République Algérienne Démocratique et Populaire
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITAIRE KASDI MERBAH OUARGLA

FACULTÉ DE ATHÉMATIQUES ET SCINCES DE LA MATIÉRE

DÈPATEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire Présenté En Vue De L'obtention Du

DIPLÔME DE MASTER

EN MATHÉMATIQUES

Option : Algébre et Géométrie

Par

DJERRAYA Faten

Thème

Ensembles Ordonnés
Treillis et Algebre de Boole et leurs utilisation dans les représentations des fonctionnements des systémes

Soutenu publiquement le : 25/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr.Mohamed laid YOUMBAI	M.A université de KASDI Merbah – Ouargla	Président
Mr.Med Tayeb BENMOUSSA	M.A université de KASDI Merbah – Ouargla	Examinateur
Mr.Yassine GUERBOUSSA	M.A université de KASDI Merbah – Ouargla	Examinateur
Mr.Med Amine BAHAYOU	M.A université de KASDI Merbah – Ouargla	Examinateur
Mr.Mohamed BOUSSAID	M.A université de KASDI Merbah – Ouargla	Rapporteur

Table des matières

Remercement

Aprés la recherche de voyage et d'efforts et de diligence qui je l'achévement de ce travail. je remercie Dieu qu'il m' a donné la force de treminer ce travail.

Je tiens aussi à mon remerciements encadreur **Boussaid Mohamed** pour son effort et conseille et d'apprendre tout au long de la réalisation de ce travail.

Je tiens également mes remerciements à mes professeurs, surtout les professeurs de l'algébre et de géométrie à l'universite de **ouargla.**

En fin, je remercie ma famille, surtout mes parents pour leur soutien moral.

Introduction générale

Nombreux ceux qui s'intéressent à l'algébre de boole ou qui ont à l'utiliser .Le point de départ de l'algébre de boole (G.Boole mathématicie anglais 1815-1864) est la recherche

d'un algorithme permettant de ramener les raisonnements logiques à des calculs purement algébriques.

La richesse des structures booléennes provient du fait qu'elle se rattachent à diverses théories: théorie des ensemble ordonnés, treillis, théories des anneaux , topologie .....

Notre point de vue sera surtout théorique avant de passer aux applications.

Le but de ce travail est de donner les principaux resultats et définitions des ensemble ordonnés et treillis.

Le chapitre 1 est consacré à la définition de ensembles ordonné et puis étude générale de treillis .

Le chapitre 2 est réservé pour la définitions et quelques propriétes (filtré et ideaux , acheve, distrubutif, modilaire,diagrammes).

Le chapitre 3 contient des définitions concernant complementation et treillis de boole et anneaux de boole.

Dans le chapitre 4 un exemple d'application sur les structures d'événements.

Notations et conventions

$\Re$	Re*lation d'ordre*
$(E, \leq)$	*ensemble ordonné*
$\subseteq$	*Inclusion*
$\vee$	*Sup*
$\wedge$	*Inf*
$pgdc(x,y)$	*plus g*rand div*iseur coummun*
$ppmc(x,y)$	*Plus petit multplte coummun*
$(E, \leq, \#)$	*structure d'événement*
$\#$	Re*lation de conflit*
$(E, \leq, \#, e, A)$	*structure d'événement étiquetée*
$\leftrightarrow$	*concurrent*

Chapitre 1

Définition ensembles ordonné et treillis

1.1 Ensemble ordonné

1.1.1 Relation d'ordre

Définition 1.1.1 *Une relation $\Re$ definie sur un ensemble E est appellée relation d'ordre si pour tout x, y, $z \in E$ on a les propriétés suivantes*:

1. Réflexivité: $x \Re x$.
2. Antisymétrique: $x \Re y$ et $y \Re x$ alors $x = y$.
3. Transitivité: $x \Re y$ et $y \Re z$ alors $x \Re z$.

$\Re$ sera noté $\leq$ dans tous ce qui suit.

Définition 1.1.2 *Un ensemble E ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.*

On note cet ensemble $(E, \leq)$.

1.1.2 L'ensemble totalement ordonné et partiellement ordonné

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, x, $y \in E$.

Définition 1.1.3 *On dit que x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$, sinon ils sont dits incomparables.*

Définition 1.1.4 *On dit que E est un ensemble totalement ordonné (ou chaîne) si tous les éléments de E sont deux à deux comparables par la relation d'ordre $\leq$, et on dit qu'il est partiellement ordonné s'il existe des éléments de E incomparables par $\leq$.*

1.2 Ordre reciproque, Ordre induit, Ordre produit

Définition 1.2.1 *Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$, on peut définir sur E une nouvelle relation, notée $x \geq y$, comme étant équivalente à $x \leq y$.*

On vérifie immédiatement que c'est aussi une relation d'ordre sur E.

La relation $x \geq y$ (x supérieur où égale à y) est dite la relation d'ordre réciproque de $x \leq y$.

On notera également:

$x \ngeq y$: x non (supérieur où égale à y).

$x > y$: x strictement supérieur à y, c'est–à–dire $x \geq y$ et $x \neq y$.

Définition 1.2.2 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit A une partie non vide de E.*

La trace sur $A \times A$ de la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur A qui sera notée $x \leq_A y$, elle est donc définie par: $x \in A$ et $y \in A$ et $x \leq y$.

Cette relation sera appelée relation d'ordre induite par $\leq$ sur A.

Définition 1.2.3 *Considérons une famille d'ensembles ordonnés $((E_i, \leq_i))_{i \in I}$.Sur l'ensemble produit $E = \prod_I E_i$ on peut définir la relation: $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$*

$$(x_i) \leq (y_i) \Longleftrightarrow \textit{par: pour tout } i \in I,\ x_i \leq_i y_i.$$

On vérifiera sans peine que ceci est une relation d'ordre sur E qui est appelée relation d'ordre produit.

1.3 Morphismes d'ensembles ordonnes

Définition 1.3.1 *Soient deux ensembles ordonnés* $(E, \leq)$ *et* $(F, \leq)$, *une application* $f\colon E \longrightarrow F$ *sera dite un morphisme d'ordres ou encore une application croissante, si quels que soient* x *et* y *dans* E: $x \leq y$ *implique* $f(x) \leq f(y)$.

On définira également:

Application décroissante: $x \leq y$ *implique* $f(x) \geq f(y)$

(c'est un morphisme en munissant F *de l'ordre réciproque).*

Application strictement croissante: $x < y$ *implique* $f(x) < f(y)$.

Application strictement décroissante: $x < y$ *implique* $f(x) > f(y)$.

1.4 Isomorphisme d'ordres

Définition 1.4.1 *Une application* $f\colon E \longrightarrow F$ *est dite un isomorphisme d'ordres si :*

1– f est bijective.

2– $x \leq y$ équivaut à $f(x) \leq f(y)$.

Cela signifie donc que f et f^{-1}sont toutes les deux croissantes, par suite étant injectives elles serant strictement croissantes.

1.5 Ensembles ordonnes finis

Définition 1.5.1 *Dans un ensemble ordonné* $(E, \leq)$ *on dit qu'un élément* y *couvre un élément* x *si*:

1– $x < y$.

2– Il n'existe aucun élément z tel que $x < z < y$.

1.6 Éléments particuliers

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

a) Élément maximal: On appelle élément maximal M de E tout élément défini par: pour tout $x \in E$, $M \nleq x$ et $M \in E$ (ce que signifie: Ou bien $x \leq M$, ou bien x et M sont incomparables).

b) Élément minimal: On appalle élément minimal M'de E tout élément défini par: pour tout $x \in E$, $x \nleq M'$et $M' \in E$ (ce que signifie: Ou bien $M' \leq x$, ou bien x et M'sont incomparables).

c) Élément maximum: Un élément a est dit élément maximum d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonné E si: $x \leq a, \forall x \in X$ et $a \in X$.

d) Élément minimum: Un élément b est dit élément minimum d'un sous ensemble X d'un ensemble ordonné E si: $b \leq x, \forall x \in X$ et $b \in X$.

e) Majorant: On appelle majorant d'une partie A de E tout élément m de E tel que pour tout $x \in A$: $x \leq m$.

f) Mironont: On appelle minorant d'une partie A de E tout element m de E tel que pour tout $x \in A$: $m \leq x$.

g) Borne supérieure: On appelle borne supérieure d'une partie A de E tout élément S de E qui verifie les deux propriétés:

— $\forall x \in A$, $x \leq S$ (S est un majorant de A).

— Pour tout m majorant de A, $S \leq m$.

Notons qu'un tel élément, s'il existe est unique.Si une partie A de E admet une borne supérieure S, celle–ci sera notée: $S = \sup_E A$.

k) Borne inférieure: On appelle borne inféreure d'une partie A de E tout élément I de E qui verifie les deux propriétés:

— $\forall x \in A$, $I \leq x$ (I est un minorant de$A$).

— Pour tout m' minorant de A, $m' \leq I$.

La borne inférieure, lorsqu'elle existe sera notée: $I = \inf_E A$ est unique.

1.7 Treillis

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

a) Sup.demi-treillis: On dit que E est un sup demi-treillis ssi: Tout partie de E formée de deux éléments admet une borne supériure (i.e: $\sup_E \{x, y\}$ existe $\forall x, y \in E$).

On notera: $\sup_E \{x, y\} = x \vee y$.

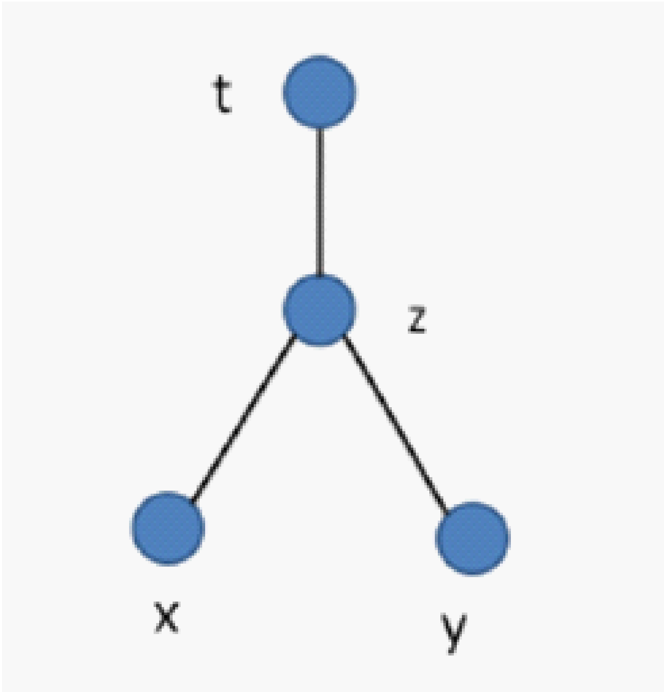


FIG.1.1 – Sup–demi–treillis

b) Inf.demi-treillis: On dit que E est un inf.demi-treillis ssi: Toute partie de E formée de deux éléments admet une borne inférieure (i.e: $\inf_E \{x, y\}$ existe $\forall x, y \in E$).

On notera: $\inf_E \{x,y\} = x \wedge y$.

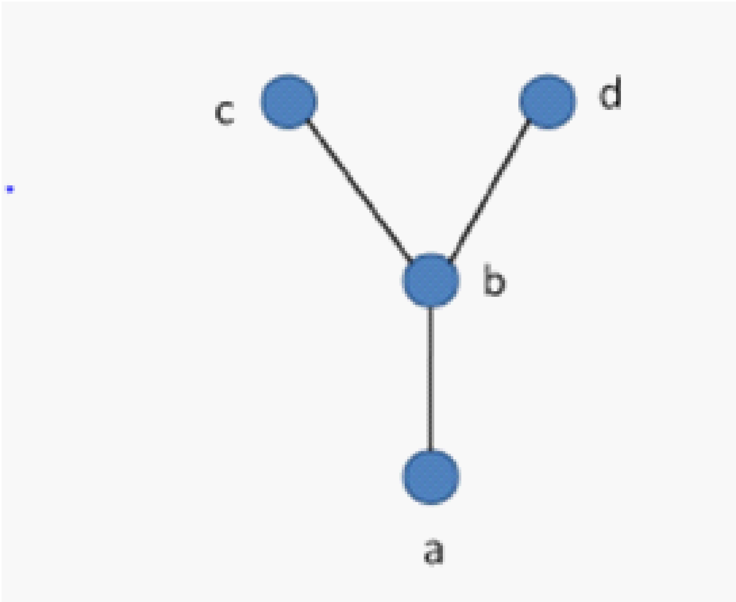


FIG.1.2 – Inf–demi–treillis

Définition 1.7.1 *On dit que E est un treillis ssi: Toute partie de E formée de deux éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

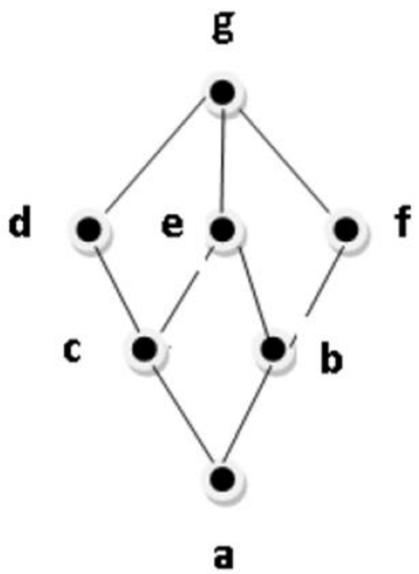


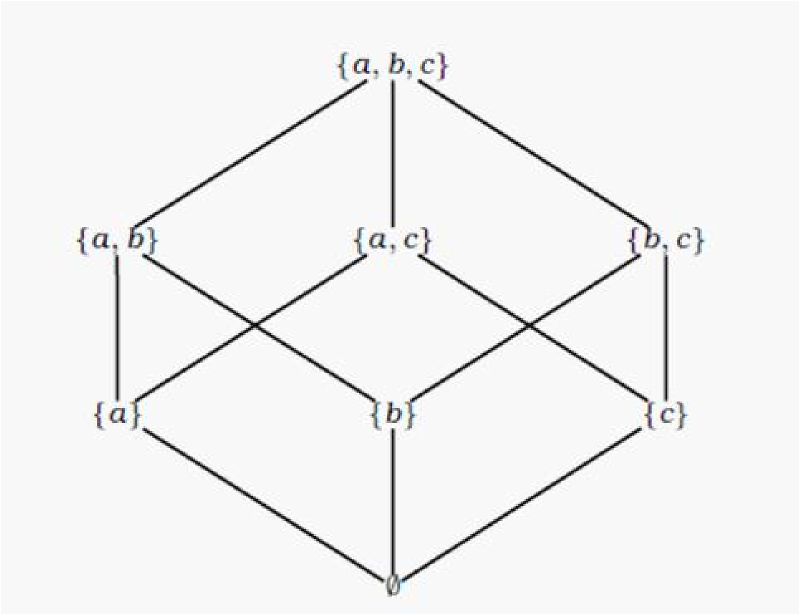
FIG.1.3 – Treillis

Exemple 1.7.1 ***Treillis des parties d'un ensembles:***$(P(X), \subseteq)$ *est treillis*

$A \wedge B = A \cap B$ *et* $A \vee B = A \cup B$ $\forall A, B \in P(X)$.

Soit l'ensemble $X = \{ a, b, c\}$, $P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Le diagramme:$(P(X), \subseteq)$



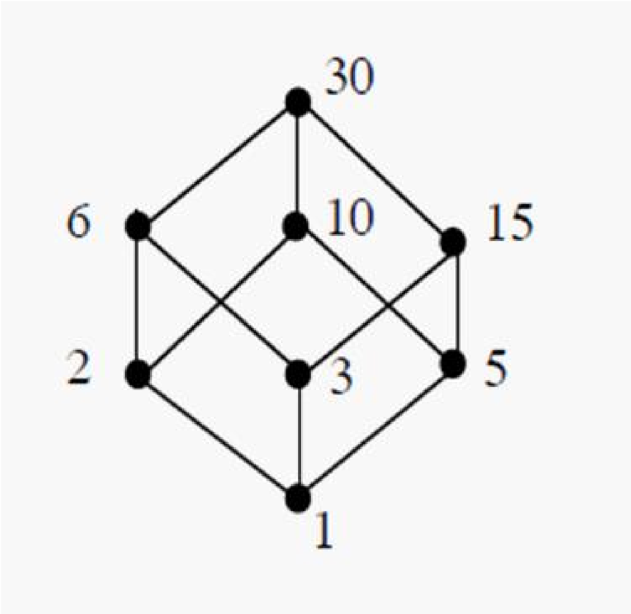
Exemple 1.7.2 ***Treillis de division***:

Soit $(N^*, \leq)$ *est un treillis:*$(N^*, \leq)$ $\forall x, y \in N^*$ $x \leq y \Longleftrightarrow x$ *divise* y

$x \wedge y = pgdc(x, y)$ *et* $x \vee y = ppmc(x, y)$

Soit l'ensemble $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Le diagramme:



On remarque que $(P(X), \subseteq) \backsimeq (S, \leq)$.

1.8 Sous-treillis

1– Sous-sup.demi-treillis:

Une partie non vide A d'un sup.demi-treillis E est dite un sous-sup.demi-treillis si on a l'une des deux conditions équivalentes suiventes:

a) $\sup_A \{x{,}y\}$ existe et est égale à $x \vee y$, $\forall x,\, y \in A$.

b) $x \vee y \in A$; $\forall x,\, y \in A$.

2– Sous-inf-demi-treillis:

Une partie non vide A d'un inf.demi-treillis E est dite un sous-inf-demi.treillis si on a l'une deux conditions équivalentes suivantes:

a) $\inf_A \{x,\, y\}$ existe et est égale à $x \wedge y$, $\forall x,\, y \in A$.

b) $x \wedge y \in A$; $\forall x,\, y \in A$.

Définition 1.8.1 *Une partie non vide A d'un treillis $(E, \leq)$ est dite un sous-treillis si elle est à la fois un sous-sup.demi-treillis et un sous-inf.demi-treillis. Ceci équivaut à dire:*$\forall x$, $y \in A$: $x \vee y \in A$ *et* $x \wedge y \in A$.

1.8.1 Définition algébrique d'un treillis

Soit $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné ona :

1. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (Associativité).
2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (Commutativité).
3. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (Idempotence).
4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (Absorption).

1.8.2 Morphisme de treillis

Définition 1.8.2 *Pour deux treillis E et E' on pourra encore parler de :* $f \colon E \longrightarrow E'$,

f est un

Définition 1.8.3 $\vee$*–morphisme:* $x,\, y \in E$: $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
$\wedge$*–morphiseme:* $x,\, y \in E$: $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Définition 1.8.4 *On appelle morphisme de treillis toute application qui est à la fois un* $\vee-$*morphisme et un* $\wedge-$*morphisme.*

1.8.3 Isomorphisme de treillis

Définition 1.8.5 *On dit que f est un isomorphisme si f morphisme de treillis et bijection.*

1.9 Ensembles quasi–inductifs

Définition 1.9.1 *Un ensemble ordonné E est dit quasi–inductif si toute chaîne (non vide) de E est majorée dans E (un ensemble est dit inductif lorsque toute chaîne de E possède une borne supérieure dans E).*

1.9.1 Théorème de zorn

Théorème 1.9.1 *Si E est un ensemble quasi–inductif, pour toute élément a de E, il existe au moins un élément maximal M de E tel que $M \geq a$.*

Chapitre 2

Les treillis acheves et distributifs et modulaires

2.1 Filtres et ideaux

2.1.1 Filtre dans un inf.demi–treillis

2.1.2 Définitions et propriétés

Soit E un inf.demi–treillis .

Définition 2.1.1 *On appelle filtre de E toute partie non vide F de E vérifiant*:

a) Si $x \in F$ et $y \geq x$: alors $y \in F$.

b) Si $x \in F$ et $y \in F$: alors $x \wedge y \in F$.

2.1.3 a) Géneration de filtres

1) Soit a un élément fixé de E, définissons l'ensemble $F_a = \{x \in E \ /x \geq a\}$, alors F_a est un filtre de E. En effet:

— Si $x \in F_a$ et $y \geq x$: $y \geq x \geq a$, donc $y \in F_a$

— Si $x \in F_a$ et $y \in F_a$: $x \geq a$ et $y \geq a$, donc $x \wedge y \geq a$, d'ou $x \wedge y \in F_a$.

Un tel filtre F_a est dit filtre principal engendré par a, a est alors le plus petit élément de F_a.

Réciproquement, si un filtre F posséde un plus petit élément a alors c'est le filtre engendré par a.

2) L'intersection d'une famille quelconque $(F_i)_{i\in I}$ de filtre est encore un filtre:

Soit $F = \bigcap\limits_I F_i$ on vérifie immédiatement les conditions a) et b). En outre $F \neq \varnothing$ car pour tout $i \in I$: $1 \in F_i$ donc $1 \in F$.

2.1.4 b) Ultrafiltres

Définition 2.1.2 *On suppose que l'inf.demi–treillis E posséde au moins deux éléments, ce qui assure l'existence de filtres propres.*

L'ensemble des filtres propres ordonné par inclusion est quasi–inductif.

Démonstration. Concidérons une famille non vide $(F_i)_{i\in I}$ totalement ordonnée de filtres propres.Posons $F = \cup F_i$, F est un filtre propre:

– $F \neq \varnothing$.

– Si $x \in F$ et $y \geq x$: il existe i tel que $x \in F_i$, alors $y \in F_i$, donc $y \in F$.

– Si $x \in F$ et $y \in F$: il existe i et j tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$, or F_i et F_j sont comparables pour l'inclusion, par exemple $F_i \subset F_j$, alors $x \in F_j$ et $y \in F_j$ donc $x \wedge y \in F_j$, d'ou $x \wedge y \in F$.

– F est propre car pour tout i $0 \notin F_i$ donc $0 \notin F$.

F est évidement la borne supérieure (et a fortiori un majorant) de la famille (F_i) dans l'ensemble des filtres propres. ■

Proposition 2.1.1 *Soit F un filtres propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

a) F est un ultrafiltre.

b) pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.

Démonstration. – Si F est un ultrafiltre, supposons qu'il existe $x \notin F$ tel que pour tout $y \in F$, $x \wedge y \neq 0$.Posons $G = Fu\{x\}$, G est une partie $\wedge-$compatible, en effet: soient a_1,...,a_n des éléments de G et posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_n$.

– Si tous les a_i appartiennent à F, alors $a \in F$ donc $a \neq 0$.

– Si par exemple, $a_1 = x$: $a = x \wedge y$ avec $y = a_2 \wedge ... \wedge a_n$, $y \in F$ donc $a \neq 0$.

Par suite G engendre un filtre propre F_G, or $F \underset{\neq}{\subsetneq} G \subset F_G$ ce qui contredit la maximalitté de F.

– Si on a la propriété b): supposons qu'il existe un filtre propre F' tel que $F \underset{\neq}{\subsetneq} F'$, soit alors $x \in F'$et $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$, or x et y appartiennent à F'on aurait donc $0 \in F'$ ce qui contredit le fait que F'soit propre. ■

2.2 Idéal dans un sup.demi–treillis

Définition 2.2.1 *On appelle idéal d'un sup.demi–treillis E toute partie non vide I de E vérifiant*:

a) si $x \in I$ et $y \leq x$: alors $y \in I$.

b) si $x \in I$ et $y \in I$: alors $x \vee y \in I$.

2.3 Treillis achevés

2.3.1 Sup.demi–treillis achevé

2.3.2 Définitions et propréités

Définition 2.3.1 *On appelle sup.demi–treillis achevé (on dit aussi complet) tout ensemble ordonné $(E, \leq)$ tel que pour toute partie A de E la borne supérieure de A dans E existe. On notera généralement*:

$\sup_E A = \vee_E A$ *(ou $\vee A$ s'il n'y a pas de confusion possible).*

Remarque 2.3.1 – *Un sup.demi–treillis achevé est a fortiori un sup.demi–treillis.*

– *Un sup.demi–treillis achevé a toujours*:

- *un plus grand élément*: $1 = \vee E$.
- *un plus petit élément*: $0 = \vee\varnothing$.

Proposition 2.3.1 *Dans un sup.demi–treillis achevé, toute partie A posséde une borne inférieure.*

Démonstration. – *Si* $A = \varnothing$: $Inf A = 1$.

– *Si* $A \neq \varnothing$: *soit* M *l'ensemble des minorants de* A *(il y a au moins* 0*), posons* $I = \vee M$.

- I *minore* A: *si* $x \in A$, *pour tout* $m \in M$, $m \leq x$, *donc* x *majore* M, *donc* $I \leq x$.
- *Soit* J *un autre minorant de* A: $J \in M$ *donc* $J \leq I$.*On a donc* $I = Inf A$. ∎

Exemple 2.3.1 *Tout treillis fini est achevé.*

2.4 Famille de moore

Soit E un treillis achevé.

Définition 2.4.1 *On appelle famille de moore de* E *toute partie* F *de* E *telle que*:

pour toute partie A *de* F *on a:* $\wedge_E A \in F$.

2.5 Fermeture

Définition 2.5.1 *On appelle fermeture dans un ensemble ordonné quelconque* $(E, \leq)$, *toute application* f *de* E *dans* E *vérifiant*:

a) f est croissante.

b) f est extensive: pour tout x on a $x \leq f(x)$.

c) f est idempotente: $f \circ f = f$.

2.6 Distributifs

2.6.1 Définitions et propriétés

Soit $E = (E,\vee,\wedge)$ un treillis.

Définition 2.6.1 *On dit que E est un treillis distributif ssi*:

$$-\forall x,\, y,\, z\colon x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

(distributivité de $\wedge$ par raport à $\vee$).

$$-\forall x,\, y,\, z\colon x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

(distributivité de $\vee$ par raport à $\wedge$).

Diagramme d'un treillis distributif:

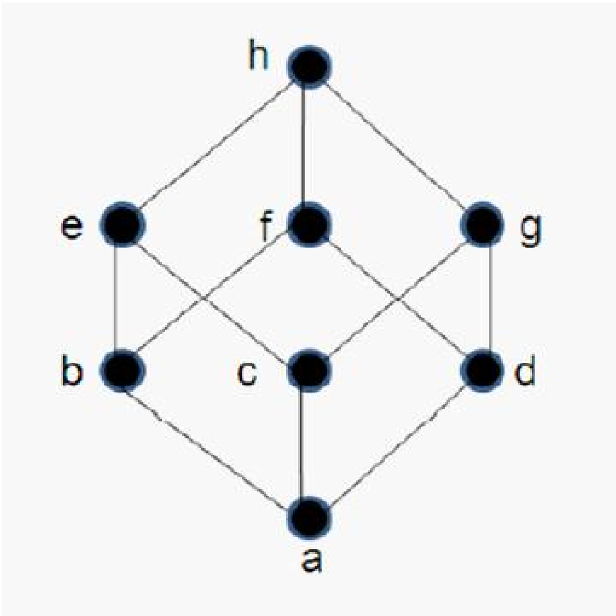


FIG.2.1- Treillis distributif

Exemple 2.6.1 *$(P(X), \subseteq)$ est un treillis distributif.*

Remarque 2.6.1 *Dans tout treillis les deux conditions suivantes sont toujours vérifiées*:

1– $\forall x,\, y,\, z\colon\; x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2– $\forall x,\ y,\ z:\ x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Eneffet:

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y)$ *et* $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge z)$ *donc*:
$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y)$ *et* $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee z)$ *donc*:
$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Théorème 2.6.1 *Dans un treillis quelconque, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

— $P_1: x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \forall x,\ y,\ z$

— $P_2: x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \forall x,\ y,\ z$

Démonstration. *Nous allons démontrer que* P_1*implique* P_2. ■

On a pour tout x, y *et* z

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\
&= x \vee [z \wedge (x \vee y)] \\
&= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] \\
&= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y) \\
&= x \vee (z \wedge y).
\end{aligned}$$

La réciproque en résulte par dualité.

Proposition 2.6.1 *Pour qu'un treillis* E *soit distributif il faut et il suffit qu'il vérifie,* $\forall x$, y, z *la condition*:

$$\left.\begin{aligned} x \wedge z &= y \wedge z \\ x \vee z &= y \vee z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = y.$$

Démonstration. — Si E est un treillis distrubutif, suposons $x \wedge z = y \wedge z$ et $x \vee z = y \vee z$.
On peut ecrire:
$x \vee (y \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge (z \vee y) = (x \wedge z) \vee y = (y \wedge z) \vee y = y$.

D'ou $x = y$.

— Réciproquement, supposons que la condition énoncée dans le théoréme soit vérifiée,

E est alors certainement modulaire (caractérisation précédente).

Soient trois éléments quelconques x, y, z posons:

$a = (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y))$

$b = (y \wedge z) \vee (x \wedge (y \vee z))$

E est modulaire et $x \wedge y \leq x \vee y$ donc:

$a = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y)$

$b = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z)$

$a \wedge y = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge y = ((x \wedge y) \vee z) \wedge y = (x \wedge y) \vee (z \wedge y)$

car $x \wedge y \leq y$.

$b \wedge y = ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) \wedge y = ((y \wedge z) \vee x) \wedge y = (y \wedge z) \vee (x \wedge y)$

car $y \wedge z \leq y$.

Donc $a \wedge y = b \wedge y$.

$a \vee y = y \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge (x \vee y)) = y \vee (z \wedge (x \vee y)) = (y \vee z) \wedge (x \vee y)$

car $y \leq x \vee z$.

Donc $a \vee y = b \vee y$.

Il en résulte: $a = b$.

Donc aussi $a \wedge x = b \wedge x$.

Or:

$a \wedge x = ((x \wedge y) \vee z) \wedge (x \vee y) \wedge x = ((x \wedge y) \vee z) \wedge x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

car $x \wedge y \leq x$.

$b \wedge x = x \wedge ((y \wedge z) \vee x) \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$.

Ainsi : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, donc E est distributif. ∎

Lemme 2.6.1 *Toute chaîne est un treillis distributif.*

Démonstration. Soient $x, y, z \in E; x \leq y \leq z$ (l'ensemble est totalement ordonné)

$x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x$

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee x = x$.

D'ou la chaîne est distributif. ∎

2.7 Modulaires

2.7.1 Défintion et proprietés

Définition 2.7.1 *Un treillis E est dit un treillis modulaire s'il vérifie,*$\forall x,\ y,\ z$ *la condition*:

$$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Daigramme d'un treillis modulaire:

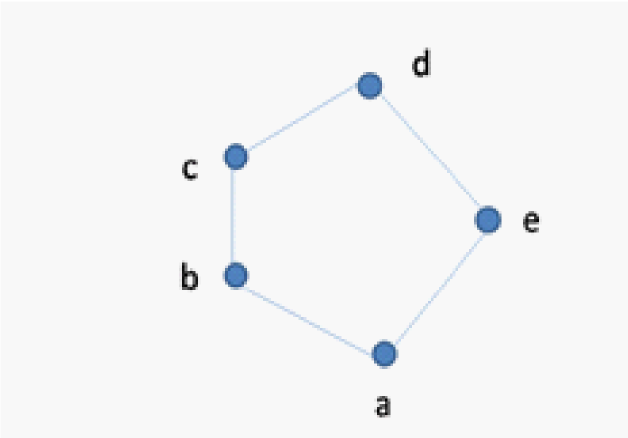


FIG.2.2-Treillis modilaire

Remarque 2.7.1 *Tout treillis distrubutif est modulaire, en effet*:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

donc si $x \leq z$: $x \vee z = z$ *et* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Mais la réciproque est en général inexacte.

Lemme 2.7.1 *Les éléments d'un treillis quelconque satisfont à l'enégalitité modulaire*:

$$x \leq z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

Démonstration. Il est claire que $x \leq x \vee y$ et $x \leq z$.

Par suite, $x \leq (x \vee y) \wedge z$.

D'autre part, $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ et $y \wedge z \leq z$, d'ou $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$.

En combinant ces résultats avec la définition de $\vee$, on obtient $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.

■

Proposition 2.7.1 *Pour qu'un treillis E soit modulaire il faut et il suffit qu'il vérifié, quels que soient x, y, z la condition*:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Longrightarrow x \text{ et } y \text{ sont égaux ou incomparables.}$$

Démonstration. — Si E est un treillis modulaire, supposns $x \wedge z = y \wedge z$ et $x \vee z = y \vee z$ avec x, y comparables et distincts, par exemple $x < y$.

On a:

$$x \vee (z \wedge y) = x \vee (x \wedge z) = x$$

$$(x \vee z) \wedge y = (y \vee z) \wedge y = y$$

ce que contredit la modularité.

— Réciproquement, supposons que la condition énoncée dans le théoréme soit vérifiée et soient x, y, z, avec $x \leq z$.

Posons

$a = x \vee (y \wedge z)$

$b = (x \vee y) \wedge z.$

On sait que:

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ et puisque $x \leq z$ on a $x \vee z = z$, donc $a \leq b$.

$a \wedge y = (x \vee (y \wedge z)) \wedge y \geq (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \wedge z) = y \wedge z$

$b \wedge y = ((x \vee y) \wedge z) \wedge y \leq y \wedge z.$

Donc $a \wedge y \geq b \wedge y$, mais $a \leq b$ d'ou $a \wedge y = b \wedge y$

$a \vee y = (x \vee (y \wedge z)) \vee y \geq x \vee y$

$b \vee y = ((x \vee y) \wedge z) \vee y \leq ((x \vee y) \wedge z) \vee (x \vee y) = x \vee y.$

Donc $a \vee y \geq b \vee y$, mais $a \leq b$ d'ou $a \vee y = b \vee y$.

Il en résulte que a et b sont égaux ou incomparables, or $a \leq b$, donc $a = b$, ce que montre que le treillis est modulaire. ■

Chapitre 3

Complémentation et treillis de boole et anneaux de boole

3.1 Complementation

3.1.1 Complénentation relative

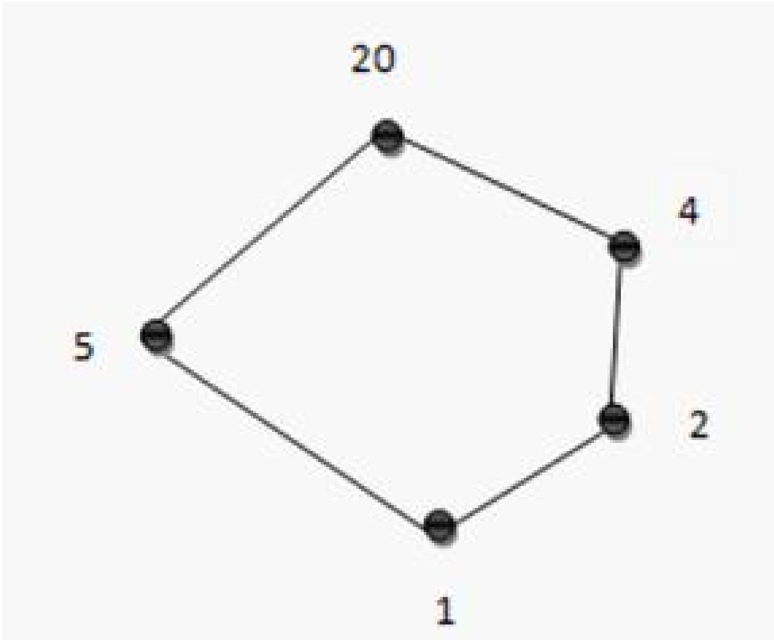
Définition 3.1.1 *Si* $x \in [a,\, b]$ *on appelle complément de* x *relativement à* $[a,\, b]$ *tout élément* y *(s'il en existe) vérifiant*:

$$x \wedge y = a \text{ et } x \vee y = b.$$

Exemple 3.1.1 *Soit le treillis* $X = \{1,\, 2,\, 4,\, 5,\, 20\}$*ordonné par divisibilité.*

Dans l'intervalle $[1,\, 4]$, 2 *n'a pas de complément relatif.*

Dans l'intervalle $[1,\, 20]$, 5 *a deux compléments relatifs* $(2$ *et* $4)$.



Définition 3.1.2 *Un treillis est dit relativement complémenté si dans tout intervalle* $[a,\, b]$, *tout élément* x *posséde au moins un complément relatiif.*

3.1.2 Treillis complémenté

Définition 3.1.3 $-$ *Si* $x \in E$ *on appelle complément de* x *tout complément de* x *relativement à l'intervalle* $[0,\, 1]$.

$-$ E *est dit un treillis complémenté si tout élément de* E *posséde au moins un complémént.*

Daigramme d'un treillis complémenté:

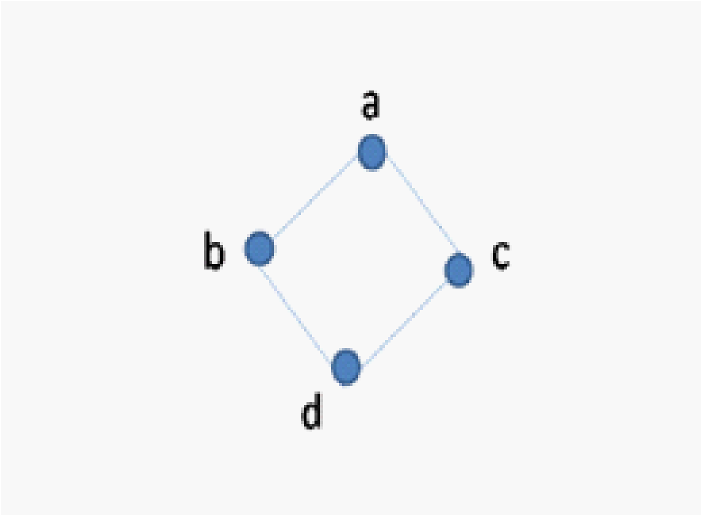


FIG.3.1-Treillis complémenté

Remarque 3.1.1 *Un complément x'de x, s'il en existe, est donc défini par*:

$$x \wedge x' = 0 \text{ et } x \vee x' = 1.$$

Treillis $\wedge-$complémenté

Définition 3.1.4 *On appelle $\wedge-$complément d'un élément x le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble $\{y \in E \ / \ x \wedge y = 0\}$.*

Un treillis est dit $\wedge-$complémenté si tous ses éléments possédent un $\wedge-$complément (nécessairement unique).

Remarque 3.1.2 — *On pourrait, de façan analogue, définir un treillis $\vee-$complémenté.*

— *Un treillis complémenté n'est pas nécessairement $\wedge-$complémenté.*

Proposition 3.1.1 *Tout treillis distributif et complémenté, est $\wedge-$complémenté.*

Démonstration. Soit E un treillis distributif et complémenté, soit $x \in E$
et soit x son complément (unique).
On a $x \wedge x' = 0$ supposons $x \wedge y = 0$
$(y \wedge x') \wedge x = y \wedge (x' \wedge x) = y \wedge 0 = y \wedge x.$
$(y \wedge x') \vee x = (y \vee x) \wedge (x' \vee x) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x.$

D'aprés la caractérisation des treillis distributifs on en déduit : $y \wedge x' = y$, donc $y \leq x'$.

Ainsi x'est le plus grand élément de$\{y \ / \ x \wedge y = 0\}$ c'est donc aussi donc le $\wedge-$complément de x. ■

3.2 Théorème de point fixe

Théorème 3.2.1 ***(Knaster–Tarski, 1942)*** *Toute fonction croissante d'un treillis complet dans lui–même admet un plus petit et un plus grand point fixe (c'est–à–dire que l'ensemble des points fixes admet un* inf *et un* sup*).*

Démonstration. Soit f une fonction croissante d'un treillis complet $(T, \leq)$ dans lui–même.

Posons $F = \{x \in T, \ f(x) \leq x\}$.

F est non vide car $\sup(T)$ existe et $sup(T) \in F$ (au besoin on le rajoute).

Donc F admet une borne inférieure $a = \inf(F)$.

f étant croissante, $\forall x \in F$, $a \leq x \Longrightarrow f(a) \leq f(x) \leq x$.

Donc $f(a)$ est un minorant de F et $f(a) \leq a$.

Donc $a \in F$ et est le minimum de F.

Ainsi, si a est un point fixe de f, ce sera le plus petit, car tout point fixe de f est dans F.

Or $f(a) \leq a \Longrightarrow f(f(a)) \leq f(a)$, donc $f(a) \in F$, d'ou $a \leq f(a)$. ■

3.3 Treillis de boole et anneux de boole

Définition 3.3.1 *On appelle treillis de boole tout treillis qui est à la fois distributif et complémenté. Un treillis de boole E posséde donc un plus petit élément* 0 *et un plus grand élément* 1.

Daigramme d'un treillis de boole:

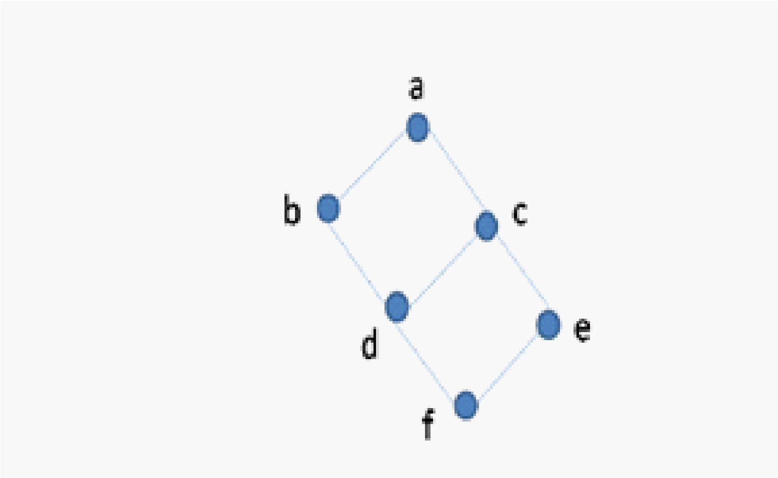


FIG.3.2-Treillis booléen

Exemple 3.3.1 *Tout treillis* $(P(X), \subseteq)$ *est un terillis de boole.*

Proposition 3.3.1 *Soit* E *un treillis de boole.*

— $0' = 1$ $(0 \wedge 1 = 0,\ x' \vee x = 1)$

— $1' = 0$ (*idem*)

— *Pour tout*: $(x')' = x$ $\ (x' \wedge x = 0$ *et* $x' \vee x = 1)$

— *quels que soient* x *et* y:

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Ces deux égalités sont appellées lois de morgan, elles sont faciles à vérifier:

$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0.$

$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (y' \vee 1) \wedge (x' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Donc $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

D'ou $(x' \wedge y')' = x \vee y$ *et* $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

3.4 Anneau booleen

Définition 3.4.1 *On appelle anneau booléen tout anneau unitaire dont la multiplication est idempotente* $(x^2 = x)$.

Théorème 3.4.1 *Tout anneau booléen est un terillis de boole en définissant les opération*:

$$\begin{cases} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy \end{cases}$$

Démonstration. – La loi $\wedge$ est commutative, associative et idempotente.

– La loi $\vee$ est :

·Commutative.

·Associative : $(x \vee y) \vee z = x + y + xy + z + (x + y + xy)z$

$= x + y + z + xy + yz + zx + xyz$

expression symétrique en x, y, z.

·Idempotente : $x \vee x = x + x + x^2 = x + x + x = x$.

– Les lois d'absorption sont vérifiées :

$x \wedge (x \vee y) = x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + xy + xy = x$

$x \vee (x \wedge y) = x + xy + x^2y = x$.

– Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$:

$x \wedge (y \vee z) = x(y + z + yz) = xy + xz + xyz$.

$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy + xz + x^2yz = xy + xz + xyz$.

– Plus petit et plus grand élément on définie sur l'anneau l'ordre $\leq$ par :

$x \leq y \Longleftrightarrow x.y = x$, $\leq$ est une relation d'ordre.

Pour tout x, $x \wedge 0 = x.0 = 0$ donc $0 \leq x$.

$x \wedge 1 = x.1 = x$ donc $x \leq 1$.

– complémentation :

posons $x' = x + 1$

$x \wedge x' = x(x + 1) = x^2 + x = x + x = 0$

$x \vee x' = x + x + 1 + x(x + 1) = 1$. ■

3.4.1 Treillis et anneau associes

— Soit E un treillis de boole, nous luis avons associé l'anneau booléen que nous noterons pour l'instant $A(E)$ en définissant les opération :

$$\begin{cases} x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ xy = x \wedge y. \end{cases}$$

— Soit B un anneau booléen,nous luis avons associé le treillis de boole que nous noterons pour l'instant $T(B)$ en définissant les opération :

$$\begin{cases} x \leq y \Longleftrightarrow x.y = x \text{ (relation d'ordre sur} T(B)) \\ x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy. \end{cases}$$

Proposition 3.4.1 $T(A(E)) = E$

Démonstration. Notons $\dot{\vee}$ et $\dot{\wedge}$ les opération dans $T(A(E))$:
$x \dot{\wedge} y = xy = x \wedge y$, $x \dot{\vee} y = x + y + xy = x \vee y$.

Il en résulte que la relation d'ordre est même dans E et $T(A(E))$, il s'agit donc du même treillis. ■

Proposition 3.4.2 $A(T(B)) = B$

Démonstration. Notons $\dot{+}$ et $\times$ les opérations dans $A(T(B))$:

$x \times y = x \wedge y = xy$.

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ &= [x(y+1)] \vee [(x+1)y] \\ &= x(y+1) + (x+1)y + xy(x+1)(y+1) \\ &= xy + x + xy + y + x^2y^2 + x^2y + xy^2 + x = x + y. \end{aligned}$$ ■

Chapitre 4

structures d'événements

Depuis le début des années 1980 l'intérêt porter aux réseaux informatiques à donné naissance à une multitude de modéles de description des systemes pour les étudier et décrire leur fonctionnement.

Les machaines paralléles: pour accélerer la réalisation d'une tache il y a l'idée de sa décomposition en tâches élémentaires qui peuvent être réalisées parallélement, distribuées à des processeurs distincts chacune doit être réaliseé en une unité de temps en suite les résultats partiels seront recomposés pour obtenir le resultat final.

Parmi les principaux modéles pour décrire le fonctionnement d'un systéme: les structures d'événements qui se pasent sur la connaissance des événements, l'ordre temporelle forcé et les incompatibilites qui peuvent exister entre les événements.

4.1 Conflit

Définition 4.1.1 *Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, R une relation binaire sur E, R est dite de conflit si:*

1– $\forall x \in E \qquad non\ (x\ R\ x) \qquad$ (R *est irreflexive*).

2– R *est symetrique* $\qquad (x\ R\ y \Longleftrightarrow y\ R\ x)$.

3– $\forall x,\, y,\, z \in E;\ (x\ R\ y,\ \ x \leq z\ \ \ et\ x \neq z) \Longrightarrow y\ R\ z$.

La relation R de conflit sera noté $\#$.

Définition 4.1.2 *Une structure d'événement est un triplet $(E, \leq, \#)$, où E est un ensemble dont les élément sont appelés événements, $\leq$ une relation d'ordre sur E et $\#$ est une relation de conflit sur E.*

De la définition on a les remarques:

Remarque 4.1.1 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événement, x, y deux événement*
si $x \# y$ alors $\forall x', y' \in E$, $x \leq x'$ et $y \leq y' \Longrightarrow x' \# y'$.
(On dit que le conflit est hérité pour le future).

Remarque 4.1.2 *$(E, \leq, \#)$ une stucture d'événement x, y deux événement*
$x \# y \Longrightarrow x$ et y sont incomparable pour l'ordre $\leq$.

Remarque 4.1.3 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événement $x, y \in E$*
$x \# y \Longrightarrow x$ et y n'ont pas de majorant commun.

Définition 4.1.3 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événement, un étiquetage de $(E, \leq, \#)$*

est un couple (e, A) où: A est un alphabet et e est une application
de E dans A $\quad e \colon E \longrightarrow A$

$$x \longrightarrow e\,(x)$$

Définition 4.1.4 – *le 5-uplé $(E, \leq, \#, e, A)$ est appelé structure d'événement étiqueteé.*

Définition 4.1.5 *$(E, \leq, \#)$ une structure d'événement x et y deux événement.*

1– *On dit x est concurrent à y et on note $x \leftrightarrow y$ si et seulement si*

x et y ne sont pas en conflit et sont incomparable pour $\leq$.

$$x \leftrightarrow y \Longleftrightarrow non\ (x \# y \ ou\ x \leq y \ ou\ y \leq x).$$

2– *On dit que x et y sont en conflit immédiat et on note*

$$x \#_1 y \Longleftrightarrow (x \# y \ et\ z \leq x \ et\ z \neq x \Longrightarrow non\ (z \# y)).$$

Si on note $\uparrow x = \{y \in E\ /x \leq y\}$, $\downarrow x = \{y \in E\ /y \leq x\}$

les remarques 1, 2 et 3

$x \# y \Longrightarrow (\uparrow x \cap \uparrow y = \varnothing$ *et* $y \notin \downarrow x$ *et* $x \notin \downarrow y)$.

Définition 4.1.6 *Soit* $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements.*

(i) $(E, \leq, \#)$ *est dite finitaire ssi le passé de tout élément est fini*:

$\forall x \in E\ card\ (\downarrow x) = card\ (\{f \in E \backslash f < x\}) < \infty$

(ii) *Un sous–ensemble* C *de* E *est dit sans conflit ssi*:

$\forall x, f \in E$; *non* $(x \# f\ )$

(iii) Le sous–ensemble C est clos dans le passé ssi :

$\forall x \in C; \downarrow x \subset C.$

(iv) On appelle configuration de $(E, \leq, \#)$ tout $A \subseteq E$

(A configuration $\Longleftrightarrow (\forall x, y \in A$ *non* $(x \# y)$ et $\downarrow x \subseteq A\ \forall x \in A)$.

Proposition 4.1.1 *– Si* $(E, \leq, \#)$ *est une structure d'événements et* x *un élément de* E*, alors le passé de* x *est une configuration.*

– Toute configuration est réuion du passé de ses élément.

Démonstration. Soit x un élément de la structure d'événements $(E, \leq, \#)$; le passé de x, $\downarrow x$, est clairement clos dans le passé.

Il est également sans conflit; en effet, si g et f étaient dans $\downarrow x$ avec $g \# f$, alors on aurait : ($g < x$ et $g \# f$ d'ou $f \# x$) puis ($f < x$ et $f \# x$ donc $x \# x$) ce qui est absurde puisque la relation de conflit est irréflexive.

Donc $\downarrow x$ est une configuration de $(E, \leq, \#)$ et x un élément de C.

Puisque C est close dans le passé, le passé de x est inclus dans C, et on a bien

$$C = \bigcup_{x \in C} (\downarrow x)$$

■

4.2 Etiquetage agréable

Définition 4.2.1 $(E, \leq, \#, e, A)$ *une structure d'événement étiqueteé l'etiquetage* (e, A) *est dit agréable ssi* $(\forall x \in E, \forall y \in E, x \#_I y \text{ ou } x \leftrightarrow y) \Longrightarrow e(x) \neq e(y)$.

(c-a-d les événement qui sont en conflit immédiat, ou qui sont concurrent nont jamais la même étiquete) si on note $x//y$ *si* $(x \#_I y \text{ ou } x \leftrightarrow y)$.

– On appelleé bloc d'événement toute partie de E *dont les élément sont deux à deux en conflit immédiat ou concurrent.*

$F \subseteq E$, F *bloc d'événements*$\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in F, \forall y \in F; x//y)$ *et en fin le degré d'une structure d'evénements* $(E, \leq, \#)$ *est le sup des cardinaux des bloc d'événements de*

$(E, \leq, \#)$dans $N \cup \{\infty\}$, $D\ (E, \leq, \#) = Sup\{|B \mid /B$ est un bloc d'événement dans $(E, \leq, \#)\}$.

Remarque 4.2.1 *Soit* $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements, tout bloc d'événements est une partie d'un antichaine de* $(E, \leq)$.

Exemple 4.2.1 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\} \subseteq \mathbb{N}$

On défini sur E *les deux relation* $\leq$ *et* $\#$ *par* $x \leq y \Longleftrightarrow x$ *divise* y.

$x \# y \Longleftrightarrow x$ *et* y *n'ont pas de multiple commun dans* E

$(E, \leq, \#)$ *est une structure d'événement. Pour les conflit on a*:

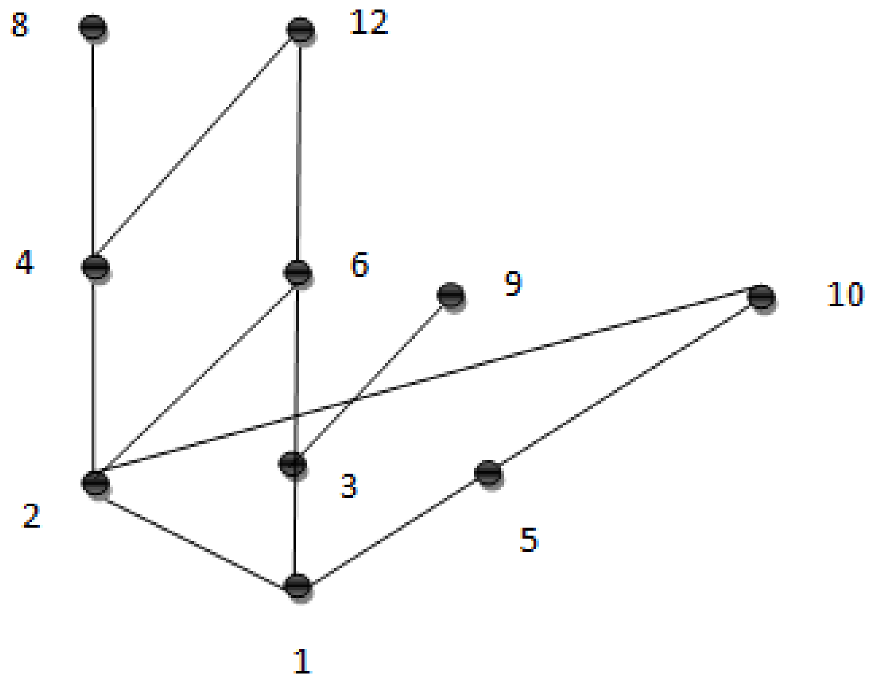
$3 \# 5$, $3 \# 10$, $3 \# 8$, $5 \# 4$, $5 \# 6$, $5 \# 9$, $5 \# 8$, $5 \# 12$, $4 \# 10$,

$4 \# 9$, $6 \# 10$, $6 \# 9$, $10 \# 8$, $10 \# 12$, $9 \# 8$ *et* $9 \# 12$.

La structure d'événements $(E, \leq, \#)$ *est de degré* 3 *(*$\{2, 5, 9\}$

est une bloc d'evénements et toute autre bloc est de cardinal inférieur ou égal à 3*).*

$\{4, 5, 6, 9\}$ *est un antichaine mais pas une classe car* $5 \# 6$ *et le conflit n'est pas immédiat,* $\{4, 5, 9\}$ *est un bloc.*



$3 \#_I 5, 2 \#_I 9, 5 \#_I 4.$

Preuve. Le probléme de l'etiquetage agréable est directement lie au théorémes classiques des ordres. ■

Théorème 4.2.1 *(Théorème de Dillworth)*

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonnée, le nombre minimum de chaines deux a deux disjointes

recouvrant l'ensemble E est égal ou maximum fini de la taille des antichaine de $(E, \leq)$.

Dans une structure d'événement $(E, \leq, \#)$, si on a un etiquetage agréable les événement qui sont dans un ordre temporelle forcé peuvent avoir la méme étiquete.

Autrement dit la donné d'un étiquetage agréable revient à la donné d'un recouverement de la structure par des chaines deux à deux disjointes.

Remarque 4.2.2 *Toute structure d'événement sans conflit de degré n admet un étiquetage fini sur un alphabet de n lettres.*

Preuve. Si $(E, \leq, \#)$ est une structure d'événements sans conflit; les bloc d'événement sont exactement les antichaine de $(E, \leq)$, $D\ (E, \leq, \#) = n$ donc la taille maximal

des antichaine est n d'apres dilworth $(E, \leq)$ peut être recouvert par n chaine $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, $C_i \bigcap\limits_{i \neq j} C_j = \varnothing$, C_i des chaines de $(E, \leq)$.

Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $e\colon E \longrightarrow A$ l'application définie par: $e\ (x) = a_i\ \forall x \in C_i$ (e, A) est un étiquetage agréable de $(E, \leq, \#)$. ■

Remarque 4.2.3 $(E, \leq, \#)$ *une structure d'événements si la taille maximal des antichaine de* $(E, \leq)$ *est un nombre fini* n*; alors* $(E, \ \leq, \#)$ *admet un etiquetage agréable à l'aide d'un alphabet de* n *lettres.*

Preuve. D'aprés Dillworth E admet un recouvrement par n chaines deux à deux disjointes, et on étiquette agréablement la structure d'événements $(E, \leq, \#)$ comme dans la remarque 4.2.3. ■

Ces étiquetages agréables ne sont pas nécessairement minimaux même si toutes les antichaines sont finies, et le degré de la structure $(E, \leq, \#)$ est fini; l'existence d'un étiquetage agréable n'est pas assuré B.ROZOY[9] formule les conjectures suivantes:

Conjecture 4.2.1 *Si* $(E, \leq, \#)$ *est une structure d'événements finitaire de degré* n *alors*:

1) $(E, \leq, \#)$ *admet un étiquetage agréable sur un alphabet de* n *lettres au plus.*

2) $(E, \leq, \#)$ *admet un étiquetage agréable sur un alphabet* A *dont le cardinal est bornée par un polynome en* n.

3) $(E, \leq, \#)$ *admet un étiquetage agréable sur un alphabet* A *fini.*

Pour $n = 0; E = \varnothing$.

On prend $A = \varnothing$ *et* e *est l' unique application de* $\varnothing$ *dans* $\varnothing$ $(e : \varnothing \longrightarrow \varnothing); (e, A)$ *est un étiquetage agréable de* $(E, \leq, \#)$.

Pour $n = 1; (E, \leq)$ *est une chaine.*

On prend $A = \{a\}$ *et* e *est l'application de* E *dans* A*définie par:* $\forall x \in E; e\ (x) = a; (e,\ A)$ *est clairement un étiquetage agréable de* $(E, \leq, \#)$.

Pour $n = 2$ *B.Rozoy* [9] *à démontrer le résultat suivant*:

Proposition 4.2.1 *Toute structure d'événements finitaire de degré 2 admet un étiquetage agréable sur un alphabet à deux éléments.*

La conjecture forte de l'étiquetage agréable est fausse pour $n \geq 3$; le contre exemple suivant (FIG.4.1) donné par J-M.Brochet la met en défaut.

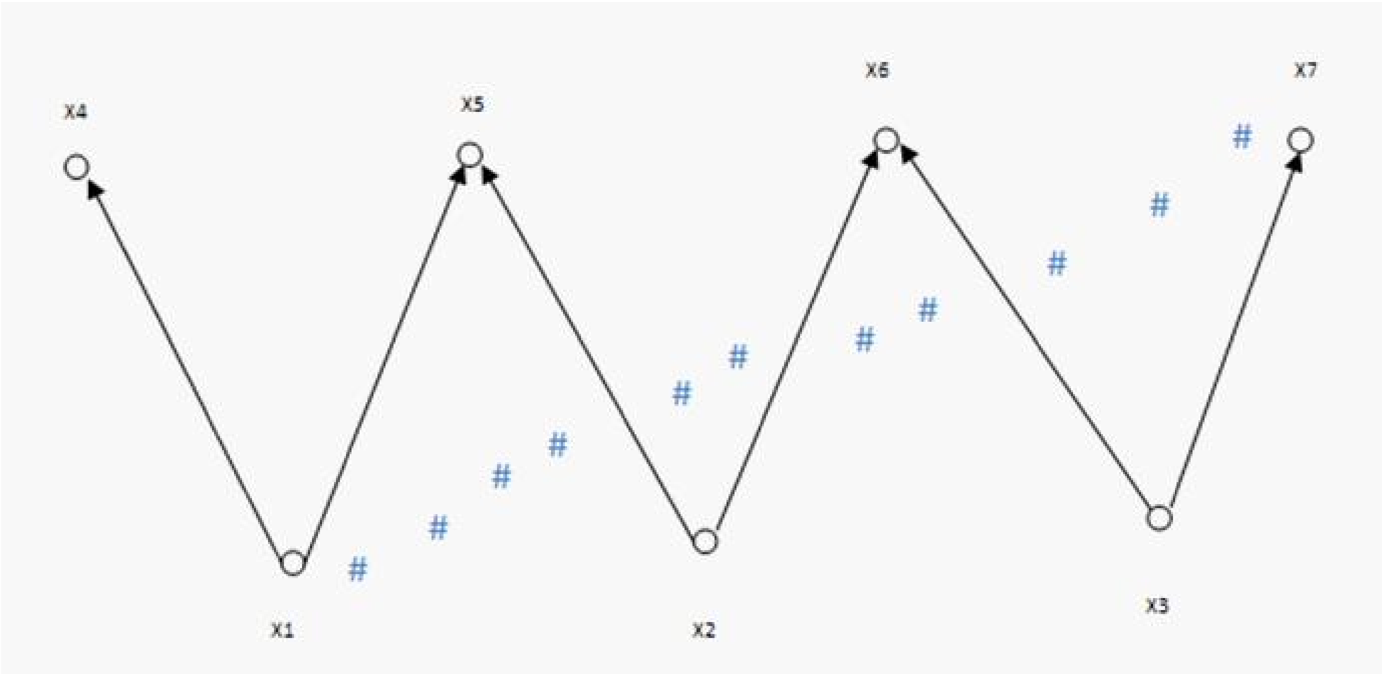


FIG.4.1

$E = \{x_1, x_2, . . . , x_7\}$ est l'ensemble des événements, on prand le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ sur lequel on représente les conflits immédiat de la structure d'événe"ments $(E, \leq, \#)$, (# # # # # # indique le seul conflit une imediat).

Il y a un seul conflit immédiat $x_1 \#_I x_7$ (représenté par les # # # # sur le diagramme), ce qui donne obligatoirement les deux conflits non immédiat $x_4 \# x_7$ et $x_5 \# x_7$.

$x_1 \#_I x_7$, $x_4 \# x_7$, $x_5 \# x_7$ sont tous les conflits de cette structure d'événements.

La taille maximum des blocs est 3 ($\{x_1, x_2, x_3\}$ est une bloc, et il n'ya aucune classe d'événement contenant 4 éléments) alors que tout étiquetage agréable doit avoir au moins quatre lettres : en effet supposons qu'on a un étiquetage (e, A) agréable sur un alphabet A de 3 lettres $A = \{a, b, c\}$.

Les événements x_1, $x_2$et $x_3$sont dans la même classe donc doivent avoir des étiquettes distinctes disons: $e\ (x_1) = a$, $e\ (x_2) = b$ et $e\ (x_3) = c$.

Maintenant si on cherche à étiqueter les autres événements de la structure; x_4 ne peut pas être étiqueter par les lettres b ou c ($\{x_2, x_4\}$ et $\{x_3, x_4\}$sont des blocs) donc $e\ (x_4) = a$, et on ne peut pas étiqueter x_5 par a ou c ($\{x_4, x_5\}$ et $\{x_3, x_5\}$ sont des blocs) donc $e\ (x_5) = b$, de même on est contraint d'étiqueter l'événement x_6 par l'étiquette c (les blocs $\{x_4, x_6\}$ et $\{x_5, x_6\}$ interdisent les étiquettes a et b) mais x_7 ne peut être étiqueté par aucune des 3 étiquettes ($\{x_1, x_7\}$, $\{x_2, x_7\}$ et $\{x_6, x_7\}$ sont des blocs).

Ce qui montre que tout étiquetage agréable de cette structure d'événements doit avoir au mois 4 lettres et le degré de la structure est 3.

Le contre exemple précédant s'étend aux structures d'événements (finies ou infinies finitaires) de degré n.

Conclusion génerale

Les théorie des treillis et algébre de boole dans leur histoire sont liées aux problémes de représentations et algorithmes, l'algébre de boole de son départ c'etait la recherche d'un algorithme permettant la traduction des raisonnements logique à des calculs purement algébrique.

Dans ce travail la premiére constatation qui puisse être tirée est que les ensembles ordonnés, les treillis et l'algebre de bool est un outille convenable pour l'étude et le développement des différentes représentation de fonctionnement des systémes.

Par ailleur comme le fonctionnement d'un même systéme peut être représenter par plusieurs façons (i.e ils désignent tous le même objet).

Il y a la question de réaliser des isomorphisme entre les différentes représentations de fonctionnement d'un systéme vue comme ensembles ordonnés treillis ou algébre de boole (anneau de boole).

Bibliographie

[1] **A.G. KUROSH.** Algébre générale**. DUNOD Paris 1967.**

[2] D. PONASSE, J-C CARRAGA Algébre et Topologie Booléennes**.** MASSON Paris 1979.

[3] N.BOURBAKI. Eléments De Mathématique. HERMANN**,** Paris 1970.

[4] Claude. Mutafian. Le défi Algébrique. LibrairieTomel Paris.1975

[5] J.Jayez. Cours Introduction à la logique classique les treillis.2008-2009.

[6] A.BELHADJ, Génération de treillis et propriétés**,** Mémoire de magistére, université Tizi-ouzou, ALGERIE.2011.

[7] Michel QUEYSANNE. ALGEBRE. Librairie Armand Clin 1964.

[8] B.Monjardet. La Construction des notions d'ordre et de treillis, Journées APMEP, La Rochelle 25-27 octobre 2008.

[9] **B.Rozoy,** Un modéle de parallésme le monoide distribué**,** Laboratoire d'informatique université de caen 1987.