UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionelle

Par : BEN SAADIA Amel

Thème

Étude de la stabilité des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients périodiques

Soutenu publiquement le : 31/05/2017

Devant le jury composé de :

Dr. ACILA . Mustafa	M.C. B. UKMO université-Ouargla	Président
Dr. GUERFI . Amara	M.C. A. UKMO université-Ouargla	Examinateur
Dr. SAID . Mohamed .Said	M.C. A. UKMO université-Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

À mes parents.

À tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENT

Je remercie Allah avant tout car à lui seul revient les louanges.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, Dr.SAID.M.Said,

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres

du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

Table des matières

Introduction **5**

1 Rappels et notions fondamentales **1**

1.1 Existence et unicité 1

1.1.1 Le problème de Cauchy 1

1.1.2 Théorème Cauchy Lipschitz 2

1.2 Systèmes différentiels linéaires 4

1.2.1 Étude de $y'(t) = Ay(t)$ 5

1.2.2 Matrice fondamentale de solutions 10

1.3 Théorie du Floquet sur $\mathbb{R}^n$ 15

2 Notion de stabilité **24**

2.1 Cas l'équation différentielle ordinaire 24

2.2 Cas d'une système d'équations différenties linéaires 29

2.3 Problèmes bien et mal posés 34

2.3.1 Exemples de problèmes mal posés 35

3 Étudie de stabilité **36**

3.1 Stabilité de solution nulle du système $y'(t) = Ay(t)$ 36

3.1.1 Cas linéaire 36
3.1.2 Cas non linéaire 39
3.2 La stabilité solutions d'un système d'équations
différentielle à coefficients périodiques 46

NOTATIONS

- ➤ $\mathbb{R}$ Corps des réels
- ➤ I un intervalle de $\mathbb{R}$
- ➤ U ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$
- ➤ D l'ensemble de U
- ➤ $(L > 0)$ constant de Lipschitz
- ➤ $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice identité
- ➤ $|.|$ Norme euclidienne sur $\mathbb{R}$
- ➤ tr trace matrice $n \times n$ est total élément diagonale la matrice
- ➤ det détermine matrice $n \times n$
- ➤ $\phi(t)$ matrice fondamental
- ➤ $\phi_i(t), \quad i = 1, ..., n$ la solution l'équation différentielle matricielle
- ➤ $A(t)$ matrice non autonome
- ➤ A matrice autonome
- ➤ $A(t + \omega)$ matrice périodiques de période ω
- ➤ $\phi(\omega)$ une matrice monodromie
- ➤ J le Jordan canonique
- ➤ $\mu_i \quad i = 1, ..., n$ multiplicateurs Floquet
- ➤ $\mathbb{C}^n$ Corps des complexes

- (λ_0, x_0) une paire propres de la matrice A
- φ, ψ les deux solutions du problème de Cauchy
- $[t_0, \infty)$ intervalle définie la solution
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de dimension $n \times n$
- $C(I)$ Ensemble des fonctions continues sur I
- $C^1(I)$ Ensemble des fonctions continûment différentiablement sur I
- Δ Laplacien
- $(a_{ij})_{i,j=,..,n}$ coefficient la matrice
- $P_n(\lambda)$ une polynôme de degré n
- $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ solution du polynôme caractéristique $P_n(\lambda)$
- $Re\lambda_k, \quad 1 \leq k \leq n$ partie réelle de les valeurs propres
- H matrice Hurwitz
- $\Delta_i, i = 1, ..., n$ les mineurs diagonaux principaux de la matrice H_n
- V fonction de Lyapunov
- $\langle , \rangle$ produit scalaire
- ∂ la partielle dérivée
- $grad$ gradient est total la partiale dérivée
- l_φ l'orbite du solution
- B matrice non singulière
- $\rho_i, \quad i = 1, ..., n$ les valeurs propres de la matrice B

Introduction

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques, dans ce mémoire notre étude se focalise sur la stabilité des solutions des équations différentielles et des systèmes différentiel, l'étude c'est ensuite élargie ; à la stabilité au sens de Liapounov des solutions périodiques des équations différentielles et des systèmes différentiels. Ce mémoire se compose de trois chapitres principaux.

Dans **le chapitre 1**, en un premier temps nous introduisons les théorèmes d'existence et d'unicité liés aux non autonomes et aussi nous étudions le système d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{R}$:

$$y^{'}(t) = A(t)y(t) + f(t) \tag{1}$$

où la $n \times n$-matrice $A(t)$, et $y(t)$ est vecteur et $f(t)$ est fonction vectorielle de $\mathbb{R}^n$. De plus, nous étudions le système d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants :

$$y^{'}(t) = Ay(t) \tag{2}$$

Nous établissons la forme générale de toutes les solutions en utilisant la matrice fondamentale, composée de n solutions indépendantes. Dans ce dernier chapitre nous étudions le théorème Floquet. Nous considérons le système Floquet suivant :

$$y^{'}(t) = A(t)y(t) \tag{3}$$

où, la $n \times n$-matrice $A(t)$ est continue et périodique de période ω.
Dans lequel nous montrons que le système de Floquet est étroitement lié à un système linéaire avec des coefficients constants. Nous montrons l'importance des multiplicateurs de Floquet par rapport nous introduisons quelque théorèmes fondamentaux et quelques exemples

Dans **le chapitre 2**, on exhibe les notions générales et les outils mathématiques qui permettent de distinguer la stabilité au sens de Lyapunov dans le cas stable et asymptotique stable et dans le cas du temps fini. Nous décrivons entre autre les résultats théoriques de stabilité associés aux équation différentielle ordinaires et systèmes différentiels . Nous introduisons des exemples simples pour clarifier quelques résultats. Comme le montre le sujet de ce mémoire, et aussi dans sa dernière partie, détaille la notion problème bien posé et nous introduisons quelques exemples pour illustration.

Le chapitre 3, est consacré à l' étude de la stabilité, on utilisera des résultats qui obtenons dans chapitre 2 sur la notion la stabilité. Pour étudier la stabilité de la solution nulle dans le cas, linéaire dépendent du signe des mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz Dans as cas plus difficile on dire trouver une solution de polynôme caractéristique. Pour le cas non linéaire dépendent de la fonction Lyapunov arbitraire mais non stable Cela ne signifie pas que ceci la fonction que nous avons choisi pour démontrer la stabilité ne convient pas pour elle, et nous devons choisir d'autres à cet effet. En d'autres termes, nous ne pouvons pas de manière à Lyapunov démontrer que l'instabilité du système, mais ce que nous pouvons démontrer la stable des systèmes différentiels homogènes à coefficient constant et aussi d'étudier la stabilité de la solution d'une système d'équations différentielle à coefficients périodiques qui c'est l'objet du mémoire qui est dépendent des signes des valeurs propres de matrice de monodromie .

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans toute ce mémoire on note $C(I)$ l'espace des fonctions définies et continues sur I.

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques définitions et résultats utiles pour la suite de ce mémoire.

1.1 Existence et unicité

1.1.1 Le problème de Cauchy

On consider l'équation différentielle ordinaire

$$y^{'} = f(x, y)$$

où f est une application définie sur un ouvert $U \subset I \times \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On dit que y est solution de cette équation différentielle sur I si y vérifie la relation précédente pour tout x de I.

Exemple 1.1.1 *On considére l'équation différentielle de la forme :*

$$y^{'} = 1$$

a des solutions définies dans $\mathbb{R}$ *de forme*

$$y(x) = x + c,$$

avec c est une constante arbitraire.
En général, une équation différentielle ordinaire a une infinité de solutions.

Etant donné $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$, on appelle problème de Cauchy, le système suivant :

$$\begin{cases} y^{'} = & f(x,y) \\ y(x_0) = & y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.1 *Si le problème (1.1) admet une solution unique, celle ci est notée par* $y = y(.; x_0, y_0)$

Exemple 1.1.2 *On considére le problème à valeur initiale suivant :*

$$y^{'} = y; \quad y(x_0) = y_0 \quad \textit{a une solution}$$

sa solution est :

$$y(x) = y_0 e^{x-x_0},$$

et cette solution est unique.

1.1.2 Théorème Cauchy Lipschitz

Pour le problème de Cauchy (1.1)
On a le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 1.1.2 *Si f est continue sur l'ensemble D suivant :*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n / |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset U$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur lequel la fonction vectorielle f est définie, a, b deux constantes positives strictement et si f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à y c'est à dire $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ (L une constante strictement positive ($L > 0$) qui s'appelle constante de Lipschitz). Alors il existe une solution est une seule y définie sur un intervalle fermé $T = [x_0 - d, x_0 + d] \quad d \leq a$, d problème de Cauchy (1.1).
Donc si le conditions de théorème d'existence et d'unicité sait satisfaites. Alors le problème (1.1) admet une solution et une seule y définie sur $T = [x_0 - d, x_0 + d]$

Remarque 1.1.3 *Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont suffisantes, elles ne sont pas nécessaires c'est à dire :*
f continu sur D et vérifie la condition de Lipschitz $\Longrightarrow$ le problème (1.1) admet une solution et une seule y défini sur T, la réciproque fausse.

Exemple 1.1.3 *On considére le problème différentiel suivant*

$$\begin{cases} y' = & |y| \\ y(a) = & y_0, \end{cases}$$

il est clair que $y' = f(x, y) = |y|$ est continue sur toute $\mathbb{R}$, il est clair aussi f est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, car $|f(x, y) - f(x, z)| = ||y| - |z|| \leq |y - z|$ alors f est Lipschitzienne de donc d'après le théorème d'existence et d'unicité il existe une solution unique de $y' = |y|$ qui vérifie $y(a) = y_0$.
On remarque que $f(x, y) = |y|$ n'est pas dérivable sur toute voisinage de 0, mais elle vérifie les conditions de Lipschitz.

1.2 Systèmes différentiels linéaires

Considérons le système de n équations différentielles linéaires de n variables :

$$\left\{\begin{array}{rl} y_1^{'} = & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(t). \\ y_2^{'} = & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(t). \\ & \cdots \\ y_n^{'} = & a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(t). \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Ce système peut être écrit comme équation différentielle vectorielle sous la forme :

$$y^{'} = A(t)y + f(t)$$

où $y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $y^{'} := \begin{bmatrix} y_1^{'}(t) \\ y_2^{'}(t) \\ \vdots \\ y_n^{'}(t) \end{bmatrix}$, $A(t) := \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$, et $f(t) := \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$

Si la condition initiale est donnée par $y(a) = y_0$, alors nous avons le problème du Cauchy. Tout d'abord, nous aimerions donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de la valeur initiale. Le lecteur peut voir la démonstration de ce théorème pour un cas général dans le théorème(1.1.2).

Théorème 1.2.1 *Supposons que la $n\times n$-matrice $A(t)$ et les k vecteurs $f(t)$ sont continus pour $t \geq 0$, alors le problème du Cauchy est :*

$$\left\{\begin{array}{rl} y^{'}(t) = & A(t)y(t) + f(t) \\ y(0) = & y_0, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

a une solution unique.

Nous considérons d'abord l'équation homogène sur $\mathbb{R}^n$:

$$y^{'}(t) = A(t)y(t). \tag{1.4}$$

Avant de donner la forme générale de la solution, nous aimerions donner quelques définitions.

Définition 1.2.2 *On dit que les k vecteurs $v_1, v_2, ..., v_k$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ si*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = 0$$

implique que

$$c_1 = c_2 = ... = c_k = 0.$$

Définition 1.2.3 *On dit que k vecteur $f_1, f_2, ..., f_k$ sont des vecteurs linéairement dépendants d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$ s'il y a des constantes $c_1, c_2, ..., c_k$, pas toutes nulles telle que*

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_k f_k(t)$$

pour toute $t \in I$. Sinon, nous disons que k-fonctions sont linéairement indépendante .

Nous allons commencer à travailler sur l'équation différentielle homogène (1.4) nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2.4 ***(Voir [15] Théorème 2.11)*** *L'équation différentielle linéaire (1.4) a (au plus) n solutions linéairement indépendantes, et si $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ sont n solutions indépendantes linéairement, alors*

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + ... + c_n\phi_n(t),$$

où $c_1, c_2, ..., c_n$ sont des constantes, est une solution générale

1.2.1 Étude de $y'(t) = Ay(t)$

Nous résoudrons d'abord l'équation différentielle autonome (1.4), lorsque $A(t) = A$ est indépendant de t.

Théorème 1.2.5 *[3] Si (λ_0, x_0) est une paire propres de la matrice A, alors*

$$y(t) = e^{\lambda_0 t} x_0,$$

définit une solution de

$$y'(t) = Ay(t) \tag{1.5}$$

sur $\mathbb{R}$.
Paire propres c'est-à-dire valeur propre et vecteur propre associé.

Preuve. Soient

$$y(t) = e^{\lambda_0 t} x_0$$

alors

$$\begin{aligned} y(t) =& \lambda_0 e^{\lambda_0 t} x_0 \\ =& e^{\lambda_0 t} \lambda_0 x_0 \\ =& e^{\lambda_0 t} A x_0 \\ =& A y(t), \end{aligned}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. ■

Exemple 1.2.1 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y^{'} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} y$$

On détermine les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

puis on cherche toutes les racines λ *du polynôme caractéristique de la matrice* A *:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ =& -(5-\lambda)(4+\lambda) + 18 \\ =& \lambda^2 - \lambda - 2 \\ =& (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \end{aligned}$$

d'où les valeurs propres de A *soit :* $\lambda_1 = -1$ *et* $\lambda_2 = 2$.

Après on détermine les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda_1 = -1$

$$(A + I) y_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{'} \\ y_{''} \end{bmatrix} = 0$$

Le système est équivalent à : $6y\prime - 3y\prime\prime = 0$

Choix d'un vecteur propre : $6y\prime = 3y\prime\prime$ *donc* $y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

de la même maniéré pour $\lambda_2 = 2$ *le vecteur propre associé est* $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Par théorème (3.1.4) La fonction vectorielle ϕ_1, υ_2 *défini par :*

$$\phi_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \phi_2(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sont des solutions sur $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions vectorielles ϕ_1, ϕ_2 sont indépendants linéairement sur $\mathbb{R}$, Une solution générale y est donnée par

$$y(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre l'équation différentielle non autonome (1.4) (où $A(t)$ est variable), on définit l'équation différentielle matricielle :

$$X^{'}(t) = A(t)X(t), \tag{1.6}$$

où

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

Le théorème suivant donne une relation entre l'équation différentielle vectorielle (1.4) et l'équation différentielle matricielle (1.6).

Théorème 1.2.6 *[4] Suppose que la* $n \times n$*-matrice* $A(t)$ *est continue sur un intervalle* I *et supposons que* ϕ *est définie par*

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t) \end{bmatrix}$$

sont des $n \times n$*-matrice. Alors* $\phi(t)$ *est solution l'équation différentielle matricielle (1.6) sur* I *si et seulement si chaque colonne* $\phi_i(t)$ *est une solution de l'équation différentielle* *vectorielle (1.4) sur I. De plus, si $\phi(t)$ est solution l'équation différentielle matricielle (1.6) alors pour toute c un $n \times 1$-vecteur constant*

$$y(t) = \phi(t)c$$

est une solution de l'équation différentielle vectorielle (1.4)

Preuve. On défini :

$$\phi(t) := \begin{bmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t)\end{bmatrix}$$

et supposons que $\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)$ sont la solution de (1.4). Alors ϕ est une fonction matricielle continument différentiable sur I et on a :

$$\begin{aligned}\phi^{'}(t) &= \begin{bmatrix}\phi_1'(t) & \phi_2'(t) & \cdots & \phi_n'(t)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}A(t)\phi_1(t) & A(t)\phi_2(t) & \cdots & A(t)\phi_n(t)\end{bmatrix} \\ &= A(t)\begin{bmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t)\end{bmatrix} \\ &= A(t)\phi(t),\end{aligned}$$

pour $t \in I$ Ainsi, ϕ est une solution de l'équation différentielle matricielle (1.6)

Maintenant, soit

$$y(t) := \phi(t)c, \quad \text{pour} \quad t \in I,$$

avec c est un $n \times 1$-vecteur constant et ϕ est une solution de l'équation différentielle matricielle (1.6). Alors

$$\begin{aligned}y^{'}(t) &= \phi^{'}(t)c \\ &= A(t)\phi(t)c \\ &= A(t)y(t)\end{aligned}$$

pour $t \in I$. ■

D'après le théorème ci-dessus, nous avons un résultat direct :

Corollaire 1.2.7 *Soit la $n \times n$-matrice $A(t)$ sont continue sur un intervalle I. Alors le problème de la valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} X^{'}(t) = & A(t)X(t), \\ X(t_0) = & X_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

avec $t_0 \in I$ *et* X_0 *est la* $n \times n$*-matrice constante, a une solution* X *unique qui est une solution définie sur tout l'intervalle* I.

Le théorème suivant présente la relation entre les déterminants et solution d'une équation différentielle matricielle.

Théorème 1.2.8 ***(Théorème de Liouville, voir [15] Théorème 2.23)***

On suppose qu'il ya n *des solutions* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *de l'équation (1.4) sur* I *et* ϕ *est la fonction matricielle avec des colonnes* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$*. Alors si* $t_0 \in I$,

$$\det \phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]ds} \det \phi(t_0)$$

avec

$$tr[A(s)] = a_{11}(t) + a_{22}(t) + ... + a_{nn}(t)$$

et $t \in I$.

Du théorème ci-dessus, nous voyons que $\det \phi(t) = 0$ pour toute $t \in I$ si et seulement si $\det(t_0) = 0$. Par conséquent, nous pouvons conclure sur l'état des solutions de l'équation matricielle comme suit :

Corollaire 1.2.9 *[5] Supposons que* ϕ *est la fonction matricielle avec les colonnes* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *et supposons que* $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *sont* n *des solutions de l'équation (1.4). Alors :*

(a) Les solutions $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *sont linéairement dépendants sur* I *si et seulement si*

$$\det \phi(t) = 0 \quad pour \quad t \in I$$

(b) Les solutions $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ *sont linéairement indépendants sur* I *si et seulement si*

$$\det \phi(t) \neq 0 \quad pour \quad t \in I$$

Puisque chaque équation différentielle linéaire (1.4) sur $\mathbb{R}^n$ a n solutions indépendantes, nous souhaitons les appeler «fondamentales» comme dans la définition suivante

1.2.2 Matrice fondamentale de solutions

Définition 1.2.10 *[6] Si la $n \times n$-matrice ϕ est une solution de l'équation matricielle (1.4) sur I et $\phi_1(t), \phi_2(t), ..., \phi_n(t)$ sont linéairement indépendants sur I de sorte que* $\det(t) \neq 0$, *alors*

$$\phi(t) := \begin{bmatrix}\phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t)\end{bmatrix}$$

est appelée matrice fondamentale.

Exemple 1.2.2 *Trouver une matrice fondamentale ϕ pour*

$$y^{'} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} y \tag{1.8}$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0,$$

et les paires propres sont

$$-3, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et

$$4, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

D'où les fonctions vectorielles ϕ_1, ϕ_2 défini par

$$\phi_1(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad et \quad \phi_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ sont une solution de (1.8). Il suit du théorème (1.2.5) que la fonction matricielle ϕ définie par

$$\phi(t) = \begin{bmatrix}\phi_1(t), \phi_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix},$$

pour $t \in \mathbb{R}$ est une solution matricielle de l'équation matricielle correspondante à (1.6). Donc

$$\det(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} = 7e^{t} \neq 0,$$

pour toute $t \in \mathbb{R}, \phi$ *Est une matrice fondamentale de (1.6) sur* $\mathbb{R}$. *Par le théorème (1.2.6) la solution générale* y *de (1.6) est donné par*

$$y(t) = \phi(t)c = \begin{bmatrix} 3e^{-3t} & e^{4t} \\ -e^{-3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} c,$$

pour $t \in \mathbb{R}$, *avec* c *est un* 2×1*-vecteur constant arbitraire.*

Théorème 1.2.11 *[7] Si* ϕ *est une matrice fondamentale pour (1.6), alors* $\psi = \phi.C$, *avec* C *est une matrice constante arbitraire non singulière, est une matrice fondamentale générale pour (1.6).*

Preuve. [8] Supposons que ϕ est une matrice fondamentale pour (1.6) et soit

$$\psi = \phi.C$$

avec C est une matrice constante arbitraire non singulière. Alors on a

$$\begin{aligned} \psi' &= \phi'(t).C \\ &= A(t)\phi(t)C \\ &= A(t)\psi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi = \phi.C$ est une solution de matrice pour (1.6). De plus,

$$\begin{aligned} \det[\psi(t)] &= \det[\phi(t)C] \\ &= \det[\phi(t)] \det[C] \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

pour $t \in I$. Donc ψ est une matrice fondamentale.

De plus, pour montrer que toute matrice fondamentale ψ est de la forme $\psi(t) = \phi(t)C_0$, supposer que ψ est une matrice fondamentale arbitraire mais fixe de (1.6).

Soit $t_0 \in I$ et soit

$$C_0 := \phi^{-1}(t_0)\psi(t_0).$$

Alors C_0 est une matrice constante non singulière et

$$\psi(t_0) = \phi(t_0)C_0.$$

Donc, les deux $\psi(t)$ et $\phi(t)C$ sont des solutions de le problème de la valeur initiale suivant

$$\begin{cases} X' = & A(t)X, \\ X(t_0) = & \psi_0. \end{cases}$$

Par corollaire (1.2.7), on a

$$\psi(t) = \phi(t)C_0,$$

pour $t \in I$. ■

Maintenant, nous essayons de trouver la matrice fondamentale pour l'équation différentielle (1.6). D'abord, nous considérons le cas autonome, où $A(t) = A$.

Définition 1.2.12 *Supposons que A est la $n \times n$-matrice constante. Alors, la fonction exponentielle matricielle définie par e^{At} est la solution de*

$$\begin{cases} X' = & AX, \\ X(0) = & I, \end{cases} \tag{1.10}$$

avec la $n \times n$-matrice d'identité I.

Par le théorème de Liouville, $\det[e^{At}] = e^{\int_0^t tr[A(s)]ds} \det[e^{A.0}] = e^{tr[A]t} \neq 0$. Donc e^{At} est une matrice fondamentale. Dans le théorème suivant, nous donnons certaines propriétés de l'exponentielle de la matrice A.

Théorème 1.2.13 *Soit les $n \times n$- matrices constantes A et B. Alors*

(i) $\frac{d}{dt}e^{At}$*, pour* $t \in \mathbb{R}$ *;*

(ii) $\det[e^{At}] \neq 0$*, pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* e^{At} *est une matrice fondamentale pour (1.5) ;*

(iii) $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$*, pour* $t, s \in \mathbb{R}$ *;*

(iv) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$*, pour* $t \in \mathbb{R}$ *et, en particulier,*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

(v) Si $AB = BA$, alors $e^{At}B = Be^{At}$, pour $t \in \mathbb{R}$ et, en particulier,

$$e^{A}B = Be^{A};$$

(vi) Si $AB = BA$, alors $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$, pour $t \in \mathbb{R}$ et, en particulier,

$$e^{A}e^{B} = e^{(A+B)}$$

(vii) $e^{At} = I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^k\frac{t^k}{k!} + ...$, pour $t \in \mathbb{R}$;

(viii) Si P est une matrice non singulière, alors $e^{PBP^{-1}} = Pe^{-B}P^{-1}$.

Nous pouvons maintenant présenter explicitement la solution d'un problème avec valeurs initiales

Théorème 1.2.14 *Les propositions suivantes sont vraies*

(i) le problème de la valeur initiale suivant

$$\begin{cases} y^{'}(t) = & Ay(t), \\ y(0) = & y_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

a la solution :

$$y(t) = e^{At}y_0.$$

(ii) le problème de la valeur initiale non homogène

$$\begin{cases} y^{'}(t) = & Ay(t) + f(t), \\ y(0) = & y_0, \end{cases} \tag{1.12}$$

a la solution :

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)ds.$$

(iii) Si ϕ est une matrice fondamentale pour (1.6), alors La solution de le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} y^{'}(t) = & Ay(t) + f(t), \\ y(t_0) = & y_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

est donné par

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

D'abord, nous propositions le fait suivant, qui sera utilisé dans la preuve

Lemme 1.2.15 ***([15], Voir théorème 5.21)*** *Supposons que la fonction à valeur vectorielle $f(t,s)$ et la dérivée partielle $f_t(t,s)$ sont continus sur un intervalle $I \times I$ et $a \in I$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t,s)ds = \int_a^t f_t(t,s)ds + f(t,t).$$

Preuve. (Voir théorème 1.2.8)

(i) Soit $y(t) = e^{At}y_0$. Alors :

$$\begin{aligned} y^{'}(t) =& Ae^{At}y_0 \\ =& Ay(t). \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} y(0) =& e^{A0}y_0 \\ =& y_0. \end{aligned}$$

Ainsi $y(t) = e^{At}y_0$ est solution du problème de la valeur initiale (1.11).

(ii) Soit $y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)ds.$. Alors

$$\begin{aligned} y^{'}(t) =& Ae^{At}y_0 + \int_0^t Ae^{A(t-s)}(s)f(s)ds + e^{A(t-t)}f(t) \\ =& Ae^{At}y_0 + \int_0^t Ae^{A(t-s)}(s)f(s)ds + f(t) \\ =& A\left[e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(s)f(s)ds\right] + f(t) \\ =& Ay(t) + f(t). \end{aligned}$$

Ici, nous utilisions le lemme (1.2.15) avec $f(t,s) = e^{A(t-s)}f(s)$. En outre, il n'est pas difficile aussi de voir que $y(0) = y_0$. D'où, $y(t)$ est la solution de (1.12).

(iii) Soit ϕ est une matrice fondamentale et soit

$$y(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
y^{'}(t) =& \phi^{'}(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi^{'}(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds + \phi(t)\phi^{-1}(t)f(t) \\
=& A(t)\phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + A(t)\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds + f(t) \\
=& A(t)\left[\phi(t)\phi^{-1}(t_0)y_0 + \phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds\right] + f(t) \\
=& A(t)y(t) + f(t).
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
y(t_0) =& \phi(t_0)\phi^{-1}(t_0)y_0 \\
=& y_0.
\end{aligned}$$

D'où, $y(t)$ est la solution de (1.13).

■

Dans le cas général, non autonome où $A(t)$ variable, il n'est pas facile de trouver une Matrice fondamentale. Le théorème suivant montre comment peut on trouvée une matrice fondamentale lorsque les matrices $A(t)$ sont commutatives $A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \forall t, \forall s$.

Théorème 1.2.16 *(Voir* ***[15], Théorème 2.42****) Suppose que la $n \times n$-matrice $A(t)$ sont continue sur un intervalle I. Si*

$$A(t)A(s) = A(s)A(t)$$

pour toute $t, s \in I$, alors

$$\phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$$

1.3 Théorie du Floquet sur $\mathbb{R}^n$

La théorie de Floquet est un outil essentiel pour étudier le comportement des solutions des systèmes périodiques définis par le système suivant :

$$y^{'}(t) = A(t)y(t) + f(t), -\infty < t < +\infty, \tag{1.14}$$

où la $n \times n$-matrice $A(t)$ et le n-vecteur $f(t)$ sont continus et périodiques de période ω, c'est-à-dire

$$A(t+\omega) = A(t), f(t+\omega) = f(t) \quad \forall t.$$

D'abord, nous avons un résultat sur l'existence du logarithme d'une matrice

Théorème 1.3.1 *[9](**Logarithme d'une matrice**)*
Si C est la $n \times n$-matrice non singulière alors il y a une matrice B telle que

$$e^B = C.$$

Preuve. [10] Nous allons le prouver par 2×2-matrice. Le cas général peut être prouvé de la même manière. Soit λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de C. Puisque C est non singulière alors $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. On a 3 cas pour prouver le résultat

Cas 1. Supposons que

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Alors, il n'est pas difficile de voir que $C = e^B$, où

$$B = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Cas 2. Supposons que :

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, nous cherchons une matrice B de la forme

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix},$$

telle que $e^B = C$. Pour cette matrice B, nous pouvons calculer que

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{b_1 t} & b_2 t e^{b_1 t} \\ 0 & e^{b_1 t} \end{bmatrix},$$

donc,

$$e^B = \begin{bmatrix} e^{b_1} & b_2 e^{b_1} \\ 0 & e^{b_1} \end{bmatrix}.$$

Nous résolvons maintenant b_1 et b_2 tels que

$$B = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & \frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & \ln \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Cas 3. C est un 2×2-matrice constante inversible arbitraire. Par la matrice de le Jordan canonique, il existe une matrice non singulière P telle que $C = PJP^{-1}$, où

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad ou \quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Dans les deux cas précédents, il existe une matrice B_1 telle que

$$e^{B_1} = J.$$

Soit

$$B := PB_1P^{-1};$$

alors par le théorème (1.2.13) partie $(viii)$; on a :

$$e^B = e^{PB_1P^{-1}} = Pe^{B_1}P^{-1} = C.$$

■

Exemple 1.3.1 *Trouver un logarithme de la matrice*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

L'équation caractéristique pour C est

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Les paires propres de C sont

$$1, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

et

$$5, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

La forme canonique Jordan de C est

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

De la preuve du théorème (1.3.1), on a

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

alors

$$PB_1P^{-1}$$

est un logarithme de C à condition de B_1 est un logarithme de J, Notez que

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix},$$

est un logarithme de J. D'où un logarithme de C est donnée par

$$\begin{aligned} B =& PB_1P^{-1} \\ =& \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ln 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\ln 5 & \frac{1}{4}\ln 5 \\ \frac{3}{4}\ln 5 & \frac{3}{4}\ln 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons maintenant le résultat principal de cette section, appelée Théorème de Floquet, pour le système Floquet

$$y^{'}(t) = A(t)y(t), \tag{1.15}$$

où $A(t+\omega) = A(t)$ pour tout t.

Théorème 1.3.2 *[11] Si ϕ est une matrice fondamentale pour le système de Floquet (1.15) où la matrice $A(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et a une période ω, alors*

1. *La fonction ψ définie par*

$$\psi(t) = \phi(t + \omega),$$

est aussi une matrice fondamentale pour le système de Floquet.

2. *Il existe une matrice B et la $n \times n$-matrice non singulière $\rho(t)$, qui est périodique de période ω telle que*

$$\phi(t) = \rho(t)e^{Bt}$$

pour toute $t \in \mathbb{R}$

Preuve. [12]

1. Supposons que ϕ est une matrice fondamentale de (1.15) et vérifie :

$$\psi(t) = \phi(t + \omega).$$

Nous voulons montrer que c'est aussi une matrice fondamentale.
Donc

$$\begin{aligned}\psi'(t) =& \phi'(t + \omega)\\ =& A(t + \omega)\phi(t + \omega)\\ =& A(t + \omega)\psi(t)\\ =& A(t)\psi(t).\end{aligned}$$

Parce que nous définissons $\psi(t) = \phi(t+\omega)$ et ϕ est une matrice fondamentale, alors $\det \psi = \det \phi(t + \omega) \neq 0$ pour tout t. est aussi une matrice fondamentale (1.15).

2. Puisque ϕ et ψ sont des matrices fondamentales pour (1.15), alors par le théorème (1.2.11) Il existe une matrice constante C telle que

$$\phi(t + \omega) = \phi(t)C$$

et par le théorème (1.3.1) Il existe une matrice B telle que $e^{B\omega} = C$. On définir la matrice ρ par

$$\rho(t) = \phi(t)e^{-Bt}$$

Maintenant, nous voulons prouver que $\rho(t)$ est périodique de période ω. On a

$$\begin{aligned}\rho(t+\omega) =&\phi(t+\omega)e^{-B(t+\omega)}\\ =&\phi(t+\omega)e^{-Bt-B\omega}\\ =&\phi(t).C.e^{-B\omega}.e^{-Bt}\\ =&\phi(t).e^{B\omega}.e^{-B\omega}.e^{-Bt} \quad (\text{parceque} \quad e^{B\omega}=C \quad \text{et} \quad e^{-B\omega}=C^{-1})\\ =&\phi(t)e^{-Bt}\\ =&\rho(t).\end{aligned}$$

D'où, $\rho(t+\omega)=\rho(t)$ et $\rho(t)$ est une matrice périodique. Donc $\rho(t)=\phi(t)e^{-Bt}$ implique que $\phi(t)=\rho(t)e^{Bt}$.

■

On sait que si $\phi(t)$ et une matrice fondamentale pour le système (1.15) alors $\phi(t+\omega)$ est aussi une matrice fondamentale de (1.15). Donc, $\phi(t+\omega)=\phi(t)C$ où C est une matrice constante. Maintenant, si on veut trouver C, soit $t=0$ alors on a

$$\phi(t+\omega)=\phi(0)C$$

alors

$$C=\phi^{-1}(0)\phi(\omega),$$

Définition 1.3.3 *[13] Soit ϕ est une matrice fondamentale pour le système de Floquet (1.15) et $C=\phi^{-1}(0)\phi(\omega)$. Les valeurs propres de C sont appelés multiplicateurs de Floquet. Noter que si nous avons une autre matrice fondamentale pour le système de Floquet (1.15) et*

$$D=\phi^{-1}(0)\phi(\omega),$$

alors toutes les valeurs propres de C être les mêmes que les valeurs propres de D.

Pour voir que, par le théorème (1.2.11), il y a une $n\times n$ matrices non constantes singulières arbitraires, nous allons l'appeler M, tel que

$$\psi(t)=\phi(t)M \quad \textit{pour toute} \quad t\in\mathbb{R}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} D =&\psi^{-1}(0)\psi(\omega) \\ =&(\phi(0)M)^{-1}.\phi(\omega)M \\ =&M^{-1}\phi^{-1}(0).\phi(\omega)M \\ =&M^{-1}CM. \end{aligned}$$

Donc, C et D sont des matrices semblables et ont donc les mêmes valeurs propres. Alors, les multiplicateurs de Floquet sont bien définis.

Exemple 1.3.2 *Trouvez le multiplicateur Floquet pour le système de Floquet*

$$y' = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y. \tag{1.16}$$

D'abord, nous résolvons cette équation pour $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$. A partir de l'équation ci-dessus, nous avons des équations différentielles linéaires pour y_1 et y_2 :

$$y_1' = \left(1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)}\right).y_1$$

et

$$y_2' = y_1 - y_2$$

En résolvant ces équations d'abord pour y_1 et ensuite pour y_2, nous obtenons les solutions générales :

$$\begin{aligned} y_1 =&c_1(t)e^t\left(2+\sin(t)\right) \\ y_2 =&c_1(t)e^t\left(1 + \frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) + c_2(t)e^{-t} \end{aligned}$$

Nous avons deux solutions indépendantes :

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t\left(2+\sin(t)\right) \\ e^t\left(1+\frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{bmatrix}$$

et

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit qu'une matrice fondamentale est

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t\,(2+\sin(t)) & 0 \\ \\ e^t\left(1+\frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$C = \phi^{-1}(0)\phi(2\pi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{2\pi} & 0 \\ \\ \left(\frac{4}{5}\right)e^{2\pi} & e^{-2\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ \\ 0 & e^{-2\pi} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Les multiplicateurs de Floquet sont $\mu_1 = e^{2\pi}$ *et* $\mu_2 = e^{-2\pi}$.

Le théorème suivant indique la propriété d'un multiplicateur de Floquet.

Théorème 1.3.4 *Un nombre μ est un multiplicateur de Floquet du système de Floquet (1.15) si et seulement si il existe une solution non trivial y telle que*

$$y(t+\omega) = \mu y(t).$$

Preuve. $\Longrightarrow$ Supposons que μ est un multiplicateur de Floquet de (1.15) donc μ est une valeur propre de $C = \phi^{-1}(0)\phi(\omega)$ et soit $y_0 \neq 0$ est le vecteur propre associé à μ donc $Cy_0 = \mu y_0$. Définir la fonction vectorielle y par

$$y(t) = \phi(t)y_0,$$

qui est une solution non nulle, alors on a

$$\begin{aligned} y(t+\omega) =& \phi(t+\omega)y_0 \\ =& \phi(t)Cy_0 \\ =& \phi(t)\mu y_0 \\ =& \mu y(t). \end{aligned}$$

Donc

$$y(t+\omega) = \mu y(t).$$

$\Longleftarrow$ On suppose qu'il ya une solution non triviale telle que $y(t+\omega) = \mu y(t)$ pour toute $t \in \mathbb{R}$. Soit ϕ est une matrice fondamentale pour (1.15), alors

$$y(t) = \phi(t)y_0 \tag{1.18}$$

pour un vecteur non nul. Alors

$$\begin{aligned} y(t+\omega) =& \phi(t+\omega)y_0 \\ =& \phi(t)Cy_0. \end{aligned}$$

Donc, de $y(t+\omega) = \mu y(t) = \mu\phi(t)y_0$ on a

$$\phi(t)Cy_0 = \mu\phi(t)y_0.$$

On multiplie les deux membre de l'équation précédente par $\phi^{-1}(t)$, on a

$$\phi^{-1}(t)\phi(t)Cy_0 = \phi^{-1}(t)\mu\phi(t)y_0.$$

ou

$$Cy_0 = \mu y_0.$$

Ainsi, μ est une valeur propre de C et il s'ensuit que μ est un multiplicateur de Floquet de (1.15) $\blacksquare$

Exemple 1.3.3 *Il n'est pas difficile de montrer que*

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t\,(2+\sin(t)) \\ e^t\left(1 + \frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{bmatrix}$$

est une solution du système de Floquet

$$y^{'} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y. \tag{1.19}$$

Notez que

$$\begin{aligned} y(t+2\pi) =& \begin{bmatrix} e^{t+2\pi}\,(2+\sin(t)) \\ e^{t+2\pi}\left(1 + \frac{2\sin(t)-\cos(t)}{5}\right) \end{bmatrix} \\ =& e^{2\pi}y(t). \end{aligned}$$

D'après le théorème (1.3.4), $e^{2\pi}$ est un multiplicateur de Floquet.

Chapitre 2

Notion de stabilité

Ce chapitre est consacre à l'étude de la stabilité de Lyapunov des solutions des équations différentielles ordinaires et des systèmes linéaires.

Rappelons les principales définitions

2.1 Cas l'équation différentielle ordinaire

On considére le système non autonome suivant :

$$y^{'} = f(t, y), \quad y \in \mathbb{C}^n \tag{2.1}$$

tel que les conditions d'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy sont satisfaites dans certains ensembles tel que :

$$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n.$$

et la solution $\varphi(t, t_0, y_0)$ peut être étendue à $[t_0, \infty)$. où

$$\varphi(t_0, t_0, y_0) = y_0.$$

Nous appelons cette solution non perturbée, la solution $\varphi(t, t_0, y_1)$ perturbée, et la différence $y_0 - y_1$ la perturbation.

Définition 2.1.1 *La solution $\varphi(t, t_0, y_0)$ est dire stable au sens Lyapunov si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ telle que la condition*

$$|y_0 - y_1| < \delta$$

implique

$$|\varphi(t, t_0, y_0) - \varphi(t, t_0, y_1)| < \varepsilon$$

pour toute $t \geq t_0$.

Définition 2.1.2 *La solution $\varphi(t, t_0, y_0)$ est uniformément stable si $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

Définition 2.1.3 *La solution $\varphi(t, t_0, y_0)$ est appelé instable si elle n'est pas stable, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ telle que pour toute $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ il existe $y_3 \in \mathbb{C}^n$ satisfaisant la condition*

$$|y_0 - y_3| < \delta$$

et un moment de temps $t_1 \geq t_0$ telle que

$$|\varphi(t, t_0, y_0) - \varphi(t, t_0, y_3)| \geq \varepsilon.$$

Définition 2.1.4 *La solution $\varphi(t, t_0, y_0)$ est dire asymptotiquement stable si*

1. *elle est stable au sens Lyapunov,*

2. *il existe $\delta = \delta(t_0)$ telle que la condition $|y_0 - y_1| < \delta$ implique*

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t, t_0, y_0) - \varphi(t, t_0, y_1)| = 0.$$

Notez que la boule

$$|y_0 - y| < \delta$$

s'appelle le domaine d'attraction de la solution $\varphi(t, t_0, y_0)$

Définition 2.1.5 *L'espace des phases d'un système* $y^{'} = f(t, y)$ *est l'ensemble ouvert* D *où évolue* y.

Définition 2.1.6 *La solution* $\varphi(t, t_0, y_0)$ *est globalement asymptotiquement stable si, dans la définition précédente,* $\delta = \infty$, *alors le domaine d'attraction s'applique sur l'espace de phase.*

Proposition 2.1.7 *[20] La stabilité de la solution* $\varphi(t)$ *de l'équation (2.1) est la même que celle de la solution identiquement nulle de l'équation déduite de l'équation (2.1).*

Preuve. On pose $x(t) = y(t) - \varphi(t)$
On remplace dans l'équation (2.1) on trouve :

$$x(t)^{'} = y(t)^{'} - \varphi^{'}(t) = f(t, x(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) = g(t, x(t)).$$

Notez que $\quad g(t, 0) = f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) = 0$
où

$$y^{'} = f(t, y) \overset{x(t)=y(t)-\varphi(t)}{\longleftrightarrow} \begin{cases} x^{'}(t) = & g(t, x(t)) \\ g(t, 0) = & 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Donc pour étudier stabilité la solution $\varphi(t)$ de l'équation (2.1), il suffit étudier stabilité de la solution nulle de l'équation (2.2).

Dans tout ce qui suit on considérons que l'équation (2.1) possession solution nul oû $f(t, 0) = 0$. ∎

Définition 2.1.8 *On dit que la solution nulle (Le point d'équilibre) de l'équation (2.1) est*

- *stable au sens de Lyapunov(ou tout simplement stable) si,* $\forall \varepsilon > 0$ *et* $t_0 \geq 0$ $\exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ *telle que pour toute solution* $\psi(t, t_0, y_0)$: $|y_0| < \delta \Longrightarrow \psi(t)$ *existe* $\forall t \geq t_0$ *et* $|\psi(t)| < \varepsilon$.

- *uniformément stable si* $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- *instable elle n'est pas stable.*
- *asymptotiquement stable si*

  (a). *La solution* 0 *est stable ; et*

  (b). $\exists \delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ *telle que* $|y_0| < \delta_0 \Longrightarrow |\psi(t)| \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.
- *uniformément asymptotiquement stable si*

  (a). 0 *est uniformément stable ; et*

  (b). $\exists \delta_0 > 0$ *telle que,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T = T(\varepsilon) > 0$ *telle que* $|y_0| < \delta_0, t \geq t_0 + T \Longrightarrow |\psi(t)| < \varepsilon$.

Pour illustrer les différences entre les différentes notions de stabilité, nous étudions les exemples suivants.

Exemple 2.1.1 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} y' = & -y \\ y(t_0) = & y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

La solution générale de l'équation (2.3) est $\varphi(t) = ce^t$, *et il écrit résoudre le problème de la forme* $\varphi(t, t_0, y_0) = y_0 e^{t_0 - t}$

Et la solution qui permet d'atteindre la condition $y(t_0) = y_1$ *s'écrit sous la forme* $\psi(t, t_0, y_1) = y_1 e^{t_0 - t}$.

Notez que :

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = |y_0 - y_1| e^{(t_0 - t)} \leq |y_0 - y_1|, t \geq t_0$$

Donc

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad \exists \delta = \varepsilon / |y_0 - y_1| < \delta \to \forall \varepsilon > 0.$$

Donc $\varphi(t)$ *est stable au sens Lyapunov.*

Puisque $\delta = \delta(\varepsilon)$ *alors* $\varphi(t)$ *est uniformément stable.*

D'autre part, on a

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = \lim_{t \to \infty} |y_0 - y_1| e^{(t_0 - t)} = 0,$$

où que $\varphi(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 2.1.2 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} y^{'} = & \dfrac{y}{t^2} \\ y(t_0) = & y_0, \quad t_0 \in]0, +\infty[\end{cases} \tag{2.4}$$

La solution générale de l'équation (2.4) est $\varphi(t) = ce^{-\frac{1}{t}}$, et la le problème de solution est de la forme

$$\varphi(t, t_0, y_0) = y_0 e^{\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}}.$$

donc nous concluons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) = \varepsilon e^{(\frac{1}{t_0})} / |y_0| < \delta \longrightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon$$

Où a une point d'équilibre est stable, mais n'est pas uniforme stable , car $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$.

Exemple 2.1.3 *Montrer qu'une solution nulle de l'équation est instable :*

$$y^{'} = y \tag{2.5}$$

pour $t_0 = 0$ la solution de l'équation (2.5) est

$$\varphi(t, t_0, y_0) = y(t) = y_0 \exp t$$

et $\psi = 0$ est solution de l'équation (2.5)

$$|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| = |\varphi(0) - \psi(0)| = |y_0 - 0| = |y_0| < \delta_1$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = |y_0 \exp t| > |y_0| \neq 0.$$

Le δ n'existe pas $\Longrightarrow$ la solution est instable.

Exemple 2.1.4 *Soit le problème suivant :*

$$y^{'} = -\frac{y}{1+t}, \quad y(t_0) = y_0 \quad t \in (-1, \infty) \tag{2.6}$$

on a $y(t) = y(t_0)\frac{1+t_0}{1+t}$. Ainsi,

$$|y(t)| \leq |y(t_0)|, \quad pour \quad t \geq t_0.$$

Donc, $y = 0$ est uniformément stable (choisir $\delta(t_0, \varepsilon) = \varepsilon$), et $y = 0$ est asymptotiquement stable puisque $\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$. De plus $|y(t)|$ n'est pas uniformément asymptotiquement stable, puisque pour tout $T > 0$,

$$y(t_0 + T) = y(t_0)\frac{1 + t_0}{1 + t_0 + T}$$

et $\frac{1+t_0}{1+t_0+T} \to 0$ quand $t \to \infty$

Remarque 2.1.9 *(1) la Stabilité $\nRightarrow$ la stabilité uniforme (Exemple 2.1.2).*

(2) la stabilité asymptotique $\nRightarrow$ stabilité asymptotique uniforme (Exemple 2.1.4).

(3) la Stabilité uniforme + la stabilité asymptotique $\nRightarrow$ la stabilité asymptotique uniforme (Exemple 2.1.4).

2.2 Cas d'une système d'équations différenties linéaires

Soit le système différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \quad \text{non homogène,} \tag{2.7}$$

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad \text{homogène,} \tag{2.8}$$

avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, et $f(t)$ continue sur intervalle $I =]a, +\infty[$.

Définition 2.2.1 *On dit que le système (2.7) est stable (non stable) si toutes les solutions stables (non stables) au sens de Lyapunov*

Théorème 2.2.2 *[20] Pour toute fonction f arbitraire de classe $C(I)$, le système (2.7) est stable, si et seulement si la solution nulle du système (2.8) est stable.*

Preuve. [$\Rightarrow$] Soit $t_0 \in I$, $\varphi(t)$ solution stable de système (2.8) sur un intervalle $[t_0, +\infty[$, telle que $\varphi(t_0) = y_0$ i.e, pour tout ε, $(\varepsilon > 0)$, $\exists\delta$, $(\delta > 0)$, telle que :

Pour toute solution $\psi(t)$ sur un intervalle $[t_0, +\infty[$ condition initial $\psi(t_0) = z_0$ vérifier

$$|y_0 - z_0| < \delta \longrightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

D'autre part on sait que la fonction

$$\varphi^*(t) = \varphi(t) - \psi(t) \tag{2.9}$$

est la solution de système homogène (2.8).

Par hypothèse φ^* vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad |\varphi^*(t_0)| < \delta \to |\varphi^*(t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0 \tag{2.10}$$

Puisque toute solution de système (2.8) peut être écrite de forme (2.9), si la formule(2.10) en vraie, c'est à dire la stabilité la solution nulle du système (2.8).

[$\Leftarrow$] Supposer que la solution nulle du système (2.8) est stable, pour toute solution $\varphi^*(t)$ du système (2.8) sur un intervalle $[t_0, +\infty[$ est vérifiée (2.10).On déduit de la dernière formule que si $\varphi(t)$ est une solution particulière du système (2.7) sur un intervalle $[t_0, +\infty[$ et $\psi(t)$ la solution arbitraire du même la système sur $[t_0, +\infty[$ telle que :

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \longrightarrow |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| < \delta$$

Cela signifie que la solution $\varphi(t)$ stable. ∎

Corollaire 2.2.3 *[20]*

1. *La système* (2.7) *est stable, (stable asymptotiquement) si et seulement si la système* (2.8) *est stable, (stable asymptotiquement)*
2. *Pour étudier la stabilité de la solution nulle du système* (2.8)*, il suffit d'étudier stabilité d'une solution de la système* (2.7)*.*
3. *La stabilité s'une solution du système* (2.7) *il suffit d'étudier stabilité d'au moins une des ses solutions.*

4. La système (2.7) *est stable (uniforme), (asymptotiquement), si et seulement si la solution nulle système* (2.8) *est stable (uniforme), (asymptotiquement).*

Théorème 2.2.4 *La système homogène* (2.8) *est stable, si et seulement si toute solution* $\varphi(t)$ *du système sur un intervalle* $[t_0, +\infty[$ *est bornée*

Preuve. $[\Leftarrow]$: Supposer que la solutions du système (2.8) est bornée sur $[t_0, +\infty[$, c'est à dire que la matrice fondamentale $M(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}$ du système (2.8) est bornée,

$$\exists K \quad \text{constant}, \quad |\varphi(t)| \leq k, \quad t \geq t_0, \quad k = k(t_0)$$

Toute solution $\varphi(t)$ du système (2.8) de la forme

$$\varphi(t) = M(t)\varphi(t_0)$$

Donc

$$|\varphi(t)| \leq |M(t)||\varphi(t_0)| \leq k|\varphi(t_0)|$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{k}, \quad /|\varphi(t_0)| < \delta \to |\varphi(t)| < \varepsilon$$

La solution nulle est stable, donc toute solution du système la système (2.8) est stable.
$[\Rightarrow]$ Supposer qu'il existe une solution $\varphi(t)$ du système (2.8) qu n'est pas bornée sur $[t_0, +\infty[$
Il est claire que $\varphi(t_0) \neq 0$.
Il existe une δ constante ($\delta > 0$), on pose : $\psi(t)\frac{\varphi(t)}{|\varphi(t_0)|}\frac{\delta}{2}$
il est claire que : $\psi(t_0) = \frac{\delta}{2} < \delta$

Puisque $\varphi(t)$ n'est pas bornée, alors $\exists t_1, (t_1 > t_0)$, et $\exists \varepsilon_1, (\varepsilon_1 > 0)$ telle que

$$|\psi(t_1)| = \frac{|\varphi(t_1)|}{|\varphi(t_0)|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon_1,$$

d'où la contradiction pour la stabilité de la solution nulle du système (2.8). ■

Corollaire 2.2.5 *Si le système non homogène (2.7) est stable, alors toute solutions bornées, et soit tout non bornées.*

Exemple 2.2.1 *étudier la stabilité d'une solution de le système*

$$\begin{cases} x' = & 1+t-x, \\ y' = & 1+t-y, \end{cases} \tag{2.11}$$

qui satisfait à la condition initiale $x(0)=0, \quad y(0)=0.$

Solution. *le système (2.11) est système linéaire non non homogène. Sa solution générale est* $\varphi_1(t)=x(t)=Ce^{-t}+t, \quad \varphi_2(t)=y(t)=Ce^{-t}+t$. *A la condition initiale*

$$\psi_1(t)=\psi_2(t)=t \tag{2.12}$$

du système (2.11). A la condition initiale $x(0)=x_0, \quad y_0=0$ *satisfait les solutions*

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(t)= & x_0e^{-t}+t, \\ \varphi_2(t)= & y_0e^{-t}+t. \end{array} \tag{2.13}$$

Considérons la différence des solutions (2.13) et (2.12) du système (2.11) et écrivons-la sous la forme

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(t)-\psi_1(t)= & x_0e^{-t}+t-t=(x_0-0)e^{t}, \\ \varphi_2(t)-\psi_2(t)= & y_0e^{-t}+t-t=(y_0-0)e^{t}. \end{array} \tag{2.14}$$

On en déduit que $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ *(par exemple* $\delta=\varepsilon$*) tel que toutes solutions* $\varphi_1(t)$ *et* $\varphi_2(t)$ *du système (2.11), dont les valeurs initiales satisfont à la condition* $|x_0-0|<\delta, \quad |y_0-0|<\delta$ *vérifie l'inégalité*

$$\begin{array}{ll} |\varphi_1(t)-\psi_1(t)|= & |x_0-0|e^{t}<\varepsilon \\ |\varphi_2(t)-\psi_2(t)|= & |y_0-0|e^{t}<\varepsilon \end{array} \tag{2.15}$$

pour tous les $t\geq 0$. *Par suite, la solution* $\psi_1(t)=\psi_2(t)=t$ *est stable. De plus, puisque*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi_1(t)-\psi_1(t)|= & \lim\limits_{t\to+\infty}|x_0-0|e^{t}=0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi_2(t)-\psi_2(t)|= & \lim\limits_{t\to+\infty}|y_0-0|e^{t}=0 \end{array} \tag{2.16}$$

les solutions $\psi_1(t)=\psi_2(t)=t$ *est asymptotiquement stable.*

Cette solutions $\psi_1(t)=\psi_2(t)=t$ *est non borné pour* $t\to+\infty$.

Théorème 2.2.6 *La système homogène* (2.8) *est asymptotiquement stable si et seulement toute les solutions* $\varphi(t)$ *vérifiée*

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0.$$

Preuve. [$\Rightarrow$] Le système (2.8) est asymptotiquement stable oû toute solution nulle est asymptotiquement stable.

Donc pour toute solution $\varphi(t)$ du système (2.8) vérifié

$$|\varphi(t_0)| < \delta, \quad (\delta > 0) \longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$$

Soit $\psi(t)$ solution arbitraire du système (2.8) telle que

$$\psi(t_0) = y_0 \neq 0$$

Remarquer la solution $\varphi^*(t) = \dfrac{\psi(t)}{|\psi(t_0)|}\dfrac{\delta}{2}$, vérifiée : $|\varphi^*(t_0)| = \dfrac{\delta}{2} < \delta.$
C'est à dire :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi^*(t) = 0.$$

Donc

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to+\infty} \left[\varphi^*(t)\frac{\|\psi(t_0)\|}{\frac{1}{2}\delta}\right] = 0$$

[$\Leftarrow$] Pour toute solution $\varphi(t)$ de la système (2.8) on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0 \tag{2.17}$$

Donc

$$\exists t_1 > t_0/|\varphi(t)| < 1, \quad t > t_1 \tag{2.18}$$

Il est clair qui une fonction continue $\varphi(t)$ est bornée sur un intervalle $[t_0, t_1]$, donc et de la formule (2.18) la fonction $\varphi(t)$ est bornée sur un intervalle $[t_0, +\infty[$, cette au sens la théorème (2.2.4) .i.e, que la système stable.

D'autre part au sens la formule (2.17) connu que :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \quad /|\varphi(t_0)| < \delta \longrightarrow \lim_{t\to+\infty} |\varphi(t)| = 0,$$

alors la seconde condition de stabilité asymptotiquement et vérifiée. ■

Remarque 2.2.7 *[17] Par rapport aux systèmes non linéaire on remarque que :*

1. *La solution bornée* $\nRightarrow$ *la stabilité.*

2. *Limite les solutions est nulle* $\nRightarrow$ *asymptotiquement stable.*

Exemple 2.2.2 *Considérons l'équation :*

$$y^{'} = \sin^2 x. \tag{2.19}$$

Elle possède des solutions évidentes

$$\varphi_1(t) = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.20}$$

Intégrons l'équation (2.19), il vient

$$\text{ctg}(y) = C - t, \quad ou \quad \text{ctg}(y) = \text{ctg}(y_0) - t, \tag{2.21}$$

d'où

$$\varphi_2(t) = \text{arctg}(\text{ctg}(y_0) - t), \quad y \neq k\pi. \tag{2.22}$$

Toutes les solutions (2.20) et (2.22) sont bornées sur $(-\infty, +\infty)$. *Pourtant, la solution* $\psi(t) \equiv 0$ *est instable lorsque* $t \to +\infty$, *car pour tout* $y_0 \in (0, \pi)$ *on a* $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_2(t) = \pi$. *Par suite, le fait que les solution d'une équation différentielle sont bornées n'implique pas en général que ces solutions sont stables.*

Ce phénomène est caractéristique des équations non linéaires et des systèmes non linéaires.

2.3 Problèmes bien et mal posés

D'après Lyapunov un problème est dit bien posé (correctement posé) si le problème admet une solution (Existence), si elle est unique (Unicité) et elle est stable (Stabilité au sens Lyapunov) c'est a dire que tout petit changement porté sur les conditions initiales ou aux limites implique un grand changement sur la solution du problème . Le problème est dit mal posé si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée. Illustrons cela par l'exemple suivant :

2.3.1 Exemples de problèmes mal posés

On donne quelques exemples des problèmes mal posés :

Exemple 2.3.1 *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} -(a(x)y^{'})^{'} = & f(x) \\ \varphi(-1) = \varphi(1) = 0, & \end{cases} \qquad x \in]-1, 1[, \tag{2.23}$$

on a pour $a(x) = x^2 + 1, \quad f(x) = 3x^2 + 1,$

la solution $y(x) = (1 - x^2)/2$

mais on remarque que

$$\begin{aligned} -(a(x)y^{'})^{'} = & \ f(x) \\ \Rightarrow & \ a(x) = \frac{c}{y^{'}(x)} + \frac{1}{y^{'}(x)} \int_0^x f(\xi) d\xi \\ = & \ \frac{c}{x} + x^2 + 1 \\ \neq & \ x^2 + 1 \end{aligned}$$

sauf si $c = 0$.

Exemple 2.3.2 *On considère le problème :*

$$\begin{cases} \Delta u = & 0, \quad y > 0 \\ u_y|_{y=0} = & 0 \\ u_y|_{y=0} = & V_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

$u = u(x, y), x \in \mathbb{R}, y > 0$. *C'est clair que :* $u(x, y) = \frac{\sin nx}{2n^2}(e^{ny} - e^{-ny})$*, est une solution du problème et elle est unique (par l'unité de la solution du problème de Cauchy pour les équation elliptiques). Cet exemple appartient è J. Hadamard, et il montre que la condition de Cauchy peut être arbitrairement petite lorsque la solution tend vers l'infini quand* $n \to \infty$*, pour tout point* $(x, y), y > 0, x \neq n\pi$*. Donc ce problème est mal-posé.*

Chapitre 3

Étudie de stabilité

3.1 Stabilité de solution nulle du système $y^{'}(t) = Ay(t)$

On va étudier la stabilité des solution des équations différentiels ordinaires matricielles linéaire et non linéaire.

3.1.1 Cas linéaire

Soit le système différentiel homogène suivante :

$$y^{'} = Ay \tag{3.1}$$

où $A = (a_{ij})_{i,j=1,..,n}$ une $n \times n$-matrice et $y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

il est clair que le système (3.1) admet une solution nulle.

Définition 3.1.1 *Les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont solution du polynôme caractéristique*

$P_n(\lambda)$ de la matrice A il est défini par :

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Comme $P_n(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$ est une polynôme de degré n on l'écrit sous la forme..

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^{n-k} = \det(A - \lambda I). \tag{3.3}$$

Si A est une matrice triangulaire ou diagonal alors les valeurs propres de A sont les élément de la diagonale de A,(c'est à dire si A est triangulaire ou diagonale les racines de $P_n(\lambda)$ sont $((a_{ij})_{1\leq i\leq n})$ donc $\lambda_i = a_{ii}$.

Proposition 3.1.2 *Si touts les valeurs propre de la matrice A ont une partie réelle strictement négative, c'est à dire $Re\lambda_i < 0, \quad 1 \leq i \leq n$ alors la solution nulle du système (3.1) est asymptotiquement stable.*

Remarque 3.1.3

1. *Si au moins une valeur propre λ_k de A a une partie réelle positive alors la solution nulle du système (3.1) est instable.*
2. *Si la solution nulle de système (3.1) est stable alors touts les valeur propre de la matrice A on une partie nulle non positive.*
3. *Si $Re\lambda_k \leq 0, \quad 1 \leq k \leq n$ telle que pour $1 \leq j \leq n \quad Re\lambda_j = 0 \Longrightarrow \lambda_j$ est une valeur propre simple alors la solution nulle de (3.1) est stable.*

Règle pratique pour déterminer le signe des partie réels des valeurs propres de A on peut calculer partie réelle des valeur propre à $P_n(\lambda)$, et on cherche le signe des parties réels, des valeurs propres mais parfois les calculs sont difficiles. Sur tout si $n > 3$.
Il existe une règle plus pratique est simple qui détermine le signe de parties réelle des valeur propre de A.On a le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{3.4}$$

Règle de Hurwitz : Pour que toute les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative il faut et il suffit que tous les mineurs diagonaux principaux $\Delta_i, \quad i = 1, ..., n$ de la matrice H_n suivant soient : $\Delta_i > 0, \quad i = 1, ..., n,$ où $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ sont les coefficient de $P_n(\lambda)$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Le généralisation à arbitraire n est claire si vous remarques que la diagonale principale de H_n est $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Les mineurs diagonaux principaux de la matrice de Hurwitz sont de la forme

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Théorème 3.1.4 *[19] la solution nulle du système (3.1) est stable si et seulement si les mineurs diagonaux principaux de H_n sont tous positifs.*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$$

Puisque $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$, la condition $\Delta_n > 0$ peut être remplacée par celle de $a_n > 0$

Exemple 3.1.1 *On considérons l'équation suivant*

$$y^{IV} + 5y^{'''} + 13y^{''} + 19y^{'} + 10y = 0. \tag{3.5}$$

Soit $P(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda^1 + 10$. Ici, $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 13, a_3 = 19, a_4 = 10.$ Écrivons les mineurs diagonaux de la matrice de Hurwitz

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0, \quad \Delta_1 = 5 > 0,$$

c'est-à-dire $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, On voit donc, que la solution nulle de l'équation (3.5) est asymptotiquement stable.

Le calcul peut se faire, par exemple, comme suit. On forme d'abord le mineur d'indice le plus élevé Δ_n de la matrice de Hurwitz. A partir de lui, on écrit sans peine tous les mineurs d'ordre inférieur $\Delta_{n-1}, ..., \Delta_1$. Puis, on commence à calculer successivement Δ_1, Δ_2,etc. Si l'on rencontre un mineur négatif, ça signifie que la solution est instable de sorte que la calcul ultérieur devient inutile.

3.1.2 Cas non linéaire

Soit le système différentiel suivant :

$$y' = f(t, y) \tag{3.6}$$

Nous considérons que le système a une solution nulle, c'est-à-dire : $f(t, 0) = 0$
nous écrivons

$$y_i' = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = 1, ..., n$$

Lemme 3.1.5 ***(de Lyapunov)****(Voir [20])*
Si $f(t, y)$ vérifiez les conditions l'existence et l'unicité sur le ensemble D, tel que

$$D = \left\{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}/t_0 \leq t \leq +\infty, \quad |y| < b\right\}$$

et $V(y)$ fonction définie pour toute $|y| < b$, et vérifiez :

1. $V(y) \in C^1, \quad V(y) \geq 0, \quad V(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$
2. $(t, y) \in D \quad \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V(y)}{\partial y_i} f_i(t, y) \leq 0$

(La fonction V est appelée fonction de Lyapunov)

Alors la solution nulle du système (3.6) stable au sens Lyapunov.

En plus de cela, si vérifiez sur D l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_i} f_i(t,y) \leq -w(y)$$

tel que $w(y)$ fonction définie pour $|y| < b$, continue il est pas négatif, et vérifiez :

$$w(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Preuve. [20] Pour toute ε, $\quad (0 < \varepsilon < b)$, on pose $S_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n / |y| = \varepsilon\}$

$$V_\varepsilon = \min_{S_\varepsilon} V(y), \tag{3.7}$$

il clair que $V_\varepsilon > 0$.

on choisit δ petite $(0 < \delta < \varepsilon)$, telle que :

$$y \in F_\delta \to V(y) < V_\varepsilon \tag{3.8}$$

tel que : $F_\delta = \{y \in \mathbb{R}^n / |y| \leq \delta\}$

(δ existe, parce que V continue et prendre moins de valeur à zéro).

Soit t_0 de $\mathbb{R}$, telle que $y_0 = y(t_0)$, vérifiez $|y| \leq \delta$. Et soit $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ solution la système (3.6) qui passe par le point y_0, et l_φ orbite associée pour solution. Il clair que : $|\varphi(t_0)| < \delta$.

Notez que de la preuve et la solution nulle est stable, il suffit de prouver $\varphi(t)$ définie pour toute $t \geq t_0$, et vérifiez $|\varphi(t)| < \varepsilon$.

Il clair que $\varphi(t)$ définie pour toute $t \geq t_0$.

On a de la condition ii le long de l_φ, la fonction V est fonction composition vérifiez

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi(t))\varphi_i^{'}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi) f_i(t, \varphi) \leq 0$$

C'est-à-dire que V comme fonction dans t n'est pas positif.

Supposons que l'orbite, qui démarre de $t = t_0$ couper pour la première fois S_ε dans temps $t = t_1, (t_1 > t_0)$. Donc en utilisant la formule (3.7), (3.8), le long de l_φ vérifie :

$$V|_{t=t_0} = V(\varphi(t_0)) < V_\varepsilon \leq V(\varphi(t_1)) = V|_{t=t_1},$$

cela contredit au fait que V n'est pas de croissance le long de l_{φ}.

c'est-à-dire que l'orbite l_{φ} ne pas coupé S_{ε} si $|y_0| < \delta$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |y_0| < \delta \longrightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon \tag{3.9}$$

Ainsi, la solution nulle est stable.

Pour preuve de la asymptotiquement stable, et que la formule (3.9) vérifier, il suffit monter que $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.

Nous savions que la fonction $V(y)$ le long de l_{φ} n'est pas de croissance.

Démontrez que cela conduit à : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = 0$.

Supposons au contraire : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = \varepsilon_0 > 0$.

c'est-à-ire : $\forall t \geq t_0 \longrightarrow V(\psi(t)) \geq \varepsilon_0$.

Donc $\exists \delta_0 > 0 / |\varphi(t)| \geq \delta_0, \quad t \geq t_0$

et au sens (3.9) nous trouvons : $\delta_0 \leq |\varphi(t)| < \varepsilon$.

D'après la condition théorique pour la fonction w pour φ vérifiez l'inégalité précédent conclure $\exists \alpha > 0 / w(\varphi(t)) \geq \alpha$

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_1} V(\varphi) f_i(t, \varphi) \leq -w(\varphi) \leq -\alpha, \tag{3.10}$$

par intégration (3.10) de t_0 à t nous obtenons

$$V(\varphi(t)) - V(\varphi(t_0)) \leq \alpha(t - t_0).$$

C'est-à-dire que : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = -\infty$

cela est contraire au fait que $V(y)$ pas négatif, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = 0$.

Montrer que : $\lim\limits_{t \to +\infty} V(\varphi(t)) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.

Supposons au contraire :

$$\exists \gamma_0 > 0, \quad \exists (t_n)_{n \geq 1} / t_n \to +\infty, |\varphi(t_n)| \geq_0 .$$

Notez que la fonction $V(y)$ positif si y vérifier $\gamma_0 \leq y < \varepsilon$.

Alors

$$\exists \beta > 0 / V(\varphi(t)) \geq \beta > 0,$$

et cela contraire au fait que $\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t)) = 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, alors la solution nulle du système (3.6) est asymptotiquement stable. ■

Exemple 3.1.2 *On considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} y' = & -z - y^3 \\ z' = & y - z^3 \end{cases} \tag{3.11}$$

Notez que

$$f(t,z) = (f_1(y,z), f_2(y,z)/f_1(y,z) = -z - y^3, f_2(y,z) = y - z^3 \tag{3.12}$$

vérifie les conditions d'existence et d'unicité sur le ensemble D, tel que

$$D = \left\{(t,y,z) \in \mathbb{R}^3/t_0 \leq t < +\infty, |(y,z)| < b\right\}.$$

Il est défini une fonction V comme suit :

$$V(y,z) = y^2 + z^2, \quad |(y,z)| < b.$$

Notez que

$$V(y,z) \in C^1, V(y,z) \leq 0, V(0,0) = 0.$$
$$\frac{dV}{dt} = 2y(-z - y^3) + 2y(y - z^3) = -2(y^4 + z^4) \leq 0.$$

Il est défini une autre fonction w comme suit :

$$w(y,z) = 2(y^4 + z^4), \quad |(y,z)| < b.$$

Notez que w fonction continue est pas négative et vérifier $w(0,0) = 0$.
Cela signifie que conditions lemme de Lyapunov vérifier alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Théorème 3.1.6 *[20] On considére le système suivant :*

$$y' = f(t,y) \tag{3.13}$$

Nous considérons que le système (3.13) a une solution nulle, où $f(t,0) = 0$
et $f(t,y)$ vérifiez les conditions l'existence et l'unicité sur le ensemble D, tel que

$$D = \left\{(t,y,z) \in \mathbb{R}^3/t_0 \leq t < +\infty, |y| < b\right\}.$$

Supposons que $f(t, y)$ de la forme

$$f(t, y) = A(t)y + F(t, y), \tag{3.14}$$

telle que $A(t)$ matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F(t, y)$ fonction vérifiez : $\lim\limits_{|y| \to 0} \dfrac{|F(t, y)|}{|y|} = 0$

Définition 3.1.7 *On considére le système homogène associée au système (3.14)*

$$y^{'} = A(t)y \tag{3.15}$$

Corollaire 3.1.8

$$F(t, 0) = 0, \quad A(t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(t, 0)\right)_{i,j=1,\dots,n} \tag{3.16}$$

Dans le cas non-linéaire avec coefficients non constants : nous avons utilisé le théorème de Liapounov

Théorème 3.1.9 ***(de Lyapunov)****(Voir [20])*
On considérons le système différentiel suivant :

$$y^{'} = Ay + F(t, y) \tag{3.17}$$

$$y^{'} = Ay \tag{3.18}$$

tel que $F(t, 0) = 0$, et A $n \times n$-matrice constante $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si toutes les valeurs propres de la $n\times$-matrice A ont une partie réelles négative, et pour toute $t \geq t_0$, c'est-à-dire

$$\lim_{|y| \to +\infty} \frac{|F(t, y)|}{|y|} = 0.$$

Alors la solution nulle du système (3.17) est asymptotiquement stable.

Preuve. [20] Pour toute y de l'espace phase, et soit $\varphi(t, y)$ solution du système homogène (3.18) qui vérifier

$$\varphi|_{t=0} = y$$

au sens de la proposition 2 in paragraphe 5.3 (Voir [20]) dans cas linéaire nous concluons

$$\exists \alpha; \delta, \gamma \in \mathbb{R}_+^* / |\varphi(t)| \leq \gamma |y| e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \tag{3.19}$$

On a

$$V(y) = \int_0^{+\infty} |\varphi(\xi, y)|^2 d\xi \tag{3.20}$$

Comme dans (3.19) la fonction bien définie montrer que $V(y)$ est fonction Lyapunov du système (3.18)

On a $\varphi(t, y) = M(t)y, \quad (M(0) = I_{\mathbb{R}^n})$

Donc (3.20) il écrit comme suit

$$V(y) = \int_0^{+\infty} \langle M(\xi)y, M(\xi)y\rangle \, d\xi = \int_0^{+\infty} \left\langle M^T(\xi)M(\xi)y, y\right\rangle d\xi = \langle By; y\rangle \tag{3.21}$$

telle que : $B = \int_0^{+\infty} M^T(\xi)M(\xi)y$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ & & \\ & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{bmatrix}, b_{ij} = b_{ji}, \quad i, j = 1, ..., n$$

nous concluons que V vérifier la premier condition de la condition de la fonction Lyapunov :

$$V \in C^1, V(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 0, V(y) \geq 0$$

démontrer que : $\frac{dV}{dt}(\varphi) \leq 0$

comme que pour toute $\xi, (\xi > 0)$ la solution φ vérifie : $\varphi(\xi, \varphi(t, y) = \varphi(t + \xi, y)$.

Donc

$$V(\varphi(t, y)) = \int_0^{+\infty} |\varphi(\xi, \varphi(t, y))|^2 d\xi + \int_0^{+\infty} |\varphi(t + \xi, y)|^2 d\xi|_{x \in t+\xi} = \int_t^{+\infty} |\varphi(s, y)| ds$$

c'est-à-dire que :

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, y))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^{+\infty} |\varphi(s, y)|^2 ds \right\}_{t=0} = -|\varphi(t, y)|^2|_{t=0} = -|y|^2 \tag{3.22}$$

D'autre part

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, y))|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\varphi(t, y))}{\partial y_i} \varphi_i'(t, y)|_{t=0} = \langle gradV(\varphi(t, y)), A\varphi(t, y)\rangle \, |_{t=0} = \langle gradV(\varphi(y)), Ay\rangle \tag{3.23}$$

de (3.22) et (3.23) nous obtenons

$$\langle gradV(y), Ay\rangle = -|y|^2 \tag{3.24}$$

de (3.24) en utilisant le système (3.17) nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(y)}{y_i}y_i' = \left\langle grandV(y), y'\right\rangle = \langle gradV(y), Ay + F(t,y)\rangle = \langle gradV(y), Ay\rangle + \langle gradV(y), F(t,y)\rangle = - \tag{3.25}$$

puisque $V(y) = \langle By, y\rangle$ alors

$$gradV(y) = 2By \tag{3.26}$$

de la condition $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\dfrac{|F(t,y)|}{|y|} = 0$, conclure que :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0, (\varepsilon < b) \longrightarrow |F(t,y)| < \varepsilon|y| \tag{3.27}$$

de (3.25),(3.26),(3.27) nous trouvons :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(y)}{y_i}y_i' \le -|y|^2 + |\langle gradV(y), F(t,y)\rangle| \le -|y|^2 + 2|B|.|y|.\varepsilon|y| = -|y|^2(1-2\varepsilon|B|) = -\frac{1}{2}|y|^2 < 0. \tag{3.28}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(y)}{\partial y_i}y_i' \le -\frac{1}{2}|y|^2$$

alors, pour toute $0 < \varepsilon < \frac{1}{4|B|}, 0 < |y| < \delta_1$

nous trouvons :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(y)}{\partial y_i}y_i' \le -w(y).$$

telle que : $w(y) = \dfrac{1}{2}|y|^2$.

Donc, les conditions du lemme de Lyapunov vérifier, c'est-à-dire que la solution nulle asymptotiquement stable. ■

Exemple 3.1.3 *On considére le système différentiel*

$$\begin{cases} y' = & 2y + 8\sin z \\ z' = & 2 - 3z - e^4 - \cos z \end{cases} \tag{3.29}$$

par développement de $\sin z, \cos z, e^4$ *de la série Taylor et remplacement de le système (3.18) nous trouvons*

$$\begin{cases} y^{'} = & 2y + 8z + R_1 \\ z^{'} = & -y - 3z + R_2 \end{cases} \tag{3.30}$$

Notez que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, F(y) = \begin{bmatrix} R_1 \\ \\ R_2 \end{bmatrix}$$

il est clair que $\lim\limits_{|y|} \to 0 \dfrac{|F(y)|}{|y|} = 0$, *(parce que* R_1, R_2 *reste développement)*
D'autre part on a :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Alors $Re\lambda_i < 0, \quad i = 1, 2$, *c'est-à-dire au sens théorème de Lyapunov la solution nulle du système (3.18) est asymptotiquement stable.*

3.2 La stabilité solutions d'un système d'équations différentielle à coefficients périodiques

Soit le système

$$y^{'} = A(t)y \tag{3.31}$$

où, la $n \times n$-matrice $A(t)$ est continue et périodique de période ω, et soit $\phi(t)$ la matrice fondamentale du système (3.31) avec $\phi(0) = I$.

Définition 3.2.1 *La matrice* $\phi(\omega)$ *est appelée matrice de la monodromie.*

Définition 3.2.2 *Les valeurs propres de la matrice* $\phi(\omega)$ *sont appelées multiplicateurs du système (3.31).*

Le théorème suivant montre l'importance des multiplicateurs de Floquet

Théorème 3.2.3 *[14] Supposons que* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ *sont les multiplicateurs Floquet du système Floquet* $y^{'} = A(t)y$. *Alors les solutions du système Floquet sont*

i. *asymptotiquement stable sur* $[0, \infty)$ *(c'est-à-dire que* $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$ *pour toutes les solutions* $y(t)$*) si et seulement si* $|\mu_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n$ *;*

ii. *stable sur* $[0, \infty)$ *(c'est-à-dire que toutes les solutions sont bornés) à condition de* $|\mu_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n$ *et chaque fois* $|\mu_i| = 1, \quad |\mu_i|$ *est une simple valeur propre ;*

iii. *instable sur* $[0, \infty)$ *(c'est-à-dire qu'il existe une solution non borné) à la condition que un* i_0*,* $1 \leq i_0 \leq n$*, tel que* $|\mu_{i_0}| > 1$.

Preuve. Nous allons démontrer ce théorème pour les cas de deux dimensions. Supposons que $y(t) = \phi(t)y_0 = \rho(t)e^{Bt}y_0$ est une solution du système Floquet et soit C comme dans le théorème de Floquet, c'est-à-dire.

$$C = e^{B\omega}.$$

Par le théorème de la forme canonienne de Jordan, il y a des matrices M et J pour que

$$B = MJM^{-1},$$

où soit

$$J = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \quad ou \quad J = \begin{bmatrix} \rho_1 & 1 \\ 0 & \rho_1 \end{bmatrix}.$$

où ρ_1, ρ_2 sont les valeurs propres de B. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} C =& e^{B\omega} \\ =& e^{MJM^{-1}\omega} \\ =& Me^{J\omega}M^{-1} \quad \text{Par le théorème (1.2.13) partie } (viii) \\ =& MKM^{-1}, \end{aligned}$$

où soit

$$K = \begin{bmatrix} e^{\rho_1\omega} & 0 \\ 0 & e^{\rho_2\omega} \end{bmatrix}, \quad ou \quad K = \begin{bmatrix} e^{\rho_1\omega} & \omega e^{\rho_1\omega} \\ 0 & e^{\rho_1\omega} \end{bmatrix}.$$

Étant donné que les valeurs propres de K sont les mêmes que la valeur propre de C, nous obtenons que les multiplicateurs de Floquet sont

$$\mu_i = e^{\rho_i\omega},$$

$i = 1, 2$, où $\rho_1 = \rho_2$ il est possible. Telle que

$$|\mu_i| = e^{Re(\rho_i)\omega},$$

ensuite nous conclurons que

$$|\mu_i| < 1 \Longleftrightarrow Re(\rho_i) < 0$$

$$|\mu_i| = 1 \Longleftrightarrow Re(\rho_i) = 0$$

$$|\mu_i| > 1 \Longleftrightarrow Re(\rho_i) > 0$$

Soit

$$Q_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\rho(t)| = \max_{t\in[0,\omega]} |\rho(t)|$$

et

$$Q_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\rho^{-1}(t)| = \max_{t\in[0,\omega]} |\rho^{-1}(t)|.$$

Alors

$$|y(t)| = |\rho(t)e^{Bt}y_0| \leq |\rho(t)||e^{Bt}y_0| \leq Q|e^{Bt}y_0|$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et

$$|e^{Bt}y_0| = |\rho^{-1}(t)y(t)| \leq |\rho^{-1}(t)||y(t)| \leq Q_2|y(t)|,$$

pour $t \in \mathbb{R}$ elle montre que la stabilité de $y(t)$ est équivalente à la stabilité de $e^{Bt}y_0$.

■

Conclusion

Au cours de notre étude de la stabilité des solutions des équations différentielles et des systèmes différentiels ; nous avons traité les cas suivants :
Les équations différentielles et des systèmes différentiels à coefficients constants

Dans le cas linéaire ; nous avons utilisé : les polynômes caractéristiques des matrices associes et on a utilisé aussi les déterminants de Hurwitz, surtout dans les cas difficile ou le recherche des racines du polynôme caractéristique est délicate
Dans le cas non-linéaire : nous avons utilisé le lemme de Lyapunov ; dans ce cas on cherche une fonction appelée fonction de Lyapunov de sorte qu'elle vérifie toutes les hypothèses de lemme de Lyapunov.

Dans le cas non-linéaire avec coefficients non constants : nous avons utilisé le théorème de Lyapounov

2. On utilise presque les mêmes démarches pour l'étude de la stabilité des solutions périodiques des systèmes différentiels, nous avons calculé les valeurs de l'auto-matrice ci-jointe de Monodromie wholesa des transactions périodique

Bibliographie

[1] A. M. Lyapunov, "Stability of Motion : General Problem" Internat. J. Control, Lyapunov Centenary issue. vol. 55, no. 3, pages 520-790, march 1992.

[2] F. H. Albasrawi.FLOQUET THEORY ON BANACH SPACE.May 2013.

[3] F. H. Albasrawi.page.3

[4] F. H. Albasrawi.page.5

[5] F. H. Albasrawi.page.7

[6] F. H. Albasrawi.page.[7-8]

[7] F. H. Albasrawi.page.[9]

[8] F. H. Albasrawi.page.[9-10]

[9] F. H. Albasrawi.page.[21]

[10] F. H. Albasrawi.page.[21-23]

[11] F. H. Albasrawi.page.[25]

[12] F. H. Albasrawi.page.[25-26]

[13] F. H. Albasrawi.page.[27]

[14] F. H. Albasrawi.page.29

[15] Kelly W., Peterson A. : The Theory of Differential Equations, Second Edition. Springer Science 2010.

[16] L. Ya. Adrianova. Introduction to linear systems of differential equations.Volume.146.the American Mathematical Society .1995.page.79.

[17] L. Ya. Adrianova.page.81

[18] M.KRASNOV,A.KISSELEV,G.MAKARENKO, RECUEIL DE PROBLÈMES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.française, Éditions Mir,1981.page.243.

[19] M.KRASNOV,A.KISSELEV,G.MAKARENKO.page.244.

[20] م. عسيلة، دروس في المعَادلَات و الجمل التفَاضليَة.

الملخص:

تتكون هذه المذكرة من ثلاثة فصول، والهدف منها هو دراسة استقرار الحلول الدورية للجملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الدورية .
الفصل الأول: ذكرنا بعض المفاهيم التي نحتاجها في الحل.
الفصل الثاني: خصص لإعطاء نظرة عامة حول مفهوم استقرار الحل المعدوم للمعادلات التفاضلية و جملة المعادلات التفاضلية.
الفصل الثالث: تناولنا دراسة استقرار الحلول في ثلاث حالات:
الحالة الأولى**:** في حالة جملة المعادلات التفاضلية الخطية, بحث استعملنا محدد مصفوفة هرويتز لمعرفة استقرار الحل المعدوم في حالة صعب علينا تحديد القيم الذاتية لكثير الحدود الخاصة بمصفوفة الجملة التفاضلية؛ الحالة الثانية**:** في حالة جملة المعادلات التفاضلية الغير الخطية, الحل المعدوم يكون مستقر إذا أمكننا إيجاد دالة تسمى دالة ليابونوف و هي الدالة التي تتوفر فيها المواصفات التالية (معرفة موجبة, أي أن الدالة لا تكون صفرا إلا عند النقطة صفر, مستمرة)؛ الحالة الثالثة**:** وهي محور الموضوع, خاصة باستقرار الحلول الدورية الذي هو مرتبط بطويلة القيم الذاتية للمصفوفة مونودرومي إن تكون كلها اقل تماما من الواحد

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الدورية, الاستقرار, الاستقرار المتقارب, نظرية فلوكيت, مصفوفة هرويتز, مصفوفة مونودرومي.

abstract:

The aim of this work is to study the stability of the periodic solutions for differential equation systems with periodic coefficients.
This master thesis is presented in the following way:
Chapter I: We give here the concepts and the necessary results necessary for the resolution of the problem.
Chapter II: Devoted to the notion of stability of the zero solution of differential equations and systems of differential equations.
Chapter III: We studied the stability of the solutions in three cases: the first case: systems of linear differential equations, where we used the determinant of the Hurwitz matrix to study the stability in the case where the determination of the eigenvalues of the matrix of the differential system is difficult; the second case: systems of nonlinear differential equations, the null solution is stable if it is possible to find a function, called Lyapunov function. This function has the following important properties: it is continuous and definite positive, so that it is zero only at zero); third case: This is the central theme of this master thesis. It is devoted to the stability of periodic solutions, which is linked to the modules of the eigenvalue of the monodromy matrix. These modules must all be strictly less than one.

Keywords: differential equations with periodic coefficients, stability, stability of asymptotic, floquet theory, Hurwitz matrix, matrix monodromi.