UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des mathématiques et sciences de la matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par : Maiza laid

Théme

L'existence et l'unicité de le solution de l'equation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet

Soutenu publiquement le : 29/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr. Mohamed Said Said	MA. université de KASDI Merbah - Ouargla	Président
Mr. Amara Guerfi	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
Mr. Ben nour Hacene	M.A. université de KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Dédication

Je dédie ce travail à :

Mes parents

-A mes frères

et mes sœurs,et toute la famille

- A mes chers amies

- Je tiens à remercier tous les étudiauts de ma promotion.

-Et a tous mes professeurs

Remerciement

Nous remercions tout d'abord ***Dieu*** *le tout puissant qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

Nous vifs remerciement vont également à notre encadreur ***Mr. Ben nour Hacen*** *qui nous a guidé durant ce semestre et qui ses conseils et remarque étaient trés util pour réaliser ce mémoire.*

*Nous remercions encore,****Mr. Mohamed Said Said*** *et* ***Mr. Amara Guerfi*** *qui ont accepté d'examiner ce travail.*

Nous remerciement vont également à nous familles de leurs aides morals et materiels tout au long nous scolarité.

Notations générales

- Ω Ouvert de $\mathbb{R}^n$
- Γ Bord de Ω
- $C^\infty(\bar{\Omega})$ Espace de fonctions C^∞ *dans* $\bar{\Omega}$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ Espace de fonctions C^∞ *support compact dans* Ω
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ Espace de distributions de L.Shwartz
- $L^1_{loc}(\Omega)$ Espace de fonctions localement intégrables deΩ
- $H^1(\Omega)$ Espaces de Sbolev
- $H_0^m(\Omega)$ Adhérence de$\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H^m(\Omega)$
- $\|.\|_{m,\Omega}$ Norme de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$
- $|.|_{m,\Omega}$ Semi-norme de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$,
- H' Dual de l'espace H
- $\langle .,. \rangle$ Paire de dualité
- D^α Dérivée partielle par rapport au multi-indice α
- $\dfrac{\partial}{\partial v}$ Dérivée normalesortante
- ∇u $(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ... \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$Le gradient de u,
- Δ *Oprateur laplacien*

Table des matières

Introduction

Nous étudions le probléme aux limites pour les équations elliptiques linéaires suivantes avec les conditions aux limites de Dirichlet.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Les équation de poisson apparaissent comme les éqations d'équilibre de base dans une varieté remarquable de systémes physiques. par exemple , nous pouvons u comme le déplacement d'une menbrane l'inhomogéneité f dans l'equation de Poisson représente un forcage externe. suppser $\Omega = (]0,1[)^n$ c'est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ la frontiére de Ω sera désigneé par $\partial\Omega$ et noté par $\mathcal{D}(\Omega)$

Les espace de fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω avec un support compact dans Ω. Nous cherchons une solution $u \in V$.

$$V = \ la \ fermeture \ de \ \mathcal{D}(\Omega) \ dans \ H^1(\Omega)$$

telle que $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., n\}$$

on a $V = H_0^1(\Omega)$ et $f \in V' = H^{-1}(\Omega)$, V' l'espace dual de V la norme dans V' definie par

$$\|l\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle l, v\rangle|}{\|v\|_{H_0^1}}$$

oú $v \in V, \ v \neq 0, \ l \in V'$.

Nous définissons l'espace $H = L^2(\Omega)$ est fourni de telle sorte que $V \subset H = L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ est une espace de Hilbert pour la produit scalaire et la norme correspondante

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)^{1/2} = \left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Nous multiplions (1) par $v \in V$ et intégre dans Ω on utilise l'intégration par parties et les conditions aux limites de Derichlet on obtient V est une espace de Hilbert pour la produit scalaire et la norme correspondante

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (a\,(u,u))^{1/2} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2\,dx\right)^{1/2}$$

on peut associer une forme bilinéaire continue a sur $V = H_0^1\,(\Omega)$ en définissant

$$a\,(u,v) = \langle -\Delta u, v\rangle, \forall u, v \in V$$

oú $\langle ., \rangle$ est le produit scalaire entre V et V'.
L'objectif de ce probléme est de fournir une méthode numérique pour résoudre un systéme linéaire d'equations avec Matlab.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorémes fondamentales, Espase de Hilbert et Banach et Notions élémentataires sur les EDP et Le distributions et espaces de sobolev que nous utiliserons dans le chapitre 2 .

1.1 Espace de Hilbert et de Banach

soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $C(\Omega, \mathbb{K})$ oú $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oú $\mathbb{C}$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible on le note $C(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ continues sur Ω est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni des operations

$$(f+g) = f(x) + g(x), \tag{1.1}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \ \forall x \in \Omega \tag{1.2}$$

on de'signe par $$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$
pour tout multi indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ d'entiers positifs ou nuls oú $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ est la longueur du multi indice α.
Rappelons la régle de Leibniz :

$$D^\alpha (u.v) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n : \beta \leqslant \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta (u) . D^{\alpha - \beta} (v)$$

avec la convention $\alpha \leqslant \beta$ si est seulement si $\alpha_i \leqslant \beta_i$, pour tout $i = 1, ..., n$ et $\alpha! = \alpha_1! .... \alpha_n!$
.

Les ensembeles $C^m(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega), \forall|\alpha| \leqslant m\}$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $C^\infty(\Omega) = \cap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega)$ sont des espaces vectoriels munis des opérations $(1.1)-(1.2)$.
Pour $f \in C(\Omega)$, le support de$f$ est la fermeture de $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ et on le note *supp* f. $C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) :$ *supp* f *compact* $\subset \Omega\}$ est l'ensemble des fonctions continues á support compact de Ω. De maniére analogue, on définit :

$$C_0^m(\Omega) = C^m(\Omega) \cap C_0(\Omega), m \in \mathbb{N} \text{ et } \mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

qui sont tous espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ pour les opérations $(1.1)-(1.2)$.
si $f : A \longrightarrow B$ et $C \subset A$, on désigne par $f_{|C}$ la restriction de f á C. L'espace vectoriel suivant jouera un rôle essentiel :

$$C^\infty\left(\bar{\Omega}\right) = \{\varphi_{|\Omega} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\},$$

l'espace des restrictions á Ω des fonctions C^∞ á support compact de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1 *Nous dirons qu'un sous-ensemble M de V est sous-espace de V s'il est stable pour les opérations de V ,autrement dit si*

$$x + y \in M, \ \forall x, y \in M$$

$$\alpha x \in M, \ \alpha \in \mathbb{K},$$

Il s'ensuit que M est un espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire héritée de V .

Définition 1.1.2 *Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et une application $T : V \longrightarrow W$. L'ensemble $\{x \in V : Tx = 0\}$ est appelé le noyau de T et est note $kerT$. L'ensemble $\{Tx : x \in V\}$,note $R(T)$, est l'image de T.*
Cette application T est dite linéaire si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \ \forall x, y \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Définition 1.1.3 *si V et W sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, on notera $L(V, W)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans $W.V^* = \left\{\bar{f} : f \in L(V, \mathbb{K})\right\}$ est appeléle dual algébrique de V. Rappelons que si $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$, alors sa fonctionnelle conjuguée est $\bar{f} : V \longrightarrow \mathbb{K} : x \longrightarrow \overline{f(x)} : \bar{z}$ désignant le complexe conjugué de z.*

1.1.1 ESPASES VECTOIELS NORMÉS

-Normes et semi-normes

Définition 1.1.4 *Une semi-norme sur un espace vectoriel V est une application $p : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \tag{1.3}$$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}. \tag{1.4}$$

Une noorme sur V est une semi-norme, notée usuellement $\|.\|$, qui vérifie de plus

$$\text{Pour tout } x \in V : \|x\| = 0 \text{ si et seulement si } x = 0$$

Le couple (V, p)(resp$(V, \|.\|)$) est alors appelé un espace vectoriel semi-normé (resp.normé).

Lemme 1.1.5 *si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé, alors*

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y), \ \forall x, y \in V$$

$$\text{le noyau ker } p \text{ est un sous} - \text{espace de } V.$$

Si $T \in L(X, V)$, alors $p \circ T : W \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-normé sur W.
si, de plus, p est une norme,alors l'application

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \longrightarrow p(x-y)$$

est une distance sur V.

Preuve. voir [14] ■

Exemple 1

1) *Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on définit les semi-normes sur $\mathbb{K}^n$ par (si $x \in \mathbb{K}^n$, x_j seront ses différentes composantes, i,e, $x = (x_1, ..., x_n)$) $p_k(x) = \sum_{j=1}^{k} |x_j|$, $q_k(x) = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)^{1/2}$, et $r_k(x) = \max_{j=1,...,k} |x_j|$. Lorsque $k = n$, on a á faire á des normes.*

2) *si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et Θ un sous-ouvert de Ω, alors $p_\Theta(f) = sup_{x \in \overline{\Theta}} |f(x)|$ est une semi-norme sur $C(\overline{\Omega})$ (l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$). P_Ω est bien entendu une norme sur $C(\bar{\Omega})$.*

-convergence

Définition 1.1.6 *si* $(V.p)$ *est une espace vectoriel semi-normé, alors an dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* V *converge vers* $x \in V$ *(en abrégé* $x_n \longrightarrow x$*) si* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} p(x_n - x) = 0$.
soit S *sous-ensomble de* V*, alors la fermeture de* S *dans* V *pour la semi-norme* p *est* $\overline{S} = \{x \in V : \exists x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_n \longrightarrow x \text{ dans } V\}$ *.* S *est dit fermé si* $S = \overline{S}$

Lemme 1.1.7 *si* (V, p) *est un espace vectoriel semi-normé et* M *un sous-espace de* V*, alors* $\overline{M}$ *est un sous-espace fermé de* V*.*

Preuve. soient $x, y \in \overline{M}$ et $x_n, y_n \in M$ tels que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ dans V. Par (1.4), on a $p(x_n + y_n - (x + y)) \leqslant p(x_n - x) + p(y_n - y) \longrightarrow 0$. Ce qui prouve que $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ dans V et donc que $x + y \in \bar{M}$, puisque touts les $x_n + y_n \in M$. De même, en utilisant (1.3) on montre que $\alpha x \in \overline{M}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ ■

-continuité

Définition 1.1.8 *soient* (V, p)*et* (W, q) *deux espace vectoriels semi-normé et une application* $T : V \longrightarrow W$*(pas nécessairement linéair). on dit que* T *est continue en* $x \in V$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \forall y \in V : p(x - y) < \delta \Rightarrow q(Tx - Ty) < \varepsilon$$

T *est dite continue si* T *est continue en tout point de* V*.*

Théoréme 1.1.9 T *est continue en* x *si et seulement si* $x_n \longrightarrow x$ *dans* V *implique que* $Tx_n \longrightarrow Tx$ *dns* W*.*

Preuve. $q(T(x_n) - T(x)) = q(T(x_n - x)) \leqslant C\ q(x_n - x) \leqslant C\ \varepsilon = \varepsilon'$
donc $Tx_n \longrightarrow Tx$ ■

Théoréme 1.1.10 *si* T *est une application linéaire de* V *das* W*. alors l'équivalence des assertions suivantes :*

(1) T *est continu en 0,*

(2) T *est continu sur* V*,*

(3) T *est bornée sur la sphére [resp. boule] unité de* (V, p)

(4) il existe un constant $K \geqslant 0$ *telle que*

$$q(T(x)) \leqslant Kp(x), \forall x \in V$$

(5) T est uniformément continue sur V.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) si T continue en 0, pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver $\eta > 0$ tel que :

$$x \in V, p(x) \leqslant \eta \Rightarrow q(T(x)) \leqslant \varepsilon$$

En utilisant la linéarité de T on déduit alors que pour x_0, x dans V tels que $p(x - x_0) \leqslant \eta$ on a $q(T(x) - T(x_0)) \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve la continuité [et même (l'uniforme continuité) de f sur p

(2) $\Rightarrow$ (3) si T est continue sur V est en particulier continue en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$x \in V, \quad p(x) \leqslant \eta \Rightarrow q(T(x)) \leqslant 1.$$

Pour tout x dans la sphére [resp. boule] unité de (V, p) on a $p(x) = 1$ [resp.$p(x) \leqslant 1$] de sorte que $p(\eta x) = \eta$ [resp.$p(\eta x) \leqslant \eta$] et avec la linéarité de T on déduit que $q(T(x)) \leqslant \dfrac{1}{\eta}$. On a donc ainsi prouvé , que T est bornée sur la sphére [resp. boule] unité de (V, p).

(3) $\Rightarrow$ (4)Si T est bornée sur la sphére [resp. boule] unité de (V, p) il existe un réel $c > 0$ tel que $q(T(x)) < c$ pour tout $x \in V$ tel que $p(x) = 1$ [resp.$p(x) \leqslant 1$] En remarquant que pour tout vecteur

x non nul dans V le vecteur $\dfrac{1}{p(x)}x$ dans la sphére (et la boule) unité de (V, p) et en utilisant la linéarité de T on déduit que $q(T(x)) < c\ p(x)$ cette inégalité étant aussi vérifée pour $x = 0$

(4) $\Rightarrow$ (5) et (5) $\Rightarrow$ (1) et Ces implications sont évidentes.

■

Définition 1.1.11 *soient (V, p) et (W, q) deux espaces vectoriels semi-normés, alors on désigne par $\mathcal{L}(V, W)$, l'ensemble des applications linéaires continueus de V dans W. C'est un sous-espace de $L(V, W)$,dont les éléments sont usuellment appelés opérateurs bornés de V dans W (vu le théoréme 1.1.10).*

Théoréme 1.1.12 *soient (V, p) et (W, q) deux espaces vectoriels semi-normés, alors pour tout $T \in \mathcal{L}(V, W)$, on pose $|T| = \sup_{x \in V : p(x) \leqslant 1} q(T(x))$. Alors $|.|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(V, W)$ et on a les égalités :*

$$|T| = \sup_{x \in V : p(x) = 1} q(T(x)).$$

$$= \inf\{K > 0 : q(T(x)) \leqslant Kp(x), \forall x \in V\}$$

Dés lors, on a $q(T(x)) \leqslant |T|p(x), \forall x \in V$. Enfin, si q est une norme, alors $|.|$est une norme.

Preuve. voir [14] $\blacksquare$

Définition 1.1.13 *one note*

$$V^{'} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})\} = \{f \in V^{\star} : f \text{ est continue}\}.$$

le dual topologique de V. Grâce au théoréme précédent, c'est un espace vectoriel normé , pour la norme

$$\|f\|_{V'} = \sup_{x \in V : p(v) \leqslant 1} |f(x)|.$$

Pour $f \in V^{'}$. on notera parfois $< f, v >$. l'image de $v \in V$ par f.

Définition 1.1.14 *Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|^{'}$ sur un espace vecoriel V sont dites équivalentes s'il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que*

$$C_1 \|x\|^{'} \leqslant \|x\| \leqslant C_2 \|x\|^{'}, \forall x \in V,$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les notions de continuité et de convergence sont identiques pour deux normes équivalentes.

1.1.2 ESPACES COMPLES

Définition 1.1.15 *soit (V, p) un espace semi-normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V est de Cauchy si etseulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tel que } p(x_n - x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geqslant N.$$

On dit que (V, p) est complet si toute suite de Cauchy de V est convergente. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach,

Exemple 2 *Tous les espaces semi-normés de l'exemple 1 sont des espaces complets, Par contre, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour $p \in [1, +\infty[$, $C_0(\Omega)$ muni de la norme L^p*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

n'est pas complet.
Rappelons que l'on définit

$$L^p(\Omega) = \{f \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega : |f|^p \text{ est Lebesgue intgrable sur } \Omega\}.$$

Muni de la norme (1.5) *(en prenant l'intégrale de Lebesgue) c'est un espace de Banach, qui est la complétion au sens ci-dessous de $C_0(\Omega)$ muni de cette même norme.*

Théoréme 1.1.16 *Tout espace semi-normé (V, p) (resp.normé) admet une compléetion (W, q) , i.e, que (W, q) est un espace semi-normé complet (resp. normé complet) et il existe une application linéaire injective I de V dans W vérifiant $R(I)$ est dense dans W et I préserrve la semi-norme (resp.norme) : $q(I(x)) = p(x)$, puor tout $x \in V$.*

Preuve. voir [14] ■

Théoréme 1.1.17 *si (V, p) est un espace vectoriel semi-normé et (W, q) est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(V, W)$ et V' sont des espaces de Banach.*

Preuve. voir [14] ■

1.1.3 ESPACE DE HILBERT

Dans de nombreuses applications, une notion d'orthogonalité est utille. Cell-ci est basé sur la notion de produit scalaire que nous introduisons maintenant .

Définition 1.1.18 *Un produit scalaire sur un espace vectoriel V est une application $(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant :*

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \forall x, y, z \in V, \tag{1.6}$$

$$(\alpha x, y) = \alpha (x, y), \forall x, y, \in V, \alpha \in \mathbb{K}, \tag{1.7}$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in V, \tag{1.8}$$

$$(x, x) > 0, \forall x \in V \quad : x \neq 0. \tag{1.9}$$

le couple $(V, (.,.))$ est appelé espace préhilberitien.

Théoréme 1.1.19 *si $(V, (.,.))$ est un espace préhilberitien, alors on a l'inégalité suivante ,dite de Cauchy-Schwarz :*

$$|(x, y)| \leqslant (x, x)^{1/2} (y, y)^{1/2}, \forall x, y \in V \tag{1.10}$$

$\|x\| = (x, x)^{1/2}$ est une norme, appelée norme induite par le produit scalaire $(.,.)$, sur V vérifiant

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \forall x, y \in V \tag{1.11}$$

Le produit scalaire est continu de $V \times V$ dans $\mathbb{K}$.

Preuve. Graâce á (1.9), on a

$$0 \leqslant (\alpha x + y, \alpha x + y) = |\alpha|^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\left(\alpha\left(x, y\right)\right), \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Le scalaire $\alpha = -\frac{\overline{(y,x)}}{(x,x)}$ foirinit (1.10). Pour établir que $\|.\|$ est une norme, par(1.10), on remarque que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\left(\alpha\left(x, y\right)\right) + \|y\|^2 \leqslant \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,$$

ce qui prouve (1.4), Les autres propriété sont immédiates á vérifier.
La continuité de produit scalaire suit de l'iniégalité

$$|\left(x_n, y_n\right) - \left(x, y\right)| \leqslant \|x\|.\|x_n - y_n\| + \|y_n\|.\|x - x_n\|$$

. appliquée á deux suites $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$ dans V. ■

Définition 1.1.20 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien* $(V, (.,.))$*dont l'espace normé induit est complet.*

Exemple 3

1) $\mathbb{K}^n$ *muni du produit scalaire* $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$.

2) si Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, on définit sur* $C_0\left(\Omega\right)$ *le produit scalaire*

$$(f, g) = \int_{\Omega} f\left(x\right) \overline{g\left(x\right)} dx. \tag{1.12}$$

Comme nous l'avons vu, ce n'est pas un espace de Hilbert.

3) L'espace $L^2\left(\Omega\right)$ *muni du produit scalaire* (1.12) *(en prenent dans* (1.12) *l'intégrale de lebesgue) est de Hilbert, c'est la complétion de* $C_0\left(\Omega\right)$ *pour la même norme*

Théoréme 1.1.21 (représentation de Riesz) *soit* H *un espace de Hilbert et* $f \in H'$ *alors il existe un et seul élément* T_f *de* H *tel que*

$$< f, g >= \left(T_f, g\right), \forall g \in H$$

De plus, on $\|T_f\| = \|f\|_{H'}$. *Autremen dit, l'application*

$$T : H' \longrightarrow H : f \longrightarrow T_f,$$

est un isomorphisme.

Preuve. voir [3] ■

1.2 Notions élémentataires sur les EDP

1.2.1 GÉNÉRALITÉS

Une équation aux dérivées partielles (noté EDP)est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles) u et ses dérivées partielles est une fonction donnée f :

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f \ dans \ \Omega, \tag{1.13}$$

oú Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et F est une fonction de plusieurs variables réelles, L'ordre de dérivation le plus élevé (noté ici m) apparaissant dans (1.13) est applelé l'ordre de L'EDP. Notons que si $n = 1$, alors l'EDP est une équation différentielle ordinaire (EDO).

1.2.2 CONDITIONS AU BORD

L'équivalent des conditions initiales pour les EDO est ici la notion de conditions au bord (ou conditions aux limites) qui signifient qui'on impose que la solution u de (1.13) doit satisfaire á certaines identitées sur des parties bord de Ω. Celles-ci étant imposées pour avoir unicité de la solution.

1.2.3 EDP LINÉAIRE D'ORDE DEUX Á COEFFICIENTS CONSTANTS EN DIMENSION 2

Elles sont de la forme

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1,2} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f. \tag{1.14}$$

oú les coefficients a_{ij}, a_i sont des constantes réelles telles que $a_{12} = a_{21}$ et (pour qu'elles soient effectivement d'ordre 2)

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{12}| > 0$$

1.2.4 Exemples et classification si l'ordre est $\leqslant 2$.

Les edp sont des transcriptions mathématiques de phénoménes intervenant en physique, chimie, finance, biologie....

On distingue trois grandes catégories d'edp :
1. les edp de type elliptique dont le prototype est l'equation de Poisson

$$-\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = f(x), \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

2. les edp de type parabolique dont le prototype est l'equation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \alpha \Delta T(x,t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \alpha > 0$$

Il s'agit d'un probléme dévolution car la variable t du temps intervient.
3. les edp de type hyperbolique dont les prototypes sont . l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

- l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

Si on considére une edp d'ordre $\leqslant 2$ á coefficients constants du type

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + b\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x,t) + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t) + e\frac{\partial u}{\partial y}(x,t) + fu = 0$$

avec a, b, c, d, e, f des réels donnés alors si la forme quadratique

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

- est une ellipse l'edp est dite elliptique,
- est une hyperbole l'edp est dite hyperbolique,
- est une parabole l'edp est dite parabolique.

1.3 Distributions et espaces de sobolev

Aprés un rappel sur la théorie des distributions, nous déinissons les espaces de Sobolev. Les propriétés de ces espaces qui seront utilisées dans la suite de ce travaille.

1.3.1 DISTRIBUTIONS

-L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.3.1 *Liespace $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions C^{∞} sur Ω á support compact inclus dans Ω . on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la «pseudotopologie» suivante : soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que φ_n converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (en notation $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :*

a) il exste un compact K de Ω tel que supp$\varphi_n \subset K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $D^n\varphi_n$ converge vers 0 uniformément vers 0 sur K, auterment dit

$$\sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha}\varphi_n(x)| \longrightarrow 0, \; lorsque \; n \longrightarrow \infty.$$

Remarque 1.3.2

1) si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, comme supp$D^{\alpha}\varphi \subset$ supp φ, on aura aussi $D^{\alpha}\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour la même raison, si $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $D^{\alpha}\varphi_n \longrightarrow 0$, dans $\mathcal{D}(\Omega)$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

2) on dira que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi_n - \varphi \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

-L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.3.3 *$\mathcal{D}'(\Omega)$ est dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Dés lors, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si seulment si $T \; : \; \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ satsfiait :*

a) T est une application linéaire

b) T est continue, i.e. si $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$ dans $\mathbb{R}$

Exemple 4 (Le delta de dirac) *si $\alpha \in \Omega$ est un point fixé de Ω, alors on appelle le delta de Dirac en α la distribution :*

$$\delta_{\alpha} : \; \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longrightarrow \varphi(\alpha)$$

La linéarité découle immédiatement de la définition de la somme et la multiplication scalaire dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Vérifions maintenant la continuité : Si $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il faut vérifier que $\delta_{\alpha}(\varphi_n) = \varphi_n(\alpha) \longrightarrow 0$. Vu la Défintion 1.3.1, on sûrement que $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_n| \longrightarrow 0$, ce qui implique donc que $|\varphi_n(\alpha)| \longrightarrow 0$

Exemple 5 *L'espace $L^1_{loc}(\Omega) = \cap_k$ compact de $_{\Omega}L^1(K)$ des fonctions localement intégrable de Ω peut être identifié á un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$, En effet, á $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ an associe la distribution T_f comme suit :*

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longrightarrow \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \tag{1.15}$$

La linéarité découle de la linéearite de l'intérale, montrons la continuité, Fixons une suite $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et appelons K le compact fixe contenant tous les supports des φ_n alors

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)dx| &= |\int_K f(x)\varphi_n(x)dx| \\
&\leq \int_K |f(x)\varphi_n(x)|dx \\
&\leq \max_{x\in K}|\varphi_n| \int_K |f(x)|dx.
\end{aligned}
$$

Ceci implique que $\int_\Omega |f(x)\varphi_n(x)|dx \longrightarrow 0$, vu que $\max_{x\in K}|\varphi_n| \longrightarrow 0$ et que $\int_K |f(x)|dx$ est fini
Remarquons que cet argument montre par la même occasion que T_f est bien définie.

Proposition 1.3.4 *Il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\delta_0 = T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Preuve. Supposons que ce soit le cas, Alors on aurait

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.16}$$

Ainsi en prenant $\varphi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[) \cap \mathcal{D}(]-\infty,0[)$, on en déduit que $f = 0$ presque partout ; auterement dit f est la fonction nule, Ainsi en revenant á (1.16). on aurait

$$\varphi(0) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ce qui est impossible. ■

-Dérive des distributions

Définition 1.3.5 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la dérivée $D^\alpha T$ est definie par*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.17}$$

Lemme 1.3.6 *si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Preuve. La linéarité découle de la linéarité de la dérivation et de T. Etablissons la continuité, soit $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. comme on a

$$\langle D^\alpha T, \varphi_n\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi_n\rangle,$$

il suffit de vérifier que $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Vu la définition 3.1, il faut vérifier que la suite $D^\alpha \varphi_n$ satisfait aux conditions a) et b) :

a) *supp* $D^\alpha \varphi_n \subset$ *supp* $\varphi_n \subset K$, ce qui fournit la propriété a) pour $D^\alpha \varphi_n$.

b) Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha D^\beta \varphi_n| = \sup_{x\in\Omega} |D^{\alpha+\beta} \varphi_n|$$

cette derniére expression tend bien vers 0, puisque $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. ■

Exemple 6 *soient* $\Omega =]0,1[$ *l'intervalle réel et* $f \in C^1(]0,1[)$. *comme* f *ainsi que sa dérivée* $f^{'}$ *sont continues (donc dans* L^1_{loc}*), on peut leur associer les distributions* T_f *et* $T_{f'}$, *Nous allons montrer qu'alors*

$$DT_f = T_{f'} \tag{1.18}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *par (1.17), on a*

$$\langle DT_f, \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi^{'}\rangle$$

$$= -\int_0^1 f(x)\varphi^{'}(x)dx$$

$$= \int_0^1 f^{'}(x)\varphi(x)dx - f(1)\varphi(1) + f(0)\varphi(0)$$

cette derniére égalité s'obtenant par intégration par parties, qui est permise vu que f *et* φ *sont dans* $C^1(]0,1[)$. *Finalement, comme* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, *on obtient*

$$\langle DT_f, \varphi\rangle = -\langle T_{f'}, \varphi\rangle,$$

ce qui prouve (1.18) puisque φ *était choisie quelconque dans* $\mathcal{D}(\Omega)$.
Par itération de (1.18), on a donc que si $f \in C^m(]0,1[)$, *alors* $DT_f = T_{Df}$, *pour tout* $j \in \{1, ..., m\}$.

Exemple 7 *on prend* $\Omega = \mathbb{R}$ *et la fonction dite de Heaviside* H *définie par*

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

La fonction H *apparitient bien á* $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *il est donc légitime de lui associer la distribution* T_H *par (1.17). calculons* DT_H *: fixons* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *quelonque, alors*

$$\langle DT_H, \varphi\rangle = -\langle T_H, \varphi^{'}\rangle$$

$$= -\int_0^{+\infty} \varphi^{'}(x)dx$$
$$= \varphi(0).$$

Ceci établit que $DT_H = \delta_0$
Remarquons que la dérivée $H^{'}$ *de la fonction* H *(au sens des finctions) est nulle sauf en 0, dans ce cas on a donc que* $DT_H \neq T_{H'}$

Remarque 1.3.7

1) *Toute distribution* T *est indéfinimenent dérivable (au sens de la Définition* 1.3.5*) et l'identité suivante est toujours satisfaite :*

$$D^{\alpha}D^{\beta}T = D^{\beta}D^{\alpha}T = D^{\alpha+\beta}T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

2) *Si la dérivée au sens usuel* $D^{\alpha}f$ *existe p.p. pour une certaine fonction* f*, cette dérivée ne coincide pas nécessairement avec la dérivée distributionnelle (cf l'exemple 6)*

Théoréme 1.3.8 *soit* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *satsfaisant* $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} = 0$*, pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$*. Alors* T *est constante sur chaque composante connexe de* Ω*.*

Preuve. voir [14] ■

Corollaire 1.3.9 *supposons que* Ω *est un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^n$ *et fixons* $m \in \mathbb{N}^*$ *soit* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *satisfaisant*

$$D^{\alpha}T = 0, \forall |\alpha| = m \tag{1.19}$$

Alors $T \in \mathbb{P}_{m-1}(\Omega)$*.*

Preuve. voir [14] ■

-Convergence des distributions

Définition 1.3.10 *soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*. on dit que* T_n *converge vers 0 dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, note* $T_n \longrightarrow 0$ *dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, si et seulement si*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

. une propriété, dont la vérification est immédiate, est que si $T_n \longrightarrow 0$ *dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, alors* $D^{\alpha}T_n \longrightarrow 0$ *dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$

Remarque 1.3.11 *on dit qu'une suite d'éléments* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *converge vers* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, noté* $T_n \longrightarrow T$ *dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *, si et seulement si* $T_n - T \longrightarrow 0$ *dans* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*.la limite si elle existe est alors unique.*

1.3.2 Les Espace de Sobolev

-Définition

Définition 1.3.12 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\} \tag{1.20}$$

on le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx, \tag{1.21}$$

te de la norme

$$\|u\|_{m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.22}$$

Remarque 1.3.13 *En fait, si l'on veut définir correctement $H^m(\Omega)$, il faut procéder comme suit : $u \in L^2(\Omega)$ appartient á $H^m(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m$, il existe $v_\alpha \in L^2(\Omega)$ tel que $D^\alpha T_u = T_{v_\alpha}$. Par la suite, nous ferons trés souvent l'abus d'ecriture qui consiste á identifier $D^\alpha u$ avec v_α.*

Théoréme 1.3.14 *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. voir [14] ■

Définition 1.3.15 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. De maniére évidente, $H_0^m(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^m(\Omega)$: mais en général $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$. Signalons deux cas oú on a bien l'égaliteé*

1) si $m = 0$, alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ donc $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$

2) si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on peut montrer que $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$.
Á l'exception de ces deux cas-lá. comme nous le verrons, on n'a pas l'éalitéen général.

1.3.3 Régularité du bord

Nous désignerons par Γ la frontiére de Ω.

Définition 1.3.16 *On dit que Γ est continu pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V (si, dans la suite, nous avons besoin de marquer la dépendence de V á x, nous le noterons V_x) de x dans $\mathbb{R}^n$ et un nouveau systéme de coordonnées cartésiennes $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$*

(a) il existe $a_i > 0, i = 1, ..., n$, tel que V est un hypercube dans ces nouvelles coordonnées de côtés de longueur $2a_i$

$$V = \{(y_1, ..., y_n) : |y_j| < a_j \, \forall j = 1, ..., n\};$$

(b) il existe une fonction continuue φ définie sur

$$V' = \{(y_1, ..., y_{n-1}) : |y_j| < a_j \, \forall j = 1, ..., n-1\};$$

á valeurs réelles et satisfaisant

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2}, \forall y' \in V'$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\},$$
$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n = \varphi(y')\},$$

De la même maniére, nous dirons que Γ est lipschitzien (respectivement de classe $C^{k,1}, k \in \mathbb{N}, m$ fois continûment différentiable, $m \in \mathbb{N}$), lorsque la fonction φ ci dessus est lipschitzienne (resp. de classe $C^{k,1}, m$ fois continûment différentiable).

Remarque 1.3.17 *Dans le cas lipschitzien, on suppose toujours que la constante de Lipschitz de φ est uniforme c'est-á-dire indépendante de x . une uniformité analogue est supposé pour la condition $C^{k,1}$.*
la définition précédente signifie qu'au voisinage du point x, Ω est en dessous du graphe de φ et que la frontiére Γ de Ω coincide avec le graphe de φ.
Comme $(V_x \cap \Gamma)_{x \in \Gamma}$ est un recouvrement ouvert de Γ qui est compact, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fni , notons le $(V_j \cap \Gamma)_{j=1,...J,}$ Pour chaque et par V_j' l'ouvert de dimension $n-1$ correspondant, Nous introduisons maintenant une paramétrisation de $V_j \cap \Gamma$: soit

$$\phi_j : V_j' \longrightarrow \mathbb{R}^n : y' \longrightarrow (y', \varphi_j(y')).$$

on a chairement que $\phi_j(V_j') = V_j \cap \Gamma$. De plus, ϕ_j est injective puisque $\phi_j(y') = \phi_j(\mathfrak{z}')$ est équivalent á $(y', \phi_j(y')) = (Z', \phi_j(\mathfrak{z}'))$ En ne regardant que les premiéres composantes, on déjá $y' = Z'$. Ainsi ϕ_j est bejection entre : V_j' et : $V_j \cap \Gamma$.

Définition 1.3.18 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on dit qu' une fonction f définie sur Γ est dans $L^p(\Gamma)$ si et seulement si pour tout $j \in \{1, ..., J\}, f \circ \phi_j \in L^p(V_j')$ et on pose*

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{J} \|f \circ \phi_j\|^p_{L^p(V_j')} \right)^{1/p} \tag{1.23}$$

Remarque 1.3.19 *La propriété d'être dans $L^p(\Gamma)$ ne dépend pas du recouvrement choisi, Pour deux recouvrements, les normes que l'on obtient sont en fait équivalentes*

1.3.4 Un résultat de densité

Théoréme 1.3.20 *si Ω est á bord lipschitzien, alors $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Preuve. voir [11] et [8] et[6] ■

Définition 1.3.21 *soient deux espaces de Banach X et Y tels que $Y \subset X$. on dit que Y s'injecte de maniére continue dans X (en notation $Y \hookrightarrow X$) si et seulement si l'opérateur identité*

$$Id : Y \longrightarrow X : y \longrightarrow y$$

est continu. De même, on dit que Y s'injecte de maniére compacte dans X (en notation $Y \hookrightarrow_c X$) si et seulement si l'opérateur Id est compact de Y dans X

Théoréme 1.3.22 ((Rellich)) *si Ω est un ouvert borné á bord continu, alors*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{1.24}$$

En particulier,

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{1.25}$$

Preuve. voir [11] et [8] et[6] ■

Théoréme 1.3.23 ((injection de Sobolev)) *si Ω est un ouvert borné á bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p} \tag{1.26}$$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} > 0 \tag{1.27}$$

Preuve. voir [11] et [8] et[6] ■

Théoréme 1.3.24 ((de Kondraśov)) *si Ω est un ouvert borné á bord lipschitzien, alors on a l'injection*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } m - \frac{n}{2} > -\frac{n}{p} \tag{1.28}$$

Remarquons qu'au Theorem 1.3.23, les conditions $m - \frac{n}{2} \geq -\frac{n}{p}$ et $m - \frac{n}{2} > 0$ sont optimales, en effet on montre que si $m - \frac{n}{2} < -\frac{n}{p}$, alors l'injection (1.26) n'a pas lieu en général, de même si $m - \frac{n}{2} \leq 0$, alors l'injection (1.27) n'a pas lieu en général .

Preuve. voir [11] et [8] et[6] ■

Chapitre 2

L'étude de probléme aux limtes de l'equation de Poisson avec condition de Dirichlet est baseé sur la formalation variationnelle de ce problemé, Celle ci permet d'obtenir aisément l'existence et l'unicité des solutions. Ensuite nous verrons que la formalation variationnelle est de plus bien adapteé á l'approximation numérique de ce probléme. Nous commencons par une formalation variationnelle abstraite et montrons son interêt.

2.1 Probléme aux limites elliptique

2.1.1 Position du problemé

soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de foruntiére reguliere $\partial\Omega$. le probléme elliptique de l'equation de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet et donnée par

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

ou $f \in H^{-1}(\Omega)$.
soit $V = H_0^1(\Omega)$ la farmuture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ oú

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., n\}$$

$V' = H^{-1}(\Omega)$
l'espace dual de $V = H_0^1(\Omega)$ de norme

$$\|l\|_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle l, v\rangle|}{\|v\|_{H_0^1}}$$

oú $v \in V, v \neq 0, l \in V^{'}$ oú $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire
si $H = L^2(\Omega)$ et $V \subset H$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{1/2} = \{(u,u)\}^{1/2}$$

on multiplier l'equation

$$AU = -\Delta u = f$$

par $v \in V = H_0^1(\Omega)$ et on intégre dans Ω

$$-\int_\Omega \Delta u.vdx = \int_\Omega f.vdx$$

$$-\nabla u.v|_{\partial\Omega} + \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx = \int_\Omega f.vdx.$$

D'aprés la condition de Dirichlet ou obtient.
alors

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx = \int_\Omega f.vdx$$

d'ou

$$a\,(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx$$

et

$$F(v) = \int_\Omega f.vdx.$$

$V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la produit scalaire $(u,v)_V = \sum_{i=1}^n (\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial v}{\partial x_i})$ et la norme $\|u\|_V = \{(u,v)_V\}^{1/2}$ l'operateur linéaire continue $A \in L(V, V^{'})$ ou associe la forme bilineaire continue a sur V par

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \forall u, v \in V$$

a est continue car

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \forall u, v \in V$$

2.2 PROBLÉME ABSTRAIT

soit V est un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(.,.)_V$ et de norme $\|.\|_V$. Fixons une forme bilinéaire continue

$$a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (u, v) \longrightarrow a(u, v)$$

la bilinéarité signifiant la linéarite sur u et v ; tandis que la continuté est équivalente á l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leqslant M\|u\|_V.\|v\|_V, \forall u, v \in V \tag{2.2}$$

Nous considérons le probléme abstrait (ou variationnel) suivant : étant donné $F \in V'$, trouver $u \in V$ solution de

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in V. \tag{2.3}$$

L'existence d'une solition á ce probléme est basée sur la coercivité de la forme a.

Définition 2.2.1 *on dit que la forme bilinéaire a est V-elliptique ou coercive sur V si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$a(u, u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \forall u \in V \tag{2.4}$$

-Nous pouvons alors démontrer le résultat suvant connu sous le nom de Lemme de Lax-Milgram

Théoréme 2.2.2 (Lax-Milgram) *si la forme bilinéaire a est V-elliptique, alors le probléme* (2.3) *a une solution unique $u \in V$. De plus, on a l'estimée*

$$\|u\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}. \tag{2.5}$$

Preuve. Fixons $u \in V$ et considérons l'appication

$$Au : V \longrightarrow \mathbb{R} : v \longrightarrow a(u, v).$$

ceci définit une forme linéaire contiue sur V, i,e ., $Au \in V'$, en effet

$$|Au(v)| = |a(u, v)| \leq M\|u\|_V.\|v\|_V, \forall v \in V$$

Ce qui prouve de plus que

$$\|Au\|_{V'} \leq M\|u\|_V. \tag{2.6}$$

Pour ρ paramétre réel positif, introduisonts

$$\Phi_\rho : V \longrightarrow V : u \longrightarrow u - \rho T(Au - f),$$

l'application T de V' dans V étant définie au Théoréme (1.1.21).
L'existence d'un point fixe pour Φ_ρ est clairement équivalente á l'existence d'une solution á notre probléme (2.3).
Il nous reste donc á montrer que, pour ρ suffisamment petit, Φ_ρ est une contraction, puiqu'alors Φ_ρ aura un unique poit fixe. Pour cela on calcule $\|\Phi_\rho(u) - \Phi_\rho(v)\|_V$.
Par la définition de Φ_ρ et la bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\|\Phi_\rho(u)-\Phi_\rho(v)\|_V^2 = (u-v, u-v)_V - 2\rho(u-v, T(Au-Av))_V + \rho^2(T(Au-Av), T(Au-Av))_V$$

$$= \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|T(Au - Av)\|_V^2 - 2\rho(u - v, T(Au - Av))_V$$

$$= \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|Au - Av\|_{V'}^2 - 2\rho(Au - Av)(u - v),$$

cette derniére identité s'obtenant grâce au propriété de l'application T. Finalement vu la définition de A, on arrive á

$$\|\Phi_\rho(u) - \Phi_\rho(v)\|_V^2 = \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|Au - Av\|_{V'}^2 - 2\rho(u - v, u - v),$$

Par (2.6) et (2.4), on arrive á l'estimée :

$$\|\Phi_\rho(u) - \Phi_\rho(v)\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2M^2)\|u - v\|_V^2.$$

Ainsi Φ_ρ sera contractante si $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2M^2) < 1$, ce qui est équivalent á $0 < \rho < 2\alpha/M^2$.
Par (2.3) appliquée $v = u$, on a

$$a(u, u) = F(u).$$

Ainsi par la coercivté de a et la continuité de F, l'identité ci-dessus implique

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = F(u) \leq \|u\|_V\|F\|_{V'}$$

Ce qui prouve l'estimée (2.5) ■

2.3 L'unicté de le solution

D'apré le théoremé d'existence d'une solution
la forme bilinéaire a est V elliptique
soient u_1 et u_2 deux solutions de l'equations de Poisson
Alors

$$-\Delta u_1 = f \ et \ -\Delta u_2 = f$$

$$\Rightarrow \ -\Delta u_1 = -\Delta u_2$$

on multiplier par $v \in V = H_0^1(\Omega)$ et intégre par parties.

$$-\int_\Omega \Delta u_1.v \ dx = -\int_\Omega \Delta u_2.v \ dx$$

d'aprés la condition de Dirichlet on a

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v \ dx = \int_\Omega \nabla u_2 \nabla v \ dx$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla v \ dx = 0$$

$$\Rightarrow a(u_1 - u_2, v) = 0 \ \forall v \in V$$

On prend $v = u_1 - u_2$
D'apres la condition de coercivité

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_v^2$$

$\Longrightarrow u_1 = u_2$ alors on a l'unicite de la solution.

2.4 Resultat de regularite

Une resultat de régularité de la solution u de la probléme (2.1) est donné par la théoréme suivante.

Théoréme 2.4.1 *soit $f \in L^2(\Omega)$ alors il éxiste une soltion unique u de la probléme (2.1) oú $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*

Preuve. voir [2] ■

2.5 Discretisation de la Probléme

Nous considérons l'approximation par differences finies dans un domaine unidimensionnel et bidimensinnel de l'equation de Poisson avec les conditions aux limites de Dirichlet.
Soit v_i l'approximation de $u(x_i)$ et $v_{i,j}$ l'approximation de $u(x_i, y_j)$ .Dans l'approximation suivantes

$$u_{xx} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2)$$

$$u_{xx} = \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + o(h^2)$$

Ces approximation fournir les schémes suivants :

Dans un unidimensionnel :

$$L_h v = -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \text{ pour } i = 1, 2, ..., n \tag{2.7}$$

et

$$v_0 = v_{n+1} = 0$$

Dans un bidimensinnel :

$$L_h v = -\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} - \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_i) \text{ pour } i, j = 1, 2, ..., n \tag{2.8}$$

et

$$v_{0,j} = v_{n+1,j} = 0,\ v_{i,0} = v_{i,n+1} = 0$$

Définition 2.5.1 *Soit $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemle des continuités sur l'ouvert Ω pour un nombre $m \geqslant 0$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ est l'ensemble de m fois des fonctions continûment différentiables sur Ω de même nous déffinissons :*

$$\mathcal{C}_0^2(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) |\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

2.5.1 Dans un domain unidimensionnel

Notre objectif dans cette section est de montrer la solution discréte v convergent la solution continue u lorsque l'espacement h approche Zéro.

Nous considérons la discrétisation :
$[x_i, x_{i+1}],\ x_i = ih,\ h = \dfrac{1}{N+1},\ i = 0, 1, ..., N+1$ de l'intervalle $[0, 1]$
Nous definissons l'approximation $\{v_i\}_{i=0}^{N+1}$ en exigeant (2.7)
Le systéme (2.7) peut être reécrit comme un systéme d'equations sons la forme

$$Av = b \tag{2.9}$$

Oú A est une matrice $N \times N,\ v$ et b sont les deux vecteurs N dimensionnels nous déinissons l'operateur linéaire suivante

$$A : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

$$(v_1, ..., v_N) \longmapsto A(v_1, ..., v_N) = (2v_1 - v_2, ..., -v_{N-1} + 2v_N).$$

En fait, cet opérateur linéaire A est une bijection alors le systéme (2.9) a une solution unique qui peut être calculeé en résolvant (2.9) en utilisant la méthode de substitution alors la solution v de la probléme discrete est :

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{2N}{(N+1)^3} f(\frac{1}{N+1}) + \frac{5N-1}{(N+1)^3} f(\frac{2}{N+1}) + ... + \frac{1}{(N+1)^3} f(\frac{N}{N+1}) \\
&. \\
&. \\
v_{N-p+1} &= \frac{p}{(N+1)^3} f(\frac{1}{N+1}) + \frac{2p}{(N+1)^3} f(\frac{2}{N+1}) + ... + \frac{N-p+1}{(N+1)^3} f(\frac{N}{N+1}) \\
&. \\
&. \\
v_N &= \frac{1}{(N+1)^3} f(\frac{1}{N+1}) + \frac{2}{(N+1)^3} f(\frac{2}{N+1}) + ... + \frac{N}{(N+1)^3} f(\frac{N}{N+1})
\end{aligned}$$

La domaine Ω est donnée par $\Omega =]0, 1[$ soit D_h est une ensemble de fonctions discrétes définies aux points de la grille x_i pour $i = 0, 1, ..., n+1$ et $D_{h,0}$ est le sous ensemble de D_h contenant des fonctions discrétes qui sont définies dans chaque point de la grille mais avec la propriété spéciale qui est Zéro á la forntiére. Nous considérons une approximation de differnce finie de l'equation de Poisson sur Ω avec des conditions aux limites de Dirichlet homogénes.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f,\ dans\ \ \Omega \tag{2.10}$$

$$u = 0\ sur\ \partial\Omega \tag{2.11}$$

Nous pouvons formuler le probléme discret (2.7) comme suit :
Trouver une fontion discréte $v \in D_{h,0}$ telle que

$$L_h v(x_i) = f(x_i), \ i = 1, ..., n. \tag{2.12}$$

et pour deux fonctions discrétes u, v dans $D_{0,h}$, nous définissons le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_h = h \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Nous allons donner une majoration pour l'erreur entre la solution continue u de la probleme (2.10)-(2.11) et la solution v de la probléme discrete (2.12).
Pour différentes valeurs de h nous calculons l'erreur

$$e_h = max|u(x_i) - v_i|_{i=0,1,...,n+1}$$

En outre ces valeurs sont utilisées pour estimer le taus de convergence . Alors pour montrer que la solution discréte v converge vers á la solution continue u lorsque h approches Zero alors nous voulons prrésenter les concepts d'erreur de troncature et cochérence . Pour tout la fonction discrete $v \in D_h$ nous définissions la norme par

$$\|v\|_{h,\infty} = max|v(x_i)|_{i=0,1,...,n+1}$$

Définition 2.5.2 *Soit $f \in \mathcal{C}(]0,1[)$ et soit $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ est la solution de (2.10)-(2.11) alors nous définissons la vecteur discret τ_h est appelle l'erreur de troncature définie par*

$$\tau_h(x_i) = (L_h u)(x_i) - f(x_i) \quad \textit{pour tout } i = 1, 2, ..., n$$

Nous disons que la schema de difference finie (2.12) est cohérence avec l'equation differentielle (2.10)-(2.11)si

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \|\tau_h\|_{h,\infty} = 0$$

Alors l'erreur de troncature est définie en appliquant l'opérateur de differénce L_h á la solution exacte u donc un schema est cohérent si la solution exacte résout le probléme discret Nous introduisons une norme sur l'ensemble sur $\mathcal{C}([0,1])$ pour tout fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Proposition 2.5.3 *La solution $v \in D_{h,0}$ de (2.12) verifieé*

$$\|v\|_{h,\infty} \leqslant \frac{1}{8}\|f\|_{h,\infty}$$

Preuve. voir [2] ■

Lemme 2.5.4 *On suppose $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ alors l'erreur de troncature definie ci dessus verifie*

$$\|\tau_h\|_{h,\infty} \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{12}h^2$$

Preuve. voir [2] ■

Théoréme 2.5.5 *On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est donné et soient u et v les solutions correspondant á (2.10)-(2.11) et (2.12) alors*

$$\|u - v\|_{h,\infty} \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{96}h^2$$

et

$$e_h \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{96}h^2$$

Preuve. voir [2] ■

2.5.2 Dans un domaine bidimensinnel

le systéme (2.8) peut etre réecrit comme une systéme des equation dans la forme

$$Av = b, \tag{2.13}$$

Oú A est une matrice $N^2 \times N^2$ et v, b sont les deux vecteurs N^2 dimensionnels. Notre objectif est de résoudre le systéme $Av = b$ La méthode de résolution est basé que si A est une matrice triangulaire supérieure alors le systéme a une solution unique en effet on montre que A est une matrice triangulaire supérieure cela peut être fait par elimination nous décrivons la méthode de Gaussiau l'elimination applique á un systéme lineáre $Av = b$. Nous considerons la discretisation

$$[x_i, x_{i+1}], x_i = ih, h = \frac{1}{N}, i = 0, 1, 2, ..., N+1 \; de \; l'intevalle \; [0,1]$$

$$[y_j, y_{j+1}], y_j = jh, h = \frac{1}{N}, j = 0, 1, 2, ..., N+1 \; de \; l'intevalle \; [0,1]$$

Le systéme (2.8) peut être réecrit comme un systéme d'equations sous la forms

$$Av = b \tag{2.14}$$

Oú A est une matrice $N^2 \times N^2$, et v et b sont les deux vecteurs N^2 dimensionnels en utilisant Matlab.

Forme la matruce au gmenteé $M = [A|b]$ est placer la matrice augmenté en forme triangulaire supérieure avec la commande

$>> B = \text{triu}(A)$

Construit une matrice B avec la matrice A, on peut trouver exactement la partie triangulaire supérieure de la matrice A, mais fixée à tout les éléments trianglaires inféurieure la valeur Zéro.

Et puisque (x_i, y_i) fixe $\in \mathbb{R}$ ce implique $f(x_i, y_i)$ fixe $\in \mathbb{R}$,$i, j = 0, 1, ..., N + 1$

Alors la command $>> C = \text{triu}(b)$.

Construit une matrice C avec la matrice b, on peut trouver exactement la partie trianglaire supérieure de la matrice b, mais fixée à tout les éléments trianglaires inféurieure la valeur Zéro.

$C = \text{triu}(b)$ produit

$$C = \begin{bmatrix} c_1 = \frac{1}{(N+1)^2} f(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}) \\ c_2 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ c_{N^2} = 0 \end{bmatrix}$$

En prenant $X = v$ le systéme (2.14) peut être écrit dans la forme $Bx = c$ qui peut être calculé par substitution donneé dans Algorithm ci dessous. L'algorithme est donneé comme suit :

$$x_{N^2} = \frac{v}{b_{N^2 N^2}}$$

$$\text{pour } i = N^2 - 1, ..., 1$$

$$x_i = \frac{1}{b_{i,j}} [c_i - \sum_{j=i+1}^{N^2} b_{i,j} x_i]$$

Alors la solution v de la problém discrete est :

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= \frac{1}{(N+1)^3} f(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}), \\ v_{1,2} &= 0 \\ . & \\ . & \\ v_{N,N} &= 0 \end{aligned}$$

La domaine Ω est donneé par $\Omega = (]0,1[)^2$.
Soit D_h désigner de toutes les fonctions de grille définiés sur $\overline{\Omega}$,

$$D_h = \{v | v : \overline{\Omega}_h \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

et $D_{h,0}$ est le sous ensemble :

$$D_{h,0} = \{v \in D_h \mid v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Nous considérons une approximation de differénce finie de l'equation de poisson sur Ω avec les condition de Dirichlet aux limites homogéne.

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \ dans \ \Omega \tag{2.15}$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{2.16}$$

Nous rappelons que l'approximation des differénces finies de la probléme (2.15)-(2.16) peut être formulé comme suit :
Trouve $v \in D_{h,0}$ telle que

$$L_h v(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \text{ pour tout } (x_i, y_j) \in \Omega_h, v \in D_{h,0} \tag{2.17}$$

Et pour les deux fonction u et v dans $D_{h,0}$ nous définitions la produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_h = h^2 \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} v_{ij}$$

et pour diférentes valeurs de h on calculer l'erreur

$$e_h = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}_h} |u(x,y) - v(x,y)|$$

En outre ces valeurs sont utiliseés pour estimer le taux de convergence.
Nous allons donner une majoration pout l'erreur entre la solution u de probléme continue ((2.15)-(2.16) et la solution v de la probléme discrete de la probléme (2.17), alors montre que la solution discret v converge à la solution continue u lorsque l'espacement h tend vers Zero. Alors nous voulons présentes les concepts d'erreur troncature et de cohérence comme dans un domaine à une seul dimension. On suppose que la solution u de la probléme (2.15)-(2.16) est quatre fois différentiable $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$
Soit α est la constante donneé par

$$\alpha = \max_{0\leqslant i+j\leqslant 4} \|\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}\|_\infty \tag{2.18}$$

óu

$$\|u\|_\infty = \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |u(x,y)|$$

Et pour tout fonction discrete $v \in D_h$ nous définissons la norme par

$$\|v\|_{h,\infty} = \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}_h} |v(x,y)|$$

Comme dans un domaine unidimensionnel nous inteoduisons l'erreur de troncature

$$\tau_h(x_i,y_j) = (L_h u - f)(x_i,y_j) \textit{ pour tout } (x_i,y_j) \in \Omega_h$$

le résultat suivant est une généralisation de lemm 2.5.4

Lemme 2.5.6 *On suppose que $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ l'erreur de toncature τ_h verifieé*

$$\|\tau_h\|_{h,\infty} \leqslant \frac{\alpha h^2}{6}$$

oú α est donneé par (2.18)
En utilisant la majoration sur l'erreur de troucature, nous pouvons prouver que la solution numérique converge vers la solution exacte lorsque h tende á Zéro.

L'estimation d'erreur suivante por la méthode des différences finies (2.17) est une généralisation de la théoréme 2.5.5

Théoréme 2.5.7 *Soient u te v les solution correspondants á (2.15)-(2.16) et (2.17) respectifs, si $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$, alors*

$$\|u - v\|_{h,\infty} \leqslant \frac{\alpha h^2}{48}, \text{ alors } e_h \leqslant \frac{\alpha h^2}{6}$$

oú α est donneé par (2.18)
Nous disons que la suite $\{E_h\}$ est d'ordre $\{h^2\}$ est on e'crit

$$e_h = o(h^2),$$

Ce théoréme garantit que l'erreur mesurée dans chaque points tend á Zéro lorsque le paraméter maillage h tend á Zéro.

2.6 Le probléme de Dirichlet en dimension 1

Prenons pour Ω l'intervalle réel $]0.1[$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u de L'équation difféntielle

$$-u^{''} = f \text{ dans } \Omega, \tag{2.19}$$

et satisfaisant aux conditions de bord :

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2.20}$$

ce systéme représente L'équation stationnaire d'une corde : u représente le déplacement de cette corde dans la direction perpendiculaire á celle-ci par rapport á la position de repos , f est la densité de force et les conditions au bord (2.20) singnifient que la corde est fixée á ses extrémitétés

supposons pour le moment qu'une solution u de (2.19)-(2.20) existe qu'elle est suffisamment réguliére, disons $u \in H^2(\Omega)$. Alors en multipliant l'équation (2.19) par une "fonction-test" $v \in H^1(\Omega)$, on obtient

$$-\int_0^1 u^{''}(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant paar parties dans le premier membre de cette identité, on obtient

$$\int_0^1 u^{'}(x)v^{'}(x)dx + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

comme il n'y a aucune raison que les termes de bord soient nuls, nous prenons $v \in H_0^1(\Omega)$, cette derniére indentité implique (puisqu'une telle fonction v satisfaitt $v(0) = v(1) = 0$)

$$\int_0^1 u^{'}(x)v^{'}(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.21}$$

comme les conditions de bord (2.20) impliquent que $u \in H_0^1(\Omega)$, on voit que le bon choix est de

$$V = H_0^1(\Omega)$$
$$a(u,v) = \int_0^1 u^{'}(x)v^{'}(x)dx$$
$$F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

On a ainsi montré que si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de (2.19)-(2.20), alors il est solution de (2.21) , ou de maniére équivalent. solution de (2.3) avec le choix fait ci-dessus.
Grâce au lemme de lax-Milgram, nous allons maintenant montrer que le probleme (2.21)a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$. Vérifions-en les hypotése :la bilinérite de a et la linérite de F découlent de la linérite de l'integrale.Par l'inégalité de couchy-schwartz, on vérifie que la forme a et sont continues, en effet

$$|F(v)| \leqslant \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}.$$

Comme la norme L^2 est toujours plus petite que la norme H^1, on conclut la continuité de F(on procéde de maniére analogue pour a). Reste á vérifer la coercivité de la forme a sur $H_0^1(\Omega)$ qui suit de l'inégalité de Poincaré-Friedchs puisque

$$a(u,u) = |u|_{1,\Omega}^2$$

Le Lemme de Lax-Milgram assure donc l'existence d'une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2.21). Montrons maintenant qu'elle est solution du probéme de départ (2.19)-(2.20) : Les conditions de bord (2.20) sont trivialement satisfaites puisque $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour recupérer l'équation différentielle. comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, (2.21) implique(c'est même équivalent par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$)

$$\int_0^1 u^{'}(x)v^{'}(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En conséquence, u satisfait

$$u^{''} = -f \ dans \ \mathcal{D}^{'}(\Omega).$$

Comme par hypothése, $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit que $u, u^{'}, u^{''}$ sont tous trois dans $L^2(\Omega)$, ce qui prouve l'appartenance de u á $H^2(\Omega)$. l'équation (2.19) est donc satisfaite au sens de $L^2(\Omega)$.

Conclusion

Dans ce travaille nous avons étudie une équation de Poisson dans un domaine n dimensionnel avec des conditions aux limites de Dirichlet nous établissons l'existence, l'unicité et la regularite de la solution. En utilisant la discretisation de la probléme dans un domaine unidimonsionnel et dans un doumaine bidimensionnel pour un domaine $n = N$ dimensionnel étudier la solution numérique baseé sur la théoréme des élémnts finis.

Bibliographie

[1] A.Tveito and R.Winther,Introduction to partial Differential equations,a Computation approach, Springer,Oslo, Norway,July 1998.

[2] H.Bennour and M.S.Said,Numerical Solution of Poisson equation, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 5, No. 4, December 2012 with Dirichlet Boundary Conditions,

[3] H. Brézis,Functional Analysis Sobolev and Parial Differnetial Eqautions .Mathematics Subject Classification (2010).

[4] J.L.Lions,Quelques mthodes de rsolution des problmes aux limites Non-lineares. Editions Dunod,paris, 1969.

[5] J-L Loins et E Magenes, Probléme aux limites non homgénes et applications, T. 1,Dunod. 1968.

[6] J.Neĉas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,Masson, Paris,1967

[7] J.Nédéles, Notions sur les techniques d'éléments finis, Math, et Appl., 7, SMAI, Ellipes, 1991.

[8] L-L. Loins et E. Magenes, Problémes aux limites non homogénes et application,T.1duond.1968 .

[9] P. A. Raviart et J. M, Thomas, Introdution áL'Analyse Numérique des éqation aus dérivées partielles. Masson, 1982.

[10] P. Grisvard, Elliptic problems in in nonsmooth Domains, Monographs and studies in Mathemativs, 21, Pitman, Boston, 1985.

[11] R.A.Adams,sobolev spaces, Academic Press. New-York, 1975

[12] R.E.Showalter,Hilbert space Methods for partial Differential equations, Austin,Texas Jaunuary,1977.

[13] R.Temam,Infinite-Dimensional Dynamical systems in Mechanics and physics,Second edition, Springer, Vol.68,1977.

[14] Serge.Nicaise, *Analyse neumérique etéquations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris,2000, ISBN 2 10 004941 .

الملخص

في هذه العمل ، نريد أن نثبت وجود، وحدانية الحل بشروط دري كلي. بعد أثبات وجود الحل قمنا بنظاميته، وإيجاد الحل التقريبي بطريقة الفروق المنتهية لمعادلة بواسون مع شرط دري كلي في حالة وحدانية وثنائية الأبعاد من أجل إثبات وجود الحل للمعدلات الخطية عن طريق الماتلاب.

الكلمات المفتاحية: معادلة بواسون، الحل العددي، شرط دريكلي المنتهي، ماتلاب، الوجود، الوحدانية، النظامية.

Abstract

In this work, we want to establish the existence, unique-ness and regularity of the solution is obtained with Dirichlet boundary conditions, the variational inequalities are used to establish the uniqueness of solution, and establish the regularity of the solution. we introduce a finite difference scheme approximating Poisson equation in one, two domain with Dirichlet boundary conditions, Gaussian elimination is undoubtedly the most widely used method for solving linear equations, Matlab is proposed for obtaining solutions for this problem.

Keywords : Poisson equation, Numerical solution, Matlab, Existence, Uniqueness, Regularity..

Résumé

Dans cet travaille, nous voulons établir l'existence, l'unicité et la régularité de la solution est obtenu avec les conditions aux limites de Dirichlet, les iégalités variationnels sont utilisées pour établir l'unicité de la solution, et établir la régularité de la solution. Nous présentons par différence finie de l'équation de Poisson dans un domaine unidimensionnel et bidimosionnel. l'elimination gaussienne est la plus large méthode utiliseé pour résoudre les équations linéaires. Matlab est proposé pour obtenir des solutions pour ce probléme.

Mots clés : équation de Poisson, solution numérique, DirichLe aisser les conditions limites, Matlab, existence, unicité, Régularité..