طريقة عددية لحل معادلة تكاملية ذات الدرجة الكسرية باستخدام دوال برنشتاين

بعضي فراح

تحت إشراف الأستاذ: عباسي حسين

تخصص: تحليل دالي

قسم الرياضيات -كلية الرياضيات و علوم المادة-جامعة قاصدي مرباح ورقلة

farah1993baadi@gmail.com

الكلمات المفتاحية التكامل الكسري ،الاشتقاق الكسري ،كثيرات حدود برنشتاين،مصفوفة العمليات.

مقدمة

إن الهدف الرئيسي من هذا العمل هو تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التكاملية ذات الدرجة الكسرية و ذلك باستخدام خواص كثير حدود برنشتاين و الإعتماد على مصفوفة العمليات .

1. المعادلات التكاملية ذات الدرجة الكسرية

الحساب الكسري عملية رياضية ظهر في 1695 على يد العالم " لايبنيز" ثم تطور حتى العصر الحديث ، حيث وجدت طريقها للاستخدام في مختلف الميادين العلمية وخاصة الهندسة و الفيزياء و الميكانيك و الكهرباء.

1.1 أساسيات الحساب الكسري

سنتطرق في هذا الجزء من مذكرتنا هذه لتعريف الاشتقاق و التكامل ذوا الدرجة الكسرية بمفهوم ريمان-ليوفيل وكابيتو و ذلك على الترتيب .

تعريف 1.1. [3]

1. التكامل الكسري بمفهوم ريمان-ليوفيل حيث $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (1-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x>a, \qquad (1)$$
$$I^0 f(x) = f(x),$$

حيث أن $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ هي دالة جاما لأولر.

2. الاشتقاق الكسري بمفهوم كابيتو حيث $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha+1} f(t)^{(n)}, x>a \qquad (2)$$

2. كثيرات حدود برنشتاين

[1] كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n المعرف على المجال $[0,1]$ هو كثير حدود من الشكل

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} & 0\le i\le n \\ 0 & i<0 \ \text{أو}\ \ i>n \end{cases}$$

حيث $i=0,1,\dots,n$، استخدمنا نظرية ذات الحدين للتوسع لـ $(1-x)^{n-i}$ لدينا:

$$\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}x^{i+k}$$

إن كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n تشكل أساس $L^2[0,1]$

$$\phi(x) = [B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}]^T, \qquad (3)$$

حيث يمكننا الحصول على

$$\phi(x) = AT_n(x), \qquad (4)$$

3. تقريب تابع

[1] لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[0,1]$ نقرب الدالة $f(x)$ باستعمال كثيرات حدود برنشتاين على النحو التالي :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{m} C_k B_{k,m}(x) = C^T\phi(x) \qquad (5)$$

$$\mathbf{C}^T = [\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_m] \qquad (6)$$

لحسابه

$$C^T = [f(\tfrac{0}{n}), f(\tfrac{1}{n}), \dots, f(\tfrac{n}{n})] \qquad (7)$$

4. مصفوفات العمليات

4.1 مصفوفة العمليات للتكامل

[2] نكامل شعاع أساس كثيرات حدود برنشتاين $\phi(x)$ المعرف في (3) فنجد

$$\int_0^x \phi(x')dx' \simeq \mathbf{P}\phi(x) \qquad (8)$$

حيث $\mathbf{P}$ مصفوفة العمليات للتكامل من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ تعطى بالشكل التالي :

$$P = A_pB \qquad (9)$$

حيث:

$$\int_0^x \phi(x')dx' = A_pX_p, \qquad (10)$$

حيث A_p مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$

$$A_p = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} \text{و} X_p = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

و

$$X_p \simeq B\phi(x)$$

4.2 مصفوفة العمليات للتكامل الكسري

[2]

القول أن مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لكثير حدود برنشتاين لشعاع $\phi(x)$ كل تقريب لمصفوفة العمليات

$${}_0I_x^\alpha \simeq I^\alpha\phi(x), \qquad (11)$$

حيث I^α مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لريمان-ليوفيل من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$ تعطى في الصورة التالية:

$$I^\alpha = ADE, \qquad (12)$$

وهي مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لكثير حدود برنشتاين.
حيث:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{0!}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{0!}{\Gamma(\alpha+1)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & H \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

D مصفوفة من الرتبة $(n+1)\times(n+1)$

5. تطبيق عددي

(في طور إنجازه)

الملخص

هدفه، تقديم طريقة عددية لحل معادلات تكاملية ذات الدرجة الكسرية بكثيرات حدود برنشتاين.

المراجع

[1] G. Tachev, Pointwise approximation by Bernstein polynomials, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 85, no. 3, pp. 353–358, 2012

[2] M.Alipour , D.Rostamy ,D.Baleanu ,solving multi-dimensional fractional control problem with inequality constraint by Bernstein polynomials operational matrices, journal of Vibration and control published online 4 October 2012.

[3] K.B. Oldham,J. Spanier, (1974). The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Pressé Inc.