# Stabilité de l'équation d'onde avec amortissement intermittent

**MESSAOUDA LEGOUGUI**

**Merabet .I (encadreur)**

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla , Algerie
legougui messaouda@gmail.com

## Résumé

*Dans cette présentation on s'intéresse a la propagation d'une onde dans un milieu disspatif $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à une vitesse unitaire . Le modèle peut a redcrit par l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \quad t \geq 0 \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

*où $\rho > 0$ est le cofficient d'amortissement du milieu $\Omega$. L'objectif de ce projet est d'étudier une modification de (1) où le terme d'amortissement $\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ n'est pas actif à tout instant de temps .*

## 1. Introduction

On s'intéresse donc à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \alpha(t)\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \quad t \geq 0 x \in \Omega, \tag{1.1}$$

où $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ est une fonction mesurable qui détermine l'activité du terme d'amortissement à chaque instant de temps . Plus précisément , le problème auquel on s'intéresse dans ce projet est :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x) - \alpha(t)\rho \frac{\partial u}{\partial t}(t,x), t \geq 0, & x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0, \ t \geq 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble ouvert borné à bord régulier, $\rho > 0$ et $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ est une fonction mesurable .

**Remarque :** $2b = \rho \quad , \quad H = L^2$

## 2. .La formulation variationnelle

La formulation variationnelle correspondant à (1.2) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(t) \text{ tell que } u \in (C^0[0,T], H_0^1(\Omega)) \\ \frac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_{L^2} + 2b\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{L^2} + a(u(t), v) = 0 \end{cases}$$

Avec

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad et$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

## 3. Existence et unicité

**Théorème 3.1** *soit V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compact et V dense dans H. Soit a(u,v) une forme bilinéaire symétrique continue et courcive dans V. Soint un temps final $T_f > 0$ , une constante $b \in \mathbb{R}$ et une donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$.Alors le problème*

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_H + 2b\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_H + a(u(t), v) = 0 \ \ \forall v \in V \\ u(0) = u_0, \frac{d}{dt}((0) = u_1 \end{cases} \tag{3.1}$$

*a une unique solution $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ .De plus, il existe une constante $c > 0$(ne dépendant que de b, $\Omega$ et $T_f$ )telle que*

$$\| u \|_{C([0,T_f];V)} + \| u \|_{C^1([0,T_f];H)} \leq (\| u_0 \|_V + \| u_1 \|_H) \tag{3.2}$$

## 4. La démarche de démonstration

➤ Premièrement on justifier l'existence d'une base hilbertienne $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de H et d'une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels positifs tendant vers l'infini lors que $k \longrightarrow \infty$telles que, pour tout $k \geq 1$ on a $(\phi_k) \in V$ et

$$a(\phi_k, v) = \lambda_k \langle \phi_k, v\rangle_H, \qquad \forall v \in V.$$

➤ La partie unicite du Théorème 3.1 On suppose qu'il exicte une solution $u \in C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$ de (3.1) et on l'écrit dans la base $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de H comme $u(t) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \alpha(t)\phi_k$ avec $\alpha_k(t) = \langle u(t), \phi_k\rangle_H$. l'équation différetielle satisfaits par $\alpha_k$, en précisant bien ses conditions initiales, et la réoudre . On fera bien la différence entre les cas $\lambda_k < b^2, \lambda_k = b^2$ et $\lambda_k > b^2$. Conclure l'unicité de la solution (3.1)en donnant une formule explicite pour celle-ci.àç

➤ La partie existence . Les fonction $\alpha_k(t)\phi_k$ trouvées dans b appartiennent bien à $C([0,T_f];V) \cap C^1([0,T_f];H)$

➤ Pour tout $k \geq 1$,on a

$$| \alpha_k'(t) |^2 + \lambda_k | \alpha_k(t) |^2 = | \alpha_k^1 |^2 + \lambda_k | \alpha_k^0 |^2 - 4b \int_0^t | \alpha_k'(s) |^2 ds, \tag{4.1}$$

où $\alpha_k^0 = \alpha_k(0)$ et $\alpha_k^1 = \alpha_k'(0)$. (suggestion : Multipier l'équation satisfaite par$\alpha_k$ par $\alpha_k'$ et intégrer temps).

➤ En utilisant la formule explicite de $\alpha_k$ obtenue en b , il existe une constant $C > 0$ , ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$, telle que ,pour tout $k \geq 1$,on a

$$| \alpha_k'(t) | \leq Ce^{2|b|t}(| \alpha_k^1 | + \max\{| b |\}, \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 |), \tag{4.2}$$

$$\sqrt{\lambda_k} | \alpha_k(t) | \leq Ce^{2|b|t}(| \alpha_k^1 |) + \sqrt{\lambda_k} | \alpha_k^0 |) \tag{4.3}$$

On pourra traiter les cas $\lambda_k < b^2, \lambda_k = b^2$ et $\lambda_k > b^2$ séparément .

➤ La Combinition (4.1) et (4.2) pour obtenir que

$$| \alpha_k'(t) |^2 + \lambda_k | \alpha_k(t) |^2 \leq C' e^{4|b|T_f}(| \alpha_k^1 |^2 + \max\{b^2, \lambda_k\} | \alpha_k^0 |^2), \tag{4.4}$$

pour une certaine constante $C' > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$.

➤ L'existence d'une solution de (3.1) . Pour cela, on pourra procéder par une série formelle.

➤ L'estimation d'énergie (3.2) à partir de (4.4) .

➤ si $b > 0$ , on peut remplacer $e^{2|b|t}$ dans (4.2) par $e^{-\eta}$ pour une certaine constante $\gamma > 0$ ne dépendant que de b et de la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$. Dans ce cas , on a,pour tout $t \in [0,T_f]$,

$$\| u(t) \|_V^2 + \| \frac{du}{dt}(t) \|_H^2 \leq Ce^{-\gamma t}(\| u_0 \|_V^2 + \| u_1 \|_H^2), \tag{4.5}$$

## 5. Application au notre cas

$$V = H_0^1$$
$$H = L^2$$

➤$V$ injection compact de $H$ dáprès le Théorème de Rellich

➤$V$dense dans $H$ dáprès le Théorème de Riez

➤$-\Delta : H^2 \longrightarrow L^2$ Opurateur linéaire continue compacte dfinie possitif auto-adjoint

## Références

[1] C.Bardos , G.Lebeau , and J.Rauch.Sharp sufficient conditions for the observation ,control, and stabilization of waves from the boundary .SIAM J . Control Optim .,30(5) :1024-1065,1992.

[2] Y.Chitour,G.Mazanti,and M.Sigalotti.Stabilization of persistently excited linear systems .In J.Daafouz ,S.Tarbouriech, and M.Sigalotti, editors,Hybrid Systems with Constraints, chapter 4.Wiley-ISTE,London , UK ,2013.

[3] F.Hante ,M.Sigalotti, and M . Tuesnak.On condition for asymptotic stability of dissipative infinite-dimensional systems with intermittent damping . Journal of Differential Equations,252(10) : 5569-5593,2012.