UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : LEGOUGGI Messaouda

Thème

Etude d'un problème hyperbolique avec amortissement

Soutenu publiquement le : 06/06/2018

Devant le jury composé de :

Mzabia.Hadi	M.A.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C.A Universié KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
Merabet Ismail	M.C.A Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mon *père*.

Ma chére ***Mère***,

qui a été la lumière de ma vie .

Mes frères, *Messaoud*, *Karim* , *Djamal* , *Fateh* .

Mas soeurs *Ibtissam*, *Hanane* , *Nassima* qui a donner tous les moyennes pour continue le Master et leur encouragement continue.

Et Mon encadreur ***Merabet Ismail***,

Je le dédie également à mes amis(e)s qui ont su être là quand j'en avais besoin : *Samar, Aicha, Kawther , sokaina* Sans exception .

A tous ceux qui m'ont aimé.

Remerciement

Avant toute considération,je remercie le Dieu qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur MERABET Ismail de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.
Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Notations

➤ $\nabla v = \mathrm{grad}(v) = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$: Le gradient d'un vecteur v.

➤ $|v|_{2,\ \omega} = \left(\sum_{\alpha=2} \|D^\alpha v\|_{0,\omega} \right)^{1/2}.$

➤ $\Delta \quad = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

➤ $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$

Introduction

Les systèmes hybrides sont des systèmes dont le comportement est déterminé par l'interaction entre des dynamique continues et discrètes. Tel est le cas, par exemple, d'un système de contrôle automatique de température d'une pièce où la dynamique continue de la température à la fois dépend et influence l'état on/off du système de chauffage. La dynamique d'un moteur à combustion interne à quatre cycles est un autre exemple de système hybride, avec quatre états discrets, correspondants aux cycles du moteur, et des variables continues, telles que la température et la pression, dont la dynamique dépend du cycle du moteur à l'instant actuel et entraine également des changements de cycle.

Les modèles par système hybrides trouvent leur application dans plusieurs domaines, tels que :

➤ le contrôle de système mécaniques,

➤ le contrôle de processus industries,

➤ l'industrie automobile,

➤ les systèmes électriques de puissance,

➤ le contrôle du trafic aérien,

➤ les processus chimique,

➤ les systèmes de transport , parmi d'autres nombreusse application.

D'un poit de vue théorique, la difficulté principale dans leur étude est le mélange des dynamiques continue et discrète .

Les systèmes à commutation correspondent au poit de vue sur les systèmes hybrides où l'intérêt central est la dynamique continue. La varible discrète est vue comme des modes ou des sous-systèmes qui régissent la dynamique continue, on ne s'intéresse donc pas spécifiquement à l'évolution de la variable discrète dans le temps, mais uniquement aux effets de cette évolution sur la dynamique continue. Typiquement, on considèe donc certaine classe d'évolutions discrètes possibles et on cherche à obtenir des propriétés sur la dynamique cotinue qui soient robustes par rapport à cette classe.

Dans le cas où α prend ses valeurs en $\{0,1\}$ est un constatante par morceaux, le système

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \alpha(t)\rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \tag{1}$$

est un système à commutation : dans les intervalles de temps où α vaut 0, u est détrminée par l'équation non-amortie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x),$$

alors que, dans les intervalles de temps où α vaut 1, u est déterminée par l'équation amortie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x),$$

La commutation entre plusieurs sous-systèmes peut introduire de nouveaux phénomènes qui ne sont pas présents dans le sous-système isolés, ce qui rend l'analyse de système à commutation difficile, même si on se restreint au cadre plus simple de système linéaires en dimension finie. Par exemple, il n'est pas trés difficile de trouver deux matrices $A_0, A_1 \in M_2(\mathbb{R})$ ayant des valeurs propres à partie réelle strictement négative et pour lesquelles le système $x^{\cdot}(t) = A_{\alpha(t)}x(t)$ admet une trajectoire dont la norme croît exponentiellement pour un certain choix de signal de commutation $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{0, 1\}$; un tel couple de matrices est, par exemple,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notre étude de (1) est une étude de stabilité asymptotique de l'origine : on cherche à vérifier numériquement que, sous certaines hypothèses sur le signal α, toute solution de (1) converge vers la fonction nulle. Comme c'est le cas en général pour les systèmes à commutation, on s'intéresse à établir des propriétés qui soient vraies non pas pour un seul signal de commutation α fixé, mais pour toute une classe g de signaux α. Dans les intervalles de temps où $\alpha \equiv 0$, le terme d'amortissement n'agit pas et la norme $\| u(t) \|_V^2 + \| \frac{du}{dt}(t) \|_H^2$ de la solution de (1) est conservée. Il est ainsi intéressant d'inclure dans la classe g des conditions qui garantissent que $\alpha(t)$ est actif assez souvent.
Ce mémoire reprend un travail effectué durant mon circuit d'études de Master 2 en Analyse numérique et modélisation.

Ce mémoire divise en trois chapitres.
Le premier chapitre regroupes quelque rappels et définitions sur la théorie spectrale, et les valeur propres d'un problème elliptique.
En suite dans le deuxiéme chapitre, on s'intéressera à l'étude théorique de (2.3) dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$, afin de satisfaiter les hypothèses du théorème 2.1.2 pour montrer que le problème est bien posé , et que toute solution converge exponentiellement vers zéro dans la norme de l'espace d'énergie.

Chapitre 1

Préliminaires

1.0.1 Théorème (de Reisz)

Théorème 1.0.1 *Soit V un espace de Hilbert. Etant donné $F \in V'$. Alors il existe $u \in V$ unique tel que*

$$\forall w \in V, \quad < F, w >_{V',V} = (u, w) \tag{1.1}$$

$$\|u\|_V = \|F\|_{V'} \tag{1.2}$$

1.0.2 Théorème (de Lax-Milgram)

Théorème 1.0.2 *Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que :*

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \beta < +\infty, \quad \forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2. \tag{1.3}$$

(iii) la forme linéaire $F(v)$ est continue,

$$\exists \gamma < +\infty, \quad \forall v \in V, \quad |F(v)| \leq \gamma \|v\|_V$$

1.1 Rappels sur la théorie spectrale

1.1.1 Opérateur compact

Définition 1.1.1 *Soit V et H deux espace de Hilbert et A une application linéaire continue de V dans H. On dit que A est compcte si l'image par A de la boule unité de V est relativement compact dans H .*
De manière équivalente, une application linéaire continue A est compacte si, pour toute suite bornée x_n de V, on peut extraire une sous-suite telle que $Ax_{n'}$ converge dans H. Si H ou V est de dimension finie, alors toute application linéaire continue est compacte. Ce n'est plus vrai si H et V sont de dimension infinie.

1.1.2 Opérateur auto-adjoint

Soit A une application linéaire continue V dans V. Il existe une unique application linéaire continue A^* de V dans V , dit adjoint, telle que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \qquad \forall x, y \in V.$$

Eneffet pour $y \in V$ fixé, soit $L \in V'$ la forme linéaire continue définie par $L(x) = \langle Ax, y \rangle$. Par application du Théorème de Riesz, il existe un unique $z \in V$ tel que $L(x) = \langle z, x \rangle$. On définit alors l'application A^* de V dans V qui, à chaque y associe le z correspondant.On vérifie facilement que A^* est linéaire continue et on a bien $L(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$.

Définition 1.1.2 *Soit A une application linéaire continue de V dans V. On dit que A est auto-adjointe si elle coïncide avec son adjointe, c'est-à-dire que $A^* = A$*

1.1.3 Théorème (de Rellich)

Théorème 1.1.3 *Si Ω est un ouvert borné réguler de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergent dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).*

Théorème 1.1.3 peut être faux si l'ouvert Ω n'est pas borné. Par exemple, si $\Omega = R^N$, l'injection canonique de $H^1(R^N)$ dans $L^2(R^N)$ n'est pas compacte. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la suite $u_n(x) = u(x + ne)$ où e est un vecteur non nul et u une fonction de $H^1(R^N)$ (on translate u dans la direction e). Il est clair qu'aucune sous-suite de u_n ne converge dans $L^2(\Omega)$

Lemme 1.1.4 *Soit V un espace de Hilbert réel (non réduit au seul vecteur nul) et A une application linéaire continue auto-adjoint compact de V dans V. On définit*

$$m = \inf_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \qquad \textit{et} \qquad M = \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle}$$

Alors, $\| A \| = \max(| m |, | M |)$, et soit m, M valeur propre de A.

Preuve. On voit facilement que $| \langle Au, u\rangle | \leq \| A \| \| u \|^2$,donc $\max(| m |, | M |) \leq \| A \|$ D'autre part, comme A est auto-adjoint, on obtient pour tout $u, v \in V$

$$\langle A(u + v), (u + v)\rangle - \langle A(u - v), (u - v)\rangle$$

$$= \langle Au, u\rangle + \langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle + \langle Av, v\rangle - \langle Au, u\rangle + \langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle - \langle Av, v\rangle$$
$$= 4\langle Au, v\rangle$$

alors

$$\begin{aligned} 4\langle Au, v\rangle &= \langle A(u + v), (u + v)\rangle - \langle A(u - v), (u - v)\rangle \\ &\leq M \| u + v \|^2 - m \| u - v \|^2 \\ &\leq \max(| m |, | M |)(\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2) \\ &\leq 2 \max(| m |, | M |)(\| u \|^2 + \| v \|^2) \end{aligned}$$

Or, $\| A \| = \sup_{\|u\|=\|v\|=1} \langle Au, v\rangle$ puisque $\| A \| = \sup_{\|v\|=1} \langle Au, v\rangle$. On en déduit donc que $\| A \| \leq \max(| m |, | M |)$, d'où l'égalité entre ces deux termes. par ailleurs, comme $m \leq M$, un des deux cas suivants a lieu : soit $\| A \| = M \geq 0$(l'autre cas $\| A \| = -m$ est complètement symétrique en remplaçant A par -A). Soit une suite $(u_n)_{n>1}$ de vecteurs unitaires de V ui est maximisante dans la définition de M, c'est-ádire que

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle = M \text{ et } \| u_n \| = 1.$$

comme A est compacte, il existe une sous-suite tellque $Au_{n'}$ converge dans V vers une limite v. D'autre part, on a

$$\langle Au_n, u_n\rangle \leq \| Au_n \| \leq \| A \| = M,$$

d'où l'on déduit que $\lim_{n\to\infty} \| Au_n \| = M$, c'est-ádire que $\| v \| = M$. Finalement, comme

$$\| Au_n - Mu_n \|^2 = \| Au_n \|^2 + M^2 - 2M\langle Au_n, u_n\rangle,$$

on obtient que $\lim_{n\to\infty} \| Au_n - Mu_n \| = 0$. Pour la sous-suite n', cela implique $u_{n'}$ converge vers $\frac{v}{M}$(du mois , si $M \neq 0$) ; le cas $M = 0$ est trivial puisqu'il implique que A=0). Par continuité de A, on en déduit donc que $Au_{n'}$ converge aussi vers $\frac{Av}{M}$ (en plus de vers v). l'unicité de la limite montre que $\frac{Av}{M} = v$, c'est-ádire que v est un vecteur propre (non nul car $\| v \| = M \neq O$) associé à la valeur ■

Lemme 1.1.5 *Soit V un espace de Hilbert et A une application linéaire continue compacte de V dans V. Pour tout réel $\delta > 0$, il n'existe au plus qu'un nombre fini de valeur propres en dehors de l'intervalle $]-\delta, +\delta[$, et le sous-espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres est de dimension finie.*

1.2 Valeurs propres d'un problème elliptique

1.2.1 Problème variationnel

Dans un espace de Hilbert V nous considérons une forme bilinéaire $a(.,.)$, symétrique, continue et coercive, c'est-à-dire que $a(w, v) = a(v, w)$, et il existe $M > 0$ et $\nu > 0$ tels que

$$| a(w,v) | \leq M \parallel w \parallel_V \parallel v \parallel_V \text{ pour tout } w, v \in V$$

et

$$a(v,v) \geq \nu \parallel v \parallel_V^2 \text{ pour tout } v \in V$$

Pour pouvoir appliquer les résultats de la section précédent, nous introduisons un nouvel ingrédient, à savoir un autre espace de Hilbert H . Nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante

$$\begin{cases} V \subset H \text{ avec injection compacte} \\ V \text{ est dense dans } H. \end{cases} \tag{1.4}$$

L'expression " injection compacte " veut dire précisément que l'opérateur d'inclusion $\mathcal{I}$ qui à $v \in V$ associe $\mathcal{I}v = v \in H$ est continu et compact (voir la définition 1.1.1). Autrement dit, l'hypothèse (1.4) implique que de toute suite bornée de V on peut extraire une sous-suite convergente dans H . Les espace H et V ne partagent pas le même produit scalaire, et nous les noterons $\langle ., . \rangle_H$ et $\langle ., . \rangle_V$ pour éviter toute confusion .
Nous considérons le problème variationnel de Valeurs propres suivant :

trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V \backslash \{0\}$ tels que

$$a(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle_H \qquad \forall v \in V \tag{1.5}$$

On dit que λ est une valeur propre du problème variationnel (1.5) (ou de la forme bilinéaire a) et que u est le vecteur propre associé .

1.2.2 Base hilbertienne

Définition 1.2.1 *Soit V un espace de Hilbert . On appelle base hilbertienne de V une famille dénombrable $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset V$ qui est orthonormale $(e_i, e_j) = \delta_j^i$ pour le produit sclaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans V alors on a* $\overline{\{e_i\}} = V$

1.2.3 L'existence d'une base hilbertienne

Théorème 1.2.2 *Soit V un espace de Hilbert réel de dimension infinie et A une application linéaire continue, définie positive, auto-adjointe, compacte de V dans V. Alors les valeurs propres de A forment une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réel strictement positifs qui tend vers 0, il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1} deV$ formée de vecteurs propres de A, avec*

$$Au_k = \lambda_k u_k \text{ pour } k \geq 1.$$

Preuve. Le Lemme 1.1.4 montre que l'ensemble des valeurs propres de A n'est pas vide, tandis que le Lemme 1.1.5 montre que cet ensemble est soit fini, soit infini dénombrable avec 0 comme seul point d'accumulation. Par ailleurs, comme A est définie positive, toutes les valeurs propres sont strictement positives. Notons (λ_k) les valeurs propres de A et $V_k = Ker(A - \lambda_k Id)$ les sous-espace propres associée (le Lemme 1.1.5 nous dit aussi que chaque V_k est de dimension finie). On remarque que les sous-espace propres V_k sont orthogonaux deux à deux : en effet, si $v_k \in V_k$ et $v_j \in V_j$ avec $k \neq j$, alors, comme A est auto-adjointe, on a

$$\langle Av_k, v_j\rangle = \lambda_k\langle v_k, v_j\rangle = \langle v_k, Av_j\rangle = \lambda_j\langle v_k, v_j\rangle,$$

d'où l'on déduit que $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ puisque $\lambda_k \neq \lambda_j$. Soit W l'adhérence dans V de l'union des V_k

$$W = \overline{\left\{u \in V, \exists \geq 1 \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{k} u_k, u_k \in V_k\right\}}.$$

On construit facilement une base hilbertienne de W par réunion des bases orthonormales de chaque V_k (chacun de dimension finie et orthogonaux entre eux). Montrons qu'en fait $W = V$ ce qui prouvera aussi que la suite (λ_k) est infinie puisque V est de dimension infinie). On introduit l'orthogonal de W défini par

$$W^\perp = \{u \in V \text{ tel que } \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in W\}.$$

comme W est stable par $A(AW \subset W)$, on vérifie que $W^\perp$ est aussi stable par A car $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = 0$ si $u \in W^\perp$v $\in W$. On peut donc définir la restriction de A à $W^\perp$

qui est aussi une application linéaire continue auto-adjointe compacte. Par application du Lemme 1, si $W^\perp \neq \{0\}$, cette restriction admet aussi une valeur propre et un vecteur propre $u \in W^\perp$ qui sont aussi valeur et vecteur propre de A. C'est bien sûr une contradiction avec le fait que, par définition, W contient déja tous les vecteurs propres de A et que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Par conséquent, on a nécessairement $W^\perp = \{0\}$, et comme W est fermé on en déduit que $W^\perp = \{0\}^\perp = V$. ■

Théorème 1.2.3 *Soit V et H deux espace de Hilbert réel de dimension infinie. On suppose que $V \subset H$ avec injection compacte et que V dense dans H . Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur V . Alors les vecteurs propres de (1.5) forment une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réel positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base hilbertienne de H $(u_k)_{k\geq 1}$ de vecteurs propres associés, c'est-à-dire que $u_k \in V$, et $a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v\rangle_H \quad \forall v \in V$.*
De plus, $(u_k/\sqrt{\lambda_k})_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour le produit scalaire a(.,.).

Preuve. Pour $f \in H$, nous résolvons le problème variationnel

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = \langle f, v\rangle_H \text{ pour toute fonction } v \in V. \tag{1.6}$$

Il est facile de vérifier les hypothèses du théorème 2.1.2 de Lax-Milgram pour (1.6) qui admet donc une unique solution $u \in V$. On définit une application linéaire $\mathcal{A}$ de Hdans$V$ qui à f associe la solution $u = \mathcal{A}f$. Autrement dit, l'application linéaire $\mathcal{A}$ est définie par

$$\mathcal{A}f \in V \text{ tel que } a(\mathcal{A}f, v) = \langle f, v\rangle_H \quad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{1.7}$$

En prenant $v = \mathcal{A}f$ dans (1.7), on obtient

$$\nu \parallel \mathcal{A}f \parallel_V^2 \leq a(\mathcal{A}f, \mathcal{A}f) = \langle f, \mathcal{A}f\rangle_H \leq \parallel f \parallel_H \parallel \mathcal{A}f \parallel_H \leq C \parallel f \parallel_H \parallel \mathcal{A}f \parallel_V \tag{1.8}$$

car l'opérateur d'injection $\mathcal{I}$ de V dans H est continu. Par conséquent, l'application linéaire $\mathcal{A}$ est continue de H dans V. On définit maintenant une application linéaire $A = \mathcal{I}\mathcal{A}$ de H dans H, qui est bien continue. Comme I est compact, le produit A est aussi compact. Pour montrer que A est auto-adjoint, on prend $v = \mathcal{A}g$ dans (1.7) et on obtient, pour tout $f, g \in H$,

$$\langle f, Ag\rangle_H = \langle f, \mathcal{A}g\rangle_H = a(\mathcal{A}f, \mathcal{A}g) = a(\mathcal{A}g, \mathcal{A}f) = \langle g, \mathcal{A}f\rangle_H = \langle g, Af\rangle_H,$$

à cause de la symétrie de a, ce qui prouve que **A** est auto-adjoint défini positif dans H. On peut donc appliquer théorème 1.2.3 à l'opérateur A qui en vérifie toutes les hypothèses. Il existe une suite décroissante $(\mu_k)_{k\geq 1}$ de H formée de vecteurs propres de A, avec

$$Au_k = \mu_k u_k \text{ pour } k \geq 1.$$

Remarquons que, par cette égalité, les vecteurs propres u_k appartiennent non seulement à H mais aussi à V. Revenons maintenant au problème aux valeurs propres (1.5) qui peut s'ècrire

$$a(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle_H = \lambda a(Au,v) \qquad \forall v \in V,$$

à cause de la définition (1.7),c'est-à-dire $a(u - \lambda Au, v) = 0$, donc

$$u = \lambda Au = \lambda Au.$$

Par conséquent, les valeurs propres $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ du problème variationnel(1.5) sont exactement les inverses des valeurs propres $(\mu_k)_{k\geq 1}$ de A, et leurs vecteurs propres sont les mêmes. On pose

$$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k} \qquad \text{et} \qquad v_k = \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

. Par conséquent, les valeurs propres u_k forment une base hilbertienne de H . On vérifie que

$$a(v_k, v_j) = \frac{a(u_k, u_j)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} = \lambda_k \frac{\langle u_k, u_j\rangle_H}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} = \delta_{kj},$$

et comme l'orthogonal des $(v_k)_{k\geq 1}$ dans V est contenu dans l'orthogonal des $(u_k)_{k\geq 1}$ dans H (qui est réduit au vecteur nul), on en déduit que les l'orthogonal des $(v_k)_{k\geq 1}$ forment une base hilbertienne de V pour le produit scalaire $a(u,v)$. ■

Remarque

Insistons sur le fait que l'opérateur A, défini par (1.7), est l'opérateur de résolution de la formulation variationnelle, c'est-à-dire qu'il est en quelque sorte l'inverse de la forme bilinéaire a. C'est pour cette raison que les valeurs propres λ_k de la formulation variationnelle sont les inverses des valeurs propres μ_k de A. Par exemple, en dimension finie la forme bilinéaire s'écrit $a(u, v) = \kappa u.v$ et on a $A = \kappa^{-1}$. De même, pour le Laplacien on a $A = (-\Delta)^{-1}$ (seul l'inverse du Laplacien est compact, pas le Laplacien lui-même). En fait, c'est le gain de régularité de la solution du Laplacien par rapport au second membre qui est à l'origine de la compacité de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$.

1.2.4 Lemme de Gronwall

si z est une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$z(t) \leq a + b \int_0^t z(s)ds \qquad \forall t \in [0, T],$$

où a,b sont deux constantes positives ou nulles, alors

$$z(t) \leq ae^{bt} \qquad \forall t \in [0, T].$$

Preuve.

Soit $v(t) = a + b \int_0^t z(s)ds$. La fonction v est de classe C^1 et

$$v'(t) = bz(t) \leq bv(t).$$

Ainsi,

$$(v(t)\exp(-bt))' = \exp(-bt)(v'(t) - bv(t)) \leq 0$$

et $v(t)\exp(-bt) =\leq v(0) = a$. Comme $z(t) \leq v(t)$, on a montré que

$$z(t) \leq a\exp(bt)$$

■

Chapitre 2

Analyse théorique sur l'équation d'onde avec amortissement intermittent

La propagation d'une onde dans un milieu disspatif $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à une vitesse unitaire peut être décrite par l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \qquad t \geq 0 \qquad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

où $\rho > 0$ est le cofficient d'amortissement du milieu Ω . L'objectif de ce projet est d'étudier une modification de(2.1) où le terme d'amortissement $\rho \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ n'est pas actif à tout instant de temps . On s'intéresse donc à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \alpha(t)\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \qquad t \geq 0 \qquad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

où $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ est une fonction mesurable qui détermine l'activité du terme d'amortissement à chaque instant de temps .

Plus précisément , le problème auquel on s'intéresse dans ce projet est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \alpha(t)\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x), t \geq 0, \qquad x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0, \qquad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert borné à bord régulier, $\rho > 0$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ est une fonction mesurable.

Dans un premier moment, on s'intéressera à l'étude théorique de ceproblème dans le cas $\alpha(t) \equiv 1$, afin de montrer que le problème est bien posé et que toute solution converge exponentiellement vers zéro dans la norme de l'éspace d'énergie. On se restreint ici au cas $\alpha(t) \equiv 1$,i.e., au cas où le terme d'amortissement $\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ est toujours actif .On se propose de montrer dans ce cas que (2.3) est bien posé et que toute solution converge exponentiellement , avec un taux de convergence uniforme, vers la solution identiquement nulle.

2.1 Formulation variationnelle

Lemme 2.1.1 *La formulation variationnelle pour (2.3) dans l'éspace de Hilbert* $H = L^2(\Omega)$ *sous la forme*

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_H + \rho\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + a(u(t), v) = 0 \qquad \forall v \in V. \tag{2.4}$$

L'éspace de Hilbert $V = H_0^1$

Preuve. La formulation variationnelle dans l'espace de Hilbert $H = L^2$

On se restreint ici au cas $\alpha(t) \equiv 1$ i,e., au cas où le teme d'amortissement $\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ est toujours actif .

Nous muliplions donc l'équation des ondes (2.3) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend pas du temps t. A cause de les conditions aux limites nous demandons à ce que v s'annule sur le bord de ouvert Ω. Un calcul formel conduit à

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x).v(x)dx = \int_\Omega \Delta u(t,x).v(x)dx - \int_\Omega \rho\frac{\partial u}{\partial t}(t,x).v(x)dx$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x).v(x)dx+\int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(x)dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(t,x).v(x)dx+\rho\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x).v(x)dx=0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x).v(x)dx+\int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(x)dx+\rho\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x).v(x)dx=0$$

Il est claire que l'espace " naturel" pour la fonction test v est H_0^1. On introduit alors le produit scalaire de L^2 et la forme bilinéaire $a(u,v)$ définis par

$$\langle u,v\rangle_{L^2}(\Omega)=\int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad et$$

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(t) \text{ tell que } u\in C([0,T_f];V)\cap C^1([0,T_f];H) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t),v\rangle_{L^2}+2b\dfrac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_{L^2}+a(u(t),v)=0 \end{cases}$$

définie pour $u,v\in V=H_0^1$

parceque il ya la placien

puisque $u=0$ sur $\partial\Omega$ ■

Théorème 2.1.2 *Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que* $V\subset H$ *avec injection compact et V dense dans H.Soit a(u,v) une forme bilinéaire symétrique continue et courcive dans V. Soint un temps final* $T_f>0$ *, une constante* $b\in\mathbb{R}$ *et une donnée initiale* $(u_0,u_1)\in V\times H$*.Alors le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t),v\rangle_H+2b\dfrac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle_H+a(u(t),v)=0 \quad \forall v\in V \\ u(0)=u_0, \dfrac{d}{dt}(0)=u_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

a une unique solution $u\in C([0,T_f];V)\cap C^1([0,T_f];H)$ *.De plus, il existe une constante* $c>0$*(ne dépendant que de b,* Ω *et* T_f *)telle que*

$$\| u \|_{C([0,T_f];V)}+\| u \|_{C^1([0,T_f];H)}\leq (\| u_0 \|_V+\| u_1 \|_H) \tag{2.6}$$

Preuve.

2.1.1 L'unicité

Lemme 2.1.3 *Soit V et H deux espaces de Hilbert, il exicte une base hilbertienne $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de H et d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels positifs tendant vers l'infini lors que $k \longrightarrow \infty$, pour tout $k \geq 1$ on a $\phi_k \in V$ et*

$$a(\phi_k, v) = \lambda_k \langle \phi_k, v \rangle_H, \qquad \forall v \in V.$$

Lemme 2.1.4 *Soit $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ est une solution de (2.5), telque : $u(t) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \alpha(t)\phi_k$ avec $\alpha_k(t) = \langle u(t), \phi_k \rangle_H$. α_k satisfaite l'équation différetielle*

Supposons que $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ est une solution (2.5), qui s'écrit dans la base $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de H comme $u(t) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \alpha(t)\phi_k$ avec $\alpha_k(t) = \langle u(t), \phi_k \rangle_H$. En prenant $v = \phi_k$, et on notant , $\alpha_k^0 = \langle u_0, \phi_k \rangle_H$ et $\alpha_k^1 = \langle u_1, \phi_k \rangle_H$ dans (2.5) et utilisant que $a(u(t), \phi_k) = \lambda_k \langle u(t), \phi_k \rangle_H$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_k''(t) + 2b\alpha_k'(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = 0, \\ \alpha_k(0) = \langle u_0, \phi_k \rangle_H = \alpha_k^0, \quad \alpha_k'(0) = \langle u_1, \phi_k \rangle_H = \alpha_k^1. \end{cases} \tag{I}$$

L'équation caractéristique est donc $\lambda^2 + 2b\lambda + \lambda_k = 0$, dont les racines sont $\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda_k}$.

Dans le cas $\lambda_k < b^2$, ces racines sont réelles distinctes. En notant $\mu_k = \sqrt{b^2 - \lambda_k}$, la solution de (I)s'écrit

$$\alpha_k(t) = -\frac{(b-\mu_k)\alpha_k^0 + \alpha_k^1}{2\mu_k} e^{-(b+\mu_k)^t} + \frac{(b+\mu_k)\alpha_k^0 + \alpha_k^1}{2\mu_k} e^{-(b-\mu_k)^t}, \qquad \lambda_k < b^2. \tag{IIa}$$

Dans le cas $\lambda_k = b^2$, les racines sont réelles égales, et la solution de (I) s'écrit

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-bt} + (\alpha_k^1 + b\alpha_k^0) t e^{-bt}, \qquad \lambda_k = b^2. \tag{IIb}$$

Dans le cas $\lambda_k > b^2$, les racines sont complexes non-réelles. En notant $\omega = \sqrt{b^2 - \lambda_k}$, la solution de (I)s'écrit

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0) t e^{-bt} \cos(\omega_k t) + \frac{\alpha_k^1 + b\alpha_k^0}{\omega_k} \sin(\omega_k t), \qquad \lambda_k > b^2. \tag{IIc}$$

On a donc obtenu que, si $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ est une solution (2.5), alors u s'écrit sous la forme $u(t) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \alpha(t)\phi_k$ avec α_k donnée par (II) En particulier, ceci donne l'unicité de la solution de (2.5) dans $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$.

2.1.2 L'existence

Pour montrer la partie existence, on prend $(\phi_k)_{k\geq 1}$ et $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ comme dans le lemme 2.1.3 et on définit α_k par(II). Il est clair par ces formules explicites que $\alpha_k \in C^\infty([0,T_f];\mathbb{R})$, et donc, puisque $\phi_k \in V$, la fonction $\alpha_k(.)\phi_k$ appartient bien à $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$.

2.1.3 Stabilité

Lemme 2.1.5 *Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$| \alpha_k'(t) |^2 + \lambda_k | \alpha_k(t) |^2 = | \alpha_k^1 |^2 + \lambda_k | \alpha_k^0 |^2 - 4b \int_0^t | \alpha_k'(s) |^2 \, ds, \tag{2.7}$$

où $\alpha_k^0 = \alpha_k(0)$ et $\alpha_k^1 = \alpha_k'(0)$.

Preuve. Multiplions (I) par α_k' et intégrons en temps de 0 à t.On obtient

$$\int_0^t \alpha_k''(s)\alpha_k'(s)ds + 2b \int_0^t | \alpha_k'(s) |^2 \, ds + \lambda_k \int_0^t \alpha_k'(s)\alpha_k(s)ds = 0,$$

d'où

$$\frac{| \alpha_k'(t) |^2 - | \alpha_k^1 |^2}{2} + 2b \int_0^t | \alpha_k'(s) |^2 \, ds + \lambda_k \frac{| \alpha_k(t) |^2 - | \alpha_k^0 |^2}{2} = 0$$

et ainsi

$$| \alpha_k'(t) |^2 + \lambda_k | \alpha_k(t) |^2 = | \alpha_k^1 |^2 + \lambda_k | \alpha_k^0 |^2 - 4b \int_0^t | \alpha_k'(s) |^2 \, ds.$$

■

Lemme 2.1.6 *Il existe une constant $C > 0$, ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, telle que, pour tout $k \geq 1$, on a*

$$| \alpha_k'(t) | \leq Ce^{2|b|t}(| \alpha_k^1 | + \max\{| b |\}, \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 |), \tag{2.8}$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k(t) | \leq Ce^{2|b|t}(| \alpha_k^1 |) + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 |)$$

Preuve. Puisque $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de réels positifs avec $\lambda_n \longrightarrow +\infty$, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on peut définir

$$\lambda_\star = \min_{\substack{n\geq 1 \\ \lambda_n<b^2}} (b^2 - \lambda_n) > 0, \qquad \lambda^\star = \min_{\substack{n\geq 1 \\ \lambda_n>b^2}} (\lambda_n - b^2) > 0.$$

Considérons d'abord le cas $\lambda_n < b^2$. On obtient à partir de (IIa) que

$$\alpha_k(t) = \left[\frac{b+\mu_k}{2\mu_k} e^{-(b-\mu_k)^t} - \frac{b-\mu_k}{2\mu_k} e^{-(b+\mu_k)^t}\right] \alpha_k^0 + \frac{1}{2\mu_k}\left(e^{-(b-\mu_k)^t} - e^{-(b+\mu_k)^t}\right)\alpha_k^1,$$

$$\alpha_k'(t) = \frac{b^2-\mu_k^2}{2\mu_k}\left(e^{-(b+\mu_k)^t} - e^{-(b-\mu_k)^t}\right)\alpha_k^0 + \left[\frac{b+\mu_k}{2\mu_k} e^{-(b+\mu_k)^t} - \frac{b-\mu_k}{2\mu_k} e^{-(b-\mu_k)^t}\right]\alpha_k^1. \quad \text{(IV)}$$

Remarquons d'abord que $-(b+\mu_k) < -(b-\mu_k) \leq\mid b \mid + \mid \mu_k \mid\leq 2 \mid b \mid$, puisque $0 < \mu_k <\mid b \mid$.

De plus, on a

$$\frac{b^2-\mu_k^2}{2\mu_k} = \frac{\lambda_k}{2\sqrt{b^2-\lambda_k}} \leq \frac{\mid b \mid \sqrt{\lambda_k}}{2\sqrt{\lambda_\star}},$$

$$\frac{\mid b \mid -\mu_k}{2\mu_k} = \frac{1}{2} + \frac{\mid b \mid}{2\sqrt{b^2-\lambda_k}} \leq \frac{1}{2} + \frac{\mid b \mid}{2\sqrt{\lambda_\star}}$$

et

$$\frac{\sqrt{\lambda_k}}{2\mu_k} \leq \frac{\mid b \mid}{2\sqrt{\lambda_\star}}$$

d' où on obtient les estimées

$$\mid \alpha_k'(t) \mid\leq \left(\frac{\mid b \mid}{2\sqrt{\lambda_\star}} + 1\right) e^{2|b|t}\left(\mid \alpha_k^1 \mid + \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid\right),$$

$$\sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k(t) \mid\leq \left(\frac{\mid b \mid}{2\sqrt{\lambda_\star}} + 1\right) e^{2|b|t}\left[\mid \alpha_k^1 \mid + \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid\right],$$

qui montrent ainsi (2.8).

Passons maintenant au cas $\lambda_k = b^2$. Dans ce cas,

$$\alpha_k(t) = (1+bt)e^{-bt}\alpha_k^0 + te^{-bt}\alpha_k^1,$$

$$\alpha_k'(t) = -b^2te^{-bt}\alpha_k^0 + (1-bt)e^{-bt}\alpha_k^1, \quad \text{(V)}$$

et on peut utiliser le fait que $t \leq \dfrac{1}{\mid b \mid e} e^{|b|t}$ pour estimer

$$\mid \alpha_k'(t) \mid \leq e^{-1} e^{2|b|t} \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid + (1 + e^{-1}) e^{2|b|t} \mid \alpha_k^1 \mid,$$

$$\sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k(t) \mid \leq (1 + e^{-1}) e^{2|b|t} \sqrt{\lambda_k} \alpha_k^0 + e^{-1} e^{2|b|t} \mid \alpha_k^1 \mid$$

ce qui donne ainsi (2.8) .

Finalement, si $\lambda_k > b^2$, on a

$$\alpha_k(t) = \left[\cos(\omega_k t) + \frac{b}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right] e^{-bt} \alpha_k^0 + \frac{1}{\omega_k} e^{-bt} \sin(\omega_k t) \alpha_k^1$$

,

$$\alpha_k'(t) = -\left(\omega_k + \frac{b^2}{\omega_k} \right) \sin(\omega_k t) e^{-bt} \alpha_k^0 + \left[\cos(\omega_k t) - \frac{b}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right] e^{-bt} \alpha_k^1. \qquad \text{(VI)}$$

On peut estimer

$$1 + \frac{\mid b \mid}{\omega_k} = 1 + \frac{\mid b \mid}{\sqrt{\lambda_k - b^2}} \leq 1 + \frac{\mid b \mid}{\sqrt{\lambda^\star}},$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\omega_k} = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k - b^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda_k - b^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda^\star}},$$

et puisque

$$\omega_k + \frac{b^2}{\omega_k} = \frac{\omega_k^2 + b^2}{\omega_k} = \frac{\lambda_k}{\omega_k} = \sqrt{\lambda_k} \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\omega_k},$$

on obtient que

$$\mid \alpha_k'(t) \mid \leq \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda^\star}} + e^{2|b|t} \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid + \left(1 + \frac{\mid b \mid}{\sqrt{\lambda^\star}} \right) e^{2|b|t} \mid \alpha_k^1 \mid,$$

$$\sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k(t) \mid \leq \left(1 + \frac{\mid b \mid}{\sqrt{\lambda_\star}} \right) e^{2|b|t} \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid + \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda_\star} e^{2|b|t}} \mid \alpha_k^1 \mid,$$

ce qui conclut la preuve de (2.8) . ∎

Lemme 2.1.7 *Il existe $C' > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$*

$$\mid \alpha_k'(t) \mid^2 + \lambda_k \mid \alpha_k(t) \mid^2 \leq C' e^{4|b|T_f} (\mid \alpha_k^1 \mid^2 + \max\{b^2, \lambda_k\} \mid \alpha_k^0 \mid^2), \qquad (2.9)$$

Preuve. À l'aide de (2.8), on peut estimer

$$4 \mid b \mid \int_0^t \mid \alpha_k'(t) \mid^2 ds \leq 4C^2 \mid b \mid \left(\mid \alpha_k^1 \mid + \sqrt{\lambda_k} \mid \alpha_k^0 \mid \right)^2 \int_0^t e^{4|b|s} ds$$

$$\leq 8C^2 \mid b \mid \left(\mid \alpha_k^1 \mid^2 + \lambda_k \mid \alpha_k^0 \mid^2 \right) \frac{e^{4|b|s} - 1}{4 \mid b \mid}$$

$$\leq 2C^2 e^{4|b|T_f} \left(\mid \alpha_k^1 \mid^2 + \lambda_k \mid \alpha_k^0 \mid^2 \right).$$

Il suffit donc de combiner cette estimée avec (2.7) pour obtenir (2.9) avec $C' = 1 + 2C^2$. Remarque : (2.9) peut aussi être obtenu directement à partir de (2.8) avec $C' = 4C^2$. pour une certaine constante $C' > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ ■
Pour $k \in \mathbb{N}^*$,définissions par (II) et $u(t) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \alpha(t)\phi_k$. On veut montrer que u est bien définie et appartient à $u \in C([0, T_f]; V) \cap C^1([0, T_f]; H)$,c'est-à-dire que cette série converge dans cet espace ; remarquons que ceci a bien un sens puisque chaque terme de cette série apparient bien à $u \in C([0, T_f]; V) \cap C^1([0, T_f]; H)$, comme on l'a vu dans la partie existence . Montrons que la suite des sommes partielles de cette série est une suite de Cauchy. On fixe dans V le produit scalaire $a(.,.)$. Rappelons que, par le Théorème 1.2.3 $(\phi_k)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de H et $\left(\frac{(\phi_k)_{k\geq 1}}{\sqrt{\lambda_k}} \right) k \geq 1$ est une base hilbertienne de V. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n < m$, on a

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \alpha_k \phi_k \right\|^2_{C([0,T_f];V)\cap C^1([0,T_f];H)} \leq \sum_{k=n}^{m} \left[\sup_{t\in[0,T_f]} \mid \alpha_k(t) \mid^2 \| \phi_k \|_V^2 + \sup_{t\in[0,T_f]} \mid \alpha_k'(t) \mid^2 \| \phi_k \|_H^2 \right]$$

$$= \sum_{k=n}^{m} \sup_{t\in[0,T_f]} \left[\lambda_k \mid \alpha_k(t) \mid^2 + \mid \alpha_k'(t) \mid^2 \right]$$

$$\leq C' e^{4|b|T_f} \sum_{k=n}^{m} \left[\lambda_k \mid \alpha_k^0 \mid^2 + \mid \alpha_k^1 \mid^2 \right]. \tag{VII}$$

Or

$$\| u_0 \|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| a\left(u_0, \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \right|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mid \langle u_0, \phi_k \rangle_H \mid^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mid \alpha_k^0 \mid^2,$$

$$\| u_1 \|_H^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mid \langle u_1, \phi_k \rangle_H \mid^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mid \alpha_k^1 \mid^2,$$

ce qui montre la convergence des deux séries $\Sigma_{k=1}^{+\infty} \mid \alpha_k^0 \mid^2$ et $\Sigma_{k=1}^{+\infty} \mid \alpha_k^1 \mid^2$, et donc leurs suites de sommes partielles sont de Cauchy. Par (VII), la suite des sommes partielles de la série$\Sigma_{k=1}^{+\infty}\alpha(t)\phi_k$ est donc de Cauchy dans $C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ ce qui montre que u est bien définie.

Il est clair par construction que u est solution de (2.5). En effet,$u(0) = \Sigma_{k=1}^{+\infty}\alpha_k^0\phi_k = u_0$, $\frac{du}{dt}(0) = \Sigma_{k=1}^{+\infty}\alpha_k^1\phi_k = u_1$ et , Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle u(t),\phi_k\rangle_H + 2b\frac{d}{dt}\langle u(t),\phi_k\rangle_H + a(u(t),\phi_k) = \alpha_k''(t) + 2b\alpha_k'(t) + \lambda_k\alpha_k(t) = 0,$$

de sorte que (2.5) est satisfait pour tout $v \in V$ puisque $\left(\frac{(\phi_k)}{\sqrt{\lambda_k}}\right)_{k\geq 1}$ est une base hilbertienne de cet espace. Donc u est bien une solution de (2.5) dans $C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$. L'estimation d'énergie (2.6) à partir de (2.9) . En faisant la somme sur k dans (2.9), on obtient que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mid \alpha_k'(t) \mid^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mid \alpha_k(t) \mid^2 \leq C'e^{4|b|T_f}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mid \alpha_k^1 \mid^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \mid \alpha_k^0 \mid^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 \leq C'e^{4|b|T_f}\left(\|u_1\|_H^2 + \|u_0\|_H^2\right).$$

En prenant le $\sup t \in [0,T_f]$, on arrive à (2.6).

Lemme 2.1.8 *Si $b > 0$, on peut remplacer $e^{2|b|t}$ dans (2.8) par $e^{-\eta}$ pour une certaine constante $\gamma > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$. En déduire que , dans ce cas , on a,pour tout $t \in [0,T_f]$,*

$$\| u(t) \|_V^2 + \|\frac{du}{dt}(t)\|_H^2 \leq Ce^{-\gamma t}(\| u_0 \|_V^2 + \| u_1 \|_H^2), \tag{2.10}$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$.

Preuve.

Reprenons les estimées de le lemme 2.1.8 achant maintenant que $b > 0$. Soit

$$\underline{\lambda} = \min_{k\in\mathbb{N}^*} \lambda_k.$$

Commençons par le cas $\lambda_k < b^2$. Puisque $\mu_k = \sqrt{b^2 - \lambda_k}$, on a

$$0 < b - \sqrt{b^2 - \underline{\lambda}} \leq b - \mu_k < b < b + \mu_k,$$

et ainsi, en estimant (IV) comme dans le lemme 2.1.8, on obtient

$$| \alpha_k'(t) | \leq \left(\frac{| b |}{\sqrt{\lambda_\star}} + 1 \right) e^{-\gamma_0 t} \left(| \alpha_k^1 | + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | \right),$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k'(t) | \leq \left(\frac{| b |}{\sqrt{\lambda_\star}} + 1 \right) e^{-\gamma_0 t} \left(| \alpha_k^1 | + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | \right),$$

avec $\gamma_0 = b - \sqrt{b^2 - \underline{\lambda}} > 0$. Considérons maintenant cas $\lambda_k = b^2$. On utilise maintenant le fait que $te^{-bt} \leq \frac{2}{be} e^{-\frac{b}{2}t}$ pour estimer (V) comme

$$| \alpha_k'(t) | \leq 2e^{-1} e^{-\frac{b}{2}t} \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | + (1 + 2e^{-1}) e^{-\frac{b}{2}t} | \alpha_k^1 |,$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k(t) | \leq (1 + 2e^{-1}) e^{-\frac{b}{2}t} \sqrt{\lambda_k} \alpha_k^0 + 2e^{-1} e^{-\frac{b}{2}t} | \alpha_k^1 |,$$

Dans le cas $\lambda_k > b^2$, l'estimée de(VI) faite en le lemme 2.1.8 peut être facilement raffinée à

$$| \alpha_k'(t) | \leq \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda_\star}} e^{-bt} \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | + \left(1 + \frac{| b |}{\sqrt{\lambda_\star}} \right) e^{-bt} | \alpha_k^1 |,$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k(t) | \leq \left(1 + \frac{| b |}{\sqrt{\lambda_\star}} \right) e^{-bt} \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | + \sqrt{1 + \frac{b^2}{\sqrt{\lambda_\star}}} e^{-bt} | \alpha_k^1 | .$$

Dans tous les cas, on a donc

$$| \alpha_k'(t) | \leq Ce^{-\gamma t} \left(| \alpha_k^1 | + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | \right),$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k(t) | \leq Ce^{-\gamma t} \left(| \alpha_k^1 | + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 | \right),$$

avec C une constante ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ et $\gamma = \min\{\gamma_0, \frac{b}{2}\} > 0$. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k | \alpha_k(t) |^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} | \alpha_k'(t) |^2 \\ &\leq 4C^2 e^{-2\gamma t} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(| \alpha_k^1 |^2 + \lambda_k | \alpha_k^0 |^2 \right) \\ &= 4C^2 e^{-2\gamma t} \left(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 \right). \end{aligned}$$

■ ■

Lemme 2.1.9 *Le problème (2.4) est bien posé.*

Preuve. Il suffit de remarquer que les hypothèses du Théorème (2.1.2) sont bien satisfaites par la formulation (2.4). Dans le cadre de (2.4), on a $V = H_0^1(\Omega), H = L^2(\Omega)$, et on a donc $V \subset H$ avec injection compacte par le Théorème de Rellich , et V est bien dense dans H puisque $C_c^\infty(\Omega) \subset V$. La forme a est clairement bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. Théorème 2.1.2 garantit ainsi que (2.4) est bien posée dans l'espace $C([0, T_f]; V) \cap C^1([0, T_f]; H)$. ■

Lemme 2.1.10 *Il existe* C, $\gamma > 0$ *, dépendantes uniquement de* $\rho > 0$ *et* Ω*, telles que , pour tout donnée initiale* $(u_0, u_1) \in V \times H$*, la solution correspondante* u *de (2.4) satisfait*

$$\| u(t) \|_V^2 + \| \frac{du}{dt}(t) \|_H^2 \leq Ce^{-\gamma t}(\| u_0 \|_V^2 + \| u_1 \|_H^2),$$

Preuve. Puisque le problème (2.4) satisfait les hypothèses du Théorème (2.1.2) et que $\rho > 0$, on peut appliquer le résultat de le lemme 2.1.8 pour obtenir l'estimée voulue directement à partir de (2.10). ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La travail abordé dans ce mémoire est l'analyse théorique sur l'équation d'onde avec amortissement intermittent,
En ulilisant un certain nombre de référence, en particuler la référence du Allaire, pour montrer le problème de ce projet est bien posé et stable .
En fin de compte, le travail continue dans ce domaine, comme la simulation numérique à l'aide du logiciel FreeFem ++ .

Bibliographie

[1] G. Allaire , Analyse numérique et optimisation

[2] C.Bardos , G.Lebeau , and J.Rauch.Sharp sufficient conditions for the observation ,control, and stabilization of waves from the boundary .SIAM J . Control Optim .,30(5) :1024-1065,1992.

[3] Y.Chitour,G.Mazanti,and M.Sigalotti.Stabilization of persistently excited linear systems .In J.Daafouz ,S.Tarbouriech, and M.Sigalotti, editors,Hybrid Systems with Constraints, chapter 4.Wiley-ISTE,London , UK ,2013.

[4] F.Hante ,M.Sigalotti, and M . Tuesnak.On condition for asymptotic stability of dissipative infinite-dimensional systems with intermittent damping . Journal of Differential Equations,252(10) : 5569-5593,2012.

[5] M.Lovera and A.Astolfi.Global spacecraft attitude control using magnetic actuators.In Advances in dynamics and control, volume 2 of Nonlinear Syst . Aviat . Aerosp .Aeronaut .Astronaut.,pages 1-13.Chapman Hall/CRC,Boca Raton,FL,2004.

Résumé

Le travail abordé dans ce mémoire porte on s'intéresse a la propagation d'une onde dans un milieu disspatif $\Omega \subset R^N$ à une vitesse unitaire .
L'objectif de ce projet est d'étudier la stabilité de l'équation d'onde avec amortissement intermittent .

Mots clés :

espace de Hilbert , base hilbertienne , estimation d'énergie .

الملخص:

العمل الذي تمت مناقشته في هذه المذكرة هو انتشار موجة في وسط مفكك $\Omega \subset R^N$

في سرعة الوحدة .
الهدف من هذا المشروع هو دراسة معادلة موجة الإستقرار **مع** التخميد المتقطع .

كلمات مفتاحيه :

فضاء هيلبار , اساس هلبرتيان , تقدير الطاقة

Abstract :

The work dealt with in this thesis focuses on the propagation of a wave in a disspicative medium $\Omega \subset R^N$at a unit speed.
The objective of this project is to study the stability wave equation with intermittent damping .

Key words:

hilbert space , hilbertian base , energy estimate