UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : SLIMANI naoual

Thème

Méthode de éléments finis stabilisée discontinus pour les équations de Darcy

Soutenu publiquement le : 01/06/2017

Devant le jury composé de :

Chacha Djamal Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.A. Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Ghezal Abderrazek	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Merabet Ismail	M.C. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

A mes parents :

Ma mère « Yasmina », qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude. Puisse Dieu te prêter longue vie avec beaucoup de bonheur et de santé.

Mon père « Amara », qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit, Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi. Puisse Dieu lui prêter longue vie !
A mes deuxième parents « BEKAKRA Naima » et « GUEDIRI Abdelali ».

A ma chère Grand-mère « Daya Tounes ».

A mes chers Frères : Sadek et Tarzi.

A mes chers Sœurs : Ferouz, Amel, Samira, Karima et Hana.

A mon cher fiancé « GUEDIRI Taoufik Lazhari»

A toutes les familles : SLIMANI, MEHRIA et GUEDIRI

Quoi de mieux que d'exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à l'égard de mon

encadreur, monsieur MERABET Ismail, qui a su me conduire à développer ce travail.

A tous mes amies :Ines, Saida, Amel, Khaoula, Achouak, Nachwa, Hadda. A tous mes amis du spécialité Modélisation et Analyse Numérique promo 2017. A ceux qui ont cru en moi. A ceux qui croient en moi. Et à ceux qui croiront toujours en moi. A vous tous un grand merci.

Remerciement

En premier lieu je tiens à remercier ***Allah*** le tout puissant de m'avoir donné la force et la connaissance pour accomplir une action qui lui plaise.
Je tiens tout à remercier premier lieu mon encadreur Monsieur ***MERABET Ismail*** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.
Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail, et tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux. J'exprime également ma gratitude aux membres du Jurys qui m'onthonoré en acceptant de juger ce travail.
Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Dédication i

Remerciement iii

Notations et Prémilinaires 1

1 Quelques outils pour l'approximation variationnelle des EDP 4

1.1 Formulation faible d'un problème aux limites 4

1.2 Théorème de Lax-Milgram 5

1.3 Le théorème de Banach-Necăs-Babuška-Brezzi 8

1.4 Espaces de Sobolev 9

1.4.1 Dérivation faible 9

1.4.2 L'espace $H^1(\Omega)$ 9

1.5 Théorème de trace et trace normale 10

2 Eléments finis pour les équations de Darcy 12

2.1 Introduction 12

2.2 Formulation Variationnelle. 13

2.2.1 Première formulation variationnelle 13

2.2.2 L'existence et l'unicité 13
2.2.3 Deuxiéme formulation variatinnelle 16
2.3 Le probléme discret 16
2.3.1 Le probléme discret pour la premmiére formulation variationnelle . 16
2.3.2 Le probléme discret pour deuxiéme formulation variationnelle . . . 16
2.3.3 Critère de Fortin 17
2.4 L'élement finis de Raviart-Thomas 18
2.4.1 Application sur Raviart-Thomas/Darcy 19
2.5 Discrétisation par éléments finis pour l'équation Darcy 22
2.5.1 Premiére discrétisation par éléments finis 22
2.5.2 Deuxiéme discrétisation par éléments finis 30
2.6 Estimation d'erreur 31
2.6.1 Estimation d'erreur a priori 31

3 Sabilisation pour l'équation Darcy **33**
3.1 Introduction 33
3.2 Discrétication 33
3.3 Une formulation faible du problème continu 37
3.4 Analyse d'erreur 38

4 Simulations numériques sous FreeFem++ **46**
4.1 Premier exemple 46
4.2 Deuxiéme Exemple(Méthode stabilisé) 49

Bibliographie **54**

NOTATIONS

- $\nabla v = \text{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v.
- $D^2 v = \nabla^2 v = \begin{pmatrix} \partial_x^2 v & \partial_{yx}^2 v \\ \partial_{xy}^2 v & \partial_y^2 v \end{pmatrix}$: La matrice Hessienne
- $\Delta = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
- $[\![v]\!] = v_- \mathbf{n}^- + v_+ \mathbf{n}^+$.
- $\{v\} = \dfrac{\nabla v_- + \nabla v_+}{2}$.
- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial n^2} = n \cdot (\nabla^2 v) n$.
- $\left[\!\!\left[\dfrac{\partial v}{\partial n}\right]\!\!\right] = (\nabla v_+ + \nabla v_-) \cdot n$.
- $Osc_2(f) = (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|f - f_T\|_{L_2(T)}^2)^{\frac{1}{2}}$.

INTRODUCTION

La mécanique des fluides est l'étude du comportement (liquides et gaz) qui perdent leur forme au cours du temps, par opposition aux solides qui la gardent.

L'étude d'un fluide remonte à la Grèce antique, avec

➤ **Archimède** (287-212 BC) Géomètre, Ingénieur, Physicien.

➤ **Héron d'Alexandrie** (10-70) qui a étudié la pression des gaz. Il construit des machines à vapeur.

➤ **Leonardo da Vinci** (1452-1519) Il propose de nombreuses descriptions de types des fluide (jets, tourbillons, ondes de surface). Il formule le principe de conservation de la masse.

➤ en 1738, **Daniel Bernoulli** étudie les fluides non visqueux, fondant son analyse sur la conservation de l'énergie.

Dans le domaine des mathématiques appliquées la modélisation des écoulement de fluide est très importante. Il existe plusieurs équations qui modélisent le mouvement des fluides par exemple :

➤ Les équations de Euler[1]

$$\begin{cases} \rho_0(\dfrac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)u = \rho_0 g - \nabla p \\ \mathrm{div} u = 0. \end{cases}$$

[1]Mathématicien suisse, établit ces équations, telles qu'on les connait aujourd'hui, en 1755

➤ Les équations de Stokes[2]

$$\begin{cases} -\nu\triangle u + \nabla p = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \text{div} u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

➤ Les équations de Navier-Stokes [3] :

$$\begin{cases} \rho_0(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)u - \nu\triangle u = \rho_0 g - \nabla p & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ \text{div} u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

➤ Les équations de Darcy [4]

$$\begin{cases} u + \frac{k}{\mu}\nabla p = -\frac{k}{\mu}(\frac{\rho}{g_c}g) & \text{dans } \Omega \\ \text{div} u = \varphi & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = \psi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce travail, nous avons étudié la méthode des éléments finis stabilisée discontinus Pour l'équation Darcy. Ce mémoire se compose de quatre chapitres
Dans le premier chapitre, nous avons posé quelques notations et définitions sur l'estimation d'erreur par éléments finis et quelques exemples.
Ensuite dans le deuxième chapitre, nous déterminons la formulation variationnelle. Après on propose une formulation mixte, et on étudie l'existence et l'unicité de cette formulation. Nous discrétisons le problème de Darcy par la méthode élément finis de Ravait-Thomas et puis nous montrons quelques théorèmes sur l'estimation des erreurs.
Dans le chapitre suivant, on a étudié la satabilisation discontinue pour le problème de Darcy.
Finalement, dans le dernier chapitre, nous présentons quelques tests numériques programmés sous le logiciel Freefem++.

[2]Mathématicien et physicien britannique, en 1819
[3]Mathématiciens français et irlandais, établissent ces équations pour un fluide visqueux en 1820-1845
[4]Henry Darcy 1856

Chapitre 1

Quelques outils pour l'approximation variationnelle des EDP

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts de base pour l'analyse mathématique de la méthode des éléments finis.

1.1 Formulation faible d'un problème aux limites

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si u est la solution du problème (1.1) et v une fonction (suffisamment régulière) et satisfait $v(0) = v(1) = 0$, alors en multipliant la première équation de (1.1) par v et on intègre on obtient :

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx =: (f,v) \tag{1.2}$$

par intégration par parties on obtient

$$(f, v) := \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx =: a(u, v). \tag{1.3}$$

Nous introduisons pour l'instant (formellement) l'espace :

$$V = \{v \in L^2(]0,1[); a(v,v) < +\infty \text{ et } v(0) = v(1) = 0\}.$$

L'espace V est appelé " cadre fonctionnel".
Alors la solution du (1.1) est caractérisée par

$$\begin{cases} u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.4}$$

Le problème (1.4) est appelé *la formulation faible* du problème (1.1).
Par construction du problème faible il est claire que toute solution du problème (1.1) est solution du problème (1.4). Mais c'est la réciproque, qui est plus importante.

1.2 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un théorème très important, la démonstration est basée sur le théorème de représentation de Riesz. Considérons un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 1.2.1 *(Lax-Milgram). Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que :*

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \quad \forall (u,v) \in V \times V, \quad |a(u,v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V;$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive (on dit également V- elliptique)

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2. \tag{1.6}$$

(iii) la forme linéaire $F(v)$ est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \quad \forall v \in V, \quad |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V;$$

Alors, le problème (1.5) admet une et une seule solution. De plus, son unique solution satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|F\|_{V'}}{\alpha}. \tag{1.7}$$

Preuve. Pour tout $u \in V$, on définit l'opérateur Au par

$$Au(v) = a(u, v), \forall v \in V.$$

Alors $Au \in V'$ et on a aussi l'opérateur qui a chaque $u \mapsto Au$ est linéaire continue de V dans V', i.e., $A \in \mathcal{L}(V, V')$ puisque on a

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \leq \beta \|u\|$$

On utilise le fait que $Au \in V'$, alors d'après le théorème de représentation de Riesz,

$$\exists! w_0 \in V, \text{ tel que } < Au, v >= (w_0, v), \quad \forall v \in V.$$

Donc la démonstration du théorème de Lax-Milgram est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ t.q} \\ \qquad \tau Au = w_0 = \tau F \text{ dans } V. \end{cases} \tag{1.8}$$

où τ est l'isomorphisme de Reisz de V' dans V.
ou bien

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ t.q} \\ \qquad Au = F \text{ dans } V'. \end{cases} \tag{1.9}$$

Alors on définit l'opérateur

$$Tw = w - \lambda(\tau Aw - \tau F).$$

Si l'application T est contractante, alors l'équation

$$Tu = u \tag{1.10}$$

admet une solution unique dans V. Si c'est le cas alors

$$\lambda(\tau Au - \tau F) = 0, \text{ ce qui signifie que } \tau Au = \tau F.$$

Donc le problème se réduit à montrer que tel $\lambda \neq 0$ existe.

Pour tous $v_1, v_2 \in V$, on pose $v = v_1 - v_2$. Alors

$$\begin{aligned}
\|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \lambda(\tau Av_1 - \tau Av_2)\|^2 \\
&= \|v - \lambda(\tau Av)\|^2 && \tau, A \text{ sont linéaires} \\
&= \|v\|^2 - 2\lambda(\tau Av, v) + \lambda^2\|\tau Av\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\lambda\tau Av(v) + \lambda^2 Av(\tau Av) && \text{la définition de } \tau \\
&= \|v\|^2 - 2\lambda a(v, v) + \lambda^2 a(v, \tau Av) && \text{la définition de } A \\
&\leq \|v\|^2 - 2\lambda\alpha\|v\|^2 + \lambda^2\beta\|v\|\|\tau Av\|, && \text{Continuité et coercivité de } a \\
&\leq (1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2\beta^2)\|v_1 - v_2\|^2 \\
&= M^2\|v_1 - v_2\|^2.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que α et β sont la constant de coercivité et de continuité de a. Alors nous avons besoin de choisir λ telle que :

$$1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2\beta^2 < 1, \text{ i.e., } \lambda(\lambda\beta^2 - 2\alpha) < 0.$$

Donc si nous choisissons $\lambda \in (0, \frac{2\alpha}{\beta^2})$, alors $M < 1$.

Pour démontrer (1.7), on a :

$$\alpha\|u\|_V \leq \sup_{v\in V}\frac{a(u, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V}\frac{F(v)}{\|v\|} = \|F\|_{V'}$$

■

Remarque 1.2.2 *Le théorème de Lax-Milgram fournit des conditions suffisantes pour qu'un problème de type (1.4) (problème variationnel) soit bien posé, c'est-à-dire qu'il admette une et une seule solution.*

1.3 Le théorème de Banach-Necăs-Babuška-Brezzi

Théorème 1.3.1 *(Banach-Necăs-Babuška). Soit V et W deux espaces de Hilbert, $a \in L(V \times W, \mathbb{R})$ et $F \in W'$ Alors, le problème (1.5) est bien posé si et seulement si*

$$\exists \alpha > 0, \inf_{v \in V} \sup_{w \in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha \tag{1.11}$$

$$\forall w \in W, (\forall v, a(v,w) = 0) \Longrightarrow (w = 0) \tag{1.12}$$

Remarque 1.3.2 *La condition inf-sup (1.11) se reformule de la façon suivante : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$.*

$$\alpha \|v\|_V \leq \sup_{w \in W} \frac{a(v,w)}{\|w\|_W} \tag{1.13}$$

Pour prouver la condition inf-sup, on peut procéder comme suit :
on considère une fonction $v \in V$ et on construit une fonction $w_v \in W$ telle que

$$a(v, w_v) \geq \alpha_1 \|v\|_V^2 \text{ et } \|w_v\|_W \leq \alpha_2 \|v\|_V.$$

Soit V et M deux espace de Hilbert et deux formes bilinéaires $a(;) : V \times V \to \mathbb{R}$ et $b(;) : V \times M \to \mathbb{R}$. Nous supposons que les deux formes sont continues, i.e.,

$$|a(w,v)| \leq C\|w\|_V \|v\|_V, \forall w, v \in V$$
$$|b(v,q)| \leq C\|v\|_V \|q\|_M, \forall v \in V, q \in M.$$

On considère le problème variationnel qui consiste à :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u,p) \in V \times M \text{ tel que} \\ a(u,v) + b(v,p) = F(v), \quad \forall v \in V \\ b(u,q) = G(q), \quad \forall q \in M. \end{cases} \tag{1.14}$$

Où $F \in V'$ et $G \in M'$.

On définit l'espace $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{v \in V \; ; \; b(v,q) = 0, \quad \forall q \in M\} \tag{1.15}$$

Lemme 1.3.3 *Supposons que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V, \forall v \in \mathbb{Z}. \tag{1.16}$$

$$\sup_{w \in V} \frac{b(w, p)}{\|w\|_V} \geq \beta \|q\|_M, \forall p \in M. \tag{1.17}$$

Alors le problème (1.14) admet une solution unique.

1.4 Espaces de Sobolev

On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes :
Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions définies sur Ω

1.4.1 Dérivation faible

Définition 1.4.1 *Soit une fonction $v \in L^2(\Omega)$. On dit que la fonction v est dérivable au sens faible s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour tout $i = 1, ..., N$ telles que pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega w_i \phi \, dx$$

Les fonctions w_i sont appelées les dérivées partielles faibles et sont notées $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$.

1.4.2 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.4.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est définit par :*

$$H^1(\Omega) =: \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., N\} \tag{1.18}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle au sens faible de u.

Plus généralement, soit

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_N), \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, ..., N$$

un multi-indice. On notera

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_N^{\alpha_N}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i.$$

et on introduit les espaces suivants :

Définition 1.4.3 *Pour $m \in \mathbb{N}$*

$$H^m(\Omega) =: \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\} \tag{1.19}$$

Alors pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour $m = 1$ on retrouve l'espace introduit dans la définition (1.4.2).

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx. \tag{1.20}$$

La norme associé à ce produit scalaire

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |\partial^\alpha u|^2\right)^{1/2}. \tag{1.21}$$

Proposition 1.4.4 .

i) Si $m \geq m', H^m(\Omega)$ est contenu dans $H^{m'}(\Omega)$.

ii) $H^m(\Omega)$ munit du produit scalaire (1.20) est un espace de Hilbert.

1.5 Théorème de trace et trace normale

Supposons que le domaine Ω est suffisamment régulier (de classe C^1, par exemple), alors on définit l'opérateur de trace γ_0 par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega}) &\to L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\overline{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) = u_{/\partial\Omega} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Théorème 1.5.1 *L'application linéaire γ_0 définie par (1.22) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, i.e., il existe une constant c tel que :*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \; \|u\|_{1,\Omega}, \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.23}$$

on définit l'opérateur de trace normale γ_1 par

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) &\to L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\overline{\partial\Omega}) \\ u &\mapsto \gamma_1(u) = \partial_n u_{/\partial\Omega} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Théorème 1.5.2 *L'application linéaire γ_1 définie par (1.24) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, i.e., il existe une constant c tel que :*

$$\|\partial_n u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\ \|u\|_{2,\Omega}, \forall u \in H^2(\Omega). \tag{1.25}$$

Chapitre 2

Eléments finis pour les équations de Darcy

2.1 Introduction

Soit Ω un ouvert bornè $\Omega \subset \mathbb{R}^d, (d = 2$ ou $3)$. Qui modélisent l'écoulement d'un fluide visqeux incompressible dans un milieu poreux occupant le domaine Ω. Ici, les inconnues sont le champ de vecteurs u à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui représente la vitesse du fluide, et la fonction scalaire p qui représente sa pression. Le paramétre μ est égal au quotient de la viscosité du fluide par la perméabilité du milieu, et la quantité μ^{-1} s'appelle aussi coefficient de porosité.
On considère les équations de Darcy

$$\begin{cases} u + \dfrac{k}{\mu}\nabla p = -\dfrac{k}{\mu}(\dfrac{\rho}{g_c} g) \ \text{ dans } \Omega \\ \qquad \text{div} u = \varphi \quad \text{dans} \ \ \Omega \\ \qquad u \cdot n = \psi \quad \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce travail.On s'intéresse ici au cas d'un milieu homogéne : la fonction $\mu = \kappa = \rho = g_c = 1$, et $\varphi = \psi = 0$.

$$\begin{cases} u + \nabla p = f, \ x \in \Omega \\ \text{div} u = 0, \ x \in \Omega \\ u.n = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 Formulation Variationnelle.

On observe que le probème (2.1) admet plusieurs formulation variationnelles équivalentes. Nous commençons par écrire et analyser deux de ces formulations variationnelles.

$$H(div, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^2, divv \in L^2(\Omega)\}.$$

$$H_0(div, \Omega) = \{v \in H(div, \Omega); v.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_\Omega dx = 0\}.$$

2.2.1 Première formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } H_0(div, \Omega) \times L_0^2(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega u(x) \cdot v(x)dx - \int_\Omega p(x)(divv)(x)dx = \int_\Omega f(x) \cdot v(x)dx, \quad \forall v \in H_0(div, \Omega) \\ \displaystyle -\int_\Omega q(x)(divu)(x)dx = 0, \ \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.2}$$

2.2.2 L'existence et l'unicité

Théorème 2.2.1 *(Babushka-Brezzi) Soient V et M sont deux espaces de Hilbert. On suppose que*

1) Les formes a et b sont des formes bilinéaires continues

$$\exists \ \ \beta < +\infty \ \ , \ \ \forall \ \ (u, v) \in V \times V \quad \textit{tel que} \quad | \, a(u, v) \, | \leq \beta \parallel u \parallel_V \cdot \parallel v \parallel_V .$$

2) La forme bilinéaire a est coercive sur Z défini par : $Z = \{v \in V \ b(v,q) = 0, \quad \forall q \in M\}$

$$\exists \ \alpha \ , \ \forall \ v \in Z \ \ \textit{tel que} \quad a(v,v) \geq \alpha \parallel v \parallel_Z^2 .$$

3) La forme b satisfait la condition "inf-sup"

$$\exists \ \beta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\parallel v \parallel_V} \geq \beta \parallel q \parallel_M \quad \forall q \in M.$$

4) $f \in V'$

Maintenant nous démontrons que la première formulation variationnelle du problème de Darcy satisfait le condition requises dans le (2.2.1).

On déjà vu que les espaces $V = H_0(div, \Omega)$ et $M = L_0^2(\Omega)$ sont Hilbert.

La forme $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwerz)

$$\begin{aligned} \mid a(u,v) \mid &= \mid \int_\Omega u \cdot v ds \\ &\leq \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \cdot \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \parallel u \parallel_V \cdot \parallel v \parallel_V \end{aligned}$$

Et coercive sur Z_1 (par l'inégalité de Poincaré)

$$Z_1 = \{v \in H_0(div, \Omega) \ , \ b(v,q) = 0 \ , \ \forall q \in L_0^2(\Omega)\}$$

$$\begin{aligned} a(v,v) = \int_\Omega v^2 dx &= \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \parallel v \parallel_V^2 \end{aligned}$$

On à

$$\parallel v \parallel_V = \parallel v \parallel_{L^2} + \parallel \text{div} v \parallel_{L^2}$$

Remarque 2.2.2 *Si* $v \in Z_1$ *on a* $b(v,q) = 0$ *donc* $divv = 0 \ \ \forall q \in M$ *donc* $\parallel divv \parallel_{L^2(\Omega)} = 0$

Donc $\parallel v \parallel_V = \parallel v \parallel_{L^2}$

La forme $b : V \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-schwerz)

$$\begin{aligned} \mid b(v,q) \mid &= \mid \int_\Omega q \text{div} v dx \mid \\ &\leq \parallel q \parallel_{L^2(\Omega)} \cdot \parallel \text{div} v \parallel_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \parallel q \parallel_M \cdot \parallel \text{div} v \parallel_V \end{aligned}$$

Lemme 2.2.3 *(Surjectivité opérateur) Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $p \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in [H^1(\Omega)]^N$ tel que*

$$div v = p \quad et \quad ||v||_{H^1(\Omega)]^N} \leq C||p||_{L^2(\Omega)}$$

De plus, si p vérifie $\int_\Omega$ alors on prendre $v \in [H_0^1(\Omega)]^N$.

Remarque 2.2.4 *Le théorème de Banach de l'application inverse affirme que l'inverse d'une application linéaire continue surjective et continu.*

D'après la remarque (2.2.4) le lemme (2.2.3) on a

$$\text{div} : V \longrightarrow M \quad \text{(surjective)}$$

et

$\exists \;\; c > 0$ tel que $\| \text{div} v \|_{L^2(\Omega)} \leq c \| v \|_V$ (linéaire continue)

donc

$\exists \;\; \tilde{c} > 0$ tel que

$$\| v \|_V \leq \tilde{c} \| \text{div} v \|_{L^2(\Omega)} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\| v \|_V} \geq \frac{1}{\tilde{c}} \frac{1}{\| \text{div} v \|_{L^2(\Omega)}} \tag{2.4}$$

en multiplie (2.5.1) par $| b(v, q) |$ et on pose que $\beta = \dfrac{1}{\tilde{c}}$

$$\frac{| b(v, q) |}{\| v \|_V} \geq \beta \frac{| b(v, q) |}{\| \text{div} v \|_{L^2(\Omega)}} \tag{2.5}$$

D'autre part

$$b(v, q) = -\int_\Omega q \text{div} v dx$$

en prend $\quad -q = \text{div} v \quad$ en obtient

$$b(v, q) = \int_\Omega \text{div} v^2 dx = \| \text{div} v \|^2_{L^2(\Omega)} = \| q \|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\| v \|_V} \geq \beta \| q \|_{L^2(\Omega)} \tag{2.6}$$

donc la condition "inf-sup" est satisfait.

2.2.3 Deuxiéme formulation variatinnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \text{ dans } L^2(\Omega)^2 \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\cdot v(x)dx + \int_\Omega v(x)\cdot \nabla p(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)dx,\ \forall v \in L^2(\Omega)^2 \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)\cdot \nabla q(x)dx = 0,\ \forall q \in (H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 Le probléme discret

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation réguliére de Ω. On définit l'espace des éléments finis

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h/T} \in \mathbb{P}^k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \subset H_0^1(\Omega)$$

$$Q_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h/T} \in \mathbb{P}^0(T)\}$$

2.3.1 Le probléme discret pour la premmiére formulation variationnelle

$$V_h \subset H_0(div,\Omega), \quad Q_h \subset L_0^2(\Omega)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h,p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \\ \displaystyle\int_\Omega u_h(x)\cdot v_h(x)dx - \int_\Omega p_h(x)div\ v_h(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot v_h(x)dx,\ \forall v_h \in V_h \\ \displaystyle -\int_\Omega q_h(x)(div\ u_h)(x)dx = 0,\ \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.8}$$

2.3.2 Le probléme discret pour deuxiéme formulation variationnelle

$$V_h \subset H_0(div,\Omega), Q_h \subset H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)$$

$$\begin{cases} \text{trouver } (u_h,p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \text{tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega u_h(x)\cdot v_h(x)dx + \int_\Omega v_h(x)\cdot \nabla p_h(x)dx = \int_\Omega f(x)\cdot v_h(x)dx, \forall v_h \in V_h, \\ \displaystyle\int_\Omega u_h(x)\cdot \nabla q_h(x)dx = 0, \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.3.1 *Contrairement au cas où l'existence et l'unicité est démontrée par le théorème de Lax-Milgram. Pour les problème de type point-selle, le fait que $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$ n'implique pas forcement l'existence et l'unicité de la solution du problème discret.*
Un outil trés puissant pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème approché est le critère de Fortin

2.3.3 Critère de Fortin

Lemme 2.3.2 *[11] Soient H est un espace de Hilbert, $b : H \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue , et il existe $\beta > 0$ telle que*

$$\sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{b(\tau, v)}{\| \tau \|_H} \geq \beta \| v \|_Q ; \forall v \in Q$$

$\{H_h\}_{h \in I}$ et $\{Q_h\}_{h \in I}$ sont des sous-espaces de H et de Q respectivement, et supposer que l'existent $\{\Pi_h\}_{h \in I} \subseteq \mathcal{L}(H, H_h)$ et $\tilde{c} > 0$ telle que

$$\| \Pi_h \| \leq \tilde{c} \quad , \forall h \in I$$

et

$$b(\tau - \Pi_h(\tau), v_h) = 0 \quad , \forall v_h \in Q_h, \quad \forall h \in I,$$

Alors, il existe $\tilde{\beta} > 0$; indépendant de h telle que

$$\sup_{\tau_h \in H_h, \tau_h \neq 0} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\| \tau_h \|_H} \geq \tilde{\beta} \| v_h \|_Q ; \quad \forall v_h \in Q ; \quad \forall h \in I$$

Preuve. La continuité et la condition inf-sup sont vérifies pour b et donné $v_h \in Q_h$ donc

$$\begin{aligned} \beta \| v_h \|_Q \leq \sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{| b(\tau, v_h) |}{\| \tau \|_H} &= \sup_{\tau \in H, \tau \neq 0} \frac{b(\Pi_h(\tau), v_h)}{\| \tau \|_h} \\ &\leq \tilde{c} \sup_{\tau \in H, \Pi_h(\tau) \neq 0} \frac{| b(\Pi_h(\tau), v_h) |}{\| \Pi_h(\tau) \|_H} \\ &\leq \tilde{c} \sup_{\tau_h \in H_h, \tau_h \neq 0} \frac{b(\tau_h, v_h)}{\| \tau_h \|_H} \end{aligned}$$

■

2.4 L'élement finis de Raviart-Thomas

Définition 2.4.1 $\mathbb{RT}_0$ *l'espace des fonctions vectorielles de Raviart-Thomas défini par :*

$$\mathbb{RT}_0 = [\mathbb{P}_0]^d \oplus x\mathbb{P}_0$$

$$\mathbb{RT}_0 = \left\{ \boldsymbol{v}; \boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

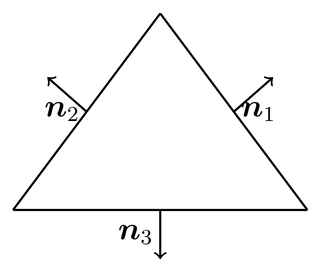

Figure 2.1 – Elément de Raviart-Thomas.

$$\mathcal{N}_{RT} = \left\{ \mathcal{N}_i, \quad \mathcal{N}_i(\boldsymbol{v}) = \int_{e_i} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_i \quad i = 1,2,3 \right\}$$

les fonctions vectorielles $\boldsymbol{\theta}_i$ définies par :

$$\boldsymbol{\theta}_i(x,y) = \frac{\binom{x-x_{a_i}}{y-y_{a_i}}}{2|T|}, \quad i = 1,2,3, \quad a_i \text{ les sommets de } T$$

$$\mathcal{N}_i(\boldsymbol{\theta}_j) = \delta_{ij}$$

On considère l'espace des éléments finis continus de Raviart-Thomas :

$V_h = \{\phi \in H(div,\Omega) : \phi|_T = (a_1 + bx, a_2 + by) \quad a_1, a_2 \text{ et } b \in \mathbb{R}\} \subset H(div,\Omega)$

$Q_h = \{\tau; \tau \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h) \text{l'espace des fonctions constantes par morceaux}\} \subset L^2(\Omega)$

Aussi on mis :$\{\Lambda \subset L^2(\Omega), \mu^h \geq 0, \text{ pp sur } \Omega\}$ $\Lambda^h = \Lambda \cap Q^h$

$$\Lambda^h = \mathbb{P}_0(\mathcal{T}) = \{\mu^h \in L^2(\Omega) : T \in \mathcal{T}, \mu^h|_T \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}), \mu^h \geq 0\}$$

alors il est claire que : $V^h \subset H(div,\Omega)$ *et* $\Lambda^h \subset L^2(\Omega)$

L'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_K^{RT}$ *est tel que*

$$\forall v \in V^{RT}(K) \quad ; \quad \Pi_K^0(divv) = div\mathcal{I}_K^{RT}(v)$$

Π_K^0 désigne le projection orthogonal de $L^2(K)$ dans $\mathbb{P}_0$ (puor tout $w \in L^2(K), \Pi_K^0 w = \frac{1}{mes(K)}\int_\Omega w$). En d'autre termes les diagrammes suivant sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
(H^1(T))^2 \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\mathcal{I}_h^{RT}"'] & L^2(T) \arrow[d, "\Pi_h^0"] \\
\mathbb{RT}_0 \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & \mathbb{P}_0
\end{tikzcd}$$

2.4.1 Application sur Raviart-Thomas/Darcy

Dans cette section nous analysons une approximation de Galerkin pour le problème de Darcy, nous rappelons d'abord ce la $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = \{2 \text{ ou } 3\}$ est un domaine borné régulier avec Γ est la frontière de Ω, et $f \in V'$ et $g \in Q'$ sont donnés ; la formulation variationnelle est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \text{ dans } V \times Q \text{ tel que} \\ \qquad a(u,v) + b(v,p) = f(v) \quad \forall v \in V \\ \qquad b(u,q) = 0 \quad \forall q \in Q \end{cases} \tag{2.10}$$

$$V = H_0(div, \Omega) \quad , \quad Q = L_0^2(\Omega)$$

Les formes bilinéaires a et b de première formulation variationnelle sont :

$$a(u,v) = \int_\Omega u.vdx \qquad \forall (u,v) \in V \times V$$

$$b(v,q) = \int_\Omega q.divvdx \qquad \forall (v,q) \in V \times Q.$$

Puis, si $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ est une famille triangulaire de $\tilde{\Omega}$ nous considérons les espaces d'élément fini suivant

$$V_h = \{v_h \in H(div,\Omega), v_{h|K} \in \mathbb{RT}_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$Q_h = \{q_h \in L^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in \mathbb{P}_0(K)\}$$

de sort que l'approximation de Galerkin soit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times Q_h \text{ tel que} \\ \qquad a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \qquad b(u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, . \end{cases} \tag{2.11}$$

Pour démontrer l'existence, l'unicité et la stabilité de (2.11). Nous observons d'abord que

$$Z_h = \{v_h \in V_h, b(v_h, q_h) = \int_{\Omega} q_h.divv_h dx, \forall q_h \in Q_h\}$$

$$= \{v_h \in V_h;\ \mathcal{I}_h^0(divv_h) = 0\}$$

De quel, notant avec précision cela $divv_h \in Q_h \ \ \forall v_h \in V_h$, nous déduisons cela .

$$Z_h = \{v_h \in V_h, divv_h = 0 \ \text{ dans } \Omega\}$$

Il s'ensuit que pour chaque $v_h \in V_h$ on obtient

$$a(v_h, v_h) = \| v_h \|_{0,\Omega}^2 = \| v_h \|_{div,\Omega}^2 .$$

Ce qui prouve la coercivité de a avec la constante $\tilde{\alpha} = 1$ et par conséquent l'hypothèse $\Pi_h A_h : H_h \longrightarrow H_h$ et injective est satisfait. D'autre part, pour établir la condition inf-sup pour b, nous avons besoin du résultat suivant

Lemme 2.4.2 $\Pi_h : H(div, \Omega) \bigcap Z \longrightarrow V_h$ *est l'opérateur de l'interpolation du Raviart-Thomas , alors il existe* $c > 0$ *indépendant de* h *tel que*

$$\| \Pi_h(v) \|_{div,\Omega} \leq c \| v \|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in [H^1(\Omega)]^n, \quad v \in [H^1(\Omega)]^n$$

Preuve. $v \in [H^1(\Omega)]^n$, puis appliquant la limite supérieure pour l'interpolation local erreur donnée comme suit

$$\| v - \Pi_h(v) \|_{0,K} \leq c \frac{h_K^2}{\rho_K} \mid v \mid_{1,K} \leq \tilde{c} h_K \mid v \mid_{1,K}, \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

et puis

$$\| \Pi_h(v) \|_{0,\Omega} \leq \| v - \Pi_h \|_{0,\Omega} + \| v \|_{0,\Omega}$$

$$\tilde{c} h \mid v \mid_{1,\Omega} + \| v \|_{0,\Omega} \leq \bar{c} \| v \|_{1,\Omega},$$

après de puis $div(\Pi_h(v)) = \mathcal{I}_h(divv)$

$$\| div\Pi_h(v) \|_{0,\Omega} = \| \mathcal{I}_h(divv) \|_{0,\Omega} \leq \| divv \|_{0,\Omega}$$

■

Afin de démontre la condition inf-sup pour b pour le problème discret nous utilisant le critère de Fortin. Précisement nous devons définir une famille d'opérateurs uniformément bornée $\{\Pi\}_{h>0} \subseteq \mathcal{L}(V, V_h)$ tel que :

$$b(v - \Pi_h(v), q_h) = 0 \quad \forall v \in V, \forall q_h \in Q_h, \forall h > 0$$

Etant donné $v \in V = H(div, \Omega)$ on pose

$$fv = \begin{cases} divv & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } B \backslash \Omega \end{cases} \tag{2.12}$$

où B est une boule ouvert continue de $\tilde{\Omega}$, de puis $fv \in L^2(B)$ et B est corps convexe, le problème de valeur

$$-\Delta z = fv \text{ sur } B, z = 0 \text{ sur } \partial B$$

a une solution unique $z \in H_0^1(B) \cap H^2(B)$ cela satisfait

$$\| z \|_{2,B} \leq c \| fv \|_{0,B} = c \| divv \|_{0,\Omega}$$

alors nous a vous laissée $\tilde{v} = -\nabla z |_{\Omega}$ et note cela $\tilde{v} \in [H^1(\Omega)]^n, div\tilde{v} = divv$ dans Ω, et

$$\| \tilde{v} \|_{1,\Omega} \leq \| z \|_{2,\Omega} \leq \| z \|_{2,B} \leq c \| divv \|_{0,\Omega}$$

L'analyse antérieur suggéré défini l'opérateur de Fortin

$$\Pi_h(v) = \Pi_h^K(\tilde{v}) \quad \forall v \in H(div, \Omega).$$

Il est important de remarquer ici que la nécessité de régulariser précédemment v au moyen de la fonction auxiliaire $\tilde{v}$ est implique par le fait que l'opérateur d'interpolation de Raviart-Thomas est défini par de dans $H(div, \Omega)$ mais de dans $H(div, \Omega) \cap z$ ce qui contient l'espace $[H^1(\Omega)]^n$

$$\| \Pi_h(v) \|_{div,\Omega} = \| \Pi_h^K(\tilde{v}) \|_{div,\Omega} \leq c \| \tilde{v} \|_{1,\Omega} \leq c_1 \| divv \|_{0,\Omega}$$

et puis

$$\| \Pi_h(v) \|_{div,\Omega} \leq c_1 \| v \|_{div,\Omega} \quad \forall v \in V = H(div, \Omega),$$

après (2.4.1) et $\mathcal{I}_h$ est la projecteur orthogonal de $L^2(\Omega)$ dans Q_h nous déduisons cela pour chacun $v \in V$ et pour chacun $q_h \in Q_h$

$$\begin{aligned} b(v - \Pi_h(v), q_h) &= \int_\Omega q_h(divv - div\Pi_h(v)) \\ &= \int_\Omega q_h(divv - div\Pi_h(\tilde{v})) \\ &= \int_\Omega q_h(divv - \mathcal{I}_h(div\tilde{v})) \\ &= \int_\Omega q_h(divv - \mathcal{I}_h(divv)) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent le critére de Fortin (2.3.2) garantit que b satisfait la condition inf-sup discret sur $V_h \times Q_h$ avec $\beta > 0$ une constante indépendant de h

2.5 Discrétisation par éléments finis pour l'équation Darcy

2.5.1 Premiére discrétisation par éléments finis

[14] On s'inttéresse à la discrétisation par éléments finis du probléme (2.1) . L'ouvert Ω. est un polygone ($d = 2$) ou un polyédre ($d = 3$) et qu'il est muni famille réguliére de triangulations$(\mathcal{T}_h)_h$ par des triangles ou des tétraédres.

La discrétisation repose ici sur l'élément de Raviart-Thomas et utilise donc sur chaque élément K l'espace P_k. Si $\mathcal{E}_h$ désigne l'ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'élément de $\mathcal{E}_h$, il existe une unique famille de fonctions $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h$, telles que la restriction de chaque φ_e à chaque élément K de ε_h appartienne à P_k et qui vérifient

$$\forall e^{'} \in \mathcal{E}_h, \int_{e^{'}} \varphi_e(x) \cdot n_{e'} d\tau = h_{ee'}, \tag{2.13}$$

où $h_{..}$ désigne le symbole de Kronecker et $n_{e'}$ n'importe lequel des deux vecteurs unitaires normaux à $e^{'}$. Le lemme suivant, qui justifie le choix de l'élément fini de Raviart-Thomas, fait appel au sous-espace $\mathcal{E}_h^0$ des éléments de $\mathcal{E}_h$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$,

Lemme 2.5.1 *Les fonction $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h$ appartiennent à $H(div, \Omega)$. Les fonctions $\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h^0$, appartiennent à $H_0(div, \Omega)$*

Démonstration :Pour tout e dans $\mathcal{E}_h$ et tout élément Kde $\mathcal{T}_h$ contenant e, la restriction de la fonction φ_e à K . Si n_k désigne le vecteur unitaire normal à ∂K et extérieur à K on en déduit

$$\varphi_{e|k} \cdot n_k = \frac{l_e}{d \ \ mes(k)} \ \text{ sur } \ e \ \text{ et } \varphi_{e|k} \cdot n_k = 0 \ \text{ sur } \ \partial K \ e. \tag{2.14}$$

où l_e désigne la longeur de la hauteur de K perpendiculaire à e. De la formule

$$mes(K) = \frac{mes(e)l_e}{d},$$

on déduit que, si e' est commun à deux éléments K et K', les quantités $\varphi_{e|k} \cdot n_k$ et $\varphi_{e|k'} \cdot n_{k'}$ sont égales sur e'. Une des conséquences de la définition de l'opérateur de divergence au sens des distributions étant qu'une fonction appartient à $H(div, \Omega)$ si et seulement si sa restriction à tout élément K de $\mathcal{T}_h$ appartient à $H(div, K)$ et le saut de sa trace normale à travers chaque e de $\mathcal{E}_h^0$ est nul, on en déduit la premiére partie du lemme. La seconde est alors une conséquence évidente de (2.14) et de la définition de $H_0(div, \Omega)$.
Le Lemme(2.13) énonce la propriété de $H(div)$-conformité de élément fini de Raviart-Thomas, en un sens généralisant celui de H^l-conformité. Plus précisément, l'espace discret X_h^0 que l'on utilise l'espace engendré par les φ_e, $e \in \mathcal{E}_h^0$, et vérifie la propriété

$$X_h^0 = \{v_h \in H_0(div, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|k} \in P_k\}. \tag{2.15}$$

On introuit également l'espace

$$M_h = \{q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|k} \in P_0(k)\}. \tag{2.16}$$

On note que les espaces X_h^0 et M_h fournissent une discrétisation conforme du probléme(2.2), puisque le produit $X_h^0 \times M_h$ est inclus dans $H_0(div, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ mais que ceci n'est plus vrai pour le probléme (2.9) car M_h n'est pas inclus dans $H^1(\Omega)$. Pour toute fonction f de $L^2(\Omega)^d$, on considére le probléme discret

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } X_h^0 \times M_h \text{ tel que} \\ \qquad \forall v_h \in X_h^0, a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = \displaystyle\int_\Omega f(x) \cdot v_h(x) dx, \\ \qquad\qquad \forall q \in M_h, b(u_h, q_h) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

La continuité de la forme a(.,.), mais son ellipticité avec une constante indépendante de h nécessite la caractérisation du noyau disret

$$V_h = \{v_h \in X_h^0; \forall q_h \in M_h, b_h(v_h, q_h) = 0\} \tag{2.18}$$

effectuée dans le lemme suivant.

Lemme 2.5.2 *L'espace V_h vérifie*

$$V_h = \{v_h \in X_h^0; divv_h = 0 \quad dans\ \Omega\}. \tag{2.19}$$

Démonstration :On note que, dans la définition (2.18) de V_h, on peut remplacer M_h par l'espace des fonction q_h de $L^2(\Omega)$ qui sont constantes sur tous les éléments de $\mathcal{T}_h$(en effet, par intégration par parties, la propriété de nullité dans(2.18) est encore vraie pour la fonction q_h constante sur Ω). Soit v_h n'importe quelle fonction de V_h. Comme la restriction d'une fonction de X_h^0 à tout élément K de $\mathcal{T}_h$ appartient à P_k, donc à à P_1^d , sa divergence appartient à $P_0(k)$, et en choisissant q_h dans (2.18) égal à la fonction caractéristique de K on a

$$-\int_k divv_h dx = -(divv_h)_{|k} mes(k) + 0,$$

d'où l'on déduit que $(divv_h)_{|k}$ est nul. Comme en outre v_h appartient à $H(div, \Omega)$, sa divergence est nul sur Ω.

Remarque 2.5.3 *Le Lemme(2.5.2), combiné avec la définition des des espaces P_k, entraîne la prpriété supplémentaire suivante : une fonction v_h de V_h est constante sur chaque élément K de $\mathcal{T}_h$.Cette propriété est utilisée pour la construction d'une base de V_h.*

La continuité de la forme $b(.,.)$. Nous prouvons donc un premier résultat conceranat la condition inf-sup pour cette forme.

Lemme 2.5.4 *La forme $b(.,.)$ satisfait la condition inf-sup : il existe une constante $\beta_{0h} > 0$ dépendant éventuellement de h telle que*

$$\forall q_h \in M_h, sup_{v_h \in x_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{||v_h||_{H(div,\Omega)}} > \beta_{0h} ||q_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.20}$$

Démonstration : Dans un permier temps , on va vérifier que l'espace M_h ne contient pas de modes parasites. Soit q_h un élément de M_h tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, b(v_h, q_h) = 0.$$

On a

$$b(v_h, q_h) = -\sum_{k\in\mathcal{T}_h} q_{h|k} \int_k div v_h dx = \sum_{k\in\mathcal{T}_h} q_{h|k} \int_{\partial k} v_h \cdot n d\tau.$$

Pour tout élément e de $\mathcal{E}_h^0$, on note K_e et $K_e^{'}$ les deux élément de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e et n_e le vecteur unitaire normal à e dirigé de K_e vers $K_e^{'}$. La formule précédente s'écrit de façon équivalente

$$b(v_h, q_h) = -\sum_{e\in\mathcal{E}_h^0} (q_{h|k} - q_{h|k_e^{\prime}}) \int_e v_h.n_e d\tau.$$

Par définition des éléments finis de Raviart-Thomas, il existe une unique fonction v_h de X_h^0 telle que

$$\forall e \in \mathcal{E}_h^0, \int_e v_h.n_e d\tau = -(q_{h|k} - q_{h|k_e^{\prime}}). \tag{2.21}$$

On obtient alors

$$b(v_h, q_h) = \sum_{e\in\mathcal{E}_h^0} (q_{h|k} - q_{h|k_e^{\prime}})^2 = 0$$

ce qui prouve que tous les $h|k$, $K \in \mathcal{T}_h$, sont égaux. Comme d'autre part M_h est inclus dans $L_2^0(\Omega)$, on a

$$\sum_{k\in\mathcal{T}_h} q_{h|k} mes(K) + 0.$$

et en combinant ces deux propriétés on obtient que q_h est égal à zéro. Finalement, on déduit de la continuité de $b(.,.)$ que la fonction

$$q_h \to \sup_{v_h\in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{||v_h||_{H(div,\Omega)}}.$$

qui est bien sur à valeur positives ou nulles, est continue sur M_h.Comme M_h est de dimension finie, sa sphére unité S_h est compacte et donc la fonction précédent y atteient ses bornes.On déduit alors des résultats qui précédent que la constante β_{0h} définie par

$$\beta_{0h} = \inf_{q_h\in S_h^0} \sup_{v_h\in X_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{||v_h||_{H(div,\Omega)}}.$$

est positive, ce qui termine la démonstration.

Théorème 2.5.5 *Pour toute fonction f dans $L^2(\Omega)^d$, le probléme(2.17) admet une solution unique.*

Démonstration : Le résultat d'existence est établi en deux étaps.

1) On déduit de la propriété d'ellipticité $\forall v \in V,\ a(v,v) = \mu||v||^2_{L^2(\Omega)^d} = \mu||v||^2_{H(div,\Omega)}$ et du fait que V_h soit inclus dans V, combinés avec le Lemme de Lax-Milgram, qu'il existe un unique u_h dans V_h tel que

$$\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = \int_\Omega f(x) \cdot v_h(x) dx. \tag{2.22}$$

2) La forme linéaire : $v_h(x) \longmapsto \int_\Omega f(x) \cdot v_h(x)dx - a(u_h, v_h)$ s'annule sur tous les éléments v_h de V_h. En combinant la condition inf-sup (2.20) on obtient l'existence d'un p_h dans M_h tel que la premére ligne du probléme (2.17) soit vérifiée.
Le couple (u_h, p_h) est alors solution du probléme (2.17). En outre, comme ce probléme équivaut à un systéme linéaire carré, l'existence d'une solution entrne son unicité.

Remarque 2.5.6 *Les lignes qui précédent permettent de prouver à ce stade la propriété de stabilité de la solution $u_h$du probléme (2.22)*

$$||u_h||_{L^2(\Omega)^d} \leq ||f||_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.23}$$

L'obtention d'une majoration de $||p_h||_{L^2(\Omega)}$ pour la pression p_h du probléme (2.17) requiert une évaluation de la dépendance de la constante β_{0h} par rapport à h, que l'on établit ultérieurement.
Pour obtenir des estimations d'erreur, on constate tout d'abord àpartir du Lemme(2.5.2) que le probléme (2.22) constitue une discrétisation conforme du probléme $\forall v \in V$, $a(u, v) = \int_\Omega f(x).v(x)dx$. On déduit alors de l'estimation et en notant que la norme $||.||_{H(div,\Omega)}$ est égale à $||.||^d_{L^2(\Omega)^2}$ sur V,

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)^d} \leq c \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{L^2(\Omega)^d} \tag{2.24}$$

La distance de uà V_h s'évalue au moyen de l'opérateur $\mathcal{I}_h$ associé à l'élément fini de Raviart -Thomas et défini de la façon suivante : pour toute fonction v de $H^1(\Omega)^d$, $\mathcal{I}_h v$ appartient à X_h^0 et vérifie

$$\forall e \in \varepsilon_h^0, \int_e \mathcal{I}_h v \cdot n_e d\tau. \tag{2.25}$$

De façon équivalente, cet opérateur vérifie pour les fonctions φ_e définies en (2.13)

$$\mathcal{I}_h v = \sum_{e \in \varepsilon_h^0} (\int_e v \cdot n_e d\tau)\varphi_e. \tag{2.26}$$

Proposition 2.5.7 *L'opérateur $\mathcal{I}_h$ vérifie, pour toute fonction v de $H_0(div, \Omega) \bigcap H^1(\Omega)^d$ et tout élément K de $\mathcal{I}_h$ la propriété*

$$\int_k (div \mathcal{I}_h v) dx = \int_k (div v) dx, \tag{2.27}$$

ainsi que l'estimation

$$||v - \mathcal{I}_h v||_{L^2(k)^d} \leq c h_k |v|_{H_1(k)^d}. \tag{2.28}$$

Démonstration : La propiété (2.27) se déduit facilement de(2.25) puisque , si ε_h^0 désigne l'ensemble des côtés ou faces de K non contenues dans $\partial\Omega$ et n_k le vecteur unitaire normal extérieur à K,

$$\int_k (div \mathcal{I}_h v) dx = \sum_{e \in \varepsilon_k^0} \int_e \mathcal{I}_h v \cdot n_k d\tau = \sum_{e \in \varepsilon_k^0} \int_e v \cdot n_k d\tau = \int_k (div v) dx$$

Pour pouver (2.28), on note, pour toute constante w_k, l'égalité $\mathcal{I}_h w_h = w_h$, d'ou l'on déduit

$$||v - \mathcal{I}_h v||_{L^2(k)^d} \leq ||v - w_k||_{L^2(k)^d} + ||\mathcal{I}_h (v - w_h)||_{L^2(k)^d}$$

En notant que, pour tout e dans ε_k^0, la norme$||\varphi_e||_{L^2(k)^d}$ est $\leq c h_k^{1-\frac{d}{2}}$. On obtient à partir de (2.5.1) et par passage à l'élément de référence $\hat{K}$ que pour toute fonction w de $H^1(k)^d$

$$||\mathcal{I}_h w||_{L^2(k)^d} \leq c h_k^{1-\frac{d}{2}} h_k^{d-1} \int_{\partial \hat{K}} |w(\tau)| d\tau,$$

d'où d'aprés le Théoréme de traces

$$||\mathcal{I}_h w||_{L^2(k)^d} \leq c h_k^{\frac{d}{2}} ||\hat{w}||_{H^1(k)^d}.$$

En appliquant cette inégalité avec $w = v - w_k$ on déduit

$$||\mathcal{I}_h(v - w_k)||_{L^2(k)^d} \leq c h_k^{\frac{d}{2}} ||\hat{v} - w_k||_{H^1(\hat{k})^d}.$$

La même estimation étant vériée pour $||v - w_k||_{L^2(k)^d}$. On obtient

$$||v - \mathcal{I}_h v||_{L^2(k)^d} \leq c h_k^{\frac{d}{2}} ||\hat{v} - w_k||_{H^1(\hat{k})^d}.$$

Puis on applique le Lemme de Bramble-Hilbert

$$||v - \mathcal{I}_h v||_{L^2(k)^d} \leq c h_k^{\frac{d}{2}} ||\hat{v}||_{H^1(\hat{k})^d}.$$

et on obtient le résultat cherché par retour à l'élément K
Comme les fonctions de X_h^0 sont à divergebce constante sur chaque K. Une des conséquences de(2.27) est que l'opérateur $\mathcal{I}_h$ envoie $v \cap H^1(\Omega)^d$ sur V_h. On obtient dons la premiére estimation d'erreur en combinant (2.24) et (2.28).

Théorème 2.5.8 *On suppose que la vitesse u du probléme(2.1) dans $H^1(\Omega)^d$. Alors pour le probéme disccret(2.17), on a la majoration d'erreur*

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)^d} \leq ch||_{H^1(\Omega)^d}. \tag{2.29}$$

La Proposition (2.5.2) permet aussi d'estimer la (meilleure) constante β_{0h} apparaissant en (2.20)

Proposition 2.5.9 *La forme $b(.,.)$ satisfait la condition inf-sup : il existe une constante $\beta_0 > 0$ indépendant de h telle que*

$$\forall q_h \in M_h, \sup_{v_h \in x_h^0} \frac{b(v_h, q_h)}{||v_h||_{H(div,\Omega)}} > \beta_0 ||q_h||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.30}$$

Démonstration :D'aprés la condition inf-sup pour tout q_h dans M_h,il existe une fonction v de $H_0(div, \Omega) \cap H^1(\Omega)^d$ telle que $-divv = q_h$ et $||v||_{H^1(\Omega)^d} \leq \beta^{-1} ||q_h||_{L^2(\Omega)}$.
Commeq_h est constant sur chaque élément K de τ_h, on déduit de (2.27) que

$$b(\mathcal{I}_h v, q_h) = b(v, q_h) = ||q_h||_{L^2(\Omega)^2}$$

D'autre part, comme $div\mathcal{I}_h v$ est également constant sur chaque élément K de τ_h une nouvelle application de (2.27) donne

$$||div\mathcal{I}_h v||_{L^2(\Omega)^2} = \sum_{k\in\tau_h}(div\mathcal{I}_h v)|_k \int_k (div\mathcal{I}_h v)dx = \sum_{k\in\tau_h}(div\mathcal{I}_h v)|_k \int_k (divv)dx = \sum_{k\in\tau_h}\int_k (div\mathcal{I}_h v)(divv)dx.$$

d' ou, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$||div\mathcal{I}_h v||_{L^2(\Omega)^2} \leq ||divv||_{L^2(\Omega)^2}.$$

On obtient également en utilisant(2.28) et une inégalité traingulaire l'estimation

$$||\mathcal{I}_h v||_{L^2(\Omega)^d} \leq ||v||_{L^2(\Omega)^d} + c|h|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Ces deux estimations,combinées avec la majoration de $||v||_{H^1(\Omega)^d}$,entraînent

$$||\mathcal{I}_h v||_{H(div,\Omega)} \leq ||v||_{H^1(\Omega)^d} \leq c\beta^{-1}||q_h||_{L^2(\Omega)}.$$

d'où le résultat cherché .

Cette condition inf-sup permet d'établir la majoration d'erreur sur la pression.En effet,on en déduit que, pour tout $q_h$dans M_h

$$\beta_0||p_h - q_h||_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{v_h\in X_h^0} \frac{b(v_h, p_h - q_h)}{||v_h||_{H_{0(div,\Omega)^d}}}$$

On voit en comparant les problémes (2.2) et (2.17) que

$$b(v_h, p_h - q_h) = b(v_h, p - q_h) + a(u - u_h, v_h),$$

d'où l'on déduit

$$||p - p_h||_{L^2(\Omega)} \leq c(||u - u_h||)_{L^2(\Omega)^d} + \inf_{q_h\in M_h} ||p - q_h||_{H^1(\Omega)}). \tag{2.31}$$

On conclut en faisant appel à l'estimation (4.17) pour le premier terme, puis en choisissant q_h égal à l'image de p par l'opérateur de projection orthgonale de $L^2(\Omega)$ sur les fonctions constantes par élémenents (qui envoie $L_0^2(\Omega) sur M_h$)

Théorème 2.5.10 *On suppose la solution (u, p) du probléme (2.1) dans $H^1(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$. Alors, pour le probléme discret (2.17), on a la majoration d'erreur*

$$||p - p_h||_{L^2(\Omega)} \leq ch(||u||_{H^m(\Omega)^d} + ||p||_{H^m(\Omega)}). \tag{2.32}$$

La méthode considérée ici est d'ordre 1, mais posséde des propriétés analogues à la discrétisation : les estimations sont optimales, même si elles n'utilisent pas toute la régularité de la solution, et la vitesse discréte u_h est à divergence exactement nulle

2.5.2 Deuxiéme discrétisation par éléments finis

On conserve les notation précédentes. On travaille toujours avec l'espace discret de pressions $\tilde{M}_h$. Pour les raisons indiquées précédemment et comme proposé, l'espace discret de vitesse est ici défini par

$$\tilde{X}_h^2 = \{v_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \tau_h, v_{h|K} \in \mathbb{P}_0(K)^d\}. \tag{2.33}$$

On note que l'espace $\tilde{X}_h^2$ n'est pas inclus dans $H(div, \Omega)$. Pour préserver la conformité de la discrétisation, on est donc amène à travailler avec la formulation qu'utilise $gradp$. En utilisant la méthode de Galerkin et pour toute fonction f de $L^2(\Omega)^d$, on considéré le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } \tilde{X}_h^2 \times \tilde{M}_h \text{ tel que} \\ \qquad \forall v_h \in \tilde{X}_h^2, a(u_h, v_h) + \tilde{b}(v_h, q_h) = \displaystyle\int_\Omega f(x) \cdot v_h(x) dx, \\ \qquad\qquad \forall q \in \tilde{M}_h, \tilde{b}(u_h, q_h) = 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

L'espce $\tilde{X}_h^2$ étant inclus dans $L^2(\Omega)^d$ et l'espace $\tilde{M}_h$ dans $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, la continuité des formes $a(.,.)0$et $\tilde{b}(.,.)$ et l'ellipticité de $a(.,.)0$. En outre, la condition inf -sup sur $b(.,.)$ est beaucoup plus facile , sa démonstration étant analogueà celle de la proposition $\forall v \in V,\ a(u, v) = \int_\Omega f(x).v(x)dx.$

Lemme 2.5.11 *Il existe une constanet $\tilde{\beta}_2$ indépendante de h telle que, pour tout h*

$$\forall q_h \in \tilde{M}_h, sup_{v_h \in \tilde{X}_h^2} \frac{\tilde{b}(v_h, q_h)}{||v_h||_{L^2(\Omega)^d}} \geq \tilde{\beta}_2 ||q_h||_{H^1(\Omega)} \tag{2.35}$$

Démonstration : On remarque que ,pour toute fonction q_h de $\tilde{M}_h$, la fonction $gradq_h$ est constante sur chaque élément K de τ_h, donc appartient à $\tilde{X}_h^2$ Par suite, en prenant v_h égalà $gradq_h$,on a

$$\frac{\tilde{b}(v_h, q_h)}{||v_h||_{L^2(\Omega)^d}} \geq \tilde{\beta}_2 |q_h|_{H^1(\Omega)}$$

et on conclut grâce à $\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad ||q||_{H^1(\Omega)} = ||q||_{H^1(\Omega)/\mathcal{P}_0(\Omega)}$

On introduit le noyau

$$\tilde{V}_h^2 = \{v_h \ \tilde{X}_h^2; \forall q_h \in \tilde{M}_h, \tilde{b}(v_h, q_h) = 0\}. \tag{2.36}$$

On note que la divergence des fonction de $\tilde{X}_h^2$ est nulle sur chaque élément K.Cependant les conditions imposées en(2.36) sont insuffisantes pour imposer que le saut de la composante normale des fonctions de $\tilde{V}_h^2$ soit nul à travers chaque côté ou face d'élément de τ_h.L'espace $\tilde{V}_h^2$n'est donc inclus ni dans$H(div, \Omega)$,ni à plus forte raison dans $\tilde{V}$.

On ne donne pas la démonstration du théorème suivant,qui est parfaitement similaire à celle du Théoréme (2.17).

2.6 Estimation d'erreur

2.6.1 Estimation d'erreur a priori

Théorème 2.6.1 *si la solution* (u, p) *appartient á* $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$ $0 < s \leq 1$ *; on a la majoration d'erreur a priori suivante*

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)^d} + ||p - p_h||_{H^1(\Omega)} \leq c(u, p)h^s.$$

Preuve. (Estimation d'erreur)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, p) \text{ dans } H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \text{tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \displaystyle\int_\Omega u(x).v(x)dx + \int_\Omega p.\text{div}v(x)dx = \int_\Omega f(x).v(x)dx, \\ \forall q \in H^2(\Omega), -\displaystyle\int_\Omega q.\text{div}u(x)dx = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \text{ dans } V_h \times M_h \text{tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \displaystyle\int_\Omega u_h(x).v_h(x) - \int_\Omega \text{div}v_h(x)dx = \int_\Omega f(x).v_h(x)dx, \\ \forall q_h \in M_h, \displaystyle\int_\Omega q_h.\text{div}u_h(x) = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

en définie $\mathcal{A}_1(U,V)$ tel que $U=(u,p)$ et $V=(v,q)$ comme suit

$$\mathcal{A}_1 = \int_\Omega u(x).v(x)dx - \int_\Omega p.\mathrm{div}v(x)dx - \int_\Omega q.\mathrm{div}u(x)dx$$

et défini $\mathcal{A}_2(U_h,V_h)$ tel que $U=(u_h,p_h)$ et $V=(v_h,q_h)$ comme suit

$$\mathcal{A}_2 = \int_\Omega u_h(x).v_h(x)dx - \int_\Omega p_h.\mathrm{div}v_h(x)dx - \int_\Omega q_h.\mathrm{div}u_h(x)dx$$

et

$$\mathcal{A}(U-U_h,V_h) = \mathcal{A}_1(U,V) - \mathcal{A}_2(U_h,V_h)$$

pour la condition inf-sup est satisfait donc la coercivité elle est vérifier signifier

$$\| u-u_h \|_{H^1(\Omega)} + \| p-p_h \|_{H^2(\Omega)} \leq \sup_{v_h\in V_h} \frac{\mathcal{A}(U-U_h,V_h)}{\| v_h \|_{V_h} \| q_h \|_{M_h}}$$

donc

$$\| u-u_h \|_{H^1(\Omega)} + \| p-p_h \|_{H^2(\Omega)} \leq \inf_{v_h\in V_h} \| u-v_h \|_V + \inf_{q_h\in M_h} \| p-q_h \|_M \qquad (2.39)$$

en utilise les hypothèse suivant :

(1) Hypothèse 1 : Il existe

$$\Pi_h \in \mathcal{L}([H^2(\Omega)],w_h) \cap \mathcal{L}([H^2(\Omega)] \cap [H^1(\Omega)],V_h) \text{ tel que } \| v-\Pi_h v \|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq c_1 h \| v \|_{[H^2(\Omega)]^2} \quad \forall v \in \qquad (2.40)$$

$c_1 > 0$ est une constante indépendante de h.

2) Hypothèse 2 : Il existe

$$\mathcal{S}_h \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega),M_h) \text{ tel que } \| q-\mathcal{S}_h q \|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 h \| q \|_{H^1(\Omega)} \quad \forall q \in H^1(\Omega) \qquad (2.41)$$

$c_2 > 0$ est une constante indépendante de h.

On a la condition inf-sup discret est vérifiée , et d'après les hypothèses (2.40) et (2.41) on obtient

$$\begin{aligned} \| u-u_h \|_{H^1(\Omega)} + \| p-p_h \|_{H^2(\Omega)} &\leq \max(c_1,c_2)h(\| u \|_{H^2(\Omega)} + \| p \|_{H^1(\Omega)}) && (2.42)\\ &\leq \tilde{c}h(\| u \|_{H^2(\Omega)} + \| p \|_{H^1(\Omega)}) && (2.43) \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Sabilisation pour l'équation Darcy

3.1 Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ est un ouvert borné avec Γ la frontière de Ω. Le problème de Darcy pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un milieu perméable, est comme suit :

$$v = -(\nabla p + g) \qquad \text{dans} \;\; \Omega \tag{3.1}$$

$$divv = 0 \qquad \text{dans} \;\; \Omega \tag{3.2}$$

$$v.n = 0 \qquad \text{sur} \;\; \Gamma \tag{3.3}$$

3.2 Discrétication

Considérer une décomposition de Ω. Ω^e ;$e = 1, 2, ..., n_{el}$, là où n_{el} est tout le nombre d'éléments. Les intérieurs d'élément et la frontière intérieure . Par la suite on considère la discrètisation du domaine

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \tag{3.4}$$

et du bord

$$\tilde{\Gamma} = (\bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Gamma^e) \setminus \Gamma, \tag{3.5}$$

et on considère les espaces discrets suivant :

$$\mathcal{V}_h = \{v_h | v_h|_{\Omega^e} \in (\mathcal{P}^k(\Omega^e))^{n_{sd}}, e = 1, 2, ..., n_{el}\}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{Q}_h = \{q_h | q_h|_{\Omega^e} \in \mathcal{P}^l(\Omega^e), e = 1, 2, ..., n_{el}, \int_\Omega q_h d\Omega = 0\} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{Z}_h = \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h, \tag{3.8}$$

où $\mathcal{P}^l(\Omega^e)$ est l'espace des polynômes d'ordre l sur Ω^e.

Noter qu'aucune continuité à travers $\tilde{\Gamma}$ n'est assumée. La discrètisation par élément finis discontinus permet des éléments de diverses formes standard, comme, triangles, quadrilatères, tetrahedra, hexahedra, et également polygones et polyèdres non standard.

La méthode d'élément fini est alors donnée par : Trouver $V_h = \{v_h, p_h\} \in \mathcal{Z}_h$ tels que, pour tous $W_h = \{w_h, q_h\} \in \mathcal{Z}_h$,

$$B^{DG}_{stab}(W_h, V_h) = L^{DG}_{stab}(W_h) \tag{3.9}$$

où

$$B^{DG}_{stab}(W_h, V_h) = B^{DG}(W_h, V_h) + \frac{1}{2}((-w_h + \nabla q_h), (v_h + \nabla p_h))_{\tilde{\Omega}} + (\frac{\beta}{h}[\![q_h]\!], [\![p_h]\!])_{\tilde{\Gamma}} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} B^{DG}(W_h, V_h) = {} & (w_h, v_h)_{\tilde{\Omega}} - (div w_h, p_h)_{\tilde{\Omega}} + (q_h div v_h)_{\tilde{\Omega}} + ([\![w_h]\!], \langle p_h \rangle)_{\tilde{\Gamma}} \\ & - ([\![q_h]\!], \langle v_h \rangle)_{\tilde{\Gamma}} + (w_h \cdot n, p_h)_\Gamma - (q_h \cdot n, v_h)_\Gamma \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$L^{DG}_{stab}(W_h) = L^{DG}(W_h) - \frac{1}{2}((-w_h + \nabla q_h), g)_{\tilde{\Omega}} \tag{3.12}$$

$$L^{DG}(W_h) = -(w_h, \frac{\rho}{g_c} g)_{\tilde{\Omega}} + (q_h, \varphi)_{\tilde{\Omega}} - (q_h, \psi)_{\tilde{\Gamma}} \tag{3.13}$$

Théorème 3.2.1 *Le problème discret stabilisé est bien posé.Il suffit de vérifier les conditions*

1. *V_h et Q_h sont deux espaces de Hilbert.*

2. *$B^{DG}_{stab}(W_h, V_h)$ est une forme bilinéaire continue :*

$$\exists c > 0 \quad \textit{tel que} \quad B^{DG}_{stab}(W_h, V_h) \leq c \parallel W_h \parallel_{H(div,\Omega)} \parallel V_h \parallel_{H(div,\Omega)}$$

3. *$B^{DG}_{stab}(W_h, W_h)$ est coercive :*

$$\exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad B_{stab}(W_h, W_h) \geq \alpha \parallel w_h \parallel^2_{H(div,\Omega)}$$

4. *L^{DG}_{stab} est une forme linéaire continue :*

$$\exists c' > 0 \qquad | L^{DG}_{stab}(W_h) | \leq c' \parallel W_h \parallel_{H(div,\Omega)}$$

Preuve.

1. V_h et Q_h sont deux espaces de dimension fini donc sont deux espaces de Hilbert.

2. en dimension fini les normes équivalent(ce qui implique que B^{DG}_{stab})

3. $B^{DG}_{stab}(W_h, W_h)$ est coercive

$$B^{DG}_{stab}(W_h, W_h) = \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} (w_h)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} (\nabla q_h)^2 dx = \frac{1}{2}||w_h||^2_{L^2} + \frac{1}{2}||q_h||^2_{L^2} \geq ||w_h||^2_{stab}.$$

4. L^{DG}_{stab} bilinéaire continue (par l'inégalité de Cauchy-Schwerz)

$$|L^{DG}_{stab}| = |\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} w_h g dx + \frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}} g \nabla q_h dx| \quad \leq \frac{1}{2}||g|| \cdot ||w_h|| + \frac{1}{2}||g|| \cdot ||\nabla q_h|| \leq \frac{1}{2}||g||(||w_h|| + ||\nabla q_h||)$$

■ où $[\![.]\!]$ et $\langle . \rangle$ sont les opérateurs de saut et de La moyenne, respectivement. Pour la suite référence nous notons identités importantes

$$[\![w_h p_h]\!] = [\![w_h]\!]\langle p^h \rangle + \langle w_h \rangle \cdot [\![p_h]\!] \tag{3.14}$$

$$[\![v_h q_h]\!] = [\![v_h]\!]\langle q_h \rangle + \langle v_h \rangle \cdot [\![q_h]\!] \tag{3.15}$$

Nous employons la convention de Brezzi dans laquelle le saut d'un vecteur scalaire-est évalué, et le saut d'une grandeur scalaire vecteur-est i.e, à savoir

$$\begin{aligned} [\![w_h]\!] =& w_{h+} \cdot n_+ + w_{h-} \cdot n_- \\ =& (w_{h+} - w_{h-}) \cdot n_+ \\ =& (w_{h-} - w_{h+}) \cdot n_- \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} [\![p_h]\!] =& p_{h+} n_+ + p_{h-} n_- \\ =& (p_{h+} - p_{h-}) n_+ \\ =& (p_{h-} - p_{h+}) n_-. \end{aligned} \tag{3.17}$$

L'opérateur de saut est invariable sous l'inversion des désignations de $\pm$. Les moyennes sont définies comme :

$$\langle w^h \rangle = \frac{(w_+^h + w_-^h)}{2} \tag{3.18}$$

$$\langle p^h \rangle = \frac{(p_+^h + ph_-)}{2} \tag{3.19}$$

Remarque 3.2.2 1. *Les limites discontinues d'interface et de frontière de Galerkin en (3.11) ont été choisi dans le "la forme oblique "en tant que d'abord présenté par Baumann et Oden [5]. Ce choix rend la stabilité de la méthode transparente.*

2. *Le terme de stabilisation d'interface est de la forme proposée par Hughes et Franca [16]. L'élément la balance de longueur, $h_\perp$, apparaissant dans les intégrales devrait être considérée comme étant assigné le bord ou ou l'arête entre deux faces, et, en général, devrait être pris comme mesure de perpendiculaire de taille d'élément au bord ou au face en question. Une définition acceptable est*

$$h_\perp = \frac{meas(\Omega_+) + meas(\Omega_-)}{2meas(\Gamma_\pm)} \tag{3.20}$$

où Ω_+ et Ω_- de l'interface $\Gamma_\pm$. Dans une dimension nous interprétons cette formule comme moyenne, à savoir, $h_\perp = \dfrac{(h_+ + h_-)}{2}$. Nous assumons dans tous celle la plus petite dimension d'élément divisée par diamètre maximum d'élément, dénoté par h,

3. *Il sera utile dans la suite d'utiliser des intègrations par-parties formellement de la méthode. Dans ce cas-ci (3.11) est écrit*

$$B^{DG}(W_h, V_h) = (w_h, v_h)_{\tilde{\Omega}} + (w_h, \nabla p_h)_{\tilde{\Omega}} - (\nabla p_h, v_h)_{\tilde{\Omega}} - (\langle w_h \rangle, [\![p_h]\!])_{\tilde{\Gamma}} + ([\![q_h]\!], \langle v_h \rangle)_{\tilde{\Gamma}}. \tag{3.21}$$

Nous nous référons (3.21) pendant que le "de forme de gradient "et (3.11) comme "de forme de divergence ". Ils sont, naturellement, mathématiquement équivalentes.

5. *Observons que, si nous remplaçons le q^h de par $-q^h$, puis la méthode devient symétrique, c-à-d.,*

$$B^{DG}_{stab}(W_h, V_h) = B^{DG}_{stab}(V_h, W_h). \tag{3.22}$$

3.3 Une formulation faible du problème continu

$$\tilde{\mathcal{V}} = H(div, \tilde{\Omega}) =^{def} \{w|w|_{(\Omega^e)} \in (L_2(\Omega^e)^{n_{sd}}, divw|_{\Omega^e} \in (L_2(\Omega^e), e = 1, 2, ..., n_{el}\}, \tag{3.23}$$

$$\tilde{\mathcal{Q}} = H^1(\tilde{\Omega})\backslash\mathbb{R} =^{def} \{q|q|_{\Omega^e} \in L_2(\Omega^e), \nabla q|_{\Omega^e} \in (L_2(\Omega^e))^{n_{sd}}, e = 1, 2, ..., n_{el}, \int_\Omega q d\Omega = 0\}, \tag{3.24}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{V}} \times \tilde{\mathcal{Q}}. \tag{3.25}$$

Pour d'avantage d'élaboration, voir le Brezzi-Fortin [4]. Noter que $\mathcal{V}^h \subset \tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{Q}^h \subset \tilde{\mathcal{Q}}$ et de $\mathcal{Z}^h \subset \tilde{\mathcal{Z}}$, et aucune continuité supposèe à travers des interfaces d'élément. Ces espaces s'assurent que la même équation variationnelle décrivant le cas discret, à savoir (3.9), est bien définie. En outre, les intégration-par-parties, obtenaient (3.21), est également valide, et les formes "de gradient"et "de divergence "de $B^{DG}(..)$, à savoir, (3.11) et (3.21), respectivement, sont encore mathématiquement équivalent. Ainsi, nous pouvons écrire le problème continu comme : Trouver $V = \{v, p\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, tels que, pour tout le $W = \{w, q\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$,

$$B^{DG}_{stab}(W, V) = L^{DG}_{stab}(W). \tag{3.26}$$

Remarque 3.3.1 1. *Il est intéressant de noter que la forme appropriée du problème continu est inspirée par la méthode numérique. Généralement, on suppose que la méthode numérique est impliquée par la forme faible du problème continu. Il semble* *que les méthodes discontinues de Galerkin représentent un effet des idées discrètes et continues sans point de départ.*

2. *Consistence de la formulation faible avec la forme forte du problème peut être étudié en exécutant des intégration-par-parties dessus (3.26) et en obtenant la forme d'Euler-Lagrange :*

$$
\begin{aligned}
0 = B^{DG}_{stab}(W,V) - L^{DG}_{stab}(W) = (w + \frac{1}{2}(-w + \nabla q), (v + \nabla p + \frac{\rho}{g_c} g))_{\tilde{\Omega}} \\
-(\langle w \rangle - \frac{\beta}{h_\perp}[\![q]\!], [\![p]\!])_{\tilde{\Gamma}} \quad \textit{continuité } p \\
+(q, divv - \varphi)_{\tilde{\Omega}} \quad \textit{équilibre de la masse} \\
-(\langle q \rangle, [\![v]\!])_{\Gamma} \quad \textit{continuité de } v_n \\
-(q, v_n - \psi)_{\Gamma} \quad \textit{condition de frontière sur le } v_n \ .
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Noter que chaque limite représente un résiduel pesé de la solution forte (voir[1]).

3. *Noter que le $\mathcal{V}^h$, $\mathcal{Q}^h$ et $\mathcal{Z}^h$ sont des sous-espaces linéaires fermés du $\tilde{\mathcal{V}}$, du $\tilde{\mathcal{Q}}$ et du $\tilde{\mathcal{Z}}$, respectivement.*

4. *Nous supposons que la permiabilité isotrope à lieu mais la méthode peut être facilement généralisée au cas anisotrope.*

3.4 Analyse d'erreur

$||.||_{\mathcal{D}}$ dénotent la norme de $L_2(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} = \Omega, \tilde{\Omega}, \Gamma, \tilde{\Gamma}$,

Lemme 3.4.1 $\forall W \in \mathcal{Z}$ *cet contunité défini un "norme de stabilité "*

$$||W||^{DG}_{stab} = (||W||^2_{stab} + ||(\frac{\beta}{h_\perp}[\![q]\!]||^2_{\tilde{\Gamma}})^{1/2}, \tag{3.28}$$

$$||W||_{stab} = (\frac{1}{2}(||w||^2_{\tilde{\Omega}} + ||\nabla q||^2_{\tilde{\Omega}}))^{1/2}. \tag{3.29}$$

Preuve.

$$||W||^{DG}_{stab} = (||W||^2_{stab} + ||(\frac{\beta}{h_\perp}[\![q]\!]||^2_{\tilde{\Gamma}})^{1/2} = 0$$

$$\Longrightarrow ||W||_{stab} = 0 \Longrightarrow w = 0$$

et

$$||\nabla q||^2_{\tilde{\Omega}} = 0$$

donc

$$q = cte \text{ et } \int_{\Omega} p dx = 0 \Longrightarrow q = 0$$

■

Lemme 3.4.2 *(stabilité). Pour tout le* $W \in \tilde{\mathcal{Z}}$

$$B^{DG}_{stab}(w, w) = (||w||^{DG}_{stab})^2. \tag{3.30}$$

Preuve. La preuve est une conséquence directe de la définition de $B^{DG}_{stab}(..)$ et remplacer dans (3.10) et (3.11) $v = w$ et $p = q$.

$$B^{DG}_{stab}(w, w) = \frac{1}{2}||w||^2_{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{2}||\nabla q||^2_{\tilde{\Gamma}} \geq ||w||^2_{\tilde{\Omega}}$$

■

Lemme 3.4.3 *(uniformité). Pour tout le* $W^h \in \mathcal{Z}_h$,

$$B^{DG}_{stab}(W_h, E) = 0, \tag{3.31}$$

Où $E = V_h - V$ *est l'erreur*

Preuve. Par la substitution de $W_h \in \mathcal{Z}_h$ à W dans (3.26) et soustraction de (3.9) donne le résultat. L'évaluation d'interpolation

$$\mathcal{V} = H(div, \Omega), \tag{3.32}$$

$$\mathcal{Q} = H^1(\Omega)\backslash\mathbb{R}, \tag{3.33}$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{V} \times \mathcal{Q}. \tag{3.34}$$

Ces espaces sont appropriés quand $\varphi \in L_2(\Omega), \frac{\rho}{g_c}g \in (L_2(\Omega))^{n_{sd}}, \psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et le $\frac{k}{\mu} \in L^\infty(\Omega)$ est discontinu mais lié au-dessus et ci-dessous par des constantes positive.

Noter le $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{Q} \subset \tilde{\mathcal{Q}}$ et $\mathcal{Z} \subset \tilde{\mathcal{Z}}$. Soit $V_{Ih} \in \mathcal{Z}_h$ être un "le interpolent "de $V \in \mathcal{Z}$. Nous décomposons l'erreur de la manière habituelle :

$$E = V_h - V = (V_h - V_{Ih}) + (V_{Ih} - V) = E_h + H, \tag{3.35}$$

où $E_h = \{e_{vh}, e_{ph}\} \in \mathcal{Z}_h$ et $H = \{\eta_v, \eta_p\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$. nous avons l'évaluation suivante pour l'erreur H d'interpolation :

$$||H||_{stab} \leq \tilde{C}_1(\frac{h}{L})^{k+1}|v|_{k+1} + \tilde{C}_2(\frac{h}{L})^l|p|_{l+1}, \tag{3.36}$$

où h est le paramètre de maille (c-à-d., le diamètre) maximum d'élément, L est une dimension caractéristique du Ω de de domaine, et de $\tilde{C_1}$ et $\tilde{C_2}$ sont indépendant de constantes de h, v et p, mais qui dépendre du $\dfrac{k}{\mu}$ de la façon suivante

$$\tilde{C_1} = C_1 \sup_{x\in\Omega}(\frac{\mu(x)}{k(x)})^{1/2}, \tag{3.37}$$

$$\tilde{C_2} = C_2 \sup_{x\in\Omega}(\frac{k(x)}{\mu(x)})^{1/2}L^{-1} \tag{3.38}$$

dans quel C_1 et C_2 sont des constantes non-dimensionnelles, et $|.|_s$ est le semi norme de Sobolev

$$|.|_s^2 = |.|_{H^s(\Omega;L)} = \int_\Omega (L^s\nabla ... \nabla(.)_{stimes})^2_\Omega d\Omega. \tag{3.39}$$

Les inégalités de trace sont bien définies sue la frontière de Ω qui est Lipschitzienne et supposent que la maille est quasi-uniforme. Alors si $W \in (H^1\tilde{\Omega})^{n_{sd}}$,

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} ||w||^2_{\Gamma^e} \leq C_T\{h^{-1}||w||^2_{\tilde{\Omega}} + h||\nabla w||^2_{\tilde{\Omega}}\}, \tag{3.40}$$

où C_T est un indépendant constant de h et de W. c'est un standard résultent,voir Arnold [7] et l'Agmon [8]. (le résultat naturellement tient également si nous remplaçons W par un scalaire-évalué $q \in H^1(\tilde{\Omega})$ Si nous assumons $w_h \in \mathcal{V}_h$ cela nous avons le résultat plus fort

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} ||w_h||^2_{\Gamma^e} \leq C_k h^{-1}||w_h||^2_{\tilde{\Omega}}, \tag{3.41}$$

où C_k dépend de k, l'ordre polynôme des fonctions dans la note de $\mathcal{V}_h$. que C_k est une fonction croissante de k. Ce résultat peut être prouvé par la considération des propriétés d'élément de problème propre

$$\int_{\Gamma^e} r_h \cdot w_h d\Gamma = \lambda_h \int_{\Omega^e} r_h \cdot w_h d\Omega \quad \forall r_h \in \mathcal{V}_h. \tag{3.42}$$

■

Lemme 3.4.4 *Supposons que l'inégalité de trace, (3.40), a lieu quand C_T est le constant dans (3.40) et défini $\tilde{C}_1$ par (3.37). Alors si $\eta_v \in (H^1(\tilde{\Omega})^{n_{sd}}$,*

$$||(\frac{h_\perp}{\beta}\langle\eta_v\rangle||_{\tilde{\Gamma}} \leq (\frac{c_T}{2\beta})^{1/2}\tilde{C}_1(\frac{h}{L})^{k+1}|v|_{k+1}. \tag{3.43}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
||(\frac{h_\perp}{\beta})\langle\eta_v\rangle||^2_{\tilde{\Gamma}} = \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{h_\perp}{\beta}|\langle\eta_v\rangle|^2 d\Gamma &\leq \frac{h}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}\{\int_{\tilde{\Gamma}}(|\eta_v|^2_+ + |\eta_v|^2_-)d\Gamma + \int_{\Gamma}|\eta_v|^2 d\Gamma\} \\
&= \frac{h}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Gamma^e}|\eta_v|^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{C_T}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}(\int_{\tilde{\Omega}}|\eta_v|^2 d\Omega + h^2\int_{tilde\Omega}|\nabla\eta_v|^2 d\Omega) \\
&\leq \frac{C_T}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}(C_1^2(\frac{h}{L})^{2(k+1)}|v|^2_{k+1} = \frac{C_T}{2\beta}\tilde{C}_1^2(\frac{h}{L})^{2(k+1)}|v|^2_{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

■

Lemme 3.4.5 *Avec les mêmes hypothèses que le lemme(3.4.4), et si $\eta_p \in (H^1(\tilde{\Omega}))^{n_{sd}}$, puis*

$$||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![\eta_p]\!]||_{\tilde{\Gamma}} \leq (\frac{2\beta}{\alpha}C_T)^{1/2}\tilde{C}_2(\frac{h}{L})^l|p|_{l+1}. \tag{3.45}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
||(\frac{h_\perp}{\beta})^{1/2}[\![\eta_p]\!]||^2_{\tilde{\Gamma}} &= \int_{\tilde{\Gamma}}\frac{\beta}{h_\perp}[\![\eta_p]\!]^2 d\Gamma \qquad (3.46) \\
&\leq \frac{2}{\alpha}\frac{\beta}{h}\sup_{x\in\Omega}\{\int_{\tilde{\Gamma}}(|\eta_p|^2_+ + |\eta_p|^2_-)d\Gamma + \int_{\Gamma}|\eta_p|^2 d\Gamma\} \\
&= \frac{2\beta}{\alpha h}\sup_{x\in\Omega}\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Gamma^e}|\eta_p|^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{2\beta}{\alpha}C_T\sup_{x\in\Omega}(h^{-2}\int_{\tilde{\Omega}}|\eta_p|^2 d\Omega + \int_{\tilde{\Omega}}|\nabla\eta_p|^2 d\Omega) \\
&\leq \frac{2\beta}{\alpha}C_T\sup_{x\in\Omega}C_2^2 L^{-2}(\frac{h}{L})^{2l}|p|^2_{l+1} = \frac{2\beta}{\alpha}C_T\tilde{C}_2(\frac{h}{L})^{2l}|p|^2_{l+1}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.6 *C_k dénotent la constante dans l'inégalité de trace (3.41). Puis*

$$||(\frac{h_\perp}{\beta})^{1/2}\langle e_v^h\rangle||_{\tilde{\Gamma}} \leq \gamma^{1/2}||e_v^h||_{\tilde{\Omega}}. \tag{3.47}$$

où

$$\gamma = \frac{C_k}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}(\frac{\mu}{k})/\inf_{x\in\Omega}(\frac{\mu}{k}) \tag{3.48}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} ||(\frac{h_\perp}{\beta})^{1/2}\langle e_v^h\rangle||_{\tilde{\Gamma}}^2 &= \int_{\tilde{\Gamma}}\frac{h_\perp}{\beta}|\langle e_v^h\rangle|^2 d\Gamma \leq \frac{h}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}\{\int_{\tilde{\Gamma}}(|e_v^h)|_+^2 + |e_v^h|_-^2)d\Gamma + \int_{\Gamma}|e_v^h|^2 d\Gamma\} \\ &= \frac{h}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_{\Gamma^e}|e_v^h|^2 d\Gamma \leq \frac{C_k}{2\beta}\sup_{x\in\Omega}\int_{\tilde{\Omega}}|e_v^h|^2 d\Omega \\ &\leq \frac{C_k}{2\beta}\frac{\sup_{x\in\Omega}(\frac{\mu}{k})}{\inf_{x\in\Omega}\frac{\mu}{k}} = \gamma||(\frac{\mu}{k})^{1/2}e_v^h||_{\tilde{\Omega}}^2. \end{aligned} \tag{3.49}$$

■

Théorème 3.4.7

$$||E^h||_{stab}^{DG} \leq C||H||_{stab}, \tag{3.50}$$

où C est une constante non-dimensionnelle

Démonstration du théorème :

$$\begin{aligned} (||E^h||_{stab}^{DG})^2 &= B_{stab}^{DG}(E^h, E^h) \quad \text{(Stabilité)} \\ &= B_{stab}^{DG}(E^h, E-H) \quad \text{(Définition de } E^h) \\ &= B_{stab}^{DG}(E^h, E) - B_{stab}^{DG}(E^h, H) \quad \text{(Bilinéarité)} \\ &= -B_{stab}^{DG}(E^h, H) \quad \text{(Consistence)} \\ &= |B_{stab}^{DG}(E^h, H)| \end{aligned} \tag{3.51}$$

où

$$
\begin{aligned}
B_{stab}^{DG}(E^h, H) \quad & \quad (3.52)\\
&= B_{stab}^{DG}(e_v^h, e_p^h; \eta_v, \eta_p)\\
&= (e_v^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} - (dive_v^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} + (e_p^h, div\eta_v)_{\tilde{\Omega}} + ([\![e_v^h]\!], \langle\eta_p\rangle)_{\tilde{\Gamma}} - (\langle e_p^h\rangle, [\![\eta_v]\!])_{\tilde{\Omega}} + (e_v^h \cdot n, \eta_p)_{\Gamma} - (e_p^h,\\
&- \frac{1}{2}(e_v^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2}(e_v^h, \nabla\eta_p)_{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{2}(\nabla e_p^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{2}(\nabla e_p^h, \nabla\eta_p)_{\tilde{\Omega}} + (\frac{\beta}{h_\perp}[\![e_p^h]\!], [\![\eta_p]\!])_{\tilde{\Gamma}}\\
&= \frac{1}{2}(e_v^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} + \frac{1}{2}(e_v^h, \nabla\eta_p)_{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2}(\nabla e_p^h, \eta_v)_{\tilde{\Omega}} - (\langle e_v^h\rangle, [\![\eta_p]\!])_{\tilde{\Gamma}} + ([\![e_p^h]\!], \langle\eta_v\rangle)_{\tilde{\Gamma}} + \frac{1}{2}(\nabla e_p^h, \nabla\eta_p)_{\tilde{\Omega}} +\\
&\leq \frac{1}{2}\{\frac{\varepsilon_1}{2}||e_v^h||_{\tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}||\eta_v||_{\tilde{\Omega}}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}||e_v||_{\tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}||\nabla\eta_p||_{\tilde{\Omega}}^2 + \frac{\varepsilon_3}{2}||\nabla e_p^h||_{\tilde{\Omega}}^2\\
&\frac{1}{2\varepsilon_3}||\eta_v||_{\tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon_4||(\frac{h_\perp}{\beta})^{1/2}\langle e_v^h||_{\tilde{\Gamma}}^2 + \frac{1}{\varepsilon_4}||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![\eta_p]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2 + \varepsilon_5||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![e_p^h]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2\\
&\frac{1}{\varepsilon_5}||(\frac{h_\perp}{\beta})^{1/2}\langle\eta_v\rangle||_{\tilde{\Gamma}}^2 + \frac{\varepsilon_6}{2}||\nabla e_h^p||_{\tilde{\Omega}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6}||\nabla\eta_p||_{\tilde{\Omega}}^2 + \varepsilon_7||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![e_p^h]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2\\
&+ \frac{1}{\varepsilon_7}||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![\eta_p]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2\}\\
&\leq \frac{1}{4}\{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_4\gamma)||e_v^h||_{\tilde{\Omega}}^2 + (\varepsilon_3 + \varepsilon_6)||\nabla e_v^h||_{\tilde{\Omega}}^2 + 2(\varepsilon_5 + \varepsilon_7||\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![e_p^h]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2\}\\
&+ \frac{1}{4}(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3})||\eta_v||_{\tilde{\Omega}}^2 + (\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_6})||\eta_p||_{\tilde{\Omega}}^2 + 2(\frac{1}{\varepsilon_4} + \frac{1}{\varepsilon_7})||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![\eta_p]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2\\
&+ \frac{2}{\varepsilon_5}||(\frac{\beta}{h_\perp})^{1/2}[\![\eta_v]\!]||_{\tilde{\Gamma}}^2
\end{aligned}
$$

Nous pouvons supprimer le premier terme dans des parenthèses bouclées du côté à gauche par le choix

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_4\gamma = 1, \tag{3.53}$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_6 = 1, \tag{3.54}$$

$$\varepsilon_5 + \varepsilon_7 = 1. \tag{3.55}$$

À cet effet nous choisissons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{4}, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{4\gamma}, \tag{3.56}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_6 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7 = \frac{1}{2}. \tag{3.57}$$

Puis

$$(||E^h||_{stab}^{DG})^2 \leq 6||H||_{stab}^2 + 4(1+2\gamma)\frac{\beta}{\alpha}C_T\tilde{C}_2^{\,2}(\frac{h}{L})^l|p|_{l+1} + \frac{C_T}{\beta}\tilde{C}_1^2(\frac{h}{L})^{k+1}|v|_{k+1} \leq C^2||H||_{stab}^2 \tag{3.58}$$

Corollaire 3.4.8

$$||E^h||_{stab}^{DG} \leq \{C\tilde{c}_1(\frac{h}{L})^{k+1}|v|_{k+1} + \tilde{c}_2(\frac{h}{L})^{l}|p|_{l+1}\}. \tag{3.59}$$

Remarque 3.4.9 *1. Noter que sous l'hypothèse, nous nous attendons à la pression exacte d'être continus presque partout. Dans ce cas-ci, si l'interpolation discontinue de pression est capable d'interpoler sans interruption la solution exacte, alors nous pouvons prendre* $[\![\eta_p]\!] = 0$ *presque partout. Ceci signifie que toutes les termes se sont multipliés par* $\varepsilon_4, \varepsilon_7, \varepsilon_4^{-1}$ *et* ε_7^{-1} *dans (3.52) sont zéro. En conséquence, le terme*

$$4(1+2\gamma)\frac{2\beta}{\alpha}C_T\tilde{C}_2^2(\frac{h}{L})^2|p|_{l+1} \tag{3.60}$$

Est absent du côté droit de (3.58). Eq. (3.60) est le seul terme dans la preuve qui est potentiellement gênant Car il contient γ *dans le numérateur et* α *dans le dénominateur. Du (3.4.6), (3.48), on voit Que* γ *balance avec la gamme des paramètres matériels, qui peuvent être importants dans les applications d'ingénierie, et Du (3.4.5), (3.45), que* α *une échelle avec le rapport de la* $min_e > h_\perp^e$*, Au diamètre maximal de l'élément,h. Les deux* γ *et* α *ont un effet néfaste sur la constante* C *dans l'estimation comme on peut le voir à partir de (3.58) et (3.60). On ne sait pas à ce stade si ce résultat est ou non un objet de la preuve, ou est fondamental à la méthode. Il est intérevant de noter qu'une interpolation de pression suffisamment régulière peut complètement supprime cette difficulté. Cette observation peut avoir d'importantes implications pratiques. Un avantage de la formulation stabilisée dans cette instance est qu'il reçoit une pression de haut ordre Interpolations, contrairement à la formulation classique de Galerkin mixte du flux de Darcy.*

2. La constant β*, qui peut être choisi pour optimiser des résultats, semble être plus efficace. Il apparaît dans le numérateur de (3.60) et dans le dénominateur de ce dernier terme dans (3.58), à savoir,*

$$\frac{C_T}{\beta}\tilde{C}_1^2(\frac{h}{L})^{k+1}|v|_{l+1}. \tag{3.61}$$

les balances γ *avec* β^{-1} *tellement n'est aucun problème dans (3.60) si le*β *est petit. D'autre part, quand le* β *est petit, (3.61) est un problème, et si* β *est grand, (3.60)* *est un problème. Mais là ne semble aucun besoin du β d'être grand ou petit. Il devrait considérer comme O(1) constante pour tous les éléments et l'ordres d'interpolation.*

3. *Le théorème établit la convergence dans la norme de stabilité aussi longtemps que le minimum de $\{k+1, l\} \geq 1$. Si nous plaçons $\beta = 0$, le théorème ne garantit pas la convergence de la partie constante de la pression dans le cas pression-discontinu. En outre, pour commander la partie constante de la pression que nous devons compter sur la stabilité de "INF-SUP ". Les tests numériques indiquent que si l'interpolation de vitesse est suffisamment de d'ordre élevé, et la pression est au moins de premier ordre, alors la partie constante de la pression est sous contrôlée. Pour les éléments de pression discontinus, la vitesse linéaire discontinue est suffisante. Si la vitesse est continue, il est suffisant d'utiliser la vitesse quadratique (voir [1]). Les vitesses constantes semblent incapables de commander la partie constante de pression discontinue. Dans des travaux plus récents avec Brezzi et Marini[10].Ils ont mathématiquement établi que, si k et l sont les deux ≥ 1, β_{terme}de peut encore être pris pour être 0 et les prises de résultat de convergence. D'autres propriétés intéressantes de la méthode et de sa relation à d'autres méthodes discontinues de Galerkin sont également décrites dans[10]. En particulier, on le note que la méthode présentée ci-dessus est conformé, garantissant, sous des prétentions appropriées de régularité, le taux optimal de L_2convergence pour la pression. Voir [10] pour les détails précis.*

4. *Dans ce travail nous sommes principalement intéressés par les éléments qui se comportent bien quand nous omettons le β_{terme} ces éléments nous avons le dispositif attrayant qu'il n'y a aucun terme dépendant du maillage.*

5. *Si l'interpolation de vitesse possède dérivées normales à travers des interfaces d'éléments, et β_{terme} est omise, la formulation actuelle réduit à celui de [1]. Cette référence peut être consultée pour les testes numériques impliquant la vitesse continue, combiné avec de la pression continue ou discontinue.*

Chapitre 4

Simulations numériques sous FreeFem++

Dans ce chapitre nous faisons quelques tests numériques sous le logiciel Freefem++.
En réalise deux tests numériques, le premier en utilisant des espaces satisfont la condition inf sup, il s'agit de l'élément de Raviart et Thomaset, le deuxième test nous utilisons la formulation stabilisée.
On considère les équations de Darcy

$$\begin{cases} u + \frac{k}{\mu}\nabla p = -\frac{k}{\mu}(\frac{\rho}{g_c}g) \quad \text{dans } \Omega \\ \quad \text{div} u = \varphi \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u \cdot n = \psi \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

4.1 Premier exemple

Dans la premier exemple, en étudie la convergence de la solution approché u_h de cette méthode. On considére les élément finis mixte de Ravait-Thomas $\mathbb{RT}_0$,on trouve les résultasdans tableau.

$$uex1 = -\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$uex2 = -\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y)$$

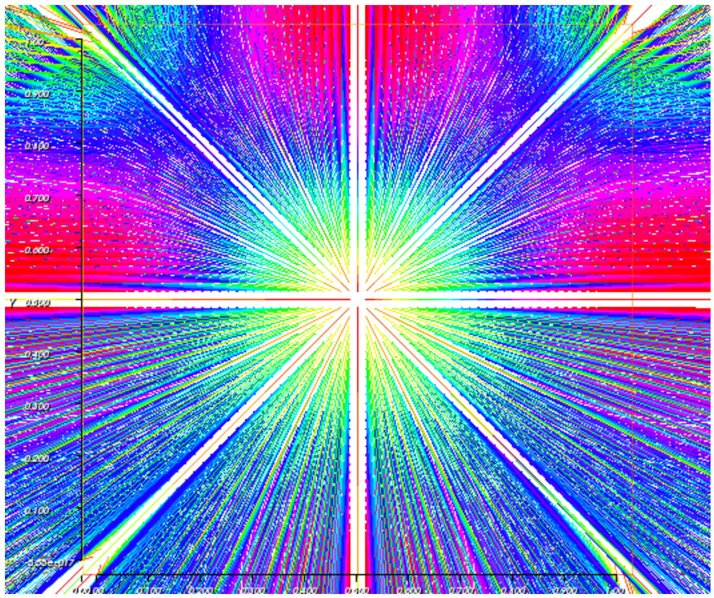

FIGURE 4.1 – RT0 / P0

itération i	erreur	nb des triangle
i=4	9.00359e-006	512
i=6	3.52817e-008	8192

TABLE 4.1 – L'erreur (uex2) et nb des triangle de $\mathbb{RT}_0$

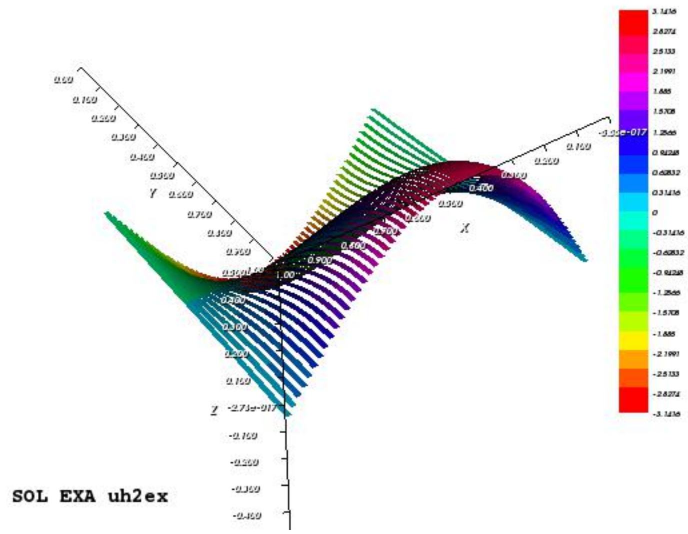

Figure 4.2 – SOL EX U2

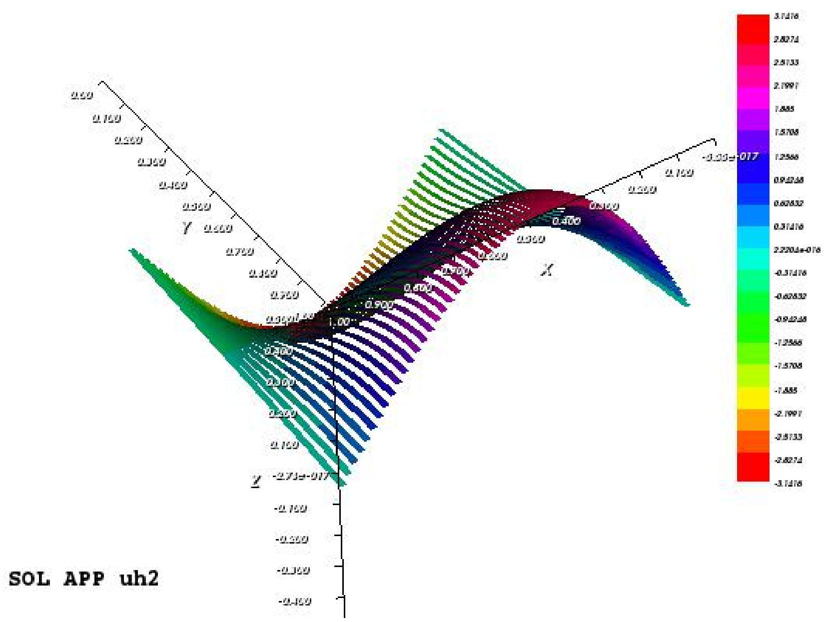

Figure 4.3 – SOL APP U2

4.2 Deuxiéme Exemple(Méthode stabilisé)

Dans la Deuxiéme exemple, en étudie la convergence de la solution approché u_h de cette méthode. On considére les élément finis mixte de stabilité ,on trouve les résultasdans tableau.

On considérer $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ et la solution exacet de pression

$$P = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

et la vitesse calculé $u = \nabla p$ on a

$$uex1 = -\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y)$$

$$uex2 = -\pi\sin(\pi x)\cos(\pi y)$$

dans laquelle $\rho\dfrac{g}{g_c} = 0$ et $\dfrac{\kappa}{\mu} = 1$ et $g = 0$.

$$\varphi = 2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

$$\psi_1 = \pi\sin(\pi x)$$

$$\psi_2 = \pi\sin(\pi y)$$

itération i	erreur	nb des triangle
i=4	0.000381325	512
i=6	6.71299e-006	8192

TABLE 4.2 – L'erreur (uex2) et nb des triangle

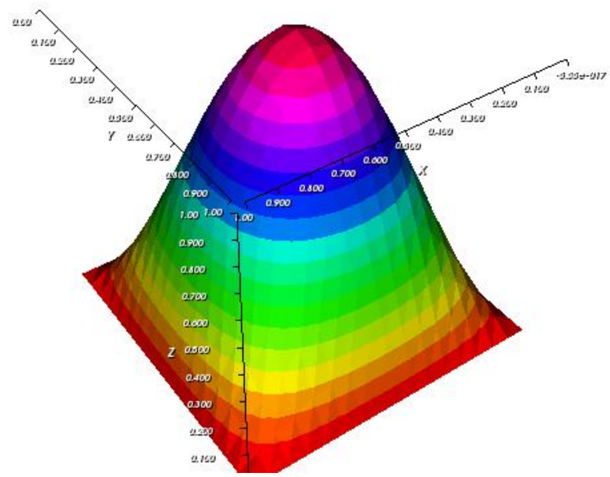

FIGURE 4.4 – pres

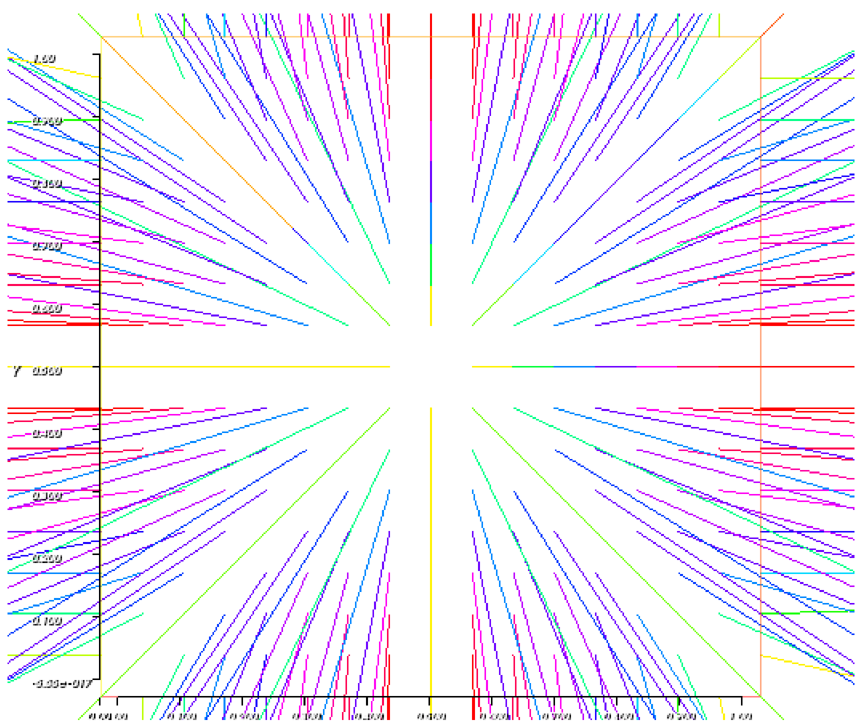

FIGURE 4.5 – P1/P1

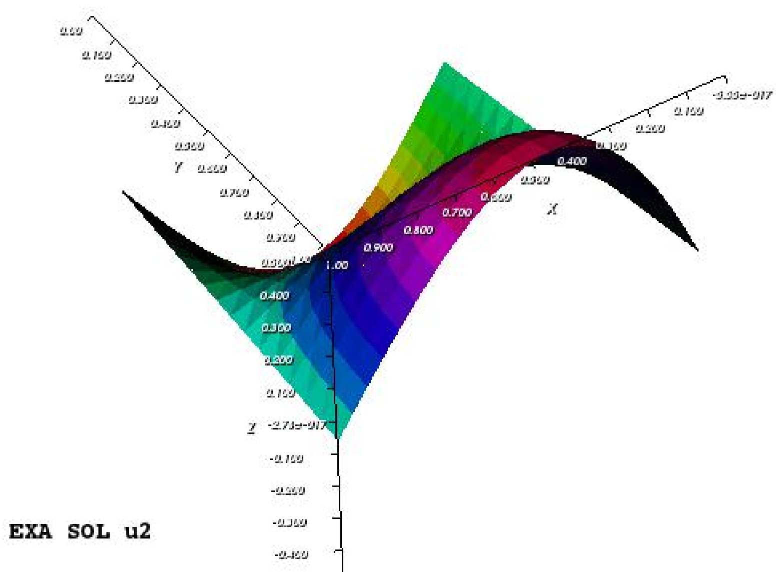

FIGURE 4.6 – SOL EX

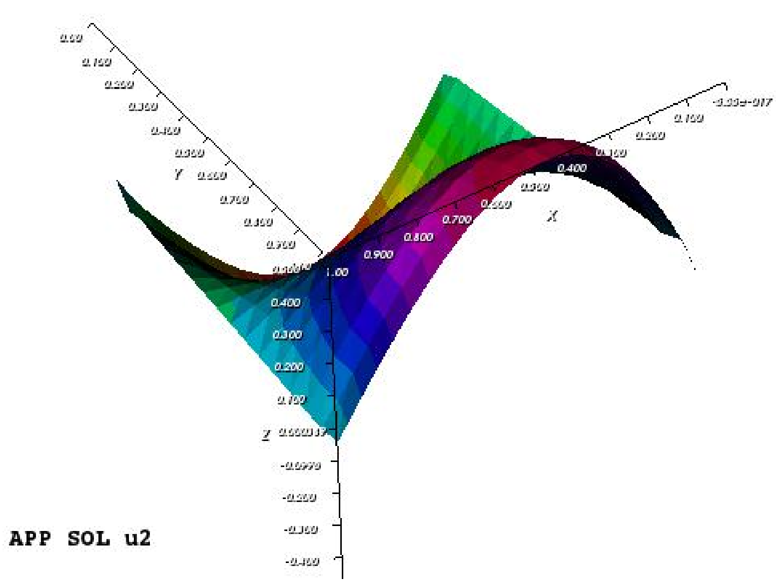

FIGURE 4.7 – SOL APP

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié le problème de DARCY. Ce problème est un modèle très utiliser en mécanique des fluide notament lorsqu'on s'intéresse à l'écoulement des fluide dans un milieu poreux.

Contrairement au autres modèles comme stokes et Navier-stokes la solution de (vitesse)pour le problème de DARCY est moins régulière $u \in H(div)$ si $f \in L^2(\Omega)$ alors que pour stokes $u \in H(\Omega)$.

De cette remarque de régularité, la méthode des éléments finis discontinus prend son importance.

Dans ce travail nous avons étudier le problème de DARCY et on a le discrité par éléments finis discontinus stabilisés le schéma numérique est aussi programmé en utilisait freefem++.

Cette méthode présente plusieurs avantages notament

➤ Simplicité conceptuelle de la méthode

➤ L'utilisation d'un grande possibilité de choix des éléments finis

➤ L'utilisation de norme indépendante de h

comme perspective de ce travail il sera intéressant de faire une analyse a posteriori efficace et fiable.

Bibliographie

[1] A. Masud, T.J.R. Hughes, A stabilized mixed finite element method for Darcy flow, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (39-40) (2002) 4341-4370.

[2] Alexandre Ern, Aide-mémoire Éléments finis,Dunod, Paris, 2005.

[3] Alexandre Ern. Jean-Luc Guermond Theory and Practice of Finite Elements, Springer 2004

[4] Brezzi.Fortin, Mixed and hyprid Finite Element Methods, Springer 2004

[5] C.E. Baumann, J.T. Oden, A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 175 (1999) 311-341.

[6] Djenno Ngomanda Malcom. Nouvelles approximations numériques pour les équations de Stokes et l'équation Level Set. HALL.7 jan 2010.

[7] D.N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous element, SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982) 742-760

[8] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal. 39 (2002) 1749-1779

[9] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element MethodsSpringer Series in Computational Mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1991

[10] F. Brezzi, T.J.R. Hughes, L.D. Marini, A. Masud, Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow, SIAM J. Scientific Comput. 22-23 (2005) 119-145.

[11] Gabriel N. Gatica A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method,Theory and Applications.Gabriel N. Gatica 2014

[12] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton, NJ, 1965.

[13] Susanne C.Brenner, L.Ridgway Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods,Springer 2008.

[14] C. Bernardi, Y. Maday et F. Rapetti, Discrétisations variationnelles des problèmes elliptiques, Springer-SMAI (2004).

[15] Thomas J.R.Hughes , Arif Masud ,Jing Wan , A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow ,Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 3347-3381.

[16] T.J.R. Hughes, Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 127 (1995) 387-401.

[17] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VII. The Stokes problem with various well posed boundary conditions : Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 65 (1987) 86-96.

Abstract

A new mixed, stabilized, discontinuous Galerkin formulation for Darcy flow is presented. The formulation combines several attributes not simultaneously satisfied by other methods: It is convergent for any combination of velocity and pressure interpolation higher than first-order

Keywords: Darcy flow, Discontinuous Galerkin method, Mixed method; Stabilized method, Error estimates

الملخص

في هذا العمل تطرقنا إلى دراسة طريقة جديدة مبنية على العناصر المنتهية الغير مستمرة المزدوجة فيما يخص مسالة.هذه الطريقة الجديدة تتضمن مزجا لعدة أفكار استخدمت في أبحاث سابقة. وهي مستقرة و متقاربة من أجل أي فضاء وهي تحقق مبدأ توازن على كل عنصر يمكن استخدامه في أجسام ثلاثية أو ثنائية الأبعاد.

الكلمات المفتاحية:

مسألة DARCY, العناصر المنتهية غير المستمرة, الشكل المزدوج, الاستقرار, تقدير الخطأ.