E(\lambda I - F) = \overline{E(\lambda I - F)}$

قضية 2.18
من أجل كل مؤثر F من $L(H)$ مبدّ و معرف بكثافة، نكتب الصيغة:

$$T = (I + F)(I - F)^{-1} \ \ / \ \ D(T) = E(I - F)$$

أي

$$u = y - Fy \ \ / \ \ Tu = y + Fy \ \ / \ \ y \in D(F) \tag{11.2}$$

نعرف T مؤثر موسع.

المؤثران T, F يكونا مغلقين في الآن واحد أو لا يكونا، وبالعكس من أجل كل مؤثر موسع T، حيث $\overline{E(I+T)} = H$ عندها تكون :

$$y = \frac{1}{2}(Tu - u) \ \ , \quad Fy = \frac{1}{2}(Tu - u) \ , \quad u \in D(T) \tag{12.2}$$

نعرف مؤثر F مبدّ معرف بكثافة.

البرهان :

حسب الصيغة (11.2) وباعتبار F مبدّ يكون:

$$\|Tu\|^2 = \|y\|^2 + \|Fy\|^2 + (\langle Fy, y\rangle + \langle y, Fy\rangle) \leq \|y\|^2 + \|Fy\|^2 - (\langle Fy, y\rangle + \langle y, Fy\rangle) = \|u\|^2$$

ومنه نستنتج أن المؤثر T موسع.

نحل الصيغة (11.2) بالنسبة لـ y و Fy نحصل على:

$$y = \frac{1}{2}(Tu - u) \ \ , \quad Fy = \frac{1}{2}(Tu - u) \ \ , \quad u \in D(T)$$

ومنه يكون المؤثر $(I + F)$ تقابل و $E(I + T) = D(F)$.

ومنه وبإعتبار النتيجة (**2.25**) يكون المؤثر F مغلق ،إذا وفقط إذا كان المؤثر T كذالك.

نرهن العكس:

نفرض أن T مؤثر موسع، بحيث يكون المؤثر $(I + T)$ تقابل.

واضح أن الصيغة (12.2) تعرف تقابل خطى F، حيث:

$$D(F) = E(I + T)$$

لاحظ من أجل كل y من $D(F)$ يكون:

$$\langle Fy, y\rangle + \langle y, Fy\rangle = \frac{1}{4}(\langle Tu - u, Tu + u\rangle + \langle Tu + u, Tu - u\rangle) = \frac{1}{2}(\|Tu\|^2 - \|u\|^2) \leq 0$$

ومنه يكون F مؤثر مبدّ.

نتيجة 2.26
الصيغتين (11.2), (12.2) المعرفتين في القضية (**2.18**) يعرفان أزمورفيزم بين مجموعة كل التمديدات المبدده $\widehat{F}$ للمؤثر F وكل التمديدات الموسعة $\widehat{T}$ للمؤثر T.

3.2 تمديد المؤثر المغلق المتناظر

ليكن F من $L(H)$ مغلق ومتناظر، حيث $\overline{D(F)} \neq H$.

عرفنا في الفقرة (1 . 1 . 2) كل من M_λ , $M_{\overline{\lambda}}$, $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$.

نضع:

$$\begin{cases} K_{\overline{\lambda}} = (F - \overline{\lambda}I)D(F) \ , \ K_\lambda = (F - \lambda I)D(F) \\ \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = H \ominus M_{\overline{\lambda}} \quad , \quad \mathcal{N}_\lambda = H \ominus M_\lambda \ /(Im\lambda \neq 0) \end{cases} \tag{13.2}$$

قضية 3.19
الفراغات $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$, $D(F)$ مستقلة خطيا و تحقق :

$$D(F^*) = D(F) \oplus \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \oplus \mathcal{N}_\lambda \tag{14.2}$$

البرهان :

$(x_1, ..., X_n)$ تسمى الفراغات المستقلة خطيا ،إذا كانت المعادلة

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \ , \quad x_i \in X_i \ /i = \overline{1, n}$$

وهذه محققة فقط في حالة $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$.

نبرهن أن الفراغات $D(F), \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}, \mathcal{N}_\lambda$ مستقلة خطيا.

نضع:

$$f + g + h = 0 \ / \ f \in D(F) \ , \ g \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ , \ h \in \mathcal{N}_\lambda \tag{15.2}$$

نركب للمعادلة (15.2) المؤثر $(F^* - \overline{\lambda}I)$ نحصل على:

$$(F^* - \overline{\lambda}I)f + (F^* - \overline{\lambda}I)g + (F^* - \overline{\lambda}I)h = 0 \tag{16.2}$$

$$h \in \mathcal{N}_\lambda \Rightarrow (F^* - \overline{\lambda}I)h = 0$$

لاحظ أن:

$$g \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \Rightarrow F^* g = \lambda g$$

$$f \in D(F) \Rightarrow F^* f = F f$$

ومنه المعادلة (16.2) تكتب كالتالي:

$$(F^* - \overline{\lambda}I)f + (\lambda - \overline{\lambda})g = 0 \tag{17.2}$$

لاحظ

$$(F - \overline{\lambda}I)f \in \mathcal{M}_{\overline{\lambda}} \ , \ \ (\lambda - \overline{\lambda})g \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$

بما أن $\mathcal{N}\overline{\lambda} \perp \mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$، فإن المعادلة (17.2) محققة فقط في حالة:

$$(F-\overline{\lambda}I)f=0 \quad ; \quad (\lambda-\overline{\lambda})g=0$$

أي لدينا $f=0$ و $g=0$ وحسب المعادلة (15.2) يكون $h=0$.

ومنه $D(F)\ ,\ \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\ ,\ \mathcal{N}_{\lambda}$ مستقلة خطيا.

نبرهن الآن الصيغة (14.2)

واضح أن:

$$D(F)\ ,\ \ \mathcal{N}_{\lambda}\ ,\ \ \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \subset D(F^*)$$

ومنه

$$D(F)\oplus\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\oplus\mathcal{N}_{\lambda}\subset D(F^*)$$

نبرهن أن كل عنصر U من $D(F^*)$ يكتب بشكل وحيد من الشكل :

$$U=f+g+h \quad / \quad f\in D(F)\ ,\quad g\in\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\ \ ,\ h\in\mathcal{N}_{\lambda}$$

بما أن المؤثر F مغلق، فإن الفراغ $\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}$ كفراغ جزئي من H يكون مغلقا.

ومنه حسب التحليل العمودي لـ H يكون:

$$H=\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}\oplus\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$

أي

$$\forall\vartheta\in H\ ,\ \ \exists!\vartheta_1\in\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}\ ,\ \ \ \exists!\vartheta_2\in\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \quad / \quad \vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2$$

من أجل U كيفي من $D(F^*)$ العنصر $\vartheta=(F^*-\overline{\lambda}I)U$ معرف جيدا كعنصر من H.

هذا يعني أن:

$$\vartheta=(F^*-\overline{\lambda}I)U=\vartheta_1+\vartheta_2 \quad / \quad \vartheta_1\in\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}\ ,\ \ \vartheta_2\in\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \tag{18.2}$$

لاحظ

$$\vartheta_1\in\mathcal{M}_{\overline{\lambda}}\Rightarrow\exists f\in D(F) \quad / \quad \vartheta_1=(F^*-\overline{\lambda}I)f$$

$$\vartheta_2\in\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\Rightarrow\exists g\in\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \quad / \quad \vartheta_2=(\lambda-\overline{\lambda})g$$

ومنه الصيغة (18.2) تكتب كالتالي:

$$(F^*-\overline{\lambda}I)U=(F-\overline{\lambda}I)f+(\lambda-\overline{\lambda})g \tag{19.2}$$

بما أن $F^*g=\lambda g\ ,\ F^*f=Ff$، فإن الصيغة (19.2) تكتب كالتالي:

$$(F^*-\overline{\lambda}I)U=(F^*-\overline{\lambda}I)(f+g)$$

ومنه يكون:

$$(F^*-\overline{\lambda}I)(U-f-g)=0$$

أي $U-f-g$ عنصر من الفراغ الذاتي لـ F^* مرفق بالقيمة $\overline{\lambda}$ ومنه هو عنصر من $\mathcal{N}_\lambda$.

$$\exists\, h = U-f-g \in \mathcal{N}_\lambda$$

وعليه يكون

$$U = f+g+h$$

بما أن الفراغات مستقلة خطيا، فإن الكتابة وحيدة و بتالي يكون :

$$D(F^*) = D(F) \oplus \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \oplus \mathcal{N}_\lambda$$

نتيجة 3.27

إذا كان $\varphi \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\ ,\ \ \psi \in \mathcal{N}_\lambda\ ,\ \ \varphi-\psi \in D(F)$ فإن:

$$\|\varphi\| = \|\psi\|$$

عندها يكون المؤثر Q_λ المعرف كالتالي:

$$Q_\lambda \psi = \varphi$$

تقايس يحقق:

$$D(Q_\lambda) = \mathcal{N}_\lambda \cap (D(F) \oplus \mathcal{N}_{\overline{\lambda}})$$

$$D(Q_\lambda) = \{c\} \Leftrightarrow \overline{D(F)} = H$$

تعريف 3.31

المؤثر B المعرف من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ يسمى مؤثرا ممكنا بالنسبة للمؤثر F، إذا تحقق الصيغة:

$$B\psi - \psi \in D(F)$$

فقط في حالة $\psi = 0$.

نتيجة 3.28

من أجل كل مؤثر B ممكن للمؤثر F الفراغات $(B-I)D(F), D(F)$ مستقلة خطيا.

قضية 3.20

ليكن A_λ مؤثرا معرفا كالتالي:

$$A_\lambda = U_\lambda \oplus B \qquad / \ \ (Im\lambda \neq 0)$$

حيث:

$$U_\lambda = (F-\overline{\lambda}I)(F-\lambda I)^{-1}$$

و B مؤثر معرف كالتالي:

$$B\psi = Q_\lambda \psi$$

فقط في حالة $\psi = 0$.

Q_λ المؤثر المعرف في النتيجة (**3.27**).

المؤثر A_λ لا يملك نقطة ثابتة غير معدومه، إذا وفقط إذا كان المؤثر B ممكننا بالنسبة للمؤثر F.

البرهان :

ليكن h من $D(A_\lambda)$.

بما أن

$$h = g + \psi \; / g \in K_\lambda, \; \psi \in D(B)$$

فإن h يكون النقطة الثابتة للمؤثر A_λ، إذا وفقط إذا تحقق :

$$B\psi - \varphi = g - U_\lambda g$$

وهذا حسب الصيغة (13.2) تكافئ:

$$B\psi - \psi = (\overline{\lambda} - \lambda)(F - \lambda I)^{-1} g$$

الصيغة الاخيرة تكافئ:

$$B\psi - \psi \in D(F)$$

$$g = \frac{1}{\overline{\lambda} - \lambda} F_\lambda (B\psi - \psi)$$

ومنه نستنتج أن المؤثر A_λ لا يملك نقطة ثابتة غير معدومه، يكافئ أن المؤثر B ممكننا بالنسبة للمؤثر F.

أي:

$$B\psi - \psi \in D(F)$$

فقط في حالة $\psi = 0$.

نظرية 3.15

من أجل كل λ من النصف الاسفل للمستوى المركب، المؤثر $\widehat{B}$ المعرف كالتالي:

$$D(\widehat{B}) = D(A) \oplus (B - I) D(B)$$

$$\widehat{B}(f + B\psi - \psi) = Ff + \lambda B\psi - \overline{\lambda}\psi \quad / \quad f \in D(F) \;\; , \quad \psi \in D(B)$$

يعرف تقابل بين مجموعة كل المؤثرات B الممكنة من L_λ، ومجموعة كل التمديدات المبدده $\widehat{B}$ للمؤثر A.

عندها يكون:

$$B = (\widehat{B} - \overline{\lambda} I)(\widehat{B} - \lambda I)^{-1}|_{\mathcal{N}_\lambda \cap (\widehat{B} - \lambda I) D(\widehat{B})}$$

حسب L_λ مجموعة كل المؤثرات الموسعة من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$.

المؤثر $\widehat{B}$ يكون مغلق وأعظمي ،إذا وفقط إذا ملك مؤثر B كمؤثر مقبول من L_λ يحقق $D(B) = \mathcal{N}_\lambda$.

البرهان :

حسب النتيجة (2) الفقرة (4 . 1 . 2).

من أجل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب ،يوجد تقابل بين مجموعة كل التمديدات المبدده $\widehat{B}$ للمؤثر F و مجموعة كل المؤثرات الموسعة A_λ للمؤثر U_λ التي لا تملك نقط ثابتة غير معدومه .

العلاقة بين $\widehat{B}$ و A_λ يكون كالتالي:

$$\begin{cases} A_\lambda = (\widehat{B} - \overline{\lambda} I)(\widehat{B} - \lambda I)^{-1} \\ \widehat{B} = (\lambda A_\lambda - \overline{\lambda} I)(A_\lambda - I)^{-1} \end{cases}$$

حسب القضية (**3.20**) المؤثر الموسع $A_\lambda (U_\lambda \subset A_\lambda)$ لا يملك نقط ثابتة غير معدومه، إذا وفقط إذا كتب من الشكل:

$$A_\lambda = U_\lambda \oplus B$$

حيث B مؤثر ممكننا من L_λ.

وعليه يوجد تقابل بين مجموعة كل المؤثرات و مجموعة كل التمديدات المبدده $\widehat{B}$ لـ F هذا التقابل تعرفه هذه الصيغة

$$B = (\widehat{B} - \overline{\lambda} I)(\widehat{B} - \lambda I)^{-1}|_{\mathcal{N}_\lambda \cap (\widehat{B} - \lambda I) D(\widehat{B})}$$

التي تكافئ الصيغة:

$$\widehat{B} = [\lambda(U_\lambda \oplus B) - \overline{\lambda} I][U_\lambda \oplus B - I]^{-1} \qquad (20.2)$$

وعليه تكون:

$$D(\widehat{B}) = [(U_\lambda \oplus B) - I][K_\lambda \oplus D(\widehat{B})]$$

أي:

$$D(\widehat{B}) = (U_\lambda - I)K_\lambda \oplus (B - I)D(\widehat{B}) \qquad (21.2)$$

بما أن

$$U_\lambda = F_{\overline{\lambda}} F_\lambda^{-1}$$

فإنه:

$$U_\lambda - I = (\lambda - \overline{\lambda}) F_\lambda^{-1}$$

وعليه يكون

$$(U_\lambda - I)K_\lambda = D(F)$$

وبالتالي من الصيغة (21.2) نستنتج أن:

$$D(\widehat{B}) = D(F) \oplus (B - I)D(B)$$

من ناحية ثانية من الصيغة (20.2) نحصل على :

$$\widehat{B}(B - I)\psi = (\lambda B - \overline{\lambda} I)\psi$$

بما أن $F \subset \widehat{B}$ فإنه يكون :

$$\widehat{B}(f + B\psi - \psi) = Ff + \lambda B\psi - \overline{\lambda}\psi$$

عندها يكون:

$$(\widehat{B} - \lambda I)D(\widehat{B}) = K_\lambda \oplus D(\widehat{B})$$

وعليه الصيغة

$$(\widehat{B} - \lambda I)D(\widehat{B}) = H$$

تكافئ

$$D(\widehat{B}) = \mathcal{N}_\lambda$$

ومنه وبإعتبار النتيجتين (4،5) من الفقرة (4 . 1 . 2).

يكون المؤثر $\widehat{B}$ مغلق وأعظمي، إذا وفقط إذا كان المؤثر B الممكن المرفق به من L_λ، حيث $D(B) = \mathcal{N}_\lambda$.

4.2 تمديد المؤثر المبدّ في الحالة العامة

نظرية 4.16
إذا كان F مؤثرا مغلقا ومبدّا في H($\overline{D(F)} \neq H$).

فإن:

$$(x \in \mathcal{N}_\lambda, y \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ / \ x - y \in D(F)) \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \|y\|$$

في حالة F مغلق ومتناظر بدل المتراجحة يكون : $\|x\| = \|y\|$

البرهان :

لاحظ أن:

$$(x \in \mathcal{N}_\lambda \ , \ y \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ / \ x - y \in D(F)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, z \in \mathcal{M}_\lambda \ / \ x - y = T_\lambda z - z)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists\, z \in \mathcal{M}_\lambda \ / \ y + T_\lambda z = x + z)$$

ومنه يكون

$$\|y\|^2 + \|T_\lambda z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$$

بما أن :

$$\|T_\lambda z\| \leq \|z\|$$

فإنه يكون:

$$\|x\| \leq \|y\|$$

(لأن T_λ موسع).

نظرية 4.17
إذا كان F مؤثرا مغلقا ومبدّا في H($\overline{D(F)} \neq H$).

فإن الفرغين $\mathcal{N}_\lambda, D(F)$ مستقلان خطيا، عندها يكون:

$$\overline{D(F) \oplus \mathcal{N}_\lambda} = H$$

البرهان :

لاحظ من أجل كل x من $D(F) \cap \mathcal{N}_\lambda$ يكون:

$$x \in \mathcal{N}_\lambda \ , \ 0 \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ \ , \ \ x - 0 \in D(F)$$

ومنه حسب النظرية (**4.16**) يكون:

$$\|x\| \leq \|0\| = 0$$

أي أن $x = 0$.

ومنه يكون:

$$D(F) \cap \mathcal{N}_\lambda = \{0\}$$

من ناحية ثانية من أجل كل y من $(D(F) \oplus \mathcal{N}_\lambda)^\perp$، يكون:

$$y = Fz - \lambda z \quad / \quad z \in D(F)$$

بما أن $y \perp z$ فإن:

$$Im\langle Fz, z\rangle = \|z\|^2 Im\lambda \geq 0$$

لكن لدينا $Im\lambda < 0$ ومنه حتما $z = 0$ وبالتالي تكون $y = 0$.

إذا نستنتج أن:

$$\overline{D(F) \oplus \mathcal{N}_\lambda} = H$$

كما في الفقرة السابقة (3 . 2) نعرف مؤثر Q_λ من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ كالتالي:

$$\psi = Q_\lambda \varphi \quad / \quad \varphi \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \ , \ \ \psi \in \mathcal{N}_\lambda \ \ , \ \ \psi - \varphi \in D(F)$$

بما أن F مغلق و مبدّ فإن من النظرية (**4.16**) المؤثر Q_λ معرف جيدا كمؤثر خطي يسمى هذا النوع من المؤثرات من الصنف Q_λ.

عرفنا في الفقرة السابقة (3 . 2) أنه إذا كان F مغلق ومتناظر يكون Q_λ تقايس مغلق.

المؤثر Q_λ في هذه الحالة يقال عنه مقبول لمؤثر من الصنف Q_λ بالنسبة للمؤثر المغلق المبدّ F.

نعرف الآن المؤثران V_λ , $\widehat{T}_\lambda$ كالتالي:

$$\begin{cases} \widehat{T}_\lambda = T_\lambda P_\lambda \\ V_\lambda = (I - \widehat{T}_\lambda \widehat{T}^*_\lambda)^{1/2} \quad / \quad D(V_\lambda) = H \end{cases} \tag{22.2}$$

P_λ الأسقاط العمودي على $\mathcal{M}_\lambda$.

تعريف 4.32
المؤثر B من $L(H)$ حيث $D(B) \subset \mathcal{N}_\lambda$.

يقال أنه مقبول بالنسبة للمؤثر F إذا تحقق أحد الشروط التالي:

.1

$$\begin{cases} Ver(V_\lambda B - I) = \{0\} \\ D(F) \cap E(V_\lambda B - I) = \{0\} \end{cases}$$

.2 $V_\lambda Bu - u \in D(F)$، فقط في حالة $u = 0$.

نتيجة 4.29
إذا كان المؤثر B من $L(H)$ يحقق:

$$D(B) \subset \mathcal{N}_\lambda \quad \text{و} \quad E(V_\lambda B) \subset \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$

فإن تعريف مقبول بتطابق مع التعريف في حالة F متناظر أي إذا يحقق:

$$Q_\lambda Bu = Iu$$

فقط في حالة $u = 0$.

نتيجة 4.30
من النظرية (**4.17**) نستنتج أن مجموعة المؤثرات الممكنة للمؤثر F غير خالية ذلك لان المؤثر المعدوم مؤثر ممكن بالنسبة للمؤثر F.

قضية 4.21 [8]
يوجد تقابل بين مجموعة المؤثرات A المغلقة من الصنف Q_λ المعرفه على فراغ جزئي حاوي لـ $\mathcal{M}_\lambda$ ومعدومه على $\mathcal{M}_\lambda$، ونآخذ قيمها في $\overline{E(V_\lambda)}$ ومجموعة المؤثرات التمديدات $\widetilde{T}_\lambda$ المغلقة من الصنف Q_λ للمؤثر T_λ.

عندها يكون:

$$D(\widetilde{T}_\lambda) = D(A)$$

$$\widetilde{T}_\lambda = \widehat{T}_\lambda + V_\lambda A \tag{23.2}$$

قضية 4.22
المؤثر $\widetilde{T}_\lambda$ من الصنف Q_λ المعرف بالصيغة (23.2) يملك نقطة ثابتة غير معدومه ،إذا وفقط إذا كان المؤثر

من الصنف Q_λ.
$$\widetilde{A} = A|_{D(T_\lambda)\cap\mathcal{N}_\lambda}$$
مقبولا بالنسبة للمؤثر F.

البرهان :

كل z من $D(\widetilde{T}_\lambda)$ يكون نقطة ثابتة غير معدومه للمؤثر $\widetilde{T}_\lambda$، إذا وفقط إذا كان :
$$V_\lambda\widetilde{A}y - y = x - T_\lambda x$$
ذلك لان:
$$(z = x + y \quad / \quad x \in \mathcal{M}_\lambda \ , \ y \in D(\widetilde{T}_\lambda)\cap\mathcal{N}_\lambda)$$
وهذا يكافئ:
$$V_\lambda\widetilde{A}y - y = (\lambda - \overline{\lambda})(F - \lambda I)^{-1}x$$
ومنه نستنتج أن المؤثر $\widetilde{T}_\lambda$ يملك نقطة ثابتة غير معدومه، يكافئ :
$$\exists\, y \in \mathcal{N}_\lambda \cap D(\widetilde{T}_\lambda) \ / \ V_\lambda\widetilde{A}y - y \in D(F)$$
أي المؤثر $\widetilde{A}$ ليس مقبول بالنسبة للمؤثر F.

نرمز بالرمز $l_\lambda(F)$ لصنف المؤثرات A المغلقة من الصنف Q_λ المعرفه على فراغ جزئي حاوي لـ $\mathcal{M}_\lambda$ ومعدومه على $\mathcal{M}_\lambda$، ونآخذ قيمها في $\overline{E(V_\lambda)}$، حيث المؤثر $\widetilde{A}$ المعرف بالقضية (**4.22**) يكون مقبولا بالنسبة للمؤثر F.

وبالرمز $L_\lambda(F)$ لصنف كل المؤثرات A من $l_\lambda(F)$، حيث: $D(A) = H$.

واضح أن:
$$l_\lambda(F) \neq \varnothing \neq L_\lambda(F)$$

نتيجة 4.31
الصنف $L_\lambda(F)$ يمكن تعريفه بأنه مجموعة كل المؤثرات A من الصنف Q_λ المعرفه على H وتحقق:

1. $VerA^* \supset VerV_\lambda \quad , \quad E(A^*) \subset \mathcal{N}_\lambda$

2. $A^*V_\lambda f = (I - \widehat{T}_\lambda^*)f$، فقط في حالة $f = 0$.

نظرية 4.18
إذا كان F مؤثر مغلق مبدّ حيث: $\overline{D(F)} \neq H$.

فإنه من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب $(Im\lambda < 0)$ يوجد تقابل بين مجموعة كل المؤثرات $\widehat{A}$ المغلقة من الصنف Q_λ المقبولة بالنسبة للمؤثر F من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\overline{E(V_\lambda)}$.

حيث V_λ معرف بالصيغة (22.2) ومجموعة كل التمديدات المغلقة المبددة $\widetilde{F}$ للمؤثر F عندها يكون:

$$D(\widetilde{F}) = D(F) \oplus (V_\lambda \widetilde{A} - I)D(\widetilde{A}) \tag{24.2}$$

$$\widetilde{F}(f + V_\lambda \widetilde{A}u - u) = Ff + (\lambda V_\lambda \widetilde{A} - \overline{\lambda} I)u \quad / f \in D(F)\ ,\ \ u \in D(\widetilde{A}) \tag{25.2}$$

$$V_\lambda \widetilde{A} = (\widetilde{F} - \overline{\lambda} I)(\widetilde{F} - \lambda I)^{-1}|_{\mathcal{N}_\lambda \cap E(\widetilde{F} - \lambda I)} \tag{26.2}$$

المؤثر $\widetilde{F}$ يكون مغلق مبدّا أعظمي إذا وفقط إذا كان:

$$D(\widetilde{A}) = \mathcal{N}_\lambda$$

البرهان :

لدينا حسب النتيجة (**4.31**) من أجل كل λ من النصف الأسفل للمستوى المركب، يوجد تقابل بين مجموعة كل التمديدات المغلقة المبدّدة $\widetilde{F}$ للمؤثر F ومجموعة كل التمديدات المغلقة الموسعه $\widetilde{T}_\lambda$ للمؤثر T_λ التى لا تملك نقطة ثابتة غير معدومه.

عندها تكون:

$$\widetilde{T}_\lambda = (\widetilde{F} - \overline{\lambda} I)(\widetilde{F} - \lambda I)^{-1} \quad , \quad \widetilde{F} = (\lambda \widetilde{T}_\lambda - \overline{\lambda} I)(T_\lambda - I)^{-1}$$

من القضية (**4.22**) يوجد تقابل بين مجموعة كل المؤثرات $\widetilde{A}$ المغلقة من الصنف Q_λ المقبولة بالنسبة للمؤثر F من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\overline{E(V_\lambda)}$، ومجموعة كل المؤثرات A من الصنف $l_\lambda(F)$.

وعليه يوجد تقابل بين مجموعة كل المؤثرات $\widetilde{A}$ المغلقة من الصنف Q_λ المقبولة بالنسبة لـ F من $\mathcal{N}_\lambda$ في $\overline{E(V_\lambda)}$ ومجموعة كل مجموعة التمديدات المغلقة المبدّدة $\widetilde{F}$ للمؤثر F، يوجد تقابل تحدده الصيغة (26.2) التى يمكن كتابتها كالتالي:

$$\widetilde{F} = [\lambda(\widehat{T}_\lambda + V_\lambda \widetilde{A}) - \overline{\lambda} I][(\widetilde{T}_\lambda - V_\lambda \widetilde{A}) - I]^{-1}$$

بما أن

$$D(\widetilde{F}) = (\widetilde{T}_\lambda - I)D(\widetilde{T}_\lambda)\ ,\ D(\widetilde{T}_\lambda) = \mathcal{M}_\lambda \oplus D(\widetilde{A})\ ,\ D(F) = (T_\lambda - I)\mathcal{M}_\lambda$$

ومن أجل كل $u \in D(\widetilde{A})$ يكون:

$$\widetilde{F}(V_\lambda \widetilde{A} - I)u = (\lambda V_\lambda \widetilde{A} - \overline{\lambda} I)u$$

فإن الصيغ (24.2) و (25.2) محققه.

حسب النتيجة (11) الفقرة (4 . 1 . 2) المؤثر $\widetilde{F}$ يكون مغلق مبدّ أعظمي، إذا وفقط إذا كان:

$$D(\widetilde{A}) = \mathcal{N}_\lambda$$

نتيجة 4.32
إذا كان F مؤثر مغلق مبدّ $\overline{D(F)} \neq H$.

فإنه من أجل كل λ حيث $(Im\lambda < 0)$ المؤثر F_λ المعرف كالتالي:

$$\begin{cases} D(F_\lambda) = D(F) \oplus \mathcal{N}_\lambda \\ F_\lambda(f+u) = Ff + \overline{\lambda}u \ , \ (f \in D(F) \ , \ u \in \mathcal{N}_\lambda) \end{cases}$$

يكون تمديدا مغلقا مبدّا أعظميا لـ F.

خاتمة عامة

يندرج محتوى هذه المذكرة في توضيح كيفية الحصول على تمديد للمؤثر المغلق المبدد يحمل صفات تكون أحسن من الصفات التي يحملها هذا المؤثر من حيث قابلية الحل للمعادلات الدالية التي تتضمن منل هذه المؤثرات .

لهذا الهدف جمعنا أهم المقالات و الكتب التي تناولت هذا الموضوع فكان الوصول إلى هذا الهدف على مراحل ، المرحلة الأولى في حالة المؤثر المبدد معرف بكثافة وبعد وضحنا التمديد في الحالة العامة أي المؤثر المغلق المبدد ليس معرفا بكثافة.

تبقى إمكانية تمديد أنواع أحرى من المؤثرات ليست معرفة بكثافة قائمة.

المصادر

المصادر باللغة العربية

[1] عسيلة .م ؛ دروس في التبولوجيا والتحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر- 2009.

[2] عسيلة.م؛ دروس في المؤثرات ونظرية الأطياف،الجزء الأول ،المؤثرات المحدودة، UKMO,2013.

[3] كولموغوروف، د.أ. س. فومين؛ مبادئ في نظرية التوابع و في التحليل التابعي، - تعريب أبو بكرخالد سعد الله -د.م.ج.1987.

[4] كريزيك إيروين ،المدخل إلى التحليل الدالي وتطبيقاته-ترجمة د.خضر حامد الأحمد- ،الطبعة الرابعة -دمشق- 2004-2005 م.

المصادر باللغة الأجنبية

[5] Gohberg I., Gohberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Operators, Part I, Birkhhauser Verlag, 1990.

[6] Gohberg I., Gohberg S.,Kaashoek M.A. ; Classes of Linear Operators, Part II, Birkhauser Verlag, 1990.

[7] Glazman.I M, "An analog of the theory of extensions of Hermitian operators and a nonsymmetric boundary-value problem on a semiaxis," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 115, No. 2,214-216 (1957).

[8] Grandall.M. G, "Norm-preserving extensions of linear transformations on Hilbert spaces," Proc. Amer. Math. Soc., 21, No. 1,335-340 (1969).

[9] Kato .T ; Perturbation Theory for Linear Operators , Springer-Verlage Berlin- Heidelberg-New York (1966).

[10] Krasnosel'skii.M. Ao,"On self-adjoint extensions of Hermitian operators," Ukrainsk. Matem. Zh No. 1, 21-38 (1949).

[11] Naimark.M. A, "On s e l f - a d j o i n t extensions of the second type of a symmetric operator," Izv. Akad. Nauk SSSR, Set. Matem., 4, 53-104 (1940).

[12] Phillips.V.S, "Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations," Collection of Translations, Matematika, 6, No. 4, 11-70 (1962).

[13] Shtraus.A. V, "On extensions and the characteristic function of a symmetric operator," Izv. Akado Nauk SSSR, Set. Matem., 32, 186-207 (1968).

[14] Shtraus.A. V., "Extensions and generalized resolvents of a symmetric operator which is not densely defined," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem., 34, 175-202 1970).

[15] Yosida K. ; Functional Analysis, Springer-Verlag, 1965.

تمديد المؤثر المبدد المغلق

الملخص :

هذا العمل يهدف إلى توضيح كيفية تمديد مؤثر مغلق مبدد غير معرف بكثافة إلى مؤثر مغلق مبدد أعظمي. أعتمد في كيفية التمديد على مراحل ،المرحلة الاولى تمديد المؤثر المغلق المبدد المعرف بكثافة ،و المرحلة الثانية تمديد المؤثر المغلق المتناظر ليس معرف بكثافة والمرحلة الثالثة تمديد المؤثر المغلق المبدد معرف بكثافة.

الكلمات المفتاحية :

مؤثر المغلق ، المؤثر المبدد الأعظمي ، تمديد المؤثر ، المؤثر المعرف بكثافة.

Extensions of closed dissipative operators

Abstract :

This work aims at clarifing how yo extend a dissipative closed operator that is not defined by density to an dissipative maximal closed opertor count on stages ,the first stage is to est end the closed defined by density operatpr ,the second one is to extend symmetrical closed operator that is not difined by density and the the third stage is to extend a dissipative closed operator that is defind by density.

key words :

Closed Oparator,The maximal dissipative operator,Extending an operator,A defined by density operator.