Analyse asymptotique des correcteurs de la couche limite dans un problème elliptique

Hafsi Nadjet (Encadreur: D.A Chacha)
(Co-encadreur: H. Tebib)

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algérie
hafsinadjet94@gmail.com

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier les estimations d'erreur pour l'homogénéisation d'un problème aux limites elliptique , en utilisant des correcteurs de couche limite .

Mots clés: *Correcteur , couche limite , homogénéisation , problème elliptique , méthode d'éclatement .*

1. Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire se basent sur une lecture détaillée l' article [1] . Nous présentons ainsi les résultats de l'estimation d'erreur d'ordre 1 et d'ordre 2 avec couche limite dans l'homagénéisation périodique d'un problème elliptique.

Le domaine dans lequel le problème est étudié est $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, convexe , borné et suffisamment régulier.
Afin d'obtenir une estimation d'erreur d'ordre $O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$, on va utiliser des idées liées à la méthode d'éclatement proposé par Cioranescu et al. [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002), pp. 99-104].Ce résultat est annoncé dans le théorème 3 .

2. Plan du mémoire

Ce travail est décomposé en trois chapitres :

Chapitre 1: Introduction à l'homogénéisation et correcteur de couche limite .

Chapitre 2: Le correcteurs de couche limite du premier-order.

Chapitre 3: Le correcteurs de couche limite du deuxième-order .

3. Problématique

Dans ce travail, on considère le problème classique en homogénéisation avec des coefficients pèriodiques. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Un domaine convexe, borné suffisamment régulier, et soit $Y = (0,1)^N$ une cellule de référence(unité). Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$ et $A(y) = (a_{i,j}(y)) \in L^\infty(\Omega)$, symétrique et Y -périodique avec $\exists\ \alpha > 0, a_{i,j}\xi_j\xi_i \geq \alpha\ |\xi|^2, \forall\ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^N$, on s'intéresse par le problème suivant :

$$\begin{cases} -div\left(A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon(x)\right) = f \quad dans\ \ \Omega. \\ \qquad\qquad u_\epsilon = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où l' on note

$$A^\epsilon(x) = A(\frac{x}{\epsilon}) = A(y)$$

avec $y = \frac{x}{\epsilon}$

- ϵ: un petit paramétre représentant la taille de la période .
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ variable macroscopique (globale) .
- $y = (y_1, y_2, ..., y_n) = (\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{x_2}{\epsilon}, ..., \frac{x_n}{\epsilon})$ variable microscopique (locale) .

3.1 Formulation variationnelle du problème

Le problème variationnel correspondant au problème (1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{trouver} \quad u_\epsilon \in H_0^1 \ \text{ tel que :} \\ \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{i,j}(\frac{x}{\epsilon})\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}\ dx = \int_\Omega f v\ dx, \forall v \in H_0^1. \end{cases} \tag{2}$$

3.2 Existence et unicité de u_ϵ :

D'après des résultats classiques de théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité d' une solution u_ϵ dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème (1) qui est telle que :

$$\|u_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{3}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré qui dépend uniquement de l' ouvert Ω .

3.3 Étude de l' homogénéisation du problème :

D'après le théorèmes de compacité de Rellich-Kondrashov , l'estimation (3) entraîne l'existence d' un élément u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ tel qu' à une sous-suite près , on a

$$u_\epsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad et \quad u_\epsilon \longrightarrow u_0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega) \tag{4}$$

où u_0 vérifie :

$$\begin{cases} -div\ (A^\star \nabla u_0) = \sum_{ij=1}^n a_{ij}^\star \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad \text{dans} \ \ \Omega. \\ \qquad\qquad u_0 = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

La matrice homogénéisée $A^\star = (a_{ij}^\star)_{1\leq i,j \leq n}$ est une matrice constante donnée par

$$A^\star = (a_{ij}^\star)_{i,j=1,n}, \quad avec \quad a_{ij}^\star = \frac{1}{|Y|}\int_Y (a_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{ik}\frac{\partial \hat{\chi}^j}{\partial y_k})\ dy. \tag{6}$$

Les fonctions $\hat{\chi}^j \in H^1_{per}(Y) = \{\phi \in H^1(Y), M_y(\phi) = \frac{1}{|Y|}\int_Y \phi\ dy\ \ = 0\}$, pour $j = 1, ..., n$ sont définies comme étant les solutions du probléme locale

$$\begin{cases} -div(A\nabla(\hat{\chi}^j - y_j)) = -\sum_{i,k=1}^n \dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\dfrac{\partial(\hat{\chi}^j - y_j)}{\partial y_k}\right) = 0 \quad dans\ \ Y, \\ \dfrac{1}{|Y|}\int_Y \hat{\chi}^j = 0, \\ \hat{\chi}^j \quad est \ \ \text{Y-périodique} \quad . \end{cases} \tag{7}$$

On va définir u_ϵ sous la forme d' un développement asymptotique suivant :

$$u_\epsilon(x, \frac{x}{\epsilon}) = u_0\,(x) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + ... \tag{8}$$

tel que $u_i(x, .)$ est Y-périodique $\forall i = 0, 1, ...$ où

$$u_1(x, \frac{x}{\epsilon}) = \hat{\chi}^j\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \tag{9}$$

3.4 Estimations d'erreur liées à l'homogénéisation:

Théorème 1 *Soient u_ϵ et u_0 est les solutions de (1)et (5) respectivement . Alors, u_ϵ converge faiblement vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$. Si de plus $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ alors*

$$\|u_\epsilon(x) - u_0(x) - \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

où u_1 est donné par (9)

Preuve. (voir [2]) ■

3.4.1 Le correcteurs de couche limite du premier-order :

Afin d'améliorer l'estimation d'erreur dans (10), on considerè $\theta_\epsilon \in H^1(\Omega)$ terme de la couche limite solutions de :

$$\begin{cases} -div\ \left(A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla\theta_\epsilon\right) = 0 \qquad\quad dans\ \ \Omega. \\ \qquad \theta_\epsilon = u_1^{cl,\epsilon} = u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \quad sur\ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Théorème 2 *Soient u_ϵ et u_0 est les solutions de (1)et (5) respectivement. Suppose que $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$.*
Alors:

$$\|u_\epsilon(.) - u_0(.) - \epsilon u_1\left(., \frac{.}{\epsilon}\right) + \epsilon\theta_\epsilon(.)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\epsilon. \tag{12}$$

Preuve. (voir [2]) ■

3.4.2 Le correcteurs de couche limite du deuxième-order :

Le résultat principal de cette partie concerne l'estimation d' érreur en norme H^1 pour la solution du probléme classique en homogènèisation en utilisant un correcteurs de couche limite du deuxiéme order . Le théorème suivante résume ce résulte :

Théorème 3 *Soient $A \in L^\infty(Y)$ et $u_0 \in H^3(\Omega)$. s'il existe $p > N$ tel que $\chi_j, \chi_{ij} \in W^{1,p}_{per}(Y)$ alors nous avons:*

$$\|u_\epsilon(.) - u_0(.) - \epsilon u_1\left(., \frac{.}{\epsilon}\right) + \epsilon\theta_\epsilon(.) - \epsilon^2\chi_{ij}\left(\frac{.}{\epsilon}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\epsilon^{\frac{3}{2}}\|u_0\|_{H^3(\Omega)}. \tag{13}$$

Preuve. La preuve de ce théorème (voir [1]) est basée sur la méthode d'éclatement périodique développé dans [3] .
■

References

[1] D.Onofrei , B.Vernescu, Asymptotic analysis of second-order boundary correctors. Applicable Analysis Vol. 91, No. 6, June 2012, 1097-1110.

[2] G. Allaire and M. Amar, Boundary layer tails in periodic homogenization, ESAIM: Control, Optim. Calc. Variations 4 (1999), pp. 209-243.

[3] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002), pp. 99-104.

[4] D. Cioranescu and P Donato, An Introduction to Homogenization, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[5] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North Holland, Amsterdam, 1978

[6] G. Griso, Error estimate and unfolding for periodic homogenization, Asymptotic Anal. 40 (2004), pp. 269-286.

[7] J.L. Lions, Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Controls, Science Press, Beijing, Gordon and Breach, New York, 1981.