



**UNIVERSITE KASDI MERBAH  
OUARGLA**

**Faculté des sciences et de la technologie et  
des sciences de la matière**

N° d'ordre :  
N° de série :

**DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
ET INFORMATIQUE**

**MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Analyse**

**Par : LALMI REBROUB**

**Thème**

**Estimation d'erreur a posteriori pour le modèle de Naghdi.**

**Soutenu publiquement le : 01/07/2013**

**Devant le jury composé de :**

Bensayah Abdallah	M. A. université KASDI Merbah - Ouargla	Président
Ghezal Abderrazek	M. A. université KASDI Merbah - Ouargla	Examineur
Merabet Smail	M. A. université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

# Dédication

Je dédie ce travail à,

A mes parents, Ma mère et Mon père.

Mes frères, Brahim, Laid, Aissa, Abdelkani, Abdelkabir, et Ma soeurs.

A toute la famille Rebroub.

A mes chères amis : Mohamed, Hmada, Koider, Brahim, Logani, Masseaud, Abdellah,

Brahim, Lamine, Salah, Laid, Hhmed, Bachir, Waniss, Abderazak.

Tous mes amis et collègues de travail

# Remerciement

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour  
achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de  
m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à  
m'encourager.

Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à  
mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique  
de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon  
travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier  
leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce  
travail.

# Table des matières

<b>Dédication</b>	<b>i</b>
<b>Remerciement</b>	<b>ii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Estimations d’erreur a posteriori pour le Laplacien</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Formulation variationnelle et approximation . . . . .	3
1.3 Discrétisation par éléments finis . . . . .	4
1.4 Estimation a posteriori . . . . .	8
<b>2 Discrétisations par des éléments finis d’un modèle de coques de Naghdi</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Présentation du modèle. . . . .	27
2.3 Une version pénalisée du modèle de Nagdhi . . . . .	31
2.4 Analyse a posteriori du problème discret. . . . .	37
2.5 Stratégie d’adaptativité pour le problème discret . . . . .	47
2.6 Tests numériques . . . . .	48

# Introduction

L'analyse a posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillages en éléments et volumes finis. Toute fois elle a bien d'autres applications.

L'analyse a posteriori est maintenant un outil important pour améliorer l'efficacité de la discrétisation et, jusqu'à notre connaissance, n'a pas été encore exécutée pour la discrétisation des modèles de coque (nous référons [13] pour un premier travail dans cette direction au sujet d'un modèle de plaque). Son premier but est l'adaptativité de maillage. En effet, un nombre beaucoup plus petit de degrés de liberté est nécessaire pour obtenir une exactitude donnée quand la maillage finale est adaptée à la solution, et la construction d'une telle maillage se fonde sur les indicateurs d'erreur qui dépendent seulement de la solution discrète, par conséquent peut être calculée d'une manière explicite et le plus souvent non chère. Les évaluations a posteriori montrent que ces indicateurs fournissent une bonne représentation de l'erreur locale, voir [22] pour une présentation détaillée de tout ceci. Ainsi nous effectuons l'analyse a posteriori de la discrétisation et prouvons les limites supérieures et inférieures pour l'erreur en fonction du type résiduel indicateurs.

Dans le cas des méthodes de pénalité telles que décrit de dans [17] par exemple, il est prouvé dans [6] que l'analyse a posteriori fournit également une évaluation de l'erreur publiée de l'addition d'une limite de pénalisation (voir [5] pour une autre application). Ceci exige deux genres d'indicateurs d'erreur : Un indicateur est lié à la pénalisation et à une famille des indicateurs à locaux à la discrétisation finie d'élément. L'idée principale de cette approche est de découpler coupler autant que possible l'évaluation des erreurs provenant de la pénalisation et de la discrétisation finie d'élément et de choisir le paramètre de pénalité pour que les deux erreurs soient du même ordre. Dans ce cas-ci aussi,

nous prouvons des évaluations optimales pour l'erreur.

Dans une étape finale, nous décrivons la stratégie qui est employée l'adaptativité. Les expériences numériques sont en bon accord avec l'analyse. Elles justifient le choix de la discrétisation et mènent à une comparaison du méthode que nous proposons.

# Chapitre 1

## Estimations d'erreur a posteriori pour le Laplacien

### 1.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre,  $c$  est une constante générique. Soit  $\Omega$  ouvert polygonal borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que sa frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  se décompose en deux parties  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  telles que  $\Gamma_D$  soit de mesure non nulle. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Gamma_N)$ . L'objet de ce problème consiste à estimer l'erreur effectuée lors du calcul d'une approximation  $u_h$  de  $u$  par la méthode des éléments finie  $\mathbb{P}_1$  en fonction ne dépende pas par la solution  $u$  du problème au limite (qui est inconnue) mais des données  $f, g$  et  $\Omega$  ainsi que de la solution  $u_h$  du problème discrétisé.

### 1.2 Formulation variationnelle et approximation

Maintenant nous déterminons une formulation variationnelle vérifiée par la solution du problème aux limites (1.1) et nous montrerons que ce problème admet une solution unique. On admettra le résultat (voir Allaire [1], p.73) qui affirme qu'il existe une constante  $C$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et de  $\Gamma_D$  telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ pour tout } u \in X,$$

où

$$X := \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u(x) = 0 \text{ presque partout sur } \Gamma_D\}.$$

La formulation variationnelle consiste à déterminer

$$u \in X := \{v \in H^1(\Omega) : u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

tel que, quel que soit  $v \in X$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v ds.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, cette formulation variationnelle admet une solution unique. La coercivité de la forme bilinéaire découle de l'inégalité de type Poincaré (voir Allaire [1]).

### 1.3 Discrétisation par éléments finis

Soit  $\mathcal{T}_h$  une suite de maillages réguliers de  $\Omega$  (voir [1], définition 6.3.11), on note  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des arêtes du maillage et on suppose que toute arête du maillage appartenant au bord du domaine  $\Omega$  est incluse soit dans  $\Omega_N$ , soit dans  $\Omega_D$ . On note  $\mathcal{E}_{h,N}$  les arêtes du maillage incluse dans  $\Omega_N$ ,  $\mathcal{E}_{h,D}$  les arêtes incluses dans  $\Omega_D$  et  $\mathcal{E}_{h,\Omega}$  les arêtes du maillage incluses dans  $\Omega$ .

$$\mathcal{E}_{h,\Omega} := \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Omega\},$$

$$\mathcal{E}_{h,N} := \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_N\};$$

$$\mathcal{E}_{h,D} := \{E \in \mathcal{E}_h : E \subset \Gamma_D\}$$

on introduit les fonctions  $f(h)$  (respectivement  $g(h)$ ), approximation de  $f$  (respectivement de  $g$ ), constantes par morceaux sur chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  (respectivement sur chaque arête  $E$  de  $\mathcal{E}_{h,N}$ ), définies par

$$f(h)(x) := f_T := |T|^{-1} \int_T f(y) dy \text{ pour tout } x \in T \quad (1.2)$$

et

$$g(h)(x) := g_E := |h_E|^{-1} \int_E g(y) dy \text{ pour tout } x \in E, \quad (1.3)$$

où  $|T|$  est l'aire du triangle  $T$  et  $h_E$  la longueur de l'arête  $E$ .

On note  $u(h)$  la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u(h) = f(h) & \text{dans } \Omega \\ u(h) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(h) = g(h) & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour le problème (1.4) Nous :

1. Déterminons la formulation variationnelle vérifiée par  $u(h)$  et nous établirons qu'elle admet une solution unique.
2. Montrons qu'il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  et de  $\Gamma_D$  telle que

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_N)}).$$

3. Pour  $T_0$  le triangle de référence défini par

$$T_0 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ et } x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

nous montrerons que pour un triangle  $T$  du maillage, il exist  $A_T$  matrice  $2 \times 2$  et  $b_T \in \mathbb{R}^2$  tels que  $T = F_T(T_0)$  où  $F_T$  est l'application affine définie par  $F_T(x) = A_T(x) + b_T$ . Dans un premier temps, nous montrons qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que pour tout triangle  $T$  du maillage on ait

$$\|A_T\| \leq Ch_T,$$

où  $h_T$  est le diamètre du triangle  $T$ . ( voir Allaire [1] page 126 pour un rappel de la définition du diamètre de  $T$ .)

**Remarque 1** *La propriété à démontrer est indépendante de la norme matricielle considérée. On pourra par exemple établir ce résultat pour la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle euclidienne, voir Allaire [1] p.131. Dans ce cas,  $C = \rho_{T_0}^{-1}$  ou  $\rho_{T_0}$  est le diamètre du cercle inscrit dans  $T_0$ ). De même, qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|A_T^{-1}\| \leq Ch_T^{-1}.$$

on rappelle que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger est mesurable que si  $\omega$  est un domaine borné régulier, les coins sont autorisés, il existe une constante  $C_\omega$  ne dépendant que de  $\omega$  telle que pour tout  $f \in H^1(\omega)$ , on a

$$\int_{\omega} |f - m(f)|^2 \leq C_\omega \int_{\omega} |\nabla f|^2,$$

où  $m(f)$  est la moyenne de  $f$  sur  $\omega$  (voir Allaire [1], équation (5.28)).

En appliquant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir Allaire [1]) au triangle de référence  $T_0$ , on montre, en effectuant un changement de variable approprié, qu'il existe une constante  $C$  (indépendante de  $h$ ) telle que pour tout triangle  $T$  du maillage et toute fonction  $f \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\int_T |f - f(h)|^2 \leq Ch_T^2 \int_T |\nabla f|^2.$$

on rappelle que  $h_T$  est le diamètre du triangle  $T$ .

4. Finalement nous montrons que si  $g \in H^1(\Gamma_N)$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et de  $g$  telle que toute arête  $E \in \mathcal{T}_{h,N}$ ,

$$\int_T |g - g(h)|^2 \leq Ch_E^2 \int_E |\nabla g|^2.$$

En déduire que si  $f \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^1(\Gamma_N)$ , alors  $u(h)$  converge vers  $u$  lorsque  $h$  tend vers zéro et donner une estimation de l'erreur  $\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)}$ .

**Preuve.**

1. La formulation variationnelle est identique à celle obtenue précédemment, quitte à remplacer  $f$  par  $f(h)$  et  $g(h)$ .
2. pour tout  $v \in X$ , on a

$$\int_{\Omega} (\nabla u - \nabla u(h)) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (f - f(h)) v dx + \int_{\Gamma_N} (g - g(h)) v ds.$$

En choisissant  $v = u - u(h)$ , on en déduit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème de trace que

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u(h)|^2 dx \leq C \|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} (\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_n)}).$$

D'après l'inégalité de type Poincaré, il vient

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f - f(h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g(h)\|_{L^2(\Gamma_n)}).$$

3. Soit  $T$  un triangle du maillage. On note  $a_0, a_1$  et  $a_2$  ses sommets et  $A_T$  la matrice  $(a_1 - a_0 | a_2 - a_0)$ .

L'application affine  $F_T(x) = A_T(x) + a_0$  est telle que  $T = F_T(T_0)$ .

On utilise la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne. On a

$$\|A_T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_T x\|.$$

Soit  $B_0$  la boule inscrite dans  $T_0$  de rayon  $\rho_0$  et de centre  $x_0$ . On a

$$\|A_T\| = \rho_0^{-1} \sup_{\|x\| \leq \rho_0} \|A_T x\| = \rho_0^{-1} \sup_{\|x - x_0\| \leq \rho_0} \|A_T x - A_T x_0\| = \rho_0^{-1} \sup_{\|x\| \leq B_0} \|F_T(x) - F_T(x_0)\|.$$

comme  $B_0$  est incluse dans  $T_0$ . On en déduit que pour tout  $x \in B_0$ ,  $F_T(x)$  appartient à  $T$ . Ainsi  $\|F_T(x) - F_{x_0}\| \leq h_T$

$$\|A_T\| \leq \frac{h_T}{\rho_0}.$$

Réciproquement, on a

$$\|A_T^{-1}\| \leq \frac{h_{T_0}}{\rho_T},$$

où  $\rho_T$  est le diamètre du cercle inscrit dans  $T$ . Le maillage étant régulier, le diamètre du cercle inscrit dans  $T$  est du même ordre de grandeur que le diamètre du triangle  $T$ . Ainsi,

$$\|A_T^{-1}\| \leq Ch_T^{-1},$$

4. D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, pour toute fonction  $\varphi \in H^1(T_0)$ , on a

$$\int_{T_0} |\varphi - m(\varphi)|^2 dx \leq \int_{T_0} |\nabla \varphi|^2 dx;$$

On pose  $\psi = \varphi \circ F_T^{-1}$ . On a  $\nabla \psi(y) = A_T^{-1} \nabla \varphi$ . En effectuant un changement de variable dans l'inégalité précédente, on en déduit que

$$\int_T |\psi - m(\psi)|^2 |A_T|^{-1} dy \leq \int_T |A_T \nabla \psi|^2 |\det A_T|^{-1} dy,$$

soit

$$\int_T |\psi - m(\psi)|^2 dy \leq \int_T |A_T \nabla \psi|^2 dy.$$

D'après la question précédente,  $\|A_T\| \leq Ch_T$  (où  $C$  est une constante indépendante de  $h_T$ ) et

$$\int_T |\psi - m(\psi)|^2 dy \leq |h_T|^2 \int_T |\nabla \psi|^2 dy.$$

En appliquant cette inégalité à  $\psi = f$ , on en déduit que

$$\int_T |f - f(h)|^2 dx \leq |h_T|^2 \int_T |\nabla f|^2 dx.$$

5. Un raisonnement similaire nous permet d'établir que

$$\int_E |g - g(h)|^2 \leq |Ch_E|^2 \int_E |\nabla g|^2.$$

En combinant cette inégalité avec celles obtenues, il vient

$$\|u - u(h)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch(\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Gamma_N)}).$$

■

## 1.4 Estimation a posteriori

On souhaite déterminer une majoration de l'erreur  $\|u_h - u(h)\|_{H^1(\Omega)}$  en fonction de  $u_h$  et des données du problème (où  $u_h$  est la solution du problème (1.5) et  $u(h)$  du problème (1.4)). Pour chaque arête  $E$  du maillage, on note  $n_E$  sa normale unitaire. On oriente  $n_E$  de manière arbitraire, sauf pour les éléments de  $\mathcal{T}_{h,N}$  pour lesquels on suppose que  $n_E$  coïncide avec la normale extérieure à  $\Omega$ . On note  $N_h$  l'ensemble des noeuds du maillage pour chaque triangle  $T$  du maillage, on note  $N(T)$  l'ensemble de ses sommets. De plus, pour tout noeud  $x \in N_h$  du maillage, on note

$$\omega_x := \cup_{x \in N(T)} T.$$

l'union des triangles du maillage dont l'un des sommet le noeud  $x$ .

**Lemme 1** On note  $X_h$  l'espace des éléments finis  $\mathbb{P}_1$  de  $\mathcal{T}_h$  s'annulant sur  $\Gamma_D$

$$X_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout triangle } T \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

soit  $u_h \in X_h$  la solution du problème variationnel

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} f(h)v_h + \int_{\Gamma_N} g(h)v_h \quad (1.5)$$

pour tout  $v_h \in X_h$ . Alors (1.5) admet une solution unique.

**Preuve.** Il suffit d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution au problème discrétisé (1.5)(voir Allaire [1]). ■

**Lemme 2** Soit  $x \in N_h$ , pour tout  $\varphi \in X$ , on note  $\pi_x \varphi \in \mathbb{R}$  la moyenne de  $\varphi$  sur l'ouvert  $\omega_x$ . On définit  $I_h$  l'opérateur de  $X$  à valeurs dans  $X_h$  par

$$I_h \varphi(x) = (\pi_x \varphi)(x) \text{ pour tout } x \in N_h \setminus \Gamma_D$$

et

$$I_h \varphi(x) = 0 \text{ pour tout } x \in N_h \cap \Gamma_D.$$

1. La définition introduite permet de définir  $I_h \varphi \in X_h$  de manière univoque.
2. Il existe un entier  $m$  indépendant de  $h$  tel que pour tout  $x$ , sommets du maillage,

$$\text{card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\} \leq m$$

(On rappelle que  $\mathcal{T}_h$  est une suite de maillages réguliers), et donc il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que pour tout sommet  $x$  et tout triangle  $T$  du maillage

$$T \in \omega_x \implies \text{diam}(\omega_x) \leq ch_T.$$

3. On peut généraliser le résultat obtenu. Plus précisément, soit  $\widehat{\Omega}$  et  $\Omega$  deux ouverts bornés, réguliers et connexes de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  une application continue et bijective de  $\widehat{\Omega}$  vers  $\Omega$ ,  $C^1$  par morceaux.

On admettra qu'il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\widehat{\Omega}$  telle que pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\|\varphi - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \frac{\max_{\widehat{x} \in \widehat{\Omega}} \det(\nabla F(\widehat{x}))}{\min_{\widehat{x} \in \widehat{\Omega}} \det(\nabla F(\widehat{x}))} \max_{\widehat{x} \in \widehat{\Omega}} \|\nabla F(\widehat{x})\|^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1.6)$$

En déduire d'après l'inégalité (1.6) qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que pour tout sommet  $x$  du maillage et tout élément  $v \in H^1(\omega_x)$ , on a

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \leq C(\text{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}$$

**Lemme 3** *Nous avons pour sommet  $x$  du maillage,  $\omega_x$  est l'image d'un polygone régulier (dépendant de  $x$  mais dont le nombre de coté est borné indépendamment de  $h$  et  $x$ ) par une application affine par morceaux.*

1. *Alors nous pouvons démontrer qu'il une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que pour tout triangle  $T$  du maillage et tout  $p \in \mathbb{P}_1$ , on a*

$$\|p\|_{L^\infty(T)} \leq C|T|^{-1/2}\|p\|_{L^2(T)}$$

et

$$\|p\|_{L^2(T)} \leq C|T|^{-1/2}\|p\|_{L^\infty(T)}$$

2. *Et nous montrerons que pour tout triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , toute arête  $E \in \mathcal{T}_h$  et toute fonction  $\varphi \in X$ , on a*

$$\|\varphi - I_h\varphi\|_{L^2(T)} \leq Ch_T\|\varphi\|_{H^1(\tilde{\omega}_T)}$$

et

$$\|\varphi - I_h\varphi\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{1/2}\|\varphi\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)},$$

où

$$\tilde{\omega}_T = \cup_{x \in N(T)}\omega_x \text{ et } \tilde{\omega}_E = \cup_{x \in N(E)}\omega_x$$

et  $N(T)$  et  $N(E)$  désignent respectivement l'ensemble des sommets de  $T$  et  $E$ .

**Remarque 2** *La relation  $(\varphi - I_h\varphi)|_T = \sum_{x \in N(T)}(\varphi - I_h\varphi(x))\phi_x$ , où  $\phi_x$  est la fonction de base associée au noeud  $x$  du maillage, est utile.*

**Preuve.**

1. Un élément fini  $\mathbb{P}_1$  est déterminé de manière unique par ses valeurs aux noeuds du maillage. La définition de  $I_h$  détermine pour tout  $\varphi$  un élément fini  $\mathbb{P}_1$   $I_h(\varphi)$ , car elle précise sa valeur en tous les noeuds du maillage. De plus, comme  $I_h(\varphi)$  s'annule sur  $\Gamma_D$ , il appartient à  $x$ .
2. La famille de maillages  $\mathcal{T}_h$  était supposée régulière, l'angle formé par deux cotés d'un triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  est borné inférieurement de  $h$ . Notons  $\theta_{\min} > 0$  cette borne inférieure. Un sommet  $x$  du maillage ne peut pas appartenir à plus de  $\frac{2\pi}{\theta_{\min}}$  triangles du maillage et

$$|\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\}| \leq \frac{2\pi}{\theta_{\min}}$$

L'ouvert  $\omega_x$  est inclus dans la boule centrée en  $x$  de rayon  $\max_{T' \subset \omega_x} h_{T'}$ . Ainsi, il suffit de prouver que pour tout triangle  $T$  du maillage inclus dans  $\omega_x$ , on a

$$\max_{T' \subset \omega_x} h_{T'} \leq Ch_T.$$

En fait, il suffit de montrer que le rapport  $\frac{h_{T_1}}{h_{T_2}}$  entre deux triangles possédant une arête commune est borné par une constante  $c_0$ . On en raisonnant de proche en proche que

$$\max_{T' \subset \omega_x} h_{T'} \leq (c_0)^{m-1} h_T,$$

où  $m = \sup_x |\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \in \omega_x\}|$ . Soit  $E$  l'arête commune à  $T_1$  et  $T_2$  le maillage étant régulier,  $\frac{h_{T_1}}{h_E}$  et  $\frac{h_E}{h_{T_2}}$  sont tous deux majorés indépendamment de  $h$ . Il en est donc de même pour  $\frac{h_{T_1}}{h_{T_2}}$ .

3. Nous allons prouver que pour tout entier  $n$  il existe une constante  $C_n$  telle que pour tout sommet  $x$  du maillage appartenant à  $n$  triangles distincts du maillage (i.e, tel que  $n = |\text{Card}\{T \in \mathcal{T}_h; T \subset \omega_x\}|$ ), on a

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \leq C_n(\text{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}.$$

étant donné que  $n$  est majoré par  $m$ , on en déduit alors que

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)} \leq \sup_{n \leq m} C_n(\text{diam}(\omega_x)) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_x)}.$$

On suppose pour simplifier que  $x$  n'est pas un élément du bord du maillage (dans le cas contraire, on peut aisément adapter le raisonnement qui suit).

Soit  $\omega_n$  un polygone régulier de diamètre 1, centré à l'origine. On décompose  $\omega_n$  en  $n$  triangle notés  $T_i (i = 1, \dots, n)$ . Soit  $F$  un difféomorphisme, de déterminant positif, de  $\omega_n$  dans  $\omega_x$ , continue, dont la restriction sur chacun des triangles  $T_i$  est affine, tel que  $F(0) = x$  et tels que  $F(T_i)$  soit un triangle du maillage  $\mathcal{T}_h$  (une telle application existe et est définie à une rotation de  $\frac{2k\pi}{n}$  près ( $k=1, \dots, n$ ) du polygone  $\omega_n$ ).

D'après l'inégalité (1.6) de l'énoncé, il existe  $C_n$  tel que pour tout  $v \in H^1(\omega_x)$ ,

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)}^2 \leq C_n \frac{\max \det F}{\min \det F} \|\nabla F\|^2 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\omega_x)}^2.$$

Or

$$\max \det F = \max_{K \in \omega_x} (n|K||\omega_x|), \min \det F = \min_{K \in \omega_x} \left( \frac{n|K|}{|\omega_x|} \right)$$

$$\|\nabla F\| = \max_{\|y\|=\rho_0} \frac{\|Fy\|}{\rho_n} \leq \frac{h_T}{\rho_n},$$

où  $\rho_n$  est le diamètre du cercle circonscrit des triangles  $T_i$ . On obtient donc la majoration recherchée suivante

$$\|v - \pi_x v\|_{L^2(\omega_x)}^2 \leq \frac{C_n \frac{\max |K|}{\min |K|} h_T^2}{\rho_n \|\nabla \varphi\|_{L^2(\omega_x)}^2}.$$

4. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à un espace de dimension fini, les normes  $\|p\|_{L^\infty(T_0)}$  et  $\|p\|_{L^2(T_0)}$  sont équivalentes. Il existe donc des constante  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\|p\|_{L^\infty(T_0)} \leq C_1 \|p\|_{L^2(T_0)}$$

et

$$\|p\|_{L^2(T_0)} \leq C_2 \|p\|_{L^\infty(T_0)}.$$

Soit  $T$  un triangle quelconque de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  une application affine, difféomorphisme de  $T_0$  vers  $T$ . Pour tout polynôme  $p$  de degré au plus un, on pose  $\hat{p} = p \circ F^{-1}$ .  $\hat{p}$  est également un polynôme de degré au plus un sur  $\mathbb{R}^2$ , et d'après les inégalités précédentes,

$$\|\hat{p}\|_{L^\infty(T_0)} \leq C_1 \|\hat{p}\|_{L^2(T_0)} \tag{1.7}$$

et

$$\|\hat{p}\|_{L^2(T_0)} \leq C_1 \|\hat{p}\|_{L^\infty(T_0)} \tag{1.8}$$

or

$$\|\hat{p}\|_{L^\infty(T_0)} = \|\hat{p}\|_{L^\infty(T)}$$

et

$$\|\hat{p}\|_{L^\infty(T_0)}^2 = \int_T |p|^2 |\det \nabla F|^{-1} = \frac{|T|^{-1} \|p\|_{L^2(T)}^2}{2}.$$

Ainsi, d'après (1.7), on obtient

$$\|p\|_{L^\infty(T)} \leq \frac{C_1 |T|^{-1/2} \|p\|_{L^2(T)}}{\sqrt{2}}$$

et d'après (1.7)

$$\|p\|_{L^2(T)} \leq C_2 \sqrt{2} |T|^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L^\infty(T)}.$$

5. Soit  $\varphi \in X$ , on a

$$(\varphi - I_h \varphi)_T = \sum_{x \in N(T)} (\varphi - I_h(\varphi)(x)) \phi_x = \sum_{x \in N(T)} (\varphi - \pi_x \varphi) \phi_x.$$

Ainsi,

$$\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(T)} \leq \sum_{x \in N(T)} \|\varphi - \pi_x \varphi\|_{L^2(T)}$$

Ainsi, il vient

$$\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(T)} \leq C \sum_{x \in N(T)} (\text{diam } \omega_x) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\omega_x)} \leq Ch_T \|\nabla \varphi\|_{L^2(\tilde{\omega}_T)}. \quad (1.9)$$

(Pour obtenir cette dernière inégalité, on utilise le fait que, le maillage étant régulier, le diamètre des ouvert  $\omega_x$  est du même ordre de grandeur que  $h_T$ ).

On effectue un raisonnement similaire pour majorer  $\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(E)}$ . Tout d'abord, on montre, on effectue un raisonnement identique à celui effectué, on déduit qu'il existe une constante  $C$  telle que pour toute arête  $E$  du maillage, tout sommet  $x$  de  $E$  et toute fonction  $v \in H^1(\omega_x)$ , on a

$$\|\phi - \pi_h \phi\|_{L^2(T)} \leq Ch_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\omega_x)}.$$

$$\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(E)} \leq \sum_{x \in N(E)} \|\varphi - \pi_x \varphi\|_{L^2(E)}. \quad (1.10)$$

Soit  $\varphi \in X$ , on a

$$(\varphi - I_h \varphi)_E = \sum_{x \in N(T)} (\varphi - I_h(\varphi)(x)) \phi_x = \sum_{x \in N(E)} (\varphi - \pi_x \varphi) \phi_x.$$

Ainsi

$$\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(E)} \leq \sum_{x \in N(T)} \|\varphi - \pi_x \varphi\|_{L^2(E)}.$$

Ainsi, d'après (1.4), il vient

$$\|\varphi - I_h \varphi\|_{L^2(E)} \leq C \sum_{x \in N(E)} h_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\omega_x)} \leq Ch_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\tilde{\omega}_x)}. \quad (1.11)$$

■

**Lemme 4** pour une fonction  $\varphi \in L^2(\Omega)$  dont la restriction  $\varphi_T$  sur chaque triangle  $T \in \mathcal{T}_h$  est continue et toute arête  $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ , on note  $[\varphi]_E$  le saut de la fonction  $\varphi$  le long de l'arête  $E$  définie pour tout  $x \in E$  par

$$[\varphi]_E(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\varphi(x + tn_E) - \varphi(x - tn_E))$$

Nous montrons que pour tout  $v \in X$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h)v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} \int_E (g(h) - n_E \cdot \nabla u_h)v + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} [n_E \cdot \nabla u_h]_E v. \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Preuve.** Soit  $v \in X$ , on a

$$\int_T \nabla u_h \cdot \nabla v = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v$$

Sur chaque triangle  $T$ ,  $u_h$  est régulier, on peut donc effectuer l'intégration par partie

$$\int_T \nabla u_h \cdot \nabla v = - \int_T \Delta u_h v + \int_{\partial T} (\nabla u_h|_T \cdot n_T)v,$$

où  $n_T$  est la normale extérieure du triangle  $T$ . La restriction de  $u_h$  à tout triangle  $T$  du maillage étant affine,  $\Delta u_h = 0$  sur  $T$ . On en déduit que

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v = \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \int_E n_E \cdot \nabla u_h v + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \int_E (\nabla u_h|_{T_1} \cdot n_{T_1} + \nabla u_h|_{T_2} \cdot n_{T_2})v.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $n_E = n_{T_1}$ .

On a alors  $\nabla u_h|_{T_1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \nabla u_h(x - tn_E)$  et  $\nabla u_h|_{T_2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \nabla u_h(x + tn_E)$ .

Ainsi,

$$\nabla u_h|_{T_1} \cdot n_{T_1} + \nabla u_h|_{T_2} \cdot n_{T_2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \nabla u_h(x - tn_E) \cdot n_E - \nabla u_h(x + tn_E) \cdot n_E = [\nabla u_h \cdot n_E]_E$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v = \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \int_E n_E \cdot \nabla u_h v - \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \int_E [\nabla u_h \cdot n_E]_E v$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f(h)v + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \int_E (g(h) - n_E \cdot \nabla u_h)v + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} [n_E \cdot \nabla u_h]v.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

■

On déduit des deux lemmes précédentes et du problème variationnel vérifié par  $u_h$  le résultat suivant :

**Lemme 5** *Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $v \in X$ , on a*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T h_T^2 \|f(h)\|_{L^2(T)}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} h_E \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

**Preuve.** Pour tout  $v_h \in x_h$ , on a

$$\int_{\Omega} f(h)v_h + \int_{\Gamma_N} g(h)v_h = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h.$$

Ainsi, pour tout  $v \in X$ , on a

$$\int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(h)(v - v_h) + \int_{\Gamma_N} g(h)(v - v_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (v - v_h).$$

D'après l'égalité établie précédemment, suite à l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{L^2(T)} \|v - v_h\|_{L^2(T)} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)} \|v - v_h\|_{L^2(E)} + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)} \|v - v_h\|_{L^2(E)}.
\end{aligned}$$

En appliquant cette majoration à  $v_h = I_h(v)$  ainsi que les estimations (1.10) et (1.11), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{L^2(T)} h_T \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_T)} \right. \\
& \left. + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)} h_E^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)} h_E^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \leq \\ C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{L^2(T)} h_T^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)}^2 h_E + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)}^2 h_E \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Enfin, comme chaque triangle  $T$  du maillage appartient à les ouverts  $\tilde{\omega}_T$  et  $\tilde{\omega}_E$  uniformément borné (par rapport à  $h$ ), on déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f(h)\|_{L^2(T)}^2 h_T^2 \right. \\ \left. + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N}} \|g(h) - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)}^2 h_E + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}} \|[n_E \cdot \nabla u_h]\|_{L^2(E)}^2 h_E \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

■

**Lemme 6** *On conclut qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2, \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned} \eta_T = \left\{ h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,\Omega} \cap \mathcal{T}(T)} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)}^2 \right. \\ \left. + \sum_{E \in \mathcal{T}_{h,N} \cap \mathcal{T}(T)} h_E \|(g(h) - n_E \cdot \nabla u_h)\|_{L^2(E)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.16) \end{aligned}$$

et  $\mathcal{T}(T)$  est l'ensemble des arêtes du triangle  $T$ .

## Efficacité

L'inégalité (1.9) nous permet de majorer l'erreur induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}_1$ . Cependant, il est naturel de déterminer si la majoration obtenue n'est pas trop grossière. Une estimation a posteriori est dite efficace si l'erreur  $\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}$  est du même ordre de grandeur que l'estimateur c'est à dire (dans notre cas) s'il existe une  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \leq \|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (1.17)$$

où  $\eta_T$  est défini par (1.16),  $u_h$  est la solution du problème (1.5) et  $u(h)$  du problème (1.4). Si l'estimateur et l'erreur sont équivalents (lorsque  $h$  tend vers zéro), on dit que l'estimation est asymptotiquement exacte.

**Preuve.** Il suffit de constater que pour tout  $v \in X$ , on a

$$\int_{\Omega} f(h)v + \int_{\Gamma_N} g(h)v = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v.$$

Ainsi, d'après le lemme précédent,

$$\int_{\Omega} \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla v \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\eta_T = \left\{ h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_h \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_E^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega} \cap \mathcal{E}(T)} h_h \|[g_E - n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.18)$$

et  $\mathcal{E}(T)$  est l'ensemble des arêtes du triangle  $T$ . En appliquant cette estimation à  $v = u(h) - u_h$  et en utilisant l'inégalité de type Poincaré

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla w|^2,$$

pour tout  $w \in X$ , on obtient

$$\|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

**Lemme 7** *On associe à chaque triangle  $T$  du maillage une fonction dite bulle  $b_T$  définie par*

$$\{b_T(x) = \{27\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x) \text{ si } x \in T \text{ et } 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus T,$$

où  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$  et  $\lambda_3(x)$  sont les coordonnées barycentriques de  $x$  dans  $T$ .

1. *Alors  $b_T$  est une fonction continue sur  $\bar{\Omega}$ , que  $0 \leq b_T \leq 1$  et que  $\max_{x \in T} b_T = 1$ .*
2. *Et il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  (indépendantes de  $h$ ) telles que pour tout triangle  $T$  du maillage.*

$$c_1 h_T^2 \leq \int_T b_T = \frac{9}{20} |T| \leq c_2 h_T^2.$$

3. *Il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{-1} \|b_T\|_{L^2(T)}.$$

**Remarque 3** On pourra se ramener à un triangle de référence  $T_0$  afin d'établir cette relation.

**Preuve.**

1. La fonction  $b_T$  est continue, car  $\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$  est nul sur le bord du triangle  $T$ .

On a

$$\max_{x \in T} b_T(x) = \max_{\lambda \in K} 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

où

$$K = \{\lambda \in \mathbb{R}^3 : \lambda_i \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Le maximum de  $b_T$  ne peut être atteint en un point tel que l'une des coordonnées de  $\lambda$  s'annule. D'après les conditions d'optimalité du premier ordre, il existe donc un réel  $\mu$  tel que

$$27\lambda_2\lambda_3 = 27\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\lambda_3 = \mu$$

(les contraintes de type  $\lambda_i \geq 0$  sont innactives). Il s'en suit que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$  et

$$\max_{x \in T} b_T(x) = 1$$

2. D'après la formule de quadrature (6.43) (voir Allaire [1])

$$\int_T \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{|T|1!1!1!2!}{5!} = \frac{|T|}{60}.$$

Ainsi,

$$\int_T b_T = \frac{27}{60}|T| = \frac{9}{20}|T|.$$

Le maillage étant régulier,  $|T|$  est du même ordre de grandeur que  $h_T^2$ .

3. Soit  $F_T$  une application affine telle que  $F_T(T_0) = T$ . On a  $b_T \circ F_T = b_{T_0}$  et

$$\|b_T\|_{L^2(T)}^2 = \int_{T_0} |b_{T_0}|^2 |\det \nabla F_T| = |\det \nabla F_T| \|b_{T_0}\|_{L^2(T_0)}^2 \quad (1.19)$$

De plus,  $\nabla b_T = \nabla F_T^{-1} \nabla b_{T_0}$  et

$$\|\nabla b_T\|_{L^2(T)}^2 = \int_{T_0} |\nabla F_T^{-1} \nabla b_{T_0}|^2 |\det \nabla F_T| \leq |\det \nabla F_T| \|\nabla F_T^{-1}\| \|b_{T_0}\|_{L^2(T_0)}^2 \quad (1.20)$$

Ainsi,

$$\|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \leq C \|\nabla F_T^{-1}\| \|b_T\|_{L^2(T)}.$$

On conclut en notant que  $\|\nabla F_T^{-1}\| = \max_{\|Fx\|=\rho_T} \frac{\|x\|}{\rho(T)} \leq \frac{h_{T_0}}{\rho_T} \leq Ch_T^{-1}$

■

Dans la suite on va chercher à obtenir une majoration du premier terme de l'estimateur  $\eta_T$  en fonction de l'erreur due à la discrétisation par élément finis  $\mathbb{P}_1$ .

**Lemme 8** *Nous avons les résultats suivants :*

1. Pour tout triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ , on a

$$\int_T f_T b_T = \int_T \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_T.$$

2. Il existe une constante  $C$ , indépendante de  $f$  que pour tout triangle  $T \in \mathcal{T}_h$ ,

$$|f_T| |T|^{1/2} \leq Ch_T^{-1} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}.$$

En déduit que

$$h_T^2 \|f_T\|_{L^2(T)}^2 \leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(T)}^2.$$

**Preuve.**

1. Par intégration par partie, la restriction de  $u_h$  à  $T$  étant affine et  $b_T$  étant nul sur le bord de  $T$ , on a

$$\int_T \nabla u_h \cdot \nabla b_T = 0.$$

De plus, d'après le problème variationnel vérifié par  $u(h)$ , on a

$$\int_T \nabla u(h) \cdot \nabla b_T = \int_T f_T b_T.$$

Ainsi,

$$\int_T \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_T = \int_T f_T b_T.$$

2. Comme  $\int_T b_T = \frac{9|T|}{20}$ , on a

$$\frac{9|T| |f_T|}{20} = \int_T \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_T \leq \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} \|\nabla b_T\|_{L^2(T)}.$$

Or  $\|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^{-1} \|b_T\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^{-1} |T|^{\frac{1}{2}}$ . Ainsi,

$$|T| |f_T| \leq C \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} h_T^{-1} |T|^{\frac{1}{2}}.$$

et

$$|T|^{\frac{1}{2}} |f_T| \leq C \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} h_T^{-1}.$$

on en déduit que

$$|f_T|_{L^2}^2 = |f_T|^2 |T| \leq C \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}^2 h_T^{-2}.$$

■

**Lemme 9** *On introduit un nouveau type de fonction bulles.*

*Soit  $E \in \mathcal{T}_\Omega$  et  $T_1, T_2$  les triangles situés de part et d'autres de celle-ci. On note  $b_E$  la fonction définie par*

$$b_E(x) := \{4\lambda_1(x)\lambda_2(x) \text{ si } x \in T_1 \cup T_2 \text{ et } 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus (T_1 \cup T_2),$$

*où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les deux coordonnées barycentrique de  $x$  dans le triangle  $T_i$  ( $i=1$  ou  $2$ ) associées aux sommets de l'arête  $E$ . On pose  $\omega_E = T_1 \cup T_2$ .*

1. *Alors  $b_E$  est continue sur  $\overline{\omega_E}$ , que  $0 \leq b_E \leq 1$  et que  $\max_{x \in T_1 \cup T_2} b_E(x) = 1$ .*
2. *Il existe deux constantes  $c_3$  et  $c_4$  (indépendantes de  $h$ ) telles que pour arête  $E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}$  et pour tout triangle  $T$  du maillage inclus dans  $\omega_E$ ,  $c_3 h_E^2 \leq \int_T b_E = \frac{1}{3} |T| \leq c_4 h_E^2$ .  
Nous avons de plus que  $\int_E b_E = \frac{2h_E}{3}$ .*
3. *Il existe une constante  $C$  telle que pour arête  $E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}$  et pour tout triangle  $T$  du maillage inclus dans  $\omega_E$ ,  $\|\nabla b_E\|_{L^2(T)} \leq Ch_E^{-1} \|b_E\|_{L^2(T)}$ .*

**Preuve.**

1. La fonction  $b_E$  est continue sur chaque triangle. De plus, on a continuité le long de chaque arête :  $b_E$  nulle sur le bord de  $T_1 \cap T_2$  égale à  $4\lambda_1(x)\lambda_2(x)$  sur l'arête  $E$ . Elle est donc continue. On a

$$\max_{x \in T_1 \cup T_2} b_E(x) = \max_{0 \leq \lambda \leq 1} 4\lambda(1 - \lambda) = 1.$$

2. De plus on a pour tout  $T \in \omega_E$ ,

$$\int_T b_E = \int_T 4\lambda_1\lambda_2 = \frac{4|T|2!}{4!} = \frac{|T|}{3}.$$

Enfin, comme le maillage est régulier,  $|T|$  est du même ordre de grandeur que  $h_E^2$ .

$$\int_E b_E = \int_0^1 4s(1-s)h_E ds = 4h_E\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2h_E}{3}.$$

3. Le même raisonnement que celui effectué dans le lemme 8 s'applique et permet d'obtenir que

$$\|\nabla b_E\|_{L^2(T)} \leq Ch_E^{-1}\|b_E\|_{L^2(T)}.$$

■

Dans ce qui suit, on cherche à obtenir une majoration du deuxième terme de l'estimateur  $\eta_T$  en fonction de l'erreur due à la discrétisation par éléments finis  $\mathbb{P}_1$ .

**Lemme 10** *Nous montrerons :*

1. que pour tout  $E \in \mathcal{T}_{h,\Omega}$ ,

$$-\int_E [n_E \cdot \nabla u_h]_E b_E = \sum_{T \in \omega_E} \int_T (f(h) b_E - \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_E).$$

2. Et qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout arête  $E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}$ ,

$$\|[\eta_E \cdot \nabla u_h]_E\| h_E^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{T \subset \omega_E} (h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} + h_E^{\frac{1}{2}} \|f_T\|_{L^2(T)}^2)$$

3. En déduire qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|[\eta_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)} \leq C h_E^{-\frac{1}{2}} \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_E)}.$$

**Preuve.**

1. Par intégration par partie,

$$\int_{\omega_E} \nabla u_h \cdot \nabla b_E = \sum_{T \subset \omega_E} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla b_E = - \int_E [n_E \cdot \nabla u_h]_E b_E.$$

De plus, d'après le problème variationnel vérifié par  $u(h)$ ,

$$\sum_{T \subset \omega_E} \int_T f(h) b_E = \int_{\omega_E} \nabla u_h \cdot \nabla b_E.$$

Ainsi,

$$\int_E [n_E \cdot \nabla u_h]_E b_E = \int_{\omega_E} \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_E - \sum_{T \subset \omega_E} \int_T f(h) b_E.$$

2. D'après le lemme précédent, on a

$$|[n_E \cdot \nabla u_h]_E| \int_E b_E \leq \sum_{T \in \omega_E} \|f(h)\|_{L^2(T)} \|b_E\|_{L^2(T)} + \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)} \|\nabla b_E\|_{L^2(T)}$$

Et donc,

$$|[n_E \cdot \nabla u_h]_E| \int_E b_E \leq \sum_{T \in \omega_E} (\|f(h)\|_{L^2(T)} + C h_E^{-1} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}) \|b_E\|_{L^2(T)}$$

Or  $\|b_E\|_{L^2(T)} \leq Ch_E$  et  $\int_E b_E = 2h_E/3$ . Ainsi,

$$|[n_E \cdot \nabla u_h]_E| h_E \leq C \sum_{T \in \omega_E} (\|f(h)\|_{L^2(T)} + Ch_E^{-1} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}) h_E.$$

On obtient la majoration souhaitée en divisant cette inégalité par  $h_E^{1/2}$ .

3. On a prouvé que pour tout triangle  $T$ ,

$$h_T \|f_T\|_{L^2(T)} \leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(T)}$$

Comme  $h_T$  et  $h_E$  sont du même ordre de grandeur, il s'en suit que

$$h_E^{1/2} \|f_T\|_{L^2(T)} \leq Ch_E^{-1/2} \|u(h) - u_h\|_{H^1(T)}$$

On a donc

$$\|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{L^2(E)} = h_E^{1/2} |[n_E \cdot \nabla u_h]_E| \leq C \sum_{T \in \omega_E} h_E^{-1/2} \|\nabla(u(h) - u_h)\|_{L^2(T)}.$$

On étend (de manière élémentaire) la définition de  $b_E$  au cas où  $E \in \mathcal{T}_{h,N}$ . En d'autres termes, pour tout  $E \in \mathcal{T}_{h,N}$ , si  $T$  désigne l'unique triangle du maillage  $\mathcal{T}_h$  contenant l'arête  $E$ , on pose

$$b_E(x) := \{4\lambda_1(x)\lambda_2(x) \text{ si } x \in T \text{ et } 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus T,$$

où  $\lambda_1(x)$  et  $\lambda_2(x)$  sont les coordonnées barycentriques de  $x$  dans le triangle  $T$  associées aux sommets de l'arête  $E$ . ■

**Lemme 11** *Pour toute arête  $E \in \mathcal{E}_{h,N}$ ,*

$$\int_E (g_E - \eta_E \cdot \nabla u_h) b_E = \int_{\omega_E} \nabla(u(h) - u_h) \cdot \nabla b_E - \int_{\omega_E} f(h) b_E.$$

*En déduire qu'il existe une constante  $C$  telle que pour arête  $E \in \mathcal{E}_{h,N}$ ,*

$$\|g_E - \eta_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{-1/2} \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_E)}.$$

**Preuve.**

1. Par intégration par partie,

$$\int_{\omega_E} \nabla u_h \cdot \nabla b_E = \int_E n_E \cdot \nabla u_h b_E.$$

En utilisant la formulation vérifiée par  $u(h)$ , on en déduit que

$$\int_E (g_E - n_E \cdot \nabla u_h) b_E = \int_{\omega_E} \nabla(u_h - u_h) \cdot \nabla b_E - \int_{\omega_E} f(h) b_E.$$

En effectuant exactement le même calcul, quitte à remplacer :

$$-[n_E \cdot \nabla u_h]_E \text{ par } g_E - n_E \cdot \nabla u_h$$

on obtient

$$\|g_E - n_E \cdot \nabla u_h\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{1/2} \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_E)}.$$

■

**Lemme 12** *L'estimation a posteriori (1.9) est efficace.*

**Preuve.** En utilisant les résultats obtenus, on en déduit que

$$\eta_T^2 \leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(\omega_T)}^2,$$

d'où

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \leq C \|u(h) - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

L'estimations a posteriori est donc efficace. ■

## Chapitre 2

# Discrétisations par des éléments finis d'un modèle de coques de Naghdi

### 2.1 Introduction

Les équations de modèle coques linéairement élastiques de Naghdi. Dans leur formulation classique, elles constituent un système des EDP de deuxième ordre linéaire qui est elliptique quand la coque est maintenue sur une partie de sa frontière : Les inconnus sont les composants de covariant du déplacement de la coque et de sa rotation. Une autre contrainte est imposée sur la rotation qui doit être tangente à la coque ; cette contrainte est facilement exprimée en composants covariantes. Cependant, une telle formulation n'adapte pas à des discontinuités de courbure sur la surface moyenne de coque.

La formulation du modèle de Naghdi qui est employé ici a été présentée par Blouza [8] et Blouza et Le Dret [11]. Elle base sur l'idée d'employer une formulation base-libre locale dans laquelle les inconnus sont décrits dans des coordonnées cartésiennes au lieu du covariant ou des composants contravariant comme est habituellement fait dans la théorie de coque, voir par exemple [3]. Une telle formulation peut manipuler des coques de classe  $W^{2,\infty}$ . En particulier, on permet des discontinuités de courbure de moyenne surface. D'ailleurs, en raison de la discrétisation et comme d'abord proposée de dans [9], un multiplicateur de Lagrange peut être présenté pour manipuler la condition la contrainte sur la rotation.

La littérature sur l'approximation par élément fini des modèles de coque bidimension-

nels est grande. Mentionnons quelques approches. Pour ce qui concerne des méthodes conformes, les triangles de Ganev et d'Argyris fournissent à l'interpolation par des polynôme du degré 4 et 5, la convergence d'ordre élevé dans  $ch^4$  quand la solution est assez lisse. Ces éléments sont employés par exemple pour étudier le modèle linéaire de Koiter pour  $C^3$ -coque dans la formulation classique voir [2]. De telles méthodes sont également appliquées pour approcher les modèles de coque géométriquement exacts dans [12]. Les éléments d'Argyris sont employés dans [19] pour l'analyse numérique du modèle de Koiter avec peu de régularité dans la formulation cartésienne proposée de dans [10]. Nous mentionnons également l'approche à trois dimensions d'élément de coque, voyons [14]. Dans le cadre toujours des coques avec peu de régularité, c.-à-d., quand la surface moyenne est de  $W^{2,\infty}$ , un élément non conformes DKT (triangle discrète de Kirchhoff) est employé dans [21] pour rapprocher le modèle de Koiter. Autre fonctionne [21] [20] souci la discrétisation par éléments finis des problèmes de coque avec la décomposition de domaine.

Dans ce travail, nous sommes intéressés par autre discrétisation d'élément fini basé sur la formulation pénalisé et déjà étudiées de dans [9], qui mène à un algorithme efficace pour résoudre le système linéaire en résultant. La convergence discrétisation est prouvée de dans [9], où une analyse a priori complète est exécutée et des essais numériques sont présentés.

## 2.2 Présentation du modèle.

En tant que norme dans le contexte actuel, les indices et les exposants grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1; 2\}$  et indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1; 2; 3\}$ . Sauf indication contraire, la convention d'addition pour des indices répétés et des exposants selon cet ensemble de valeurs est assumée (mais ne s'applique pas à  $h$  et à  $p$ ).

Soit  $\omega$  être un domaine relié lié du de  $\mathbb{R}^2$  avec un Lipschitz-frontière continue  $\partial\Omega$ . Nous considérons une coque dont la surface moyenne est donné par  $S = \varphi(\tilde{\Omega})$  où  $\varphi$  est une cartographie linéaire dans  $W^{2,\infty}(\Omega)^3$  tels que les deux vecteurs

$$a_\alpha(x) = (\partial_\alpha \varphi)(x)$$

sont linéairement l'indépendant à chaque point  $x$  de  $\tilde{\Omega}$ . Alors,

$$a_3(x) = \frac{a_1(x) \wedge a_2(x)}{|a_1(x) \wedge a_2(x)|}$$

est le vecteur normal d'unité sur la surface moyenne au point  $\varphi(x)$ . Les vecteurs  $a_i(x)$  définissent la base locale de covariant au point  $\varphi(x)$ . La base contravariant  $a^i(x)$  est définie par les relations  $a_i \cdot a^j = \delta_i^j$  où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker. En particulier  $a_3(x)$  coïncide avec  $a^3(x)$ . Note que tous ces vecteurs appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)^3$ . la première et la deuxième forme fondamentales de la surface sont données dans les composantes covariant par

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta \text{ et } b_{\alpha\beta} = a_3 \cdot \partial_\beta a_\alpha.$$

Nous posons  $a(x) = |a_1(x) \wedge a_2(x)|^2$  de sorte que  $\sqrt{a(x)}$  est l'élément de secteur du moyenne surface. De même, l'élément  $l$  de longueur sur la frontière  $\partial\Omega$  est donné par  $\sqrt{a^{\alpha\beta} \tau_\alpha \tau_\beta}$ , et  $a^{\alpha\beta} \alpha \cdot a^\beta$  étant les composantes contravariant de la première forme fondamentale et  $(\tau_1, \tau_2)$  étant les coordonnées de covariant de vecteur d'unité tangent à  $\partial\Omega$ . Nous dénotons également par  $e$  l'épaisseur de la coque.

Soit  $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$  dénotent les composantes contravariant du tenseur d'élasticité. Nous considérons ici le cas d'un matériel homogène et isotrope avec module  $E > 0$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ ,  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ , où ces composantes sont donnés par

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\rho} a^{\beta\sigma} + a^{\alpha\sigma} a^{\beta\rho}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} a^{\alpha\beta} a^{\rho\sigma}. \quad (2.1)$$

Nous notons que chaque composant du tenseur d'élasticité appartient à  $L^\infty(\Omega)$ . De plus, ce tenseur satisfait les propriétés habituelles de symétrie et est uniformément strictement positif : il existe une constante positive  $C_0$  tels que, pour tous les tenseurs symétriques  $\tau = (\tau_{\alpha\beta})$  dans  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,

$$a^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)\tau_{\alpha\beta}\tau_{\rho\sigma} \text{ si a.e. } x \in \omega. \quad (2.2)$$

Dans ce contexte, les composants de covariant du changement du tenseur métrique

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_\beta + \partial_\beta u \cdot a_\alpha), \quad (2.3)$$

les composants de covariant du changement du tenseur transversal de cisaillement

$$\gamma_{\alpha 3}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_3 + r \cdot a_\alpha), \quad (2.4)$$

et les composants de covariant du changement du tenseur de courbure

$$\chi_{\alpha\beta}(u, r) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha a_3 + \partial_\alpha r \cdot a_\beta + \partial_\beta r \cdot a_\alpha), \quad (2.5)$$

voir [8] et [11]. Noter que toutes ces quantités semblent raisonnable pour des coques avec peu de régularité, et sont facilement exprimés avec des coordonnées cartésiennes des inconnus et des données géométriques. Nous supposons que la frontière  $\partial\omega$  du domaine de diagramme est divisée en deux parts :  $\gamma_0$  sur ce que la coque est maintenue et la partie complémentaire  $\gamma_1 = \partial\omega \setminus \gamma_0$  sur quel la coque est soumis aux tractions et aux moments appliqués. Dorénavant, nous supposons que  $\gamma_0$  a nombre fini des composants reliés et d'une mesure à une dimension strictement positive.  $T_o$  tenir compte des conditions de frontière, nous définissent l'espace

$$H_{\gamma_0}^1(\omega) = \{\mu \in H^1(\omega); \mu = 0 \text{ dans } \gamma_0\}. \quad (2.6)$$

Maintenant considérons l'espace de fonction, présenté de dans [8] et [11], qui est approprié de dans le contexte des coques avec peu de régularité

$$\mathbb{V}(\omega) = \{V = (v, s) \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3 \times H_{\gamma_0}^1(\omega)^3; s \cdot a_3 = 0 \text{ dans } \omega\}. \quad (2.7)$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|V\|_{V(\omega)} = (\|v\|_{H^1(\omega)^3}^2 + \|s\|_{H^1(\omega)^3}^2)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Nous rappelons maintenant la formulation variationnelle du problème correspondant au modèle linéaire de Naghdi pour des coques avec peu de régularité. Pour  $(f, N, M)$  dans le  $L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$ , elle lit

Trouver  $U = (u, r)$  en  $\mathbb{V}(\Omega)$  tels que

$$\forall V \in \mathbb{V}(\omega), a(U, V) = L(V), \quad (2.9)$$

la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est défini par

$$\begin{aligned} a(U, V) = \int_{\omega} \left\{ ea^{\alpha\beta\rho\sigma} [\gamma_{\alpha\beta}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + \frac{e^2}{12}\chi_{\alpha\beta}(U)\chi_{\rho\sigma}(V)] \right. \\ \left. + 2e \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}(U)\delta_{\beta 3}(V) \right\} \sqrt{a} dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

et la forme linéaire  $L(.)$  est indiqué par

$$L(V) = \int_{\omega} f.v\sqrt{a} dx + \int_{\gamma_1} (N.v + M.s) l d\tau. \quad (2.11)$$

Les données  $f, N$  et  $M$  représentent une densité donnée de force résultante, une densité appliquée de traction et une densité appliquée de moment, respectivement. Dans les formules ci-dessus, l'épaisseur  $e$  du on suppose que la coque est constante et positive.

La forme  $L$  est clairement continue sur  $\mathbb{V}(\Omega)$  et sa norme satisfait, avec la notation évidente,

$$\|L\| \leq c (\|f\|_{L^2(\omega)^3} + \|N\|_{L^2(\gamma_1)^3} + \|M\|_{L^2(\gamma_1)^3}). \quad (2.12)$$

Nous référons [8] et [11] pour la preuve de la propriété suivante d'ellipticité : il existe a  $c_* > 0$  tels que

$$\forall V \in V(\omega), a(V, V) \geq c_* \|V\|_{V(\omega)}^2. \quad (2.13)$$

Tout ceci mène au prochain rapport (qui est encore valide pour des données légèrement moins régulières, voir [4], toute fois nous n'avons aucune demande de cela).

**Théorème 4** *Pour toutes données  $(f, N, M)$  dans le  $L^2(\omega)^3 \times L^2(\omega)^3 \times L^2(\omega)^3$ , le problème (2.9) admet qu'une solution unique  $U$  en  $\mathbb{V}(\Omega)$  cette solution. De plus satisfait*

$$\|U\|_{V(\omega)} \leq c \|L\|. \quad (2.14)$$

Afin de décrire le problème discret, nous observons que la contrainte  $s.a_3 = 0$  qui apparaît dans la définition de  $\mathbb{V}(\Omega)$  clairement ne peut pas être mise en application d'une manière standard pour une coque générale. Ainsi l'approche utilisée de dans [9] consiste en manipulant cette contrainte par l'intermédiaire de l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange. Considérons l'espace fonctionnel relaxé

$$\mathbb{X}(\omega) = H_{\gamma_0}^1(\omega)^3 \times H_{\gamma_0}^1(\omega)^3, \quad (2.15)$$

équipé toujours de la norme définie dans (2.8) ce qui sont maintenant dénotés par  $\|\cdot\|_{\mathbb{X}(\phi)}$ . Nous avons également placé  $\mathbb{M}(\omega) = H_{\gamma_0}^1(\omega)$ . Évidemment, les formes  $a(\cdot, \cdot)$  et  $L(\cdot)$  définis dans (2.10) et (2.11), respectivement, sont également définis (et continu) sur  $\mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{X}(\omega)$  et  $\mathbb{X}(\Omega)$ . Nous considérons le problème variationnel

Trouver  $(U, \psi)$  dans  $\mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{M}(\omega)$  tels que

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathbb{X}(\omega), \quad a(U, V) + b(V, \psi) &= L(V), \\ \forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), \quad b(U, \chi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  est maintenant défini par

$$b(V, \chi) = \int_{\omega} \partial_{\alpha}(s.a_3) \partial_{\alpha} \chi dx. \quad (2.17)$$

Puisque  $a_3$  appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)^3$ , la forme  $b(\cdot, \cdot)$  est continu sur  $\mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{M}(\omega)$ .

$$\mathbb{V}(\omega) = \{V \mid (v, s) \in \mathbb{X}(\omega); \forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), b(V, \chi) = 0\}. \quad (2.18)$$

Ce qui suit la condition inf-sup sur la forme  $b(\cdot, \cdot)$  est facilement dérivé en prenant  $V = (0, \chi a_3)$  : il existe une constante positive  $c_{\sharp}$  tels que ce qui suit inf-sup des prises de condition

$$\forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), \quad \sup_{V \in \mathbb{X}(\omega)} \frac{b(V, \chi)}{\|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}} \geq c_{\sharp} \|\chi\|_{H^1(\omega)}. \quad (2.19)$$

La combinaison toute ceci avec la propriété d'ellipticité (2.13) mène au prochain résultat.

**Théorème 5** *Pour n'importe quel  $(f, N, M)$  dans  $L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$ , le problème (2.16) admet la solution unique  $(U, \psi)$  dans  $\mathbb{X}(\omega) \times \mathbb{M}(\omega)$ . D'ailleurs cette solution satisfait*

$$\|U\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi\|_{H^1(\omega)} \leq c \|L\| \quad (2.20)$$

*et sa partie est la solution du problème (2.9)*

## 2.3 Une version pénalisée du modèle de Nagdhi

Le but du travail actuel est d'approcher la solution de formulation variationnelle avec une méthode d'élément fini et de procéder de la manière la plus simple possible (on note que nous ne concernons pas par le verrouillage voir à cet égard [3]). Puisque la solution est dans  $H^1$ , les éléments de  $C^0$ -Lagrange  $P_1$  devraient être suffisants. Cependant, nous rencontrons immédiatement un problème puisque la contrainte  $s.a_3 = 0$  dans  $\omega$  clairement ne peut pas être mise en application d'une manière conforme pour une coque générale. Nous présentons ainsi un problème pénalisé de Nagdhi dans lequel les inconnus sont toujours le déplacement  $u$  et la rotation  $r$ , éléments de l'espace  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  sans toute contrainte d'orthogonalité sur  $r$ .

Présentons l'espace de fonction, relaxé

$$\chi = \{(v, s) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)^2; v = s = 0 \text{ sur } \gamma_0\} \quad (2.21)$$

et l'équiper de la norme standard de  $H^1$  norme.

**Théorème 6** Soite  $p \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < p \leq 1$ . Soite  $f \in L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $N \in L^2(\gamma_1; \mathbb{R}^3)$  et  $M \in L^2(\gamma_1, \mathbb{R}^3)$ . Alor il existe une solution unique au problème suivant : Trouver  $u_p, r_p \in \chi$  tels que

$$\forall (v, s) \in \chi, a((u_p, r_p); (v, s)) + \frac{1}{p}b(r_p.a_3; s.a_3) = L((v, s)), \quad (2.22)$$

où

$$b(\lambda; \mu) = \int_{\omega} \partial_{\alpha} \lambda \partial_{\alpha} \mu dx. \quad (2.23)$$

La preuve est basée sur la version suivante du lemme de déplacement rigide infinitésimal.

**Lemme 13** Soite  $(u, r) \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$  et supposent que  $\varphi \in W^{2,\infty}(\omega; \mathbb{R}^3)$ .

1. Si  $\gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$ , il existe alors  $\Psi \in L^2(\omega; \mathbb{R})$  tels que  $\partial_{\alpha} u = \Psi \wedge a_{\alpha}$ .
2. Si  $\delta_{\alpha 3}(u, r) = 0$ , puis  $\partial_{\alpha} u.a_3 = -r.a_{\alpha} \in H^1(\omega)$ .
3. Si, en plus de 1) et de 2),  $\chi_{\alpha\beta}(u, r) = 0$ , alors  $\Psi$  est un vecteur constant dans  $\mathbb{R}^3$  et il existe  $c \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$u(x) = c + \Psi \wedge \varphi(x), \quad (2.24)$$

et

$$r(x) = \Psi \wedge a_3(x) + (r(x).a_3(x))a_3(x). \quad (2.25)$$

**Preuve.** L'argument est le mêmes que de dans [4], sauf que nous ne supposons pas  $r.a_3 = 0$ , par conséquent la limite supplémentaire dans la formule (2.25). ■

**Remarque 7** 1. *Noter que le vecteur infinitésimal  $\Psi$  de rotation est donné par*

$$\begin{aligned}\Psi &= \varepsilon^{\alpha\beta}(\partial_\beta u.a_3)a_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}(\partial_\alpha u.a_\beta)a_3 \\ &= \varepsilon^{\beta\alpha}(r.a_\beta)a_\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta}(\partial_\alpha u.a_\beta)a_3,\end{aligned}\tag{2.26}$$

où  $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$  et  $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1/|a_1 \wedge a_2|$ .

2. *Si  $(v, s) \in \chi$  sont tels que (2.24) et (2.25) est vérifié, alors nous avons*

$$u = 0 \text{ et } r = (r.a_3)a_3 \text{ dans } \omega,$$

*en raison des conditions de frontière.*

Nous sommes maintenant en mesure pour prouver l'ellipticité de la forme bilinéaire pénalisée.

**Lemme 14** *La forme bilinéaire de dans (2.22) est  $\chi$ -elliptic, uniformément en ce qui concerne  $p$  pour  $0 < p \leq 1$ .*

**Preuve.** La preuve suit des lignes semblables à ceux trouvées de dans [4]. Nous néanmoins l'incluons pour la convenance du lecteur. Posons

$$\| \| (v, s) \| \| = \left\{ \sum_{\alpha\beta} (\|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{L^2}^2 + \|\chi_{\alpha\beta}(v, s)\|_{L^2}^2) + \sum_{\alpha} \|\delta_{\alpha 3}(v, s)\|_{L^2}^2 + \sum_{\alpha} \|\partial_\alpha(s, a_3)\|_{L^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Comme  $p \leq 1$  et en raison de la définition positive du tenseur d'élasticité, il existe un constante  $C > 0$  tels que

$$a((v, s); (v, s)) + \frac{1}{p}b(s.a_3; s.a_3) \geq C \| \| (v, s) \| \|^2.\tag{2.27}$$

Elle suffit ainsi pour montrer que  $\| \| \cdot \| \|$  est une norme équivalente à  $\| \cdot \|_\chi$ , d'un l'argument standard de contradiction. Nous supposons qu'il existe  $(v_n, s_n) \in \chi$  tel que  $\| (v_n, s_n) \|_\chi = 1$  mais  $\| \| (v_n, s_n) \| \| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Il existe sous-suite, toujours dénoté  $(v_n, s_n)$ , et  $(v, s) \in \chi$  tels que

$$(v_n, s_n) \rightharpoonup (v, s), \gamma_{\alpha\beta}(v_n) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}(v), \chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) \rightharpoonup \chi_{\alpha\beta}(v, s),$$

$$\delta_{\alpha 3}(v_n, s_n) \rightharpoonup \delta_{\alpha 3}(v, s) \text{ et } \partial_{\alpha 3}(s_n.a_3) \rightharpoonup \partial_\alpha(s.a_3),$$

faiblement dans leurs espaces respectifs. Par le théorème de Rellich's, nous avons

$$(v_n, s_n) \longrightarrow (v, s) \text{ fortement dans } L^2(\omega; \mathbb{R}^3)^2.$$

D'une part, nous a assumé ce  $\| (v_n, s_n) \| \longrightarrow 0$  qui implique que

$$\gamma_{\alpha\beta}(v_n) \rightarrow 0, \chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) \rightarrow 0, \delta_{\alpha 3}(v_n, s_n) \rightarrow 0 \text{ et } \partial_\alpha(s_n \cdot a_3) \longrightarrow 0 \quad (2.28)$$

fortement dans  $L^2(\Omega)$ , nous avons

$$\gamma_{\alpha\beta}(v) = \chi_{\alpha\beta}(v, s) = \delta_{\alpha 3}(v, s) = \partial_\alpha(s \cdot a_3) = 0.$$

Par le lemme de déplacement rigide infinitésimal 14 et les conditions de frontière, nous concluons d'abord que  $\nu = \Psi = 0$ , voir [3] pour les détails. D'ailleurs, l'inégalité de Poincaré et les conditions de frontière appliqués à  $s \cdot a_3$  impliquent que  $s \cdot a_3 = 0$ . La deuxième du lemme 14 prouve alors que  $s = 0$ .

Nous introduisons le vecteur  $(w_n)_\alpha = v_n \cdot a_\alpha$ . On a,  $w_n \longrightarrow 0$  dans  $L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$  fortement.

Définissons  $2e_{\alpha\beta}(w) = \partial_\alpha w_\beta + \partial_\beta w_\alpha$ . Il est facile de voir que

$$2e_{\alpha\beta}(w) = \gamma_{\alpha\beta}(v_n) + \frac{1}{2}v_n \cdot (\partial_\beta w_\alpha + \partial_\alpha w_\beta) \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega).$$

Puis, par (2.28) et l'inégalité bidimensionnelle de Korn, nous déduisons que

$$w_n \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\omega; \mathbb{R}^2).$$

Après nous notons que

$$\partial_\rho v_n \cdot a_\alpha = \partial_\rho((w_n)_\alpha) - v_n \cdot \partial_\rho a_\alpha \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega). \quad (2.29)$$

D'ailleurs, en tant que  $s_n \longrightarrow 0$  fortement dans  $L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$ , et  $\partial_\rho v_n \cdot a_3 = 2\delta_{\rho 3}(v_n, s_n) - s_n \cdot a_\alpha$ , nous savons déjà par (2.28) celui

$$\partial_\rho v_n \cdot a_3 \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega). \quad (2.30)$$

Nous déduisons que

$$\partial_\rho v_n \cdot a_\alpha = (\partial_\rho v_n \cdot a_k) a^k \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega; \mathbb{R}^3),$$

par (2.29) et (2.30). Si suit ce  $v_n \rightarrow 0$  fortement dans  $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ .

Soite  $(w'_n)_\alpha = s_n \cdot a_\alpha$ . Clainement,  $w'_n \rightarrow 0$  fortement dans  $L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$ .

$$2e_{\alpha\beta}(w'_n) = 2\chi_{\alpha\beta}(v_n, s_n) - (\partial_\alpha v_n \cdot \partial_\beta a_3 + \partial_\beta v_n \cdot \partial_\alpha a_3) + s_n \cdot (\partial_\alpha a_\beta + \partial_\beta a_\alpha),$$

Nous voyons par (2.28) que

$$e_{\alpha\beta}(w'_n) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\omega).$$

Ainsi, encore par l'inégalité bidimensionnelle de Korn, nous concluons que

$$w'_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\omega; \mathbb{R}^2).$$

D'ailleurs, l'inégalité de Poincaré et la dernière convergence (2.28) impliquent que

$$s_n \cdot a_3 \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\omega).$$

En conséquence, depuis  $s_n = (s_n \cdot a_i) a^j$ , il suit ce  $s_n \rightarrow 0$  fortement dans  $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ .

Combinant maintenant convergence de  $v_n$  et  $s_n$ , nous voit que  $\|(v_n, s_n)\|_\chi \rightarrow 0$ , ce qui contredit l'hypothèse et prouve le lemme. ■

**Preuve. de théorème 6** En appliquent le lemme Lax-Milgram ■

**Remarque 8** *Il est important de noter que la forme bilinéaire originale a n'est pas  $\chi$ -elliptic, en effet il ne définit pas même une norme sur l'espace relaxé. Il est donc nécessaire d'ajouter des limites telles que les limites supplémentaires  $\|\partial_\alpha(s \cdot a_3)\|_{L^2}^2$  pour récupérer l'ellipticité au-dessus de l'espace plus grand. Dans le cas du fixage doux, ces limites supplémentaires ne sont pas suffisantes, depuis  $(O, a_3)$  appartient toujours au grain de la forme bilinéaire pénalisée. Dans ce cas-ci, on devrait ajouter  $H^1$  de  $s \cdot a_3$ , c.-à-d., emploient un terme de pénalisation de la forme  $b(r \cdot a_3; s \cdot a_3) = \int_\omega [(r \cdot a_3)(s \cdot a_3) + \partial_\alpha(r \cdot a_3)\partial_\alpha(s \cdot a_3)] dx$ .*

Il est maintenant assez classique que la pénalisation fournisse une approximation du problème contraint.

**Théorème 9** *Soit  $U = (u, r)$  et  $U_p = (u_p, r_p)$  respectivement soit la solution unique du problème (2.28) et (2.22). Puis*

$$\|r_p \cdot a_3\|_{H^1(\omega)} \leq Cp, \tag{2.31}$$

et

$$\|U_p - U\|_\chi \leq Cp. \tag{2.32}$$

**Preuve.** Soit  $L = L^2(\omega; \mathbb{R}^2)$  et  $\Psi : \chi \longrightarrow L$  défini par  $U \longmapsto \nabla(r.a_3)$ . Maintenant, nous avons  $\nu = \ker \Psi$  et  $b(r.a_3; r.a_3) = (\Psi(U), \Psi(U))_L$ . Il est connue que si  $\Psi$  a l'image fermée, Alors d'après [4],

$$b(r_p.a_3; r_p.a_3) \leq Cp^2 \text{ et } \|U_p - U\|_\chi \leq Cp.$$

La première évaluation donne l'évaluation (2.31) et la deuxième évaluation est avec précision l'évaluation (2.32).

Ainsi vérifions que  $\Psi$  a une image fermée. Nous considérons  $U_n \in \chi$  tel que  $\Psi(U_n) \longrightarrow Z$  dans  $L$ . Par l'inégalité Poincaré, il suit que  $r_n.a_3$  est lié dans  $H^1(\Omega)$  et nous peut extraire une sous-suite faiblement convergent tel que  $r_n.a_3 \rightharpoonup \xi$  dans  $H^1(\Omega)$ . De plus, puisque  $r_n.a_3 = 0$  sur  $\gamma_0$  dans le sens des traces, il suit ce  $\Xi \rightharpoonup 0$  sur  $\gamma_0$ . En outre, clairement  $Z = \nabla \xi$ . Pour  $U = (0, \xi_{a_3}) \in \chi$ , on trouve  $\Psi(U) = Z$ . ■

**Remarque 10** *Il peut également noter que la quantité  $a(U, V)$  peut être écrit sous une autre forme qui semble plus appropriée pour l'exécution, puisqu'elle désaccouple les deux composants  $v$  et  $s$  de la fonction d'essai  $V$ . En effet, nous présentons les composants contravariant de la résultante d'effort*

$$n^{\rho\sigma}(u) = ea^{\alpha\beta\rho\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(u), \quad (2.33)$$

des couples d'effort

$$m^{\rho\sigma}(U) = \frac{e^3}{12}\alpha^{\alpha\beta\rho\sigma}\chi_{\alpha\beta}(U), \quad (2.34)$$

et de la force de cisaillement transversale

$$t^\beta(U) = e\frac{E}{1+\nu}a^{\alpha\beta}\delta_{\alpha 3}(U), \quad (2.35)$$

Nous observons également que

$$\chi_{\rho\sigma}(V) = \theta_{\rho\sigma}(v) + \gamma_{\rho\sigma}(s), \text{ with, } \theta_{\rho\sigma}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\rho v \cdot \partial_\sigma a_3 + \partial_\sigma v \cdot \partial_\rho a_3). \quad (2.36)$$

Ainsi,  $a(U, V)$  est égal à

$$\begin{aligned} a(U, V) &= \int_\omega (n^{\rho\sigma}(u)\gamma_{\rho\sigma}(v) + m^{\rho\sigma}(U)\theta_{\rho\sigma}(v) + t^\beta(U)\partial_\beta v \cdot a_3)\sqrt{a}dx \\ &\quad + \int_\omega (m^{\rho\sigma}(U)\gamma_{\rho\sigma}(s) + t^\beta(U)s \cdot a_\beta)\sqrt{a}dx, \end{aligned} \quad (2.37)$$

où la première intégrale implique seulement  $v$  et le deuxième implique seulement  $s$ . En employant cette nouvelle forme, ainsi que les propriétés de symétrie  $n^{\rho\sigma}(u) = n^{\sigma\rho}(u)$  et  $m^{\rho\sigma}(U) = m^{\sigma\rho}(U)$ , on le vérifie aisément que le problème (2.9) est équivalent au système suivant de partiel les équations (ici,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  dénote le vecteur normal extérieur d'unité à  $\omega$ )

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\rho((n^{\rho\sigma}(u)a_\sigma + m^{\rho\sigma}(U)\partial_\sigma a_3 + t^\rho(U)a_3)\sqrt{a}) = f\sqrt{a} & \text{dans } \omega, \\ -\partial_\rho(m^{\rho\sigma}(U)a_\sigma\sqrt{a}) + t^\beta(U)a_\beta\sqrt{a} - \partial_{\rho\rho}\psi a_3 = 0 & \text{dans } \omega, \\ r.a_3 & \text{dans } \omega, \\ u = r = 0 & \text{dans } \gamma_0, \\ \psi = 0 & \text{dans } \gamma_0, \\ \nu_\rho(n^{\rho\sigma}(u)a_\sigma + m^{\rho\sigma}(U)\partial_\sigma a_3 + t^U a_3)\sqrt{a} = N\ell & \text{dans } \gamma_1, \\ \nu_\rho(m^{\rho\sigma}(U)a_\sigma\sqrt{a} + \partial_\rho\psi a_3) = M\ell & \text{dans } \gamma_1. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Le multiplicateur de Lagrange agit en tant que force normale dans l'équation de flexion. Une formulation classique semblable de la valeur le problème pour le modèle de Koiter dans des composants de covariant peut être trouvé de dans [15] par exemple. La discrétisations que nous avons l'intention d'étudier est construite par la méthode de Galerkin du problème (2.16), avec l'addition d'une limite de pénalité. Noter qu'une limite de stabilisation peut également être ajoutée dans la première ligne du problème (2.16); nous référons [9], pour l'analyse de la discrétisation correspondante que nous ne considérons pas dans ce travail.

## 2.4 Analyse a posteriori du problème discret.

Dorénavant, nous supposons que  $\omega$  est un polygone. Nous présentons un famille régulier  $(\mathcal{T}_h)_h$  des triangulations de  $\omega$  (par des triangles), dans le sens habituel

Nous faisons la prétention non restrictive supplémentaire que  $\bar{\gamma}_0$  est l'union des bords entiers de éléments de  $\mathcal{T}_h$ . De même que standard,  $h$  dénote le maximum des diamètres  $h_K, K \in \mathcal{T}_h$ . Dans ce qui suit,  $c, c', \dots$  pour les constantes génériques qui peuvent varier d'entre phases mais sont toujours indépendant de  $h$ .

Pour chaque nombre entier non négatif  $k$  et n'importe quel élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , soit  $P_k(K)$  dénotent l'espace des restrictions à  $K$  des polynôme avec le degré total  $\leq k$ . Nous définissons ainsi l'espace discret de base

$$\mathbb{M}_h = \{\chi_h \in H^1(\omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \chi_h|_K \in p_1(K)\}, \quad (2.39)$$

après les espaces qui sont impliqués dans le problème discret

$$\mathbb{M}_h^{\gamma_0} = \mathbb{M}_h \cap H_{\gamma_0}^1(\omega), \mathbb{X}_h = (\mathbb{M}_h^{\gamma_0})^3 \times (\mathbb{M}_h^{\gamma_0})^3. \quad (2.40)$$

En effet, l'application de la méthode de Galerkin à (2.16) mène au problème Trouver  $(U_h, \psi_h)$  dans  $\mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h^{\gamma_0}$  tels que

$$\begin{aligned} \forall V_h \in \mathbb{X}_h, \quad a(U_h, V_h) + b(V_h, \psi_h) &= L(V_h), \\ \forall \chi_h \in \mathbb{M}_h^{\gamma_0}, \quad b(U_h, \chi_h) &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nous référons [9], pour les résultats suivants de l'analyse a priori.

**Proposition 11** *il existe  $h_0 > 0$  tels que, pour tout  $h \leq h_0$  et pour tout  $(f, N, M)$  dans  $L^2(\omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$ , le problème (2.41) admet une solution unique  $(U_h, \psi_h)$  dans  $\mathbb{X}_h \times \mathbb{M}_h^{\gamma_0}$ . d'ailleurs, cette solution satisfait*

$$\|U_h\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi_h\|_{H^1(\omega)} \leq c\|L\|, \quad (2.42)$$

et, si la solution  $(U, \psi)$  de problème (2.16) appartient à  $(H^2(\omega)^3 \times H^2(\omega)^3) \times H^2(\omega)$ , prises a priori suivante d'évaluation d'erreur

$$\|U - U_h\|_{\mathbb{X}_\omega} + \|\psi - \psi_h\|_{H_\omega^1} \leq c(U, \psi)h, \quad (2.43)$$

Pour un  $c(U, \psi)$  seulement dépend la solution  $(U, \psi)$ .

l'analyse a posteriori du problème (2.41) base sur les équations résiduelles

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathbb{X}(\omega), \forall V_h \in \mathbb{X}_h, a(U - U_h, V) + b(V, \psi - \psi_h) \\ = L(V - V_h) - a(U_h, V - V_h) - b(V - V_h, |\psi_h|), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\forall \chi \in \mathbb{M}(\omega), \forall \chi_h \in \mathbb{M}_h^{\gamma_0}, b(U - U_h, \chi) + b(U_h, \chi - \chi_h).$$

Comme d'habitude pour ce type de problème, voir [22], la construction des indicateurs d'erreur de ces équations exige des approximations des données et des coefficients.

Approximation des données. Soit  $\varepsilon_h^1$  dénotent l'ensemble de bords des éléments de  $\mathcal{T}_h$  qui sont contenus en  $\bar{\gamma}_1$ . Dorénavant, nous considérons une approximation  $f_h$  de  $f$  en  $\mathbb{Z}_h$  et les approximations  $N_h$  et  $M_h$  de  $N$  et de  $M$  en  $\mathbb{Z}_h^1$ , où  $\mathbb{Z}_h$  et  $\mathbb{Z}_h^1$  sont définis par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_h &= \{g_h \in L^2(\omega)^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, g_{h|K} \in P_0(K)^3\}, \\ \mathbb{Z}_h^1 &= \{P_h \in L^2(\gamma_1)^3; \forall e \in \varepsilon_h^1, P_{h|e} \in P_0(e)^3\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Approximation des coefficients. Pour les raisons qui apparaîtra plus tard, nous présentons des approximations des coefficients scalaires  $a^{\alpha\beta}$ ,  $a^{\alpha\beta\rho\sigma}$ ,  $\sqrt{a}$  et  $\ell$  dans  $\mathbb{M}_h$ , que nous dénotons par  $a_h^{\alpha\beta}$ ,  $a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}$ ,  $(\sqrt{a})_h$  et  $\ell_h$ , respectivement. Nous faisons la prétention supplémentaire (qui est habituellement satisfaisant pour les éléments finis de Lagrange, voir [7], par exemple) que, si  $g$  dénote quelconque d'entre ces quantités et  $g_h$  son approximation,

$$\|g_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|g\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}. \quad (2.46)$$

De même, nous considérons des approximations  $a_k^h$  des vecteurs  $a_k$  et  $d_\alpha^h$  de  $\partial_\alpha a_3$  dans  $(\mathbb{M}_h)^3$ . Nous acceptons également de dénoter par  $\gamma_{\alpha\beta}^h(\cdot)$ ,  $\delta_{\alpha_3}^h(\cdot)$  et  $\chi_{\alpha\beta}^h(\cdot)$  les composants des tenseurs présentés de dans (2.3) à (2.5) où tous les coefficients sont remplacés par leurs approximations. Par exemple,  $\gamma_{\alpha\beta}^h(\cdot)$  est indiqué par

$$\gamma_{\alpha\beta}^h(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u \cdot a_\beta^h + \partial_\beta u \cdot a_\alpha^h). \quad (2.47)$$

Ceci mène à la définition d'une forme linéaire approximative

$$L_h(V) = \int_\omega f_h \cdot v(\sqrt{a})_h dx + \int_{\gamma_1} (N_h \cdot v + M_h \cdot s) \ell_h d\tau. \quad (2.48)$$

et également des formes bilinéaires approximatives

$$\begin{aligned}
a_h(U, V) &= \int_{\omega} \left\{ e a_h^{\alpha\beta\rho\sigma} \left[ \gamma_{\alpha\beta}^h(u) \gamma_{\rho\sigma}^h(v) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}^h(U) \chi_{\rho\sigma}^h(V) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2e \frac{E}{1+\nu} a_h^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 3}^h(U) \delta_{\beta 3}^h(V) \right\} (\sqrt{a})_h dx, \\
b_h(V, \chi) &= \int_{\omega} (\partial_{\alpha} s \cdot a_3^h + s \cdot d_{\alpha}^h) \partial_{\alpha} \chi dx.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Pour aller plus loin, nous rappelons une certaine notation standard.

**Notation** Pour chaque élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

1.  $\varepsilon_K$  dénote l'ensemble de bords de  $K$  ne sont pas contenus en  $\bar{\gamma}_0$  et  $\varepsilon_K^1$  dont l'ensemble éléments de  $\varepsilon_K$  qui sont contenus en  $\bar{\gamma}_1$  ;
2. Pour chaque  $e$  en  $\varepsilon_K$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  est une normale de vecteur d'unité à  $e$ , avec la prétention supplémentaire  $ce$ , quand  $e$  appartient à  $\varepsilon_K^1$ ,  $\nu$  est extérieur à  $\omega$  ;
3. Pour chaque  $e$  en  $\varepsilon_K$ ,  $h_e$  représente la longueur de  $e$  ;
4. Pour chaque  $e$  en  $\varepsilon_K$ ,  $[\cdot]_e$  dénote le saut par  $e$  (rendre son signe précis est inutile) ;
5.  $\omega_K$  est l'union des triangles de  $\mathcal{T}_h$  qui partagent un bord avec  $K$  ;
6.  $\Delta_K$  is l'union des triangles de  $\mathcal{T}_h$  qui intersectent  $K$ .

Nous rappelons également de [7], l'existence d'un type opérateur  $R_h$  de Clément qui trace  $H_{\gamma_0}^1(\omega)$  dans  $\mathbb{M}_h^{\gamma_0}$  et satisfait, pour tout  $\chi$  in  $H^1\gamma_0(\Omega)$ , chaque  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$  et chaque bord  $e$  de  $K$  qui n'est pas contenu dans  $\gamma_0$ ,

$$\begin{aligned} \|\chi - R_h\chi\|_{L^2(K)} + h_K|\chi - R_h\chi|_{H^1(K)} &\leq ch_K\|\chi\|_{H^1(\Delta_K)}, \\ \|\chi - R_h\chi\|_{L^2(e)} &\leq ch_e^{\frac{1}{2}}\|\chi\|_{H^1(\Delta_K)}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

En effet, idée est maintenant pour prendre  $V_h$  égal à  $(R_h v, R_h s)$  et  $\chi_h$  égal à  $R_h\chi$  dans (2.6).

Les trois prochains lemmes sont consacrés à l'évaluation de l'erreur provenant de l'approximation des données et des coefficients.

**Lemme 15** *L'évaluation suivante se tient pour n'importe quel  $V$  dans  $\mathbb{X}(\Omega)$  et avec  $V_h = (R_h v, R_h s)$ ,*

$$\begin{aligned} & |(L - L_h)(V - V_h)| \\ & \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \varepsilon_h^1} h_e (\|N - N_h\|_{L^2(e)}^2 + \|M - M_h\|_{L^2(e)}^2)) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + (h \|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} + h^{\frac{1}{2}} \|\ell - \ell_h\|_{L^\infty(\gamma_1)}) \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} & (L - L_h)(V - V_h) \\ & = \int_{\omega} f \cdot (v - R_h v) (\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h) dx + \int_{\omega} (f - f_h) \cdot (v - R_h v) (\sqrt{a})_h dx \\ & \quad + \int_{\gamma_1} (N \cdot (v - R_h v) + M \cdot (s - R_h s)) (\ell - \ell_h) d\tau \\ & \quad + \int_{\gamma_1} (N - N_h) \cdot (v - R_h v) \ell_h d\tau + \int_{\gamma_1} (M - M_h) \cdot (s - R_h s) \ell_h d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi l'évaluation désirée suit des inégalités de Cauchy-Schwarz combinées avec (2.46) et (2.50). ■

**Lemme 16** *Que l'évaluation suivante se tient pour n'importe quel  $V$  dans  $\mathbb{X}(\Omega)$  et avec  $V_h = (R_h v, R_h s)$ ,*

$$\begin{aligned} & |(a - a_h)(U_h, V - V_h)| \leq c (\|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} \\ & \quad + \sup_{1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq 2} \|a^{\alpha\beta\rho\sigma} - a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \|a^{\alpha\beta} - a_h^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\omega)}) \\ & \quad + \sup_{1 \leq k \leq 3} \|a_k - a_k^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \sup_{1 \leq \alpha \leq 2} \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3}) \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

**Preuve.** Nous fournissons seulement des preuves abrégées de ce résultat technique. Nous employent évaluation (2.42) et observent de (2.50) ce  $\|V - V_h\|_{\mathbb{X}(\Omega)}$  est lié par les périodes constantes  $\|V\|_{\mathbb{X}(\Omega)}$  :

1. Par les mêmes arguments que dans la preuve et (2.46), la différence entre  $a(U_h, V - V_h)$  et cette même forme avec les coefficients  $\sqrt{a}, a^{\alpha\beta\rho\sigma}$  et  $a^{\alpha\beta}$  remplacé par leurs approximations est liée par

$$\begin{aligned} & c (\|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq 2} \|a^{\alpha\beta\rho\sigma} - a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}\|_{L^\infty(\omega)} \\ & \quad + \sup_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \|a^{\alpha\beta} - a_h^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\omega)^3}) \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}. \end{aligned}$$

2. Nous employons l'inégalité triangulaire

$$\|\gamma_{\alpha\beta}(u_h) - \gamma_{\alpha\beta}^h(u_h)\|_{L^2(\omega)} \leq \|\partial_\alpha u_h\|_{L^2(\omega)^3} \|a_\beta - a_\beta^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \|\partial_\beta u_h\|_{L^2(\omega)^3} \|a_\alpha - a_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3},$$

et les semblables avec  $u_h$  remplacé par  $v - v_h$ ,  $\gamma_{\alpha\beta}(u_h)$  remplacés par  $\chi_{\alpha\beta}(U_h)$  et ainsi de suite. La combinaison toute ceci et L'utilisation (2.45) mènent à l'évaluation désirée.

■

**Lemme 17** *Nous avons les évaluations suivantes*

1. Pour tout  $V$  dans  $\mathbb{X}(\Omega)$  et avec  $V_h = (R_h v, R_h s)$ ,

$$|(b - b_h)(V - V_h, \psi_h)| \leq c(\|a_3 - a_3^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3}) \|L\| \|V\|_{\mathbb{X}(\omega)}, \quad (2.53)$$

2. Pour tout  $\chi$  dans  $\mathbb{M}(\Omega)$  et avec  $\chi_h = R_h \chi$ ,

$$|(b - b_h)(U_h, \chi - \chi_h)| \leq c(\|a_3 - a_3^h\|_{L^\infty(\omega)^3} + \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3}) \|L\| \|\chi\|_{H^1(\omega)}. \quad (2.54)$$

**Preuve.** En raison de la définition (2.11) de  $b_h(\cdot, \cdot)$ , nous avons l'expansion

$$(b - b_h)(V, \chi) = \int_\omega (\partial_\alpha s \cdot (a_3 - a_3^h) + s \cdot (\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h)) \partial_\alpha \chi dx.$$

Combinant ceci avec (2.4) rendements (2.15) et (2.16).

De ces lemmes, nous définissons maintenant les quantités liées à l'erreur d'approximation locale sur les données : Pour chaque  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\varepsilon_K^{(d)} = h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)^3} + \sum_{e \in \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} (\|N - N_h\|_{L^2(e)^3} + \|M - M_h\|_{L^2(e)^3}), \quad (2.55)$$

et également à l'erreur d'approximation globale sur les coefficients :

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^{(e)} = & (\|\sqrt{a} - (\sqrt{a})_h\|_{L^\infty(\omega)} + h^{\frac{1}{2}} \|\ell - \ell_h\|_{L^2(\gamma_1)} + \sup_{1 \leq \alpha, \beta, \rho, \sigma \leq 2} \|a^{\alpha\beta\rho\sigma} - a_h^{\alpha\beta\rho\sigma}\|_{L^\infty(\omega)} \\ & + \sup_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2} \|a^{\alpha\beta} - a_h^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\omega)} + \sup_{1 \leq k \leq 3} \|a_k - a_k^h\|_{L^\infty(\omega)^3} \\ & + \sup_{1 \leq \alpha \leq 2} \|\partial_\alpha a_3 - d_\alpha^h\|_{L^\infty(\omega)^3}) \|L\|. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nous sommes maintenant en mesure pour prouver a posteriori l'estimation d'erreur. Afin de l'énoncer, nous présentons les indicateurs d'erreur. Pour la simplicité, nous employons la remarque 13 pour écrire  $a(U, V)$  et observer qu'une forme semblable se tient pour  $a_h(U, V)$ , avec la notation évidente pour les quantités  $n_h^{\rho\sigma}(\cdot), m_h^{\rho\sigma}(\cdot), t_h^\beta(\cdot)$  et  $\theta_{\rho\sigma}^h(\cdot)$  (en comparaison de (2.33) à (2.36), tous les coefficients sont remplacés par leurs approximations). Pour chaque  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K$  est défini par

$$\eta_K = \eta_{K1} + \eta_{K2} + \eta_{K3}, \quad (2.57)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_{K1} &= h_K \|f_h(\sqrt{a})_h + \partial_\rho((n_h^{\rho\sigma}(u_h)a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h)d_\sigma^h + t_h^\rho(U_h)a_3^h)(\sqrt{a})_h)\|_{L^2(K)^3} \\ &\quad + \sum_{e \in \varepsilon_K \setminus \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\nu_\rho(n_h^{\rho\sigma}(u_h)a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h)d_\sigma^h + t_h^\rho(U_h)a_3^h)(\sqrt{a})_h]_e\|_{L^2(e)^3} \\ &\quad + \sum_{e \in \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|N_h \ell_h - \nu_\rho(n_h^{\rho\sigma}(u_h)a_\sigma^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h)d_\sigma^h + t_h^\rho(U_h)a_3^h)(\sqrt{a})_h\|_{L^2(e)^3}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \eta_{K2} &= h_K \|\partial_\rho(m_h^{\rho\sigma}(U_h)a_\sigma^h(\sqrt{a})_h) - t_h^\beta(U_h)a_\beta^h(\sqrt{a})_h + \partial_\rho(a_3^h \partial_\rho \psi_h) - d_\rho^h \partial_\rho \psi_h\|_{L^2(K)^3} \\ &\quad + \sum_{e \in \varepsilon_K \setminus \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\nu_\rho(m_h^{\rho\sigma}(U_h)a_\sigma^h(\sqrt{a})_h) + \nu_\rho \partial_\rho \psi_h a_3^h]_e\|_{L^2(e)^3} \\ &\quad + \sum_{e \in \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|M_h \ell_h - \nu_\rho m_h^{\rho\sigma}(U_h)a_\sigma^h(\sqrt{a})_h - \nu_\rho \partial_\rho \psi_h a_3^h\|_{L^2(e)^3}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \eta_{K3} &= h_K \|\partial_\alpha(\partial_\alpha r_h \cdot a_3^h + r_h \cdot d_\alpha^h)\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \sum_{e \in \varepsilon_K \setminus \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_\nu(r_h \cdot a_3^h)]_e\|_{L^2(e)} + \sum_{e \in \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|\partial_\nu(r_h \cdot a_3^h)\|_{L^2(e)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

■

Noter qu'il est facile de calculer ces indicateurs puisqu'ils impliquent seulement des fonctions polynôme. Tous sont de type résiduel : En effet, en supprimant tous les indices et exposants  $h$  dans leurs définitions et en regardant le système (2.38).

**Théorème 12** *Pour toutes  $(f, N, M)$  dans  $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\gamma_1)^3 \times L^2(\gamma_1)^3$ , l'évaluation a posteriori d'erreur suivante entre la solution  $(U, \psi)$  de problème (2.16) et la solution  $(U_h, \psi_h)$  du problème (2.9)*

$$\|U - U_h\|_{\mathbb{X}(\omega)} + \|\psi - \psi_h\|_{\mathbb{H}^1(\omega)} \leq c \left( \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \varepsilon_K^{(d)2}) \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(e)} \right). \quad (2.61)$$

**Preuve.** Les arguments standard combinés avec la propriété d'ellipticité (2.13) la condition (2.19). Nous employons alors des inégalités de triangle combinées avec les lemmes 14 et 15 à remplacer  $L(V - V_h)$  par  $L_h(V - V_h)$ ,  $a(U_h, V - V_h)$  par  $a_h(U_h, V - V_h)$  et le même pour deux limites impliquant la forme  $b(., .)$ . Ainsi il reste pour boner les trois quantités

$$A_1 = \sup_{v \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3} \frac{L_h(v - R_h v, 0) - a_h(U_h, (v - R_h v, 0))}{\|v\|_{H^1(\omega)^3}},$$

$$A_2 = \sup_{s \in H_{\gamma_0}^1(\omega)^3} \frac{L_h(O, s - R_h s) - a_h(U_h, (0, s - R_h s)) - b_h((0, s - R_h s), \psi)}{\|s\|_{H^1(\omega)^3}},$$

$$A_3 = \sup_{\chi \in \mathbb{M}(\omega)} \frac{b_h(U_h, \chi - R_h \chi)}{\|\chi\|_{H^1(\omega)}}.$$

(note en effet qui, de  $b_h((v, 0), \psi_h)$  est zéro).

1. Arrangement  $w = v - R_h v$  et On utilisation une fois de plus des propriétés de symétrie du  $n^{\rho\sigma}h(\cdot)$  et  $m^{\rho\sigma}h(\cdot)$ , nous avons

$$L_h(v - R_h v, 0) - a_h(U_h, (v - R_h v, 0)) = \int_{\omega} f_h \cdot w(\sqrt{a})_h dx + \int_{\gamma_1} N_h \cdot w \ell_h d\tau$$

$$- \int_{\omega} (n_h^{\rho\sigma}(u_h) \partial_{\rho} w \cdot a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h) \partial_{\rho} w \cdot d_{\sigma}^h) + t_h^{\beta}(U_h) \partial_{\beta} w \cdot a_3^h(\sqrt{a})_h dx$$

En coupant les intégrales sur  $\omega$  dans la somme d'intégrales sur  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$  et l'intégration par des parties sur chaque  $K$ , nous dérivons

$$L_h(v - R_h v, 0) - a_h(U_h, (v - R_h v, 0)) = \int_{\omega} f_h \cdot w(\sqrt{a})_h dx + \int_{\gamma_1} N_h \cdot w \ell_h d\tau$$

$$+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K \partial_{\rho} ((n_h^{\rho\sigma}(u_h) a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h) d_{\sigma}^h + t_h^{\rho}(U_h) a_3^h)(\sqrt{a})_h) \cdot w dx \right) \quad (2.62)$$

$$- \int_{\partial K} \nu_{\rho} (n_h^{\rho\sigma}(u_h) a_{\sigma}^h + m_h^{\rho\sigma}(U_h) d_{\sigma}^h + t_h^{\rho}(U_h) a_3^h)(\sqrt{a})_h \cdot w d\tau$$

On utilisation l'inégalités Cauchy-Schwarz combiné avec (2.12) mène à

$$A_1 \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Arrangement  $t = s - R_h s$ , nous avons également

$$\begin{aligned} & L_h(0, s - R_h s) - a_h(U_h, (0, s - R_h s)) - b_h((0, s - R_h s), \psi) \\ &= \int_{\omega} M_h \cdot t \ell_h d\tau - \int_{\omega} (m_h^{\rho\sigma}(U_h) \partial_{\rho} t \cdot a_{\sigma}^h + t_h^{\beta}(U_h) t \cdot a_{\beta}^h) (\sqrt{a})_h dx \\ & \quad - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} t \cdot a_{\alpha}^h + t \cdot d_{\alpha}^h) \partial_{\alpha} \psi_h dx. \end{aligned}$$

Les mêmes intégrations par parties et (2.12) mènent

$$A_2 \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. En conclusion, dérivant que

$$A_3 \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est évident en comparaison avec les deux étapes précédentes.

De même que standard, (voir [22]), l'évaluation inverse compte sur des inégalités inverses et implique des normes locales définies d'une manière évidente par la restriction.

■

**Théorème 13** *Pour toutes données  $(f, N, M)$  dans  $L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$ , la limite suivante juge pour tous les indicateurs  $\eta_K$  défini de dans (2.19)-(2.33),*

$$\eta_K \leq c (\|U - U_h\|_{\mathbb{X}(\omega_K)} + \|\psi - \psi_h\|_{H^1(\omega_K)} + \left( \sum_{k \subset \omega_K} \varepsilon_k^{(d)2} \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)}). \quad (2.63)$$

**Preuve.** Nous fournissons seulement des preuves abrégées de l'évaluation pour  $\eta_{K1}$ . Nous l'écrivons d'abord sous la forme plus compacte

$$\eta_{K1} = h_K \|F_h\|_{L^2(K)^3} + \sum_{e \in \varepsilon_K \setminus \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|[G_h]_e\|_{L^2(e)^3} + \sum_{e \in \varepsilon_K^1} h_e^{\frac{1}{2}} \|N_h \ell_h - G_h\|_{L^2(e)^3}.$$

Après, nous observons que l'équation (2.35) se tient toujours avec  $R_h v$  remplacé par 0 et nous rentrons d'abord cette équation  $v$  égale à

$$v = \begin{cases} F_h \psi_K & \text{dans } K, \\ 0 & \text{dans } \omega \setminus K, \end{cases}$$

lé où  $\psi_K$  dénote la fonction de bulle sur  $K$ . Ainsi, toutes les limites dans le coté droit de (2.35) disparaissent mais l'intégrale sur  $K$ . Maintenant, depuis  $F_h$  est un polynôme du degré  $\leq 3$ , les inégalités inverses appropriées [[22], lemme 3.3] combinées avec les lemmes 15,17 mènent à

$$h_K \|F_h\|_{L^2(K)^3} \leq c(\|U - U_h\|_{\mathbb{X}(K)} + \varepsilon_K^{(d)} + \varepsilon_h^{(c)}).$$

De même, parce que n'importe quel bord  $e$  partagé par deux éléments  $K$  et  $K'$ , nous prenons  $v$  dans (2.35) l'égalité à

$$v = \begin{cases} L_{e,k}([G_h]_h)\psi_e & \text{dans } k \in \{K, K'\}, \\ O & \text{dans } \omega \setminus (K \cup K'), \end{cases}$$

où  $\psi_e$  est la fonction de bulle sur  $e$  et  $L_{e,\kappa}$  est un opérateur de levage des polynôme sur  $e$  disparaissant sur  $\partial_e$  dans des polynôme sur  $K$  disparaissant sur  $\partial K \setminus e$  construite par la transformation affine d'un opérateur de levage fixe sur la triangle de référence. Ceci mène à bondir pour la deuxième limite de  $\eta_{K1}$ . En conclusion, pour chaque  $e$  dans  $\varepsilon_K^1$ , nous prenons  $v$  dans (2.35) l'égalité à

$$v = \begin{cases} L_{e,\kappa}((N_h \ell_h - G_h)\psi_h) & \text{dans } K, \\ 0 & \text{dans } \omega \setminus K, \end{cases}$$

et ceci donne la limite pour  $\eta_{K1}$ .

Il découle des théorèmes 16 et 17 qui, jusqu'au  $\varepsilon_K^{(d)}$  et  $\varepsilon_h^{(c)}$ , l'erreur est équivalente au  $(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2)^{\frac{1}{2}}$ . Ainsi les évaluations que nous avons prouvées sont entièrement optimales. D'ailleurs  $\varepsilon_K^{(d)}$  pour doux de données et de  $\varepsilon_h^{(c)}$  pour une coque régulière sont le plus souvent négligeable. En conclusion, l'évaluation (2.36) est locale, jusqu'au  $\varepsilon_h^{(c)}$  (et ceci est seulement pour la simplicité). Ainsi il peut penser que les  $\eta_K$  fournissent une bonne représentation de l'erreur locale et forment ainsi un outil efficace pour adapter la maillage.

■

## 2.5 Stratégie d'adaptativité pour le problème discret

Nous décrivons maintenant comment les indicateurs d'erreur exhibés dans la section précédente peuvent être employés pour adapter le maillage au problème discret. Puis nous allons appliquer cette stratégie pour faire un test numérique.

Cette stratégie est très simple et se compose de deux étapes. Nous fixons une tolérance  $\eta^* > 0$ .

Étape d'initialisation de maillage : Nous choisissons la triangulation  $T_h^0$  tels que la quantité

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_K^{(d)2} \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_h^{(c)}, \quad (2.64)$$

est plus petit que  $\eta^*$  (nous rappelons que  $\varepsilon^{(d)}K$  et  $\varepsilon^{(c)}h$  sont définis dans (2.17) et (2.18), respectivement). Cet indice d'amélioration de la maillage où les données  $(f, N, M)$  sont singuliers et également par des discontinuités de courbure, qui semblent très naturels.

Étape d'adaptation de la maillage. Supposons que la triangulation  $T_h^n$  est connue. Nous calculons la solution discrète du problème (2.3) correspondant avec cette triangulation, et les indicateurs d'erreur  $\eta_K$  définis dans (2.19) à (2.33).  $\tilde{\eta}_h$  dénote la valeur moyenne du triangulation  $T_h^n$   $\eta_K$ . Alors raffiné et gracié selon le prochain critère : diamètre de nouveau élément contenu dans  $K$  ou contenant  $K$  est proportionnel à  $h_K$  période rapport  $\tilde{\eta}^h / \eta_K$ . Ceci provoque une nouvelle triangulation  $T_h^{n+1}$ . nous référons [16], pour le processus menant à la construction d'une telle triangulation.

L'étape d'adaptation de maillage est alors réitérée l'un l'autre jusqu'à la quantité  $(\sum_{K \in T_h^n} \eta_K^2)^{\frac{1}{2}}$  devient plus petit que  $\eta^*$  (si possible) ou un nombre de fois fini.

## 2.6 Tests numériques

Les tests numériques que nous présentons maintenant ont été exécutés sur le code d'élément fini FreeFem++, (voir [18]). Afin de vérifier l'efficacité de notre stratégie d'adaptativité, nous avons décidé de présenter les tests numériques pour les mêmes géométries et données que dans [9].

Tant que la norme pour de problème dans l'élasticité et plus spécifiquement pour des modèles de coque (voir [2], par exemple), le problème (2.3) dans les systèmes linéaires très mauvais tempérament. C'est deux paramètres physiques du modèle et parmi eux, de la petite épaisseur de la coque. Pour ces raisons, nous avons décidé d'employer le solveur direct UMFPACK comptant sur la factorisation de  $LU$  de la matrice à faible densité globale, (voir [18]) pour plus de détails.

D'abord nous considérons une coque hyperbolique de paraboloides. Le domaine  $\omega$  de référence de côté droit

$$\omega = \{(x, y); |x| + |y| \leq b\sqrt{2}\}, \quad (2.65)$$

comme il est illustré dans [2], et le graphe  $\varphi$  est défini par

$$\varphi(x, y) = (x, y, \frac{c}{2b^2}(x^2 - y^2))^T. \quad (2.66)$$

Nous choisissons ici

$$b = 50cm, \quad c = 10cm. \quad (2.67)$$

L'épaisseur de la coque est  $e = 0,8cm$ . Nous supposons que la coque est maintenue sur la frontière entière, i.e.  $\gamma_0 = \partial\omega$ , et qu'elle est soumise à une pression uniforme. Les données mécaniques sont

$$E = 2,8 \times 10^9 Pa, \quad \nu = 0,4. \quad (2.68)$$

Noter que les propriétés de symétrie du domaine et des données nous permettent de résoudre le problème discret seulement sur la triangle  $\omega'$  avec les vecteurs :  $(0, 0)^T$ ,  $(b\sqrt{2}, 0)^T$  et  $(0, b\sqrt{2})^T$ . On se référer [9], pour les conditions artificielles publiées dans les conditions de symétrie.

**La figure 2.1** : présente la maillage initiale et adaptée. Nous prenons alors  $\varepsilon_p$  égal à  $10^{-1}$ .

**La figure 2.2** : présente les isovaleurs de la coque au-dessus-déformée à savoir la surface  $\varphi(x) + 1000u(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , où la solution est calculée avec la pénalisation vue.

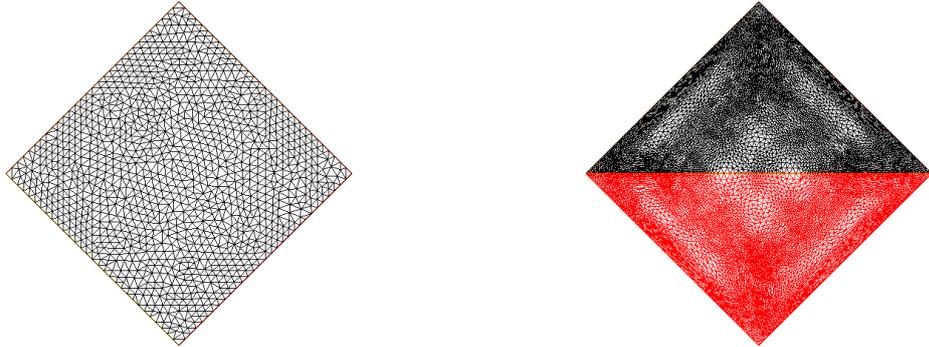


FIGURE 2.1 – Maillage initiale et adapté.



FIGURE 2.2 – Les isovaleurs et la surface deformee.

# Bibliographie

- [1] G.Allaire-Analyse numérique et optimisation, Une introduction a la modelisation mathématique et a la simulation numérique
- [2] M.Bernadou-Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces, Collection "Recherches En Mathématiques Appliquées" 33, Masson (1994).
- [3] M. Bernadou, P.G. Ciarlet-Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter, in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, R. Glowinski and J.-L. Lions eds., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 134, Springer, Berlin (1976),89-136.
- [4] C. Bernardi, A. Blouza-Spectral discretization of a Naghdi shell model, SIAM J. Numer.Anal. 45 (2007), 2653-2670.
- [5] C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, D. Franco Coronil-A non-overlapping domain decomposition method motivated by a posteriori error analysis, Appl. Num. Math.(2008), in press.
- [6] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht-A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem, Math. Models and Methods in Applied Sciences 13 (2003), 1599-1628.
- [7] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti-Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Collection "Mathématiques et Applications" 45, Springer-Verlag (2004).

- [8] A. Blouza-Existence et unicité pour le modèle de Nagdhi pour une coque peu régulière, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 324 (1997), 839-844.
- [9] A. Blouza, F. Hecht, H. Le Dret-Two finite element approximations of Naghdi's shell model in Cartesian coordinates, *SIAM J. Numer. Anal.* 44 (2006), 636-654.
- [10] A. Blouza, H. Le Dret-Existence and uniqueness for the linear Koiter model for shells with little regularity, *Quarterly of Applied Mathematics* LVII (1999), 317-337.
- [11] A. Blouza, H. Le Dret-Naghdi's shell model : Existence, uniqueness and continuous dependence on the moyenne surface , *Journal of Elasticity* 64 (2001), 199-216.
- [12] M. Carrive, P. Le Tallec, J. Mousso-Approximation par éléments finis d'un modèle de coques géométriquement exact, *Revue Européenne des Eléments Finis* 4 (1995), 633-662.
- [13] C. Carstensen, J. Schöberl-Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reibner Mindlin plate finite element method, *Numer. Math.* 103 (2006), 225-250.
- [14] D. Chapelle, A. Ferent, K.J. Bathe-3D-shell elements and their underlying mathematical model, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* 14 (2004), 105-142.
- [15] P.G. Ciarlet-Mathematical Elasticity, Volume III : Theory of Shells, North-Holland (2000).
- [16] P.J. Frey, P.-L. George-Maillages, applications aux éléments finis, Hermès (1999).
- [17] V. Girault, P.-A. Raviart-Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).
- [18] F. Hecht, O. Pironneau-FreeFem++, see [www.freefem.org](http://www.freefem.org).
- [19] N. Kerdid, P. Mato Eiroa-Conforming finite element approximation for shells with little regularity, *Comput. Methods in Applied Mech. and Engrg.* 188 (2000), 95-107.

- [20] P. Le Tallec, J. Mandel, M. Vidrascu-A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998), 836-867.
- [21] P. Le Tallec, S. Mani-Analyse numérique d'un modèle de coque de Koiter discrétisé en base cartésienne par éléments finis DKT, *Modél. Math. Anal. Numér.* 32 (1998), 433-450.
- [22] R. Verfürth-A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley & Teubner (1996).

## Résumé

**Abstraction :** in this work we consider a discretization by finite element for the operator of Laplacian in the first chapter and for the problem of Naghdi who model a three-dimensional hull low thickness in the second chapter. The analysis a posteriori of these problems leads to the construction of indicators of error which makes optimal estimates sataifesantes. Finally we propose a strategy of adaptation of grid based on these indicators and presents some numerical experiments which confirm its effectiveness.

**Résumé :** dans ce travail nous considérons un discrétisation par élément fini pour l'opérateur de Laplacien dans le premier chapitre et pour le problème de Naghdi qui modélisent une coque tridimensionnelle de faible épaisseur dans le deuxième chapitre. L'analyse a posteriori de ces problèmes mène à la construction d'indicateurs d'erreur qui fait des estimations optimales sataifesantes. Finalement nous proposons une stratégie d'adaptation de maillage basée sur ces indicateurs et présente quelques tests numériques qui confirment son efficacité.