UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilité et statistique

Par : Merabet Imane

Thème

Contrôle optimal des équations différentielles les stochastiques rétrogrades

Soutenu publiquement le : 2017

Devant le jury composé de :

MEDDI FATIMA	MC . Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
AGOUNE RACHID	MA . Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
ZIBAR SAID	MA . Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

DÉDICACES

A nos chers parents qui nous ont soutenus durant notre scolarité.

A nos chères sœurs et frère et beau-frère.

A nos oncles, tantes et cousins.

A tous nos amis.

A ours leur dédions affectueusement ce mémoire.

Remerciement

La louange est à Allah

qui nous a facilité l'accomplissement de ce travail de recherche chose ne peut être qu' avec la volonté de Dieu - à lui la tout puissance et la Majesté -et que la louange initiale et finale à Allah, seigneur des mondes.

Aussi ,il nous fait plaisir que nous au commencement de ce travail ,présentons nos grands remerciement,estimations et reconnaissances à notre encadreur puissant *"SAID ZIBAR"* de nous avoir encourager encouragement moralement la durée de recherche que ce travail est le fruit de ces encouragement.

En fin, nous présentons nos véridiques remerciement à tout personne ,du proche ou du loin qui nous adonné un coup de main ,à n de terminer ce travail de recherche.

Table des matières

Notations

- ➤ T : Le temps terminal
- ➤ DSR : Équation Différentielle Stochastique Rétrograde
- ➤ $\mathcal{P}$: La probabilité
- ➤ $\mathcal{F}_t$: La filtration .
- ➤ $\{W_t\}_{t\geq 0}$: un mouvement Brownien
- ➤ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$: un espace de probabilité complet
- ➤ $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$: La filtration la filtration naturelle du mouvement Brownien W.
- ➤ $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus y_t .

Introduction

Dans ce mémoire de master, on s'intéresse à un problème de contrôle stochastique, où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) de la forme

$$\begin{cases} dy_t^v = b(t, y_t^v, z_t^v, v_t)dt + z_t^v dW_t, \\ y_T^v = \xi \end{cases}$$

où b est une fonction donnée, ξ est la condition terminal et $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien de dimension d, défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. La variable contrôle $v = (v_t)$, appelée contrôle strict (classique), est un processus $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs dans un sous ensemble U de $\mathbb{R}^k$.

On note par U la classe de tous les contrôles stricts.

L'objectif du problème de contrôle stochastique est de minimiser une fonction coût de la forme

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(y_0^v) + \int_0^T h(t, y_t^v, z_t^v, v_t)dt\right],$$

$x_{t+Ut} - x_t = b(t, x_t)Ut + \xi_{t,x_t,Ut}$. Avec $\mathbb{E}[\xi_{t,x_t,Ut}] = 0$

où g et h sont des fonctions données et (y_t^v, z_t^v) est la trajectoire du système contrôlée par v.

Un contrôle $u \in U$ est dit optimal s'il vérifie

$$J(u) = \inf_{v \in U} J \in (v)$$

Le problème de contrôle stochastique des équations rétrogrades et progressive-rétrogrades a été étudié par plusieurs auteurs. La première contribution concerne le contrôle des systèmes progressive-rétrogrades a été développée par Peng [30]. D'autres résultats ont été obtenus par Xu [34], Wu [33], Shi et Wu [32], Ji et Zhou [22], Babhlali et Labed [3] et Bahlali [6].

D'une autre part, le contrôle des systèmes rétrogrades a été étudié par El-Karoui et al [14], Dokuchaev et Zhou [9] et Bahlali

Notre objectif dans ce mémoire est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités, sous forme de principe du maximum de Portryagin, pour deux modèles. Le premier concerne les contrôles stricts (classiques) qui sont des processus à valeurs dans un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$. Le second est l'extension du premier au cas des contrôles relaxés et qui sont des processus à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités. Pour obtenir ces résultats, nous procéderons comme suit : Premièrement, on établit les conditions d'optimalité pour les contrôles stricts. Puisque l'ensemble des contrôles stricts n'est pas convexe, le chemin classique consiste à utiliser la méthode des perturbations fortes. Plus précisément, si u est un contrôle strict optimal et v un contrôle strict arbitraire, avec $\theta > 0$ assez petit, on définit la perturbation forte suivante

$$u_t^\theta \begin{cases} v & si \quad t \in [\tau, \tau + \theta] \\ u_t & si \;\; non \end{cases}$$

On dérive l'équation variationnelle de l'équation d'état et l'inégalité variationnelle de l'inégalité

$$0 \leq J(u^\theta) - J(u).$$

La majeure difficulté est que l'équation d'état et le coût intégral dépendent de deux variables y_t et z_t. Alors, on ne peut pas obtenir directement l'inéquation variationnelle, parcequ'il est difficile de manipuler la variable z_t. Pour remédier à cette difficulté, on introduit une nouvelle méthode qui consisite à transformer le problème initial en un problème sans coût intégral en ajoutant une équation unidimentionnelle. On établit alors des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème restreint et par une transformation sur le processus adjoint et l'équation associée, on obtient les conditions nécessaires pour le problème initial. Pour clôturer cette première partie de ce mastar, on étudie quand ces conditions nécessaires seront suffisantes.

La seconde partie de ce mémoire concerne les conditions d'optimalité des contrôles relaxés. Dans le problème relaxé, le contrôleur choisit à l'instant t une mesure de probabilité $q_t(da)$ sur l'ensemble , plutôt qu'un élément v de U. Le système sera gouverné par l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t^q = \int_U b(t, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt + z_t^q dW_t, \\ y_T^q = \xi \end{cases}$$

La fonction coût à minimiser, sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés, est de la forme

$$\mathcal{J}(q) = \mathcal{E}\left[g(y_0^q) + \int_0^T \int_U h(t, y_t^q, z_t^q, a) q_t(da) dt \right]$$

Un contrôle relaxé $\mu \in \mathcal{R}$ est dit optimal s'il vérifie

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}(q)$$

Le problème de contrôle relaxé généralise celui des contrôle stricts. En effet,si $q_t(da) = \delta_{V_t}(da)$ est la mesure de Dirac concentrée en un seul point v_t, alors on obtient un problème de contrôle strict comme cas particulier de celui des contrôle relaxée

En utilisant essentiellement le principe variationnel d'Ekeland, on établit un principe du maximum approché et par passage à la limite, on déduit un principe du maximum pour les contrôles relaxés.

Chapitre 1

Équation différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Celles-ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Itô pour étudier les trajectoires de processus de diffusion. Cette notion a été traitée de manière profonde en relation avec la théorie des semi-martingales. Des applications dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur (filtrage des processus, contrôle optimal, mathématiques financières, gestion des stocks etc...) ont été réalisés en utilisant ce genre d'équations. Les équations différentielles stochastiques constituent un modèle de diffusion en milieu non homogène. Soit x_t la position d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant t. Si on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de cette dernière est la résultante de deux composantes, d'une part un déplacement centré dû à la vitesse macroscopique du liquide d'autre part des fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide.

Soit $b(t,x)$ la vitesse macroscopique du liquide au point x à l'instant t. On supposera que la composante fluctuative dépend u temps, de la position x et de la durée U_t pendant laquelle est envisagé le déplacement, alors :

$$x_{t+Ut} - x_t = b(t,x_t)Ut + \xi_{t,x_t,Ut} \quad \textit{Avec} \quad \mathbb{E}[\xi_{t,x_t,Ut}] = 0.$$

Si on suppose que $\xi_{t,x_t,Ut} = \sigma(t,x_t)\xi_{t,Ut}$ Où $\sigma(t,x_t)$ désigne les propriétés du milieu au point x_t et $\xi_{t,Ut}$ l'accroissement en milieu homogène i,e : $\xi_{t,Ut} = W_{t+Ut} - W_t$ avec W_t un mouvement Brownien, alors :

$$x_{t+Ut} - x_t = b(t,x_t)Ut + \sigma(t,x_t).(W_{t+Ut} - W_t)$$

En passant aux différentielles on obtient

$$dx_t = b(t,x_t).dt + \sigma(t,x_t)dW_t$$

La formulation intégral nous donne

$$x_t = a + \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s).dW_s$$

Comme $W = (W_t)_{t\in[O,T]}$ est un processus dont les trajectoires sont $\mathcal{P}$-ps à variations infinies $\int_0^t \sigma(s,x_s).dW_s$ ne peut pas être considérée comme une intégrale de Lebesgue-Stieljes. Par conséquent cette équation ne peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire. Avant de donner la définition de solution à cette équation on doit justifier son écriture et donner un sens aux quantités de la forme $\int_0^t \sigma(s,x_s).dW_s$ appelées intégrales stochastiques d'Itô.

1.1 É.différentielles stochastiques progressives

Soient :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$ un espace probabilité muni d'un filtration .

$x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique continu à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel

$b : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to M_d(\mathbb{R})$ deux fonctions Boréliennes
ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable indépendante de W telle que :
$\mathbb{E}\left[\mid \xi \mid^P\right] < \infty \quad \forall\ P > 1$
Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t,x_t)dt + \sigma(t,x_t)dW_t \\ x_0 = \xi \end{cases} \tag{1.1}$$

Soient les conditions suivantes :
1.2) $\mathcal{P}[x_0 = \xi] = 1$
1.3)$\mathcal{P}\left[\int_0^t (b \mid (s,x_s) \mid ds + \sigma^2(s,x_s))ds < \infty\right] = 1$
1.4)$x_t = \xi + \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s$ $\mathcal{P}$ ps

Définition 1.1 :

On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte (ou trajectorielle) si pour chaque espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$, pour tout mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ il existe un processus $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ continu tel que les condition (1.2),(1.3),(1.4) soient vérifiées.
Quand on parle de solution au sens fort on sous-entend que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$, et le mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ sont déjà donnés .
Si de plus $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^w$ alors le processus x est $(\mathcal{F}_t)_t$-adapté et on a $\mathcal{F}_t^x \subset \mathcal{F}_t^W$

Définition 1.2 :

On dit que l'équation(1.1)admet une solution faible si on peut trouver un espace probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$, un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$, un processus $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ continu tel que les condition (1.2),(1.3),(1.4) soient réalisées
Quand on parle de solution faible, on doit trouver un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$, un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ et un processus continu $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$. Donc

une solution faible est la collection des objets $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)_t, W, x)$. Dans beaucoup de cas, ou la solution faible existe, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^x$et par conséquent W est un mouvement brownien relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$. C'est pourquoi dans le cas des solutions faibles on a $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^x$.

Remarque 1.3 :

Les solutions faibles ne sont pas mesurables par rapport à $\mathcal{F}_t^W$. Et c'est ce qui différencie les solutions faibles les solutions fortes.

Définition 1.4 :

On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ et $y = (y_t)_{t\in[0,T]}$ on a :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t - y_t \mid > 0\right\} = 0$$

C'est à dire :

$$\mathcal{P}\{x_t = y_t, \forall t \in [0, T]\} = 1$$

Le principal théorème qui nous assure l'existence et l'unicité forte d'une solution de l'équation (1.1) est le suivant :

Théorème 1.5(K.Itô) :

On suppose que les coefficients b et σ sont mesurables et vérifient, il existe une constante $k > 0$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$(1.5) \quad \mid b(t, x) - b(t, y) \mid^2 + \mid \sigma(t, x) - \sigma(t, y) \mid^2 \leq k \mid x - y \mid^2$$

$$(1.6) \quad \mid b(t, x) \mid^2 + \mid \sigma(t, x) \mid^2 \leq k(1 + \mid x \mid^2)$$

Alors l'équation (1.1) admet une solution forte unique $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$, $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptée et continue avec condition $x_0 = \xi$ De plus cette solution est markovienne et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t \mid^p\right] < M \qquad \forall p > 1$$

où M est une constante qui dépend de k, p, T et ξ

Preuve

i- Unicité : Soient $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ et $y = (y_t)_{t\in[0,T]}$ deux solution de l'équation (1.1) telles que $x_0 = y_0 = \xi$

en appliquant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ et en utilisant les formules de x_t et y_t on obtient :

$$\mid x_t - y_t \mid^2 \leq 2\left|\int_0^t [b(s,x_s) - b(s,y_s)]ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)]dW_s\right|^2$$

en passant à l'espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mid x_t - y_t \mid^2] \leq 2\mathbb{E}&\left[\left|\int_0^t [b(s,x_s) - b(s,y_s)]ds\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)]dW_s\right|^2\right]\end{aligned}$$

par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mid x_t - y_t \mid^2] \leq 2T\mathbb{E}&\left[\int_0^t \mid b(s,x_s) - b(s,y_s) \mid^2 ds\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid \sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s) \mid^2 ds\right]\end{aligned}$$

En appliquant la condition de Lipschitz (1.5) on obtient :

$$\mathbb{E}[\mid x_t - y_t \mid^2] \leq C\int_0^t \mathbb{E} \mid x_t - y_t \mid^2 ds$$

où $C = \max(2TK, 2K)$

En appliquant le lemme de Gronwall, il résulte que :

$$\mathbb{E}[\mid x_t - y_t \mid^2] = 0$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychef on obtient :

$$\mathcal{P}\{\mid x_t - y_t \mid > \varepsilon\} \leq \frac{\mathbb{E}[\mid x_t - y_t \mid^2]}{\varepsilon} = 0; \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Donc pour tout ensemble D dénombrable partout dense dans $[0,T]$ on a :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in D} \mid x_t - y_t \mid > 0\right\} = 0$$

Enfin et puisque les processus x et y sont continus on conclut que :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t - y_t \mid > 0\right\} = 0$$

Ce qui prouve l'unicité forte de la solution .

ii-Existence : On montre l'existence d'un solution forte en utilisant la méthode des approximations successives et pour cela on pose :

$$x_t^n = \xi + \int_0^t b(s, x_s^{n-1})ds + \int_0^t (\sigma(s, x_s^{n-1})dW_s \tag{1.7}$$

$$x_t^{n+1} - x_t^n = \int_0^t (b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n-1}))ds + \int_0^t (\sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n-1}))dW_s$$

En utilisant la même technique que pour l'unicité on obtient :

$$\mathbb{E}[\mid x_t^{n+1} - x_t^n \mid^2] \leq C \int_0^t \mathbb{E}[\mid x_s^n - x_s^{n-1} \mid^2]ds$$

ou $C = \max(2Tk, 2k)$

Par récurrence sur n il résulte que :

$$\mathbb{E}[\mid x_t^{n+p} - x_t^n \mid^2] \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou $M = \max(C, \mathbb{E}[\mid x_0 \mid^2])$

si on prend $p > 1$ on aura :

$$\mathbb{E}[\mid x_t^{n+p} - x_t^n \mid^2] \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(MT)^k}{k!}$$

Donc (x_t^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_2(\Omega)$ et par conséquent elle est convergente, notons x_t sa limité .

En passant à limite dans (1.7) on obtient :

$$x_t = \xi + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dW_s$$

Donc x_t est une solution de l'équation (1.1)

iii- Montrons que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t \mid^p\right] < M \qquad \forall p > 1$$

$$x_t = \xi + \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s)dW_s$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ et en passant aux espérances on a :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq 3\mathbb{E}[\mid \xi \mid^2] + 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s,x_s)\right|^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s)\right|^2 ds\right]$$

par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy on a :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq 3\mathbb{E}[\mid \xi \mid^2] + 3T\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s,x_s)\right|^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s)\right|^2 ds\right]$$

D'après la condition de croissance linéaire (1.6) on a :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq 3\mathbb{E}[\mid \xi \mid^2] + 3Tk\int_0^t \mathbb{E}[1+ \mid x_s \mid^2]ds + 3k\int_0^t \mathbb{E}[1+ \mid x_s \mid^2]ds$$

En posant $m = \max(3, 3Tk, 3k)$ on a :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq m\mathbb{E}[\mid \xi \mid^2] + 2m\int_0^t \mathbb{E}[1+ \mid x_s \mid^2]ds$$

En posant $c = \max(m, 2m)$ on obtient :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq c(1 + \mathbb{E}[\mid x_t \mid^2]) + c\int_0^t \mathbb{E}[\mid x_s \mid^2]ds$$

En appliquant le lemme de Gronwal on obtient :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] \leq c(1 + \mathbb{E}[\mid x_t \mid^2])\exp(cT) \quad \forall t \in [0,T]$$

puisque $\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] < \infty$ alors en posant $M = c(1 + \mathbb{E}[\mid x_t \mid^2])\exp(cT)$ on obtient :

$$\mathbb{E}[\mid x_t \mid^2] < M \quad \forall t \in [0,T]$$

Enfin par l'inégalité Buckholders-Davis-Gundy on a $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t \mid^p\right] < M \ \forall p > 1$

Remarque :

1) La condition de Lipschitz (1.5)nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1)
2) La condition de croissance linéaire (1.6)nous assure la non explosion de la solution et si on n'a pas cette condition, l'équation (1.1) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'explosion .

1.2 É.Différentielles Stochastiques Rétrogrades

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité d'équation différentielle stochastique rétrograde dont les coefficients sont globalement lipschitziens .Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng avec le générateur non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

1.2.1 Présentation du problème

On considère sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$, une variable aléatoire .
ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$, avec T le temps terminal .
On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} -dy_t = b(y_t)dt \quad t \in [0, T] \\ y_T = \xi \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t, le processus y_t soit adapté par rapport à la filtration $(F_t)_{t\geq}0$. c'est-a-dire que le processus y_t ne dépend pas du futur après t
Prenons l'exemple le plus simple à savoir $b \equiv 0$.
le candidat naturel est $y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation-disons dans L^2 - adaptée est la martingale $y_t = \mathbb{E}(\xi/F_t)$.

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingale d'Itô permet de construire un processus z carré intégrable et adapté tel que

$$y_t = \mathbb{E}(\xi/F_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t z_s dW_s$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$y_t = \xi - \int_t^T z_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

C'est à dire

$$\begin{cases} -dy_t = -z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

On veut donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus z dont le rôle est de rendre le processus y_t adapté .

Par conséquent, comme une seconde variable apparait, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à b de dépendre du processus z ; l'équation devient donc

$$\begin{cases} -dy_t = b(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t; \quad t \in [0, T] \\ y_T = \xi \end{cases}$$

Notation : On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace . On notera la filtration naturelle du mouvement Brownien W. On travaillera avec deux espace de processus soit $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus y_t ,progressivement mesurable , à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tel que :

$$\| y \|_{s^2}^2 = \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |y_t|^2] < \infty$$

et on a aussi $S_c^2(\mathbb{R}^k)$le sous-espace formé par les processus continus.

On notera aussi $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$l'espace des processus z progressivement mesurable à valeurs dans $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ tel que

$$\| z \|_{M^2}^2 = \mathbb{E}[\int_0^T \| z_t \|^2] < \infty$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \| z_t \|^2 = trace(zz^*).M_2(\mathbb{R}^{k*d})$ désigne l'ensemble des classe d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k*d})$

les espaces S^2, S_c^2, M_2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment ; nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M_2(\mathbb{R}^{k\times d})$ Nous nous donnons maintenant une application aléatoire b définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ tel que pour tout (y,z)$\in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$,

le processus $\{b(t,y,z)\}_{t\in[0,T]}$ soit progressivement mesurable . On voudrait résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} -dy_t = b(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t; \quad t \in [0,T] \\ y_t = \xi \end{cases}$$

ou sous forme intégrale,

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r$$

La fonction b s'appelle le générateur de l'équation différentielle stochastique rétrograde et ξ la condition terminale.

Définition 1.6 :

Une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde est un couple de processus $\{(y_t, z_t)\}_{t\in[0,T]}$ vérifiant

$i)$ y et z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$

$ii)$ On a $\mathcal{P} - p.s$

$$\int_0^T |b(r, y_r, z_r)| + \|z_r\|^2 dr < \infty$$

$iii)$ On a $\mathcal{P} - p.s$

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r t \in [0,T].$$

Remarques 1.7 :

i)les intégrales de l'équation étant bien définies .

ii)le processus y_t est une semi-martingale continue adapté donc en particulier $y_0$est une quantité déterministe .

Avant de donner le théorème fondamental du Pardoux et Peng d'existence et d'unicité , nous allons montré , que sous une hypothèse sur le générateur b , le processus y appartient a S^2

Proposition 1.8 :

Supposons qu'il existe un processus $\{b_t\}_{t\geq 0}$ positif, appartenant à $M_2(\mathbb{R})$ et deux constantes positives C et K tels que

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \mid b(t,y,z) \mid \leq b_t + C(y) + K \parallel z \parallel .$$

Soit $z \in M_2$ et si (y_t, z_t)est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde (1,2) alors y appartenant à S_c^2 .

Preuve :

On a pour tout $t \in [0,T]$

$$y_t = y_0 - \int_0^t b(r, y_r, z_r)dr + \int_0^t z_r dW_r.$$

et par suite, utilisant l'hypothèse sur b

$$y_t \leq \mid y_0 + \int_0^T (b_t + K \parallel z_r \parallel)dr + \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t z_r dW_r \mid + C \int_0^t \mid y_r \mid dr$$

Posons

$$\xi = \mid y_0 \mid + \int_0^T (b_t + K \parallel z_r \parallel)dr + \sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t z_r dW_r \mid$$

Par hypothèse,z appartient à M_2, le troisième terme est de carré intégrable ; il en est de même pour $\{b_t\}_{t\in[0,T]}$ et y_0 est déterministe donc de carré intégrable.

Il s'en suit que ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$\sup_{t\in[0,T]} \mid y_t \mid \leq \xi e^{CT}$$

qui montre que y appartient à S^2 .

Lemme 1.9 :

Soit $y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $z \in M_2(\mathbb{R}^{k\times d})$. donc

$$\left\{ \int_0^t z_s.y_s dW_s, t \in [0,T] \right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve :

Le résultat se déduit principalement de l'inégalité de Bulkholder-Davis-Gundy "(BDG)"

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t y_r.z_r dW_r \mid] \leq C\mathbb{E}[(\int_0^T \mid y_r \mid^2 \| z_r \|^2 dW_r)^{\frac{1}{2}}]$$

donc, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \mid \int_0^t y_r.z_r dW_r \mid] \leq \frac{C}{2}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} \mid y_t \mid^2] + \frac{C}{2}\mathbb{E}[\int_0^T \| z_r \|^2 dr]$$

d'où le résultat

1.2.2 Le cas lipschitzien

Nous allons montrer dans ce paragraphe un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est du a Pardoux et Peng en 1990 ; C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour l'équation différentielle stochastique rétrograde dans le cas ou le générateur est non-linéaire. Rappelons que b est définie sur $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ a valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que ,pour tout$(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k*d}$, le processus $b(t,y,z)_{t\in[0,T]}$ soit progressivement mesurable.

On considérer également ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
On suppose que
(L) Il existe une constante K telle que $\mathcal{P}-p.s,$
$i)$ condition de Lipschitz en (y,z) pour tout t,y',y,z,z'

$$\mid b(t,y,z)-b(t,y',z')\mid\leq K(\mid y-y'\mid+\parallel z-z'\parallel)$$

$ii)$ condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}[\mid\xi\mid^2+\int_0^T\mid b(r,0,0)\mid^2 dr]<\infty$$

Nous commençons par un cas très simple, celui ou b ne dépend ni de y ni de z i.e. on ce donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ dans $M_2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde

$$y_t=\xi+\int_t^T F_r dr-\int_t^T z_r dW_r.t\in[0,T]$$

lemme 1.11 :

Soient $\xi\in L^2(F_t)$ et $\{F_t\}_{t\in[0,T]}\in M_2(\mathbb{R}^k)$. L'équation différentielle stochastique rétrograde (2.1)possède une unique solution (y,z) telle que $z\in M_2$.

preuve :

Supposons dans un premier temps que (y,z) soit une solution vérifiant $z\in M_2$.
si on prend l'espérance conditionnelle sachant F_t, on a nécessairement

$$y_t=\mathbb{E}(\xi+\int_t^T F_r dr\setminus F_r)$$

On définit donc y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver z . Remarque que, d'après le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_r dr$est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable .

On a alors , pour tout $t \in [0,T]$ $y_t = \int_t^T F_r dr - \int_t^T z_r dW_r$

$$y_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^T F_r dr \backslash F_t) - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale Brownienne, donc en peut construit un processus z appartient à M_2 tel que

$$y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t z_r dW_r - \int_0^t F_r dW_r$$

On vérifie facilement que (y,z) ainsi construit est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde qui est étudiée puisque comme $y_T = \xi$ on a

$$y_t - \xi = M_0 + \int_0^t z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^t z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) = \int_t^T F_r dr - \int_t^T z_r dW_r$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $z \in M_2$.

Nous montrons maintenant le théorème de Pardaux et Peng.

Théorème 1.11 (Pardaux et Peng 1990) :

Sous l'hypothèse (L), L'équation différentielle stochastique rétrograde (1.1) possède une unique solution (y,z) telle que $z \in M_2$.

Preuve :

La preuve consiste à utiliser un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 avec une application $p(t)$ de B^2 dans lui-même de sorte que $(y,z) \in B^2$est une solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde si et seulement si c'est une point fixe de p.

On définit$(y,z) = p(U,V)$ pour tous (U,V) élément de B^2 comme étant la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, U_r, V_r) dr - \int_0^T z_r dW_r$$

On remarque que cette équation différentielle stochastique rétrograde possède une unique solution qui est dans B^2. Par conséquent, posons $F_r = f(r, U_r, V_r)$, ce processus appartient à M_2 puisque, b étant Lipschitz,

$$| b_r | \leq | b(r,0,0) | + K | U_r | + K \| V_r \|$$

Remarquons que ces trois dernières processus sont de carré intégrable, alors (y, z) est une solution unique telle que $z \in M_2$
(y, z)appartient à B^2 l'intégralité de z est obtenue par construction et d'après la proposition le processus y appartient a S_c^2.
Soient (U, V) et (U', V') deux élément de B^2 et $(y, z) = p(U, V); (y', z') = p(U', V')$
Notons $y = y - y'$ et $z = z - z'$. il est claire que $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{b(t, U_t, V_t) - b(t, U'_t, V'_t)\}dt + z_t dW_t$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} | y_t |^2$ pour obtenir

$$d(e^{\alpha t} | y_t |^2) = \alpha e^{\alpha t} | y_t |^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{b(t, U_t, V_t) - b(t, U'_t, V'_t)\}dt$$

Intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} | y_t |^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \| z_r \|^2 dr = \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha | y_r |^2 + 2y_r.\{b(t, U_t, V_t) \\ - b(t, U'_t, V'_t)\})dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r \end{aligned}$$

Et comme b est Lipschitz, il vient donc d'après la notation u, v de $U - U'$ et $V - V'$ respectivement

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} | y_t |^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \| z_r \|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha | y_r |^2 + 2K | y_r. | v_r | \\ + 2K | y_r | . \| v_r \|)dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r \end{aligned}$$

Pour tout $\xi > 0$, On a $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$, donc

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} | y_t |^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \| z_r \|^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + \frac{2K^2}{\varepsilon}) | y_t |^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r \\ + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(| u_r |^2 + \| v_r \|^2)dr. \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2k^2}{\varepsilon}$, on a noté $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(\mid u_r \mid^2 + \parallel v_r \parallel^2)dr$.

$$\forall t \in [0,T] e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r.$$

La martingale local $\{\int_0^t e^{\alpha r} y_r z_r dW_r\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque y, y'appartiennent à S^2 et z, z' appartiennent à M_2 on obtient facilement pour $t = 0$

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon].$$

L'inégalité BDG fournit-avec C universelle

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\alpha r} \mid y_r \mid^2 \parallel z_r \parallel^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$

puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2] \leq \mathbb{E}[R_\varepsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2] + \frac{C}{2}\mathbb{E}[\int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr]$$

finalement, on obtient

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \leq (3 + C^2).\mathbb{E}[R_\varepsilon].$$

et par suite

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \leq (3 + C^2)(1 \vee T).$$

Pour que l'application $p(t)$ est une contraction strict de B^2 dans lui-même on prenons ε tel que $\varepsilon(3 + C^2)(1 \vee T) = \frac{1}{2}$ Si on le munit de la norme

$$\parallel (U, V) \parallel_\alpha \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t} \mid u_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha r} \parallel v_r \parallel^2 dr]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette norme est équivalente a la norme usuelle pour $\alpha = 0$. Finalement en conclut que l'application $p(t)$ possède unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'un solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde dans B^2.

1.2.3 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de z , plus précisément celui du terme $\int_t^T z_r dW_r$ est de rendre le processus y adapté.

Proposition 1.12 :

Soit (y, z) la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde (1.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T . On suppose, autre de hypothèse (L) que ξ est F_τ-mesurable et que $b(t, y, z) = 0$ dés que $t \geq \tau$.alors

$$y_t = y_{t\wedge\tau} \quad et \quad z_t = 0 \quad si \quad t \geq \tau$$

Preuve :

On a$P - p.s$

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r \qquad t \in [0, T]$$

Pour $t = \tau$, comme $b(r, y_r, z_r) = 0$ dés que $t \geq \tau$

$$y_\tau = \xi + \int_\tau^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_\tau^T z_r dW_r = \xi - \int_\tau^T z_r dW_r$$

Il vient alors

$$y_\tau = \mathbb{E}(\xi/F_\tau) = \xi$$

et par suite $\int_\tau^T z_r dW_r = 0$ d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}[(\int_\tau^T z_r dW_r)^2] = \mathbb{E}[\int_\tau^T \parallel z_r \parallel^2 dr] = 0$$

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau, y_t = y_\tau$ puisque par hypothèse

$$y_\tau = y_t + \int_\tau^t b(r, y_r z_r)dr - \int_\tau^t z_r dW_r = y_t + 0 - 0$$

Ce qui termine la preuve.

Notons que dans le cas où ξ et b sont déterministe alors z est nul et y est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} dy_t = b(t, y_t, 0)dt \\ y_T = \xi \end{cases}$$

1.2.4 Une estimation a priori :

En donnant une première estimation sur L'équation différentielle stochastique rétrograde, il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde par rapport aux données qui sont ξ et le processus$\{b(t,0,0)\}_{t\in[0,T]}$

Proposition 1.13 :

On suppose que (ξ, b) vérifie (L) soit (y,z) la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde (1.1) telle que $z \in M_2$. alors, il existe une constante C_u universelle telle que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\beta t} \parallel z_t \parallel^2 dt] \leq C_u \mathbb{E}[e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_0^T e^{\beta t} \mid b(t,0,0) \mid^2 dt]$$

avec $\beta = (1+K)^2 + K^2$

Preuve :

On utilise la formule d'Itô à $e^{\beta t} \mid y_t \mid^2$

$$e^{\beta t} \mid y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr = e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_t^T e^{\beta r}(-\beta \mid y_r \mid^2 + 2y_r.b(r,y_r,z_r))dr - \int_t^T 2e^{\beta r} y_r z_r dW_r$$

Pour tout (t,y,z) avec b est $K-lipschitz$, on a

$$2y.b(t,y,z) \leq 2 \mid y \mid . \mid b(t,0,0) \mid + 2K. \mid y \mid^2 + 2K. \mid y \mid . \parallel z \parallel .$$

et donc utilisant le fait que $2ab \leq \varepsilon.a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 1$ puis

$$2y.b(t,y,z) \leq (1+2K+2K^2). \mid y \mid^2 + (b(t,0,0))^2 + \frac{\parallel z \parallel^2}{2}$$

On prenant $\beta = 1+2K+2K^2$ on obtient, pour tout $t \in [0,T]$

$$e^{\beta t} \mid y_t \mid^2 + \frac{1}{2} \int_t^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr = e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_0^T e^{\beta r}. \mid b(r,0,0) \mid^2 dr - \int_t^T 2e^{\beta r} y_r z_r dW_r$$

En Obtient, pour $t = 0$

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \leq 2\mathbb{E}[e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_0^T e^{\beta r}. \mid b(r,0,0) \mid^2 dr]$$

L'inégalité de BDG nous donne

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t} \mid y_t \mid^2] \leq \mathbb{E}[e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_0^T e^{\beta r}. \mid b(r,0,0) \mid^2 dr] + C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\beta r} \mid y_r \mid^2 . \parallel z_r \parallel^2 dr)^{\frac{1}{2}}]$$

D'autre part

$$\begin{aligned} C\mathbb{E}[(\int_0^T e^{2\beta r} \mid y_r \mid^2 . \parallel z_r \parallel^2 dr)^{\frac{1}{2}}] &\leq C\mathbb{E}[\int_0^T \sup_{t\in[0,T]} e^{\frac{\beta t}{2}} \mid y_t \mid (\int_0^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr)^{\frac{1}{2}}] \\ &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[sup e^{\beta t} \mid y_t \mid^2 + C^2\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \end{aligned}$$

il vient donc

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t} \mid y_t \mid^2] \leq 2\mathbb{E}[e^{\beta T} \mid \xi \mid^2 + \int_0^T e^{\beta r}. \mid b(r,0,0) \mid^2 dr] + C^2[\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr]$$

et finalement, on obtient

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t} \mid y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\beta r} \parallel z_r \parallel^2 dr] \leq 2.(2+C^2).$$

prenant $C_u = 2.(2+C^2)$. Ce qui termine la preuve.

1.2.5 Équation différentielle stochastique rétrograde linéaire

Dans la fin de ce chapitre nous allons étudie les équation différentielle stochastique rétrograde linéaire et pour cela une équation différentielle stochastique rétrograde est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$y_t = \xi + \int_t^T (a_r y_r + b_r z_r + c_r)dr - \int_0^T z_r dW_r \quad t \in [0,T]$$

où $\{(a_t, b_t)\}$ est un processus a valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné $\{C_t\}_{t\in[0,T]} \in M_2 \times \mathbb{R}$ et ξ est une variable aléatoire F_t mesurable et de carré intégrable a valeurs réelles .

La solution de cette équation peut dans ce cas être écrite sous la forme

$$\forall t \in [0,T] \quad , y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\xi\Gamma_t + \int_t^T C_r\Gamma_r dr / F_t)$$

ou

$$\Gamma_t = exp(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mid b_s \mid^2 ds + \int_0^t a_s ds)$$

avec Γ solution de l'EDS

$$\begin{cases} d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t dW_t); \quad t \in [0,T] \\ \Gamma_0 = 1 \end{cases}$$

Prenant

$$b(t,y,z) = \alpha_t y_t + z_t b_t + c_t$$

D'après les propriétés du générateur de l'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire on peut appliquer le théorème de Pardoux-Peng, donc elle admet une solution unique (y,z)telle que $z \subset M_2, y$appartient à S^2.
La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t y_t = y_t d\Gamma_t + \Gamma_t dy_t + d < \Gamma, y >_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t z_t dW_t + \Gamma_t y_t b_t dW_t$$

ce qui montre que le processus

$$\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr.$$

est une martingale car $c \in M_2$et Γ, y sont dans S^2
par suite

$$\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = \mathbb{E}[\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr / F_t]$$

c'est a dire

$$y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}(\xi \Gamma_t + \int_t^T c_r \Gamma_r dr / F_t)$$

Chapitre 2

Conditions d'optimalité pour les contrôles stricts

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$un espace probabilisé filtré sur lequel on définit un mouvement Brownien $d-$dimensionnel $W = (W_t)_{t\geq 0}$. On assume que (F_t) est la $P-$augmentation de la filtration naturelle de $(W_t)_{t\geq 0}$.

soit T un nombre réel strictement positif et U un sous ensemble non vide de$\mathbb{R}^k$.

Définition 2.1 :

Un contrôle admissible est un processus F_t-adapté à valeurs dans U tel que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid v_t \mid^2\right] < \infty$$

On note par U l'ensemble des tous les contrôles admissibles .

Pour tout $v \in U$, on considère l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t^v = b(t, y_t^v, z_t^v, v_t)dt + z_t^v dW_t, \\ y_T^v = \xi \end{cases}$$

Où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}^n,$$

et ξ est une variable aléatoire de dimension n, F_T-mesurable telle que

$$\mathbb{E} \mid \xi \mid^2 < \infty.$$

La fonction cout est définit de U dans $\mathbb{R}$ par

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(y_0^v) + \int_0^T h(t, y_t^v, z_t^v, v_t)dt \right],$$

Où

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times M_{n\times d}(\mathbb{R}) \times U \to \mathbb{R}^n.$$

Un contrôle $u \in U$ est dit optimale s'il vérifie

$$J(u) = \inf_{v\in U} J(v).$$

Notre but est d'établir des condition nécessaires et suffisantes d'optimalité, sous la forme de principe du maximum.

Nous supposons que

Les fonction b, g et h sont continues en(y, z, v), leurs dérivée b_y, b_z, g_y, h_y et h_z sont continues en (y, z, v) et uniformément bornées. b et h sont bornées par $C(1+ \mid y \mid + \mid v \mid)$ et bornés en z.

Sous ces hypothèses, pour tout $v \in U$, l'équation d'état admet une unique solution $(F_t)_t$-adaptée et la fonction coût J est bien définie de U dans $\mathbb{R}$.

2.2 Problème avec coût restreint

Puisque le coût h dépend de la variable z_t on ne peut pas traiter le problème directement. Pour remédier à cela, on introduit une nouvelle méthode qui consiste à restreindre le problème initial en un problème sans coût intégral. Pour cela, on considère l'EDSR unidimensionnelle

$$\begin{cases} dx_t^v = h(t, y_t^v, z_t^v, v_t)dt + k_t^v dW_t, \\ x_T^v = \eta \end{cases}$$

où k^v est une matrices $(1 \times d)$, (y_t^v, z_t^v) est la solution de l'équation initiale et η est une variable aléatoire unidimensionnelle F_T-mesurable telle que

$$\mathbb{E} \mid \eta \mid^2 > \infty$$

L'équation unidimensionnelle admets une unique solution $(F_t)_t-$adapté.

On pose

$$\tilde{y}_t = \begin{pmatrix} y_t^v \\ x_t^v \end{pmatrix},$$

et on considère l'équation de dimension (n+1)suivante

$$\begin{cases} d\tilde{y}_t = \tilde{b}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t^v, v_t)dt + \tilde{z}_t dW_t, \\ \tilde{y}_T = \binom{\xi}{\eta} \end{cases}$$

où la fonction $\tilde{b}$ est définit de $[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \times M_{(n+1)\times d}(\mathbb{R}) \times U$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$par

$$\tilde{b}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, v_t) = \begin{pmatrix} b(t, y_t^v, z_t^v, v_t) \\ h(t, y_t^v, z_t^v, v_t) \end{pmatrix},$$

et $\tilde{z}_t$ est une matrice de dimension$(n + 1) \times d$, donnée par

$$\tilde{z}_t = \begin{pmatrix} z_t^v \\ k_t^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11}^v & z_{12}^v & \cdots & z_{1d}^v \\ z_{21}^v & z_{22}^v & \cdots & z_{2d}^v \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{n1}^v & z_{n2}^v & \cdots & z_{nd}^v \\ k_1^v & k_2^v & \ldots & k_d^v \end{pmatrix}$$

puisque $\tilde{b}$est uniformément Lipschitzienne en $(\tilde{y}_t, \tilde{z}_t)$, alors l'équation admet une unique solution$(\tilde{y}_t, \tilde{z}_t)$ adapté à la filtration $(F_t)_t$.

On définit la fonction $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{g}(\tilde{y}_t) = g(y_t^v) - x_t^v,$$

et la nouvelle fonction coût de U dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{J}(v) = \mathbb{E}[\tilde{g}(\tilde{y_0})] + \mathbb{E}[\eta].$$

Il est facile de vérifier que

$$\tilde{J}(v) = J(v).$$

En conséquence, il est suffisant de minimiser le coût restreint $\tilde{J}$sur U. Si $u \in U$ est une solution optimale, alors

$$\tilde{J}(u) = \inf_{v \in U} \tilde{J}(v).$$

Avec cette transformation, nous avons réduit le problème initiale en un nouveau problème avec coût intégral .

2.2.1 Résultats préliminaires

On suppose que $u \in U$ est un contrôle optimal et on note par$(\tilde{y}_t, \tilde{z}_t)$la solution associée. On introduit la perturbation fort suivante

$$u_t^\theta = \begin{cases} v \ \ si \ \ t \in [\tau, \tau + \theta], \\ u_t \ \ sinon, \end{cases}$$

où $0 \leq \tau \leq T$ est fixé, $\theta > 0$ est suffisement petit et v est une variable aléatoire F_t-mesurable à valeurs dans U telle que $\mathbb{E}[| \ v \ |^2] < \infty$.

Le contrôle perturbé u^θ est admissible et on note par $(\tilde{y}_t{}^\theta, \tilde{z}_t{}^\theta)$ la trajectoire associée.

Puisque u est optimal, l'inégalité variationnelle sera obtenue à partir de

$$0 \leq \tilde{J}(u^\theta) - \tilde{J}(u).$$

Pour cela, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2 :

Sous nos hypothèse, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} | \ \tilde{y}_t{}^\theta - \tilde{y}_t \ |^2\right] \leq C\theta^2,$$

$$\mathbb{E}\int_0^T | \ \tilde{z}_t{}^\theta - \tilde{z}_t \ |^2 \ dt \leq C\theta^2$$

Preuve :

On a

$$\begin{cases} d(\tilde{y_t}^\theta - \tilde{y_t}) = [\tilde{b}(t, \tilde{y_t}^\theta, \tilde{z_t}^\theta, u_t^\theta) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}^\theta, u_t^\theta)]dt \\ \qquad\qquad\qquad [\tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}^\theta, u_t^\theta) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t^\theta)]dt \\ \qquad\qquad\qquad [\tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t^\theta) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t)]dt \\ \qquad\qquad\qquad +(\tilde{z_t}^\theta - \tilde{z_t})dWt \\ (\tilde{y_T}^\theta - \tilde{y_T}) = 0 \end{cases}$$

On pose

$$Y_t^\theta = \tilde{y_t}^\theta - \tilde{y_t},$$

$$Z_t^\theta = \tilde{z_t}^\theta - \tilde{z_t},$$

et

$$\begin{aligned} \varphi^\theta(t, Y_t^\theta, Z_t^\theta) = & \int_0^1 \tilde{b_y}(t, \tilde{y_t} + \lambda \tilde{y_t}^\theta - \tilde{y_t}, \tilde{z_t} + \lambda \tilde{z_t}^\theta - \tilde{z_t}, u_t^\theta) Y_t^\theta d\lambda \\ & + \int_0^1 \tilde{b_y}(t, \tilde{y_t} + \lambda \tilde{y_t}^\theta - \tilde{y_t}, \tilde{z_t} + \lambda \tilde{z_t}^\theta - \tilde{z_t}, u_t^\theta) Y_t^\theta d\lambda \\ & + \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t^\theta) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} dY_t^\theta = \varphi^\theta(t, Y_t^\theta, Z_t^\theta)dt + Z_t^\theta dW_t, \\ Y_T^\theta = 0. \end{cases}$$

Cette équation est une EDSR linéaire à coefficients bornés et avec une condition terminaleY_T^θ

Alors, en appliquant l'estimation à priori (voir Briand et al))

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t^\theta \mid^2 + \int_0^T \mid Z_t^\theta \mid^2 \, dt\right] \leq C\mathbb{E}\left|\int_0^T \mid \varphi^\theta(t,0,0) \mid dt\right|^2$$

En remplaçant $\varphi^\theta(t,0,0)$par sa valeur, on aura

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t^\theta \mid^2 + \int_0^T \mid Z_t^\theta \mid^2 \, dt\right] \leq C\mathbb{E}\left|\int_0^T \mid \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, \tilde{u_t}^\theta) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t) \mid dt\right|^2$$

Par la définition de u^θ,on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t^\theta \mid^2 + \int_0^T \mid Z_t^\theta \mid^2 dt\right] &\leq C\mathbb{E}\left|\int_\tau^{\tau+\theta} \mid \tilde{b}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,v) - \tilde{b}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,u_t) \mid dt\right|^2 \\ &\leq C\mathbb{E}\left|\sup_{t\in[0,T]} \mid \tilde{b}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,v) - \tilde{b}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,u_t) \mid \int_\tau^{\tau+\theta} dt\right|^2\end{aligned}$$

Puisque b est à croissance linéaire en (y,v) et bornée en$z$, alors $\tilde{b}$ vérifie les même propriétés et on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid Y_t^\theta \mid^2 + \int_0^T \mid Z_t^\theta \mid^2 dt\right] \leq C\theta^2$$

Le lemme est prouvé.

2.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité pour le problème restreint

Théorème 3.3 :

Soit $(u,\tilde{y},\tilde{z})$ une solution optimale pour le problème restreint. Alors, il existe un unique processus adapté

$$\tilde{p} \in L^2([0,T];\mathbb{R}^{n+1})$$

solution de l'équation différentielle stochastique progressive

$$\begin{cases}-d\tilde{p}_t = \tilde{H}_y(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t)dt - \tilde{H}_z(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t)dW_t, \\ \tilde{p_0} = \tilde{g}_y(\tilde{y_0})\end{cases}$$

tel que

$$\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) = \max_{v\in U} \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,v); a.e, a.s,$$

où la Hamiltonien $\tilde{H}$ est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{M}_{(n+1)\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \times U$par

$$\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) = \tilde{b}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,u_t)\tilde{p}_t.$$

Preuve :

Pour la simplicité, on pose

$$\Lambda_t^\theta = (t, \tilde{y_t} + \lambda(\tilde{y_t}^\theta - \tilde{y_t}), \tilde{z_t} + \lambda(\tilde{z_t}^\theta - \tilde{z_t}), u_t^\theta).$$

Puisque u minimise le coût $\tilde{J}$ sur U, Alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tilde{J}(u^\theta) - \tilde{J}(u) \\
&\leq \mathbb{E}[\tilde{g}(\tilde{y_0}^\theta) - \tilde{g}(\tilde{y_0})] \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^1 \tilde{g_y}[\tilde{y_0} + \lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})](\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})d\lambda \\
&\leq \mathbb{E}[\tilde{g_y}(\tilde{y_0})(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})] + \mathbb{E}\int_0^1 [\tilde{g_y}(\tilde{y_0} + \lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g_y}(\tilde{y_0})](\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})d\lambda
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\tilde{p_0} = \tilde{y_y}(\tilde{y_0}).$$

Alors

$$0 \leq \mathbb{E}[\tilde{p_0}(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0}) - \tilde{y_0}] + \mathbb{E}\int_0^1 [\tilde{g_y}(\tilde{y_0} + \lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g_y}(\tilde{y_0})](\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})d\lambda$$

En appliquant la formule de Itô à $\tilde{p_t}(\tilde{y_t}^\theta, \tilde{y_t})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{p_0}(\tilde{y_0}^\theta, \tilde{y_0})] &= \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_y}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_y}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t)](\tilde{y_t} - \tilde{y_t}^\theta)\tilde{p_t} d\lambda dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t)](\tilde{z_t} - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p_t} d\lambda dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T [\tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t) - \tilde{b}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t^\theta)]\tilde{p_t} dt
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}&\int_0^T [\tilde{H}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, \tilde{p_t}, u_t) - \tilde{H}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, \tilde{p_t}, u_t^\theta)]dt \\
- \mathbb{E}&\int_0^1 [\tilde{g_y}(\tilde{y_0} + \lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g_y}(\tilde{y_0})](\tilde{y_t} - \tilde{y_t}^\theta)d\lambda \\
+ \mathbb{E}&\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_y}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_y}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t)](\tilde{y_t} - \tilde{y_t}^\theta)\tilde{p_t} d\lambda dt \\
+ \mathbb{E}&\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y_t}, \tilde{z_t}, u_t)](\tilde{z_t} - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p_t} d\lambda dt
\end{aligned}$$

Montrons que

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_y}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_y}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{y}_t - \tilde{y_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \leq C\theta^{3/2}$$

et

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \leq C\theta^{3/2}$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on aura

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \\
&\leq \left(\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 \left|[\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)]\tilde{p}_t\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\int_0^T \mid \tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta \mid^2 dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \\
&\leq C\theta \left(\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 \left|[\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)]\tilde{p}_t\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Par la définition de u^θ, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \\
&\leq C\theta \left(\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta} \int_0^1 \left|[\tilde{b_z}(\Lambda_t^v) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)\tilde{p}_t]\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

puisque $\tilde{b_y}$ est bornée, on aura

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \\
&\leq C\theta \left(\int_\tau^{\tau+\theta} \mathbb{E} \mid \tilde{p} \mid^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\tilde{p} \in L^2([0,T]; \mathbb{R}^{n+1})$, on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \int_0^1 [\tilde{b_z}(\Lambda_t^\theta) - \tilde{b_z}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, u_t)](\tilde{z}_t - \tilde{z_t}^\theta)\tilde{p}_t d\lambda dt \\
&\leq \left(C\int_\tau^{\tau+\theta} dt\right)^{1/2} C\theta = C\theta^{3/2}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}\int_0^T [\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) - \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t^\theta)]dt \\ +\mathbb{E}\int_0^1 [\tilde{g}_y(\tilde{y_0}+\lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0})](\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})d\lambda \\ + C\theta^{3/2}\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}\int_0^T [\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) - \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t^\theta)]dt \\ + \left(\int_0^1 \mathbb{E} \mid \tilde{g}_y(\tilde{y_0}+\lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0}) \mid^2 d\lambda\right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \mid \tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0} \mid^2\right)^{1/2} \\ + C\theta^{3/2}\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}\int_0^T [\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) - \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t^\theta)]dt \\ +C\theta\left(\int_0^1 \mathbb{E} \mid \tilde{g}_y(\tilde{y_0}+\lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0}) \mid^2 d\lambda\right)^{1/2} \\ + C\theta^{3/2}\end{aligned}$$

De la définition de u^θ, on aura

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta} [\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) - \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,v)]dt \\ +C\theta\left(\int_0^1 \mathbb{E} \mid \tilde{g}_y(\tilde{y_0}+\lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0}) \mid^2 d\lambda\right)^{1/2} \\ + C\theta^{3/2}\end{aligned}$$

En divisant par θ, on obtient

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta} [\tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,u_t) - \tilde{H}(t,\tilde{y}_t,\tilde{z}_t,\tilde{p}_t,v)]dt \\ + C\left(\int_0^1 \mathbb{E} \mid \tilde{g}_y(\tilde{y_0}+\lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0}) \mid^2 d\lambda\right)^{1/2} \\ + C\theta^{1/2}\end{aligned}$$

Puisque $\tilde{g}_y$ est continue et bornée, alors en appliquant le théorème de la convergence dominée, on aura

$$\lim_{\theta \to 0} C \int_0^1 \left(\mathbb{E} \mid \tilde{g}_y(\tilde{y_0} + \lambda(\tilde{y_0}^\theta - \tilde{y_0})) - \tilde{g}_y(\tilde{y_0}) \mid^2 \right)^{1/2} d\lambda = 0$$

En prenant la limite quand $\theta \longrightarrow 0$, on obtient

$$0 \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} [\tilde{H}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) - \tilde{H}(t, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, v)] dt$$

Ceci implique que

$$0 \leq \mathbb{E}[\tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) - \tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, v)], dr - a.e$$

Maintenant, soit$a \in U$ un élément déterministe et F un élément arbitraire de F_t, et on pose

$$\omega_t = a\mathbf{1}_F + u_t \mathbf{1}_{\Omega - F}$$

Il est clair que ω est un contrôle admissible . puisque $0 \leq \tau \leq T$, alors pour tout variable aléatoire vF_t-mesurable et à valeurs dans U telle que $\mathbb{E} \mid v \mid^2 < +\infty$, on obtient

$$0 \leq \mathbb{E}[\tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) - \tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, v)], dt - a.e$$

En appliquant cette inégalité à ω, on aura

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_F(\tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) - \tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, v))], \forall F \in F_t$$

ce qui implique

$$0 \leq \mathbb{E}[\tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) - \tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, v)/F_t].$$

La quantité à l'intérieur de l'espérance conditionnelle étant F_t-mesurable, donc le résultat suit immédiatement. Ceci prouve le théorème .

2.3 Conditions d'optimalité pour les contrôles stricts

A partir des résultats de la section précédents, nous allons reformuler les conditions nécessaires données au théorème () et établir les conditions d'optimalité pour le problème initial.

2.3.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 2.4 (Condition nécessaires d'optimalité pour les contrôles stricts) :

Soit (u, y^u, z^u) une solution optimale pour le problème initial. Alors, il existe un unique processus adapté

$$p^u \in \mathcal{L}^2([0,T]; \mathbb{R}^n),$$

solution de l'équation différentielle stochastique progressive suivante

$$\begin{cases} -dp_t^u = H_y(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)dt + H_z(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)dW_t, \\ p_0^u = g_y(y_0^u) \end{cases}$$

tel que

$$H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) = \max_{v \in U} H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v)$$

où le Hamiltonien H est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n \times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times U$dans $\mathbb{R}$

$$H(t, y, z, p, v) = pb(t, y, z, v) - h(t, y, z, v)$$

Preuve :

On pose

$$\tilde{p}_t = \begin{pmatrix} p_t^u \\ -1 \end{pmatrix}$$

De le définition de $\tilde{H}, \tilde{p}, \tilde{b}$ et $\tilde{z}$ on obtient

$$\tilde{H}(\tau, \tilde{y}_t, \tilde{z}_t, \tilde{p}_t, u_t) = H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)$$

et de l'équation adjoint associée au problème restreint, on déduit l'équation adjointe associée au problème initial. Finalement, l'inégalité variationnelle du problème initial est déduite directement de cette du problème restreint

2.3.2 Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème 2.5 (Conditions suffisantes d'optimalité pour les contrôle stricts) :

On suppose que U est convexe et pour tout $v \in U$ et pour tout $t \in [0,T]$, la fonction g est convexe et l'application $(y_t, z_t, v_t) \longrightarrow H(t, y_t, z_t, p_t, v_t)$ est concave. Alors, u est un optimal contrôle pour le problème initial s'il vérifie les conditions nécessaires d'optimalité .

Preuve :

Soit un contrôle strict arbitraire (candidat à être optimal) et (y_t^u, z_t^u) la solution associée. Pour tout contrôle strict v, avec solution associée (y_t^v, z_t^v) on a

$$J(v) - J(u) = \mathbb{E}[g(y_0^v) - g(y_0^u)] + \mathbb{E}\int_0^T [h(t, y_t^u, z_t^u, v_t) - h(t, y_t^u, z_t^u, u_t)]dt.$$

Puisque g est convexe, on aura

$$g(y_0^v) - g(y_0^u) \geq g_y(y_0^u)(y_0^v - y_0^u).$$

Alors

$$J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}[g_y(y_0^u)(y_0^v - y_0^u)] + \mathbb{E}\int_0^T [h(t, y_t^u, z_t^u, v_t) - h(t, y_t^u, z_t^u, u_t)]dt.$$

On remarque que

$$p_0^u = g_y(y_0^u).$$

On déduit

$$J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}[p_0^u(y_0^v - y_0^u) - H(t, y_t^u, z_t^u, u_t)]dt + \mathbb{E}\int_0^T [h(t, y_t^u, z_t^u, v_t) - h(t, y_t^u, z_t^u, u_t)]dt.$$

En appliquant la formule de Itô a $p_t^u(y_t^v - y_t^u)$, on obtient

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}\int_0^T &[H_y(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) + H_z(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u)]dt \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T [H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) - H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t)]dt \end{aligned}$$

Puisque H est convexe en (y, z, u), alors

$$\begin{aligned} H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t) - H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) &\leq H_y(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) \\ &+ H_z(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u) \\ &+ H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(v_t - u_t) \end{aligned}$$

Où d'un manière équivalente

$$\begin{aligned} H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(u_t - v_t) &\leq H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) \\ &- H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t) \\ &+ H_y(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) \\ &+ H_z(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$J(v) - J(u) \geq \mathbb{E} \int_0^T H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(u_t - v_t)dt$$

On sait que $H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .)$ est concave, alors $-H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .)$ est convexe de U dans $\mathbb{R}$. De plus, U est convexe et $-H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .)$ est continue, Gâteaux-différentiable, avec différentielle continue, alors en appliquant le principe de l'optimisation convexe (voir Ekeland-Temam[11, prop 2.1, page 35]), on obtient

$$-H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) = \inf_{v_t \in U} -H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t) \Leftrightarrow -H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(v_t - u_t) \geq 0.$$

Où d'une manière équivalente

$$H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t) = \max_{v_t \in U} H(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t) \Leftrightarrow H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(u_t - v_t) \geq 0.$$

Alors, par les conditions nécessaires d'optimalité, on déduit que

$$H_v(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t)(u_t - v_t) \geq 0.$$

Ce qui nous donne

$$J(v) - J(u) \geq 0.$$

Le théorème est prouvé

Chapitre 3

Conditions d'optimalité en contrôle stochastique relaxé

Le but de ce chapitre est de généraliser le chapitre 2 c'est- à- dire établir une généralisation du principe du maximum en contrôle optimale stochastique, l'idée serait d'injecter l'espace des contrôles ordinaires U dans l'espace des mesures de probabilité sur U où U désigne l'ensemble des valeurs prise par le contrôle ordinaire. Ce nouvel espace appelés espace de contrôle relaxé .

Notre objectif dans ce chapitre est d'établir un principe du maximum vérifié par un contrôle optimal relaxé. La démonstration est basée sur l'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles ordinaires et le principe du maximum approché.

Avant d'établir le principe du maximum relaxé, nous allons donné des hypothèses et des définitions nécessaires

3.1 Formulation du problème et notations

Soient$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles sur lequel on définie, un mouvement Brownien $(W_t)_t > 0$,on suppose que $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$

On considère L'EDSR suivant

$$\begin{cases} dy_t = \int_U b(t, y_t, z_t, a) q_t(da) dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

où b est définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^m$à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction mesurable et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable. La fonction coût a minimiser est donnée par

$$J(u) = \mathbb{E}[g(y_0)] + \mathbb{E} \int_0^T h(t, y_t, z_t, u_t) dt$$

où $h(t, y_t, z_t, u_t)[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$mesurable et $g(y)\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable en y
On suppose que b, h, g sont dérivable en x, y, zet à dérivées continues et bornées. $b, h,$ sont continues en u.

Remarque 3.1 :

i) L'équation d'état admet une solution forte unique

$$y_t = \xi + \int_t^T b(s, y_s, z_s) ds - \int_t^T z_s dW_s$$

ii) La fonction coût est bien définie.

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0, T] \times U$ dont la projection sur $[0, T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue munie de la topologie de la convergence stable des mesures . V est un espace compact mesurable, la convergence stable est préconisée par les fonctions mesurables bornée $h(t, a)$ telle que pour chaque $t \in [0, T]$,
$h(t, .)$ soil continue.
L'espace V est munit de sa tribu Borélienne ,qui est la plus petit tribu telle que l'application $q \to \int h(s, a) q(ds, da)$ soit mesurable pour toute fonction h mesurable, bornée et continue en a .

Définition 3.2 :

Soit $P([0,T]\times U)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,T]\times U$ telle que la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt. Un contrôle relaxé q est un variable $q(\omega, dt, da)$ a valeurs dans V telle que pour chaque $t1_{]0,T[}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable
On note par R l'ensemble des contrôles relaxés.

Remarque 3.3 :

Un contrôle relaxé peut être désintégré en

$$q(\omega, dt, da) = dtq(\omega, t, da)$$

où $q(u, t, da)$ est un processus progressivement mesurable a valeurs dans l'espace $P(U)$ des mesures de probabilités

Remarque 3.4 :

L'ensemble U des contrôles ordinaires peut être injecté dans l'ensemble R des contrôles relaxés par L'application

où $\delta_{u(t)}$est la mesure de Dirac de masse u.

L'équation d'état dans le cas des contrôles relaxés est donné par

$$\begin{cases} dy_t = \int_U b(t, y_t, z_t, a)q_t(da)dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

avec les même hypothèses sur b .

La fonction coût a minimiser est donnée par

$$J(q) = \mathbb{E}[g(y_0)] + \mathbb{E}\int_0^T \int_U h(t, y_t, z_t, a)q_t(da)dt.$$

avec les mêmes hypothèses sur h et g.

Remarque 3.5 :

Les hypothèses sur les différents coefficients définissant l'équation d'état et la fonction de coût sont les même avec le chapitre précisent.
On cherche a minimiser la fonction coût $J(\mu)$ sur l'ensemble R . C'est a dire trouver un contrôle $q \in R$ telle que

$$J(q) \leq J(\mu) \quad \forall \mu \in R$$

on note

$$J(q) = \inf_{\mu \in R} J(\mu)$$

La solution de l'équation d'état dans l'espace de contrôle relaxé est donnée par

$$y_t = \xi + \int_0^T \int_U b(t, y_t, z_t, a) q_s(da) ds - \int_0^T z_s dWs$$

Remarque 3.6 :

On pose

$$\bar{b}(t, y_t, z_t, a) = \int_U b(t, y_t, z_t, a) q_t(da)$$

L'équation président donné

$$\begin{cases} dy_t = \bar{b}(t, y_t, z_t, a) dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

et dans ce cas la fonction b qui satisfait les mêmes conditions que b et de plus linéaire en q.
Donc dans ce nouvel modal, l'ensemble des valeurs du processus u est remplacé par $P(U)$ l'ensemble des valeurs du processus q_t, où $P(U)$ est l'espace des mesures de probabilité sur U et b par b, et on a l'avantage que $P([0, T] \times U)$ soit convexe et compact et bb linéaire en q.

Remarque 3.7 :

Si $q_t = \delta_u(t)$ est la mesure de Dirac au point u (t) pour chaque $t \in [0, T]$ alors

$$\int_U b(t, y_t, z_t, a) q_t(da) = \int_U b(t, y_t, z_t, a) \delta_{u_t}(da) = b(t, y_t, z_t, u_t) \tag{3.1}$$

Dans ce cas on aura un problème de contrôle ordinaire par conséquent le problème de contrôle relaxé généralisé bien le problème ordinaire dans le sens où l'ensemble des contrôles ordinaires peut être considère comme un sous-ensemble de celui des contrôles relaxés .

3.2 Approximation des trajectoires

Pour établir le principe du maximum dans le cas des contrôles relaxés on a besoin d'un résultat d'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles ordinaires . Pour cela, l'outil essentiel est un lemme connu sous le nom de chaierring lemma ei qui est, donné par :

Lemme 3.8 :(Chaterring lemma)

Soit q un contrôle relaxé alors il existe une suite (u^n) de contrôle ordinaire telle que

$$dtq_t^n(da) = dt\delta_{u^n}(da) \to_{n\to\infty} dtq(da) \quad faiblement.$$

Pour toute fonction $h[0, T] \times \mathbb{R}^d \times P(U) \to \mathbb{R}^d$ continue sur $[0, T] \times P(U)$ telle que $\int_0^T \int_U h(t, y_s, z_s, a) q_s(da)$ soit linéaire en q on a

$$\lim_n \int_t^T \int_U h(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) = \int_t^T \int_U h(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \ unif$$

Démonstration :

A partir du chaterring lemma, on a l'approximation des trajectoires, donnée par le théorème suivant

Lemme 3.9 :

Soit $(y,z),(y^n,z^n)$ les trajectoires associées respectivement aux contrôle

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid y_t^n - y_t \mid^2 + \int_0^T \mid z_t^n - z_t \mid^2\right] \to 0 \quad si \quad n \to \infty$$

Preuve :

Soit $(y,z),(y^n,z^n)$ la solution de L'EDSR suivant

$$y_t^n = \xi + \int_t^T \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) ds - \int_t^T z_s^n dW_s$$

$$y = \xi + \int_t^T \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) ds - \int_t^T z_s dW_s$$

On pose

$$\int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) = a_s^n$$

$$\int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) = a_s$$

donc on applique la formule d'Itô sur $(y_t, y_t^n)^2$ on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned}\mid y_t^n - y_t \mid^2 + \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 ds &= 2\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid d \mid y_s^n - y_s \mid ds \\ &= 2\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid\mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid ds\end{aligned}$$

puis, comme $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$\mid y_t^n - y_t \mid^2 + \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 ds \leq \int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \int_t^T \mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 ds$$

et donc utilisant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(\mid y_t^n - y_t \mid^2 + \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 ds) \leq \mathbb{E}(\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \int_t^T \mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 ds) ....*$$

tel que

$$\mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 = \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2$$

en calcul $\mid \alpha_s^n - \alpha \mid^2$ et puis revenant a l'inégalité(*), donc

$$\begin{aligned}
\mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 &= \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2 \\
&= \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) + \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) \\
&- \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2
\end{aligned}$$

Si on prend l'inégalité$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,

$$\begin{aligned}
\mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 \leq 2 \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) \mid^2 \\
+ 2 \mid \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2
\end{aligned}$$

Donc, en intégrant de t à T

$$\begin{aligned}
\int_t^T \mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 ds &\leq 2 \int_t^T \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) \mid^2 ds \\
&+ 2 \int_t^T \mid \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2 ds \\
&\leq 2 \int_t^T \mid \int_U b(s, y_s^n, z_s^n, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) \mid^2 ds + \lambda_n
\end{aligned}$$

où

$$\lambda_n = 2 \int_t^T \mid \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s^n(da) - \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da) \mid^2 ds$$

Par conséquent d'après les hypothèse sur b on obtient

$$\begin{aligned}
\int_t^T \mid \alpha_s^n - \alpha_s \mid^2 ds &\leq 2c \int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 + \mid z_s^n - z_s \mid^2 + 2 \mid y_s^n - y_s \mid . \mid z_s^n - z_s \mid + \lambda_n \\
&\leq 2c \int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 + 2c \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 \\
&+ 2 \int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 + 2 \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 + \lambda_n \\
&\leq 2(c+1) \int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 + 2(c+1) \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 + \lambda_n
\end{aligned}$$

Revenant a l'inégalité(*)

$$\mathbb{E}(\mid y_t^n - y_t \mid^2 + \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 ds) \leq \mathbb{E}(\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds$$

$$+2(c+1)\mathbb{E}[\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 +2(c+1)\int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 +\lambda_n]$$

$$\leq (2c+3)\mathbb{E}\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + 2(c+1)\mathbb{E}\int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 +\lambda_n$$

Posons $c+1+\frac{1}{4}$

$$\mathbb{E}(\mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2) \leq K\mathbb{E}\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \lambda_n$$

On déduit deux inégalité

$$\mathbb{E} \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \leq K\mathbb{E}\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \lambda_n$$

$$\mathbb{E}\int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 \leq K\mathbb{E}\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \lambda_n$$

Pour

$$\mathbb{E} \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \leq K\mathbb{E}\int_t^T \mid y_s^n - y_s \mid^2 ds + \lambda_n$$

Puisque λ_n tends vers 0 quand n tends vers l'infini, alors par le lemme de Gronwall et l'inégalité de Buckholder Davis Gundy, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid y_s^n - y_s \mid^2\right] = 0$$

De la deuxième inégalité, on en déduit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_t^T \mid z_s^n - z_s \mid^2 ds = 0$$

Le théorème est démontré

Remarque 3.10 :

Si on note (y^n, z^n) la solution associée a q^n alors (y^n, z^n) doit satisfait l'équation suivante

$$\begin{cases} dy_t^n = \int_U b(t, y_t^n, z_t^n, a)q_t^n(da)dt + z_t^n dW_t \\ y_T^n = \xi \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} dy_t = b(t, y_t, z_t, a)q_t(da)dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

3.3 Principe du Maximum Approché

On remarque dans le chapitre précèdent que le contrôle optimal n'existe pas si on a l'absence d'hypothèse de Fillipov c'est-a-dire l'absence d'hypothèse de convexité par contre on sait qu'il existe toujours un contrôle presque optimal, et pour cela le principe du maximum approché est un grand utilité pour démontré le principe du maximum relaxé.La démonstration sur le principe du maximum approché basé essentiellement sur le principe variationnel d'Ekland, l'idée pour applique le théorème d'Ekland a notre problème est de munir l'ensemble des contrôle admissible U d'une distance adéquate qui fera de lui un espace métrique complet.
La démonstration sur le principe du maximum approché est basé essentiellement sur le principe variationnel d'Ekland.

Théorème 3.11 :(Principe variationnel d'Ekeland)

On pose un espace métrique complet (V, d) et une fonction F semi continue inférieurement telle que la fonction F définie dans V a valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ et admet aussi une borne inférieure fini, donc $\forall u \in V$ avec $F(u) \leq Inf(F) + \varepsilon$ et$\forall \lambda \gneqq 0$ il existe $v \in V$ tel que
i) $F(v) \leq F(u)$
ii) $d(u, v) \leq \lambda$
iii) $F(v) \leq F(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w)$

Corollaire 3.12 :

Soit (V, d) un espace métrique complet et $F : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction semi-continue inférieurment admettant une borne inférieure finie, alors $\forall \varepsilon \gneqq 0$, il existe $u^{\varepsilon} \in V$ tel que 1)$F(u^{\varepsilon}) \leq Inf(F) + \varepsilon$ 2)$F(u^{\varepsilon}) \leq F(u) + \varepsilon d(u^{\varepsilon}, u)$ Pour appliquer le principe variationnel d'Ekeland, on munit l'espace des contrôles U d'une distance adéquate pour en Faire un espace métrique complet. Pour cela, on définit

$$d(u, v) = P \otimes dt(\omega, t) \in \Omega \times [0, T], u(t, \omega) \neq v(t, \omega)$$

où$P \otimes dt$ est la mesure produit de P avec la mesure de Lebesgue dt.

Lemme 3.13 :

1)(U, d) est un espace métrique complet . 2)La fonction J est continue de U dans R.

Preuve :

Soit maintenant $q \in \mathcal{R}$ un contrôle optimal relaxé et x^q sa trajectoire correspondante. On sait par le chatering lemme et l'approximation des trajectoires, qu'il existe une suite $(u^n)_n$ de contrôle ordinaires tels que

$$dtq_t^n(da) = dt\delta_{u_t^n}(da) \to dtq_t(da)$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \mid x_t^n - x_t^q \mid^2\right] \longrightarrow 0 \quad si \quad n \to +\infty,$$

où x_t^n est la trajectoire associée aux contrôles q^n.

De l'optimalité de q, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombre positifs, avec $\lim_{n\longrightarrow\infty} \varepsilon_n = 0$, tel que

$$J(u^n, \xi) = J(q^n, \xi) \le J(q, \xi) + \varepsilon_n.$$

Ceci implique que u^n est un contrôle ε_n-optimal, donc on peut lui appliquer le principe variationnel d'Ekeland. On obtient

$$J(u^n) \le J(v) + \varepsilon_n d(u^n, v); \forall v \in U$$

De cette inégalité, on peut établir facilement le principe du maximum approché.

Théorème 3.14(Principe du maximum approché) :

Pour chaque $\varepsilon'_n \gneqq 0$, il existe une suite de contrôle ordinaires $(u^n)_n \in U$, tel que il existe un processus adapté $p^n(t)$ solution de

$$\begin{aligned} &dp^n(t) = \{-(b_y)^*_n(t)p^n(t) + (h_y)^*_n\}dt \\ &+ \sum_{i=1}^{d}\{-(b_z)^*_n(t)p^n(t) + (h_z)^*_n(t)\}dW_i \\ &p^n(0) = g_y(y^n_0) \end{aligned}$$

telle que

$$H(t, y^n, z^n, v, p^n) \leq H(t, y^n, z^n, u^n, p^n) + \varepsilon'_n$$

où

$$H(t, y^n, z^n, u^n, p^n) = p^n(t)^*b(t, , y^n, z^n, u^n) - h(t, y^n, z^n, u^n)$$

Preuve :

On sait précédemment que par le principe variationnel d'Ekeland, on a

$$J(u^n) \leq J(v) + \varepsilon_n d(u^n, v); \forall v \in U,$$

où la distance d et définie par

$$d(u, v) = P \otimes dt\{(w, t) \in \Omega \times [0, T], u(t, w) \neq v(t, w)\},$$

où $P \otimes dt$ est la mesure produit de P avec la mesure de Lebesgue dt .
Soit la perturbation fort suivante

$$u^n_\varepsilon = \begin{cases} vt \in [t', t' + \varepsilon[\\ u^n t \notin [t', t' + \varepsilon[\end{cases}$$

Ce que nous donne

$$J(u^n) \leq J(u^n_\varepsilon) + \varepsilon_n + d(u^n, u^n_\varepsilon).$$

C'est à dire

$$J(u^n) - J(u^n_\varepsilon) \leq \varepsilon'_n + d(u^n, u^n_\varepsilon).$$

De la définition de la distance d, on a

$$\begin{aligned} d(u^\varepsilon, u_h^\varepsilon) &= P \otimes dt\{(t,w)/u^n(t,w) \neq u_\varepsilon^n(t,w)\} \\ &= P \otimes dt\{B \times [t', t' + \varepsilon]\} \\ &= P(B)dt[t', t + [t', t + \varepsilon]] \\ &= P(B)\varepsilon \end{aligned}$$

Don on aura

$$d(u^\varepsilon, u_h^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Ce qui donne

$$J(u^n) - J(u_\varepsilon^n) \leq \varepsilon_n' \varepsilon$$

A partir de cette inégalité, le reste de la démonstration est le même que le principe du maximum en contrôle optimal stochastique (chapitre 2 théorème 2) avec une remplacement de u par u^n , finalement on obtient
si $\varepsilon \longrightarrow 0$ on a

$$H(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n) \leq H(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n, p_t^n) + \varepsilon_n'$$

Ce qui termine la démonstration

3.4 Principe du maximum relaxé

Soit q un contrôle optimal relaxé et considérons le processus adjoint p, solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dp(t) = \{\int_U b_y^*(t, y_t, z_t, a)q_s(da)p(t) + \int_U b_y^*(t, y_t, z_t, a)q_s(da)\}dt \\ + \sum_{i=1}^d \{\int_U b_z^*(t, y_t, z_t, a)q_s(da)p(t) + \int_U b_z^*(t, y_t, z_t, a)q_s(da)\}dW_i \\ p(0) = g_y(y^0(0))^* \end{cases}$$

Pour établir le principe du maximum relaxé des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades, on a besoin d'un lemme d'approximations du processus adjoint lié au contrôle optimal relaxé par des processus adjoints liés aux contrôles presque optimaux et qui est dérobé par le lemme suivant

Lemme 3.15 :

Soit p^n et p les solution respectives des équations (3.6) et (3.7), alors on a

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} \mid p_t - p_t^n \mid^2\right) \longrightarrow 0 \quad si \quad n \longrightarrow \infty$$

Preuve :

Pour la simplicité des calculs, on pose

$$-b_y^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \alpha_y$$

$$h_y^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \beta_y$$

$$-\sum_{i=1}^{d} b_z^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \alpha_{z_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{d} h_z^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \beta_{z_i}$$

$$\int_U -b_y^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \alpha_y^n$$

$$\int_U -h_y^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \beta_y^n$$

$$-\sum_{i=1}^{d} \int_U b_z^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \alpha_{z_i}^n$$

$$-\sum_{i=1}^{d} \int_U h_z^*(s, y_s, z_s, a)q_s(da) = \beta_{z_i}^n$$

Soit p^n et p les solutions respective des équations différentielles stochastiques () et (), alors p^n et p sont données par

$$p_t = g_y(y_0)^* + \int_0^t \{\alpha_y.p_s + \beta_y\}ds + \int_0^t \{\alpha_{z_i}.p_s + \beta_{z_i}\}dW_i$$

$$p_t^n = g_y(y_0^n)^* + \int_0^t \{\alpha_y^n.p_s^n + \beta_y^n\}ds + \int_0^t \{\alpha_{z_i}^n.p_s^n + \beta_{z_i}^n\}dW_i$$

Par la formule d'Itô on a

$$\mathbb{E} \mid p_t - p_t^n \mid^2 = \int_0^t \mathbb{E} \mid (\alpha_{z_i}^n p_s^n + \beta_{z_i}^n - (\alpha_{z_i} p_s - \beta_{z_i}) \mid^2 ds$$

$$+2 \int_0^t \mathbb{E} \mid (p_s - p_s^n) d(p_s - p_s^n) \mid ds$$

$$\leq \mathbb{E} \mid g_y(y_0^n) - g_y(y_0) \mid^2 + \int_0^t \mathbb{E} \mid (\alpha_{z_i}^n p_s^n - \alpha_{z_i} p_s) + (\beta_{z_i}^n - \beta_{z_i}) \mid^2$$

$$+2 \int_0^t \mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid\mid (\alpha_y^n p_s^n + \alpha_y p_s) + 2 \int_0^n \mathbb{E} \mid p_s - p_s^t \mid\mid \beta_y^n - \beta_y \mid$$

d'après les hypothèse sur b et h, puisque elles sont borné on a

$$\mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid \leq \mathbb{E} \mid g_y(y_0^n) - g_y(y_0) \mid^2 + C \int_0^t \mathbb{E} \mid \beta_{z_i}^n - \beta_{z_i} \mid^2 ds$$

$$+2K \int_0^t \mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid^2 + \int_0^t \mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid^2 + \int_0^t \mathbb{E} \mid \beta_y^n - \beta_y \mid^2$$

$$\leq C_1 \mathbb{E}(\mid y^n - y \mid + \mid z^n - z \mid)^2 + C_2 \int_0^t \mathbb{E}(\mid y^n - y \mid^2 + \mid z^n - z \mid^2) ds$$

$$+(2K+1) \int_0^t \mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid^2 ds + \int_0^t \mathbb{E}(\mid y_s^n - y_s \mid^2 + \mid z_s^n - z_s \mid^2) ds$$

donc

$$\mathbb{E}[\mid p_s - p_s^n \mid^2] \leq k \int_0^t \mathbb{E} \mid p_s - p_s^n \mid^2 ds + \rho^n$$

telle que

$$\rho^n = \int_0^t \mathbb{E}(\mid y_s^n - y_s \mid^2 + \mid z_s^n - z_s \mid^2) ds$$

et d'après cette lemme on a $\rho^n \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$ par conséquent en utilisant le théorème de Gronwall on obtient

$$\mathbb{E}[\mid p_s - p_s^n \mid^2] \leq \rho^n e^{kt}$$

Ce qui nous donne

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[\mid p_s - p_s^n \mid^2] = 0$$

Ce qui termine la démonstration .

A partir de ce dernier théorème et l'approximation des trajectoires, on peut facilement établir et démontrer le principe du maximum relaxé et qui est donné par

Théorème 3.16 :

Soit (g, y) une solution optimal pour notre problème de contrôle relaxé alors il existe un processus A_t? adapté solution de l'équation différentielle stochastique
Tel que

$$H(t, y_t, z_t, \mu, p_t) \leq H(t, y_t, z_t, q_t, p_t); \forall \mu \in P(U)$$

Où le Hamiltonien H dans le cas relaxé est défini par

$$H(t, y, z, q, p) = p^* \int_U b(t, y, z, a) q(da) - \int_U h(t, y, z, a) q(da)$$

Preuve :

On pose

$$H^n = H(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n, p_t^n) = p_t^{n*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n)$$

$$H_q = H(t, y_t, z_t, q_t, p_t) = p^* \int_U b(t, y_t, z_t, a) q_t(da) - \int_U h(t, y_t, z_t, a) q_t(da)$$

$$H_v^n = H(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n) = p_t^{n*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, v) - h(t, y_t^n, z_t^n, v)$$

$$H_\mu = H(t, y_t, z_t, \mu, p_t) = p^* \int_U b(t, y_t, z_t, a) \mu(da) - \int_U h(t, y_t, z_t, a) \mu(da)$$

D'après le principe du maximum approché

$$H(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n) < H(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n, p_t^n) + \varepsilon_n'$$

Pour prouvé le théorème il faut montré d'abot que

$$\lim_n \mathbb{E} \mid H^n - H_q \mid^2 = 0$$

$$\lim_n \mathbb{E} \mid H_v^n - H_\mu \mid^2 = 0$$

donc on utilisant la définition de H^n, H_q, H_v^n, H_μ on trouve

$$\mathbb{E} \mid H^n - H_q \mid^2 = \mathbb{E} \mid H(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n, p_t^n) - H(t, y_t, z_t, q_t, p_t) \mid^2$$

$$= \mathbb{E} \mid p_t^{n*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n)$$

$$-p_t^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) - \int_U h(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

d'après l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$,

$$\mathbb{E} \mid H^n - H_q \mid^2 \leq 2\mathbb{E} \mid p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

$$+2\mathbb{E} \mid h(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - \int_U h(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

$$\leq 2(\lambda_1+\lambda_2)$$

telle que

$$\lambda_1 = \mathbb{E} \mid p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

$$\lambda_2 = \mathbb{E} \mid h(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - \int_U h(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

Pour λ_1 on a

$$\lambda_1 = \mathbb{E} \mid p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \mid^2$$

$$= \mathbb{E} \mid p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) + p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,p_t) - p^{*^n} b(t,y_t^n,z_t^n,p_t)$$

$$-p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) + p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t^n(da)$$

$$-p(t)^* \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t^n(da) \mid^2$$

$$= \mathbb{E} \mid p^{*^n}(b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - b(t,y_t^n,z_t^n,p_t)) + (p_t^n - p_t) b(t,y_t,z_t,u_t^n,p_t)$$

$$p_t^* \left(\int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t^n(da) - \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \right) \mid^2$$

$$\leq 3\mathbb{E} \mid p^{*^n}(b(t,y_t^n,z_t^n,u_t^n) - b(t,y_t,z_t,u_t^n)) \mid^2$$

$$+3\mathbb{E} \mid p_t^* \left(\int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t^n(da) - \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \right) \mid^2$$

d'après les chatring lemma, on obtient

$$\int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t^n(da) \to \int_U b(t,y_t,z_t,a)q_t(da) \quad si \quad n \to \infty$$

Par conséquent on conclut que

$$\lambda_1 \to 0 \quad si \quad n \to \infty$$

Pour λ_2 on a

$$\lambda_2 = \mathbb{E} \mid h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - \int_U h(t, y_t, z_t, a) q_t(da) \mid^2$$

$$= \mathbb{E} \mid h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - h(t, y_t, z_t, u_t^n) + h(t, y_t, z_t, u_t^n) - \int_U h(t, y_t, z_t, a) q_t(da) \mid^2$$

$$\leq 2\mathbb{E} \mid h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - h(t, y_t, z_t, u_t^n) \mid^2 + 2\mathbb{E} \mid \int_U h(t, y_t, z_t, a) q_t^n(da)$$

$$- \int_U h(s, y_t, z_t, a) q_t(da) \mid^2$$

Par l'approximation des trajectoire et le lemme de Flemming on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_2 = 0$$

Ce qui nous donne

$$\lim_n \mathbb{E} \mid H^n - H_q \mid^2 = 0$$

Par la même méthode on obtient. $\lim_n \mathbb{E} \mid H_v^n - H_\mu \mid^2 = 0$

$$\mathbb{E} \mid H_v^n - H_\mu \mid^2 - \mathbb{E} \mid H(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n) - H(t, y_t, z_t, \mu, p_t) \mid^2$$

$$= \mid p_t^{n*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, v) - h(t, y_t^n, z_t^n, v)$$

$$- p_t^* \int_U b(t, y_t, z_t, a) \mu_t(da) - \int_U h(t, y_t, z_t, a) \mu_t(da) \mid^2$$

puisque b et h borné et le lemme (3.2) on a

$$\lim_n \mathbb{E} \mid H_v^n - H_\mu \mid^2 = 0$$

Finalement pour $n \to \infty$ on a

$$H_\mu \leq H_q; \forall \mu \in P(U)$$

Le théorème est prouvé.

Théorème 1.17

Si on suppose que la fonction g est convexe et $(y_t^q, z_t^q) \to H^q(t, y_t^q, z_t^q, p_t^q, q_t)$ est concave, alors μ est optimal s'il satisfait les CNOR.

Preuve :

Même démonstration que pour le cas Strict .

Bibliographie

[1] F.Antonelli ,Backward-forward stochastic differential equations,Annals of Applied Probility,1993 ,3,pp.777-793.

[2] S.Bahlali,B. Mezerdi and B.Djehiche,Approximation and optimality necessary condition in relaxed stochastic control problems,Journal of applied Mathematics and Stochastic Analysis,volume 2006,pp 1-23.

[3] S.Bahlali and B.Labed, Necessary and sufficient conditions of optimality for optimal control problem with initial and terminal costs, Random Operators and Stochastic Equation,2006,Vol 14,N03,pp 291-301.

[4] S.Bahlali,B. Djehiche and B. Mezrdi,The relaxed maximum principle in singular control of diffusions,SIAM J .Contron and Optim,2007,Vol 46,Issue 2,pp427-444.

[5] S.Bahlali, Necessary and sufficient condition of optimality for relaxed and strict control problem,SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol.47,No.4,pp.2078-2095.

[6] S.Bahlali,Necessary and sufficient condition of optimality for optimal control problem of forward and backward systems ,Probaility Theory and It ?s Application .In revision .

[7] A. Bensoussan ,Lecture on stochastic control .In nom linear filtering and stochastic control,Lecture notes in mathematics, 972.Proc.Cortona,Springer Verlag,1981.

[8] Ph.Briannd,B.Delyon,Y.Hu,E.Pardoux and L.Stoica, Lp Solution of backward stochastic differential equations, Sochastic Process and their Applications,No 108 (2003),pp 109-129.

[9] N.Dokuchaev and X.Y. Stochastic controls with terminal contingent conditions ,Journal Of Mathematical Analysis And Application,1999,238,pp143-165.

[10] I. Ekeland and R.Temam,Analyse couvexe et problem variationnel,Dunod. 1974.

[11] N. El Karoui ,N. Huu Nguyne and N.Jeanblanc Piqué,Compactification methods in the control of degenerate diffusions,Stochastics, 1987,Vol.20,pp 169-219.

[12] N. El Karoui and M. Mazliak,Backward stochastic differential equations,Addison Wesley,Longman, 1997.

[13] N. El Karoui,S.Peng and M.C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7,1997.

[14] N.El Karoui,S.Peng and M.C. Quenez,A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints,Annals of Applide Probability, 11(2001),pp664-693.

[15] W.H.Fleming,Generalized solutions in optimal stochastic control,Differential games and control theory 2,(Kingston conference 1976),Lect. Notes in Pure and Appl.Math.30,1978.

[16] N.F Framstad,B. Oksendal and Sulem, A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions ans application to finance, J.Optim.Theory and applications,2004,121,pp 77-98.

[17] M.Fuhrman and G. Tessitore,Existence of optimal stochastic controls and global solutions of forward-backward stochastic differential equation,SIAM Jour.Cont.Optim,2004,Vol 43,N° 3,PP 813-830.

[18] U.G.Haussmann,General necessary conditions for optimal control of stochastic systems,Math.Programming Studies 6,1976,pp 30-48.

[19] U.G.Haussmann,A Stochastic maximum principale for optimal control of diffusions,Pitmal Research Notes in Math, 1986,Series 151.

[20] J. Jacod and J. Mémin,Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité,Sem. Proba.XV ,Lect. Notes in Math,851,1980,Springer Verlag.

[21] S .Ji and X.Y. Zhou, A maximum principle for stochastic optimal control with terminal state constraints,and its applications. Commun. Inf.Syst, 2006,6(4),pp 321-338.

[22] H.J.Kushner,Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems,SIAM J. Contol Optim,Vol. 10,1973,pp 550-565.

[23] J.Ma and J. Zhang,Represntation theorems for backward stochastic differential equation,Ann. Appl. Probab,2002,12(4) :1390-1418.

[24] B. Mezerdi,Necessary condition for optimality for a diffusion with a non smooth drift,Stochastics And Stoch.Reports,1988,Vol.24,pp 305-326.

[25] B. Mezerdi, and S. Bahlali,Approximation in optimal control of diffusion processes, Rand. Operat. And Stoch. Equ, 2000,vol.No 4,pp 365-372.

[26] B. Mezerdi and S. Bahlali,Necessary condition for optimality in relaxed stochastic control problem, Stochastic And Stoch. Report,2002,Vol 73(3-4),pp 201-218.

[27] E. Pardoux and S. Peng, Adapted solution of backward stochastic differential equations,Sys. Control Letters, 1990,Vol. 14,pp 55-61.

[28] S.Peng, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM Jour.Cont.Optim, 1990,28,N° 4,PP 966-979.

[29] S. Peng ; Backward stochastic differential equation and application to optimal control , App. Math.Optim,1993,27,pp 125-144.

[30] S. Peng and Z. Wu, Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control, SIAM J. Control Optim, 1999,37 no. 3, pp 825-843.

[31] J.T. Shi and Z. Wu, The maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic control system, Acta Automatica Sinica , Vol 32, N° 2,2006,PP 161-169.

[32] Z.Wu, Maximum Principale for Optimal Control Problem of Fully Coupled Forward-Backward Stochastic Systems,Systems Sci. Math.Sci,A998,11,No 3,pp249-259.

[33] W.Xu, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system,J. Austral.Math.Soc.Ser. B 37,1995, pp 172-185.