

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE KASDI MERBAH DE OUARGLA

**Faculté des Sciences de la matière
et Mathématiques**

DEPARTEMENT DE :MATHÉMATIQUES



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en Mathématiques**

Spécialité : Modélisation et Analyse Numérique

Présenté Par :

Medjouri kaouther

THÈME

Systemes Quadratiques discrets :Analyse et Contrôle

Soutenu le 02/06/2018,devant le jury composé de :

Mr	A. B. Benchik	M A	Université de Kasdi Merbah , Ouargla	Président.
Mr	A. Hocine	M A	Université de Kasdi Merbah , Ouargla	Examineur
Mr	B. Talab	M C B	Université de Kasdi Merbah , Ouargla	Examineur
Mr	M.Mammeri	M C B	Université de Kasdi Merbah , Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à rendre grâce à "Dieu" qui lui a été créé grâce à ce travail :

En premier lieu, je remercie Monsieur M.Mammeri, qui a dirigé cette mémoire. Grâce à ces incessants conseils et son information et inaltérable motivation cette formation par et pour la recherche a été des plus passionnantes.

Mes remerciements vont également à Monsieur le professeur : A. B. Benchik, d'avoir accepté d'être président du jury de cette mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur le professeur : A. Hocine et Monsieur le professeur : B. Talab pour leur participation au jury.

Je voudrais remercier tous les professeurs des mathématiques à l'université de Ouargla.

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Un grand merci aux toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail.

Pour finir c'est un grand merci à mes parents et toutes mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques.

Table des matières

Introduction	6
1 Généralités sur les Systèmes dynamiques	8
1.1 Systèmes continu dans le temps	8
1.1.1 Systèmes autonome et non autonome	8
1.1.2 Flot	9
1.1.3 Trajectoire (ou orbite)	9
1.1.4 L'espace des phases	9
1.1.5 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatives	10
1.1.6 Points critiques (ou point fixe)	10
1.1.7 Orbites périodiques	11
1.2 Systèmes discret dans le temps	11
1.2.1 Définition et représentation	11
1.2.2 Orbites négatives et orbites positives	12
1.3 Sensibilité aux conditions initiales	12
1.4 Bifurcation et attracteurs chaotiques	13
1.4.1 Bifurcation	14
1.4.2 Différents types de bifurcations régulières	14
1.4.3 Diagramme de bifurcation	15
1.4.4 Attracteurs	15
1.4.5 Attracteurs chaotiques :	17

1.5	Exposant de L'yapunov	18
2	Critères algébrique attestant de la stabilité	21
2.1	Stabilité asymptotique	22
2.2	Fonction de transfert [3]	22
2.3	Critères de stabilité	24
2.3.1	Critère algébrique de Jury	24
2.3.2	Critère algébrique Routh-Hurwitz	27
3	Critère du jury pour contrôler le chaos	30
3.1	Systèmes en temps discret en 2-D	31
3.1.1	Points fixes et leurs stabilités	31
3.2	Systèmes en temps discret en 3-D	35
3.2.1	Points fixes et leurs stabilités	35
3.3	Systèmes en temps discret en 4-D	39
3.3.1	Points fixes et leurs stabilité	39

page vide

Introduction générale

«*Le monde est un chaos , et son désordre excède tout ce qu'on y voudrait apporter deremède.*»Pierre Corneille.

Un système dynamique discret, est justement écrit sous forme générale par : $X_{n+1} = f(X_n)$ où f est une application régulière engendrée par l'itération d'un système ou d'un difféomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^2 dans lui même : Par exemple dans les sciences de vie, deux animaux mâle et femelle d'un type de "lapin" sont mis dans un en - droit lapinière chaque mois qui passe en voit que leur nombre croît et la population (les lapins) est multipliée par un certain paramètre λ , le paramètre λ définissant les conditions de vie de cette population. La loi de croissance de cette population s'écrit sous la forme : $X_{n+1} = \lambda X_n$ où l'indice n indique le temps (numéro d'ordre de mois), le temps est discret sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières ($n \in \mathbb{Z}$) : Le premier état est $X_1 = \lambda X_0$; où X_0 désigne la population initiale ou la condition initiale de l'état de la population, le second état qui suit immédiatement le premier est $X_2 = \lambda X_1 = \lambda^2 X_0$; et ainsi de suite de telle sorte que la $n - ième$ état est donné par : $X_n = \lambda^n X_0$. On a donc une croissance exponentielle. Imaginons le nombre de cette population (les lapins) après un an ou deux ans. En mathématiques, un système quadratique en 2-D est un polynôme de degré deux avec un nombre quelconque de variables. Par exemple, le carré de la distance comprise entre deux points dans un espace euclidien en 3-D, donne une système quadratique de six variables qui sont les trois coordonnées des deux points.

Dans cette mémoire nous présentons le critère qui détermine rigoureusement les domaines des paramètres dans lesquels les points fixes d'un système dynamique discret soient asymptotiquement stables. En règle générale, le chaos peut apparaitre dans les systèmes dynamiques s'il y a au moins un point fixe qui n'est pas asymptotiquement stable, c'est-à-dire qu'il doit être un point fixe selle ou un point fixe instable. D'autre part les points selle sont un cas composé des valeurs propres de module inférieur et supérieur de l'unité. Ils sont donc à la fois des points stables et instables, cette dualité est la source de comportements plus complexes comme les points monocliniques.

L'objectif de notre mémoire est de Contrôler les comportements dynamiques de quelques systèmes quadratiques discrets. Et notre mémoire est organisée à travers trois chapiters comme suit :

Dans le premier chapitre : On rappellera les principales définitions et notions générales et spécifiques aux systèmes discrets, utilisées tout au long de ce manuscrit (mémoire) concernant, les points fixes et leurs stabilités, sensibilité aux conditions initiales, bifurcation, attracteurs, attracteurs chaotiques, exposants de Lyapunov.

Dans le deuxième chapitre :

On présente les critères algébriques attestant de la stabilité on parle sur la stabilité asymptotique et leurs définitions et sur les critères algébriques de stabilité : le critère algébrique de Jury , et algébrique de Routh-Hurwitz. On termine ce chapitre par des exemples.

Dans le troisième chapitre :

On applique le critère algébrique de Jury sur des exemples de systèmes quadratiques discrets dans le temps en 2-D,3-D et 4-D.

Chapitre 1

Généralités sur les Systèmes dynamiques

Ce chapitre traite des systèmes à temps discret et des systèmes à temps continu, quelques définitions et propriétés et formules préliminaires permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes.

1.1 Systèmes continu dans le temps

1.1.1 Systèmes autonome et non autonome

Systèmes autonome

une systèmes autonome est une systèmes à évolution temporelle continue qui a une indépendance explicite du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x(t)) \quad (1.1)$$

Systèmes non autonome

une systèmes non autonome est une systèmes à évolution temporelle continue qui dépend explicitement du temps t :

$$\frac{dx}{dt} = G(x, t) \quad (1.2)$$

1.1.2 Flot

On appelle flot de l'équation (1.1) de système φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi & : \quad \mathbb{R} \times X \longrightarrow X \\ (t, x_0) & \longrightarrow \varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t, x_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Tel ' que

- 1- Pour chaque x_0 fixé, $t \longrightarrow \varphi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle.
- 2- Le flot φ possède les propriétés suivantes :
- 3- $\varphi(0, x_0) = x_0$ en d'autres termes $\varphi(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution qui vaut x_0 en $t = 0$.
- 4- $\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0))$ pour tous $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}$. Donc φ possède la propriété d'un semi-groupe.

1.1.3 Trajectoire (ou orbite)

Définition 1.1 Soit $x_0 \in X$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de l'équation (1.3). L'ensemble des points $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (ou orbite) dans l'espace d'état passant par le points x_0 à l'instant $t = 0$.

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial.
- La trajectoire d'une système dynamique autonome ne dépend que l'état initial.

1.1.4 L'espace des phases

L'espace des phases(ou espace d'état)

Chez les physiciens, l'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié.

Dès que la dimension n du système dépasse l'unité, il devient assez difficile de se représenter "mentalement" comment le système évolue, L'outil de passe pour y palier est l'espace de phase . On considère chaque composante x_K de X (l'espace d'état) comme une coordonnée d'un point dans un espace de dimension n , L'évolution suivant t du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace de phase , traçant ainsi une trajectoire de phase.

portrait de phase

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans le plan de phase : à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point systèmes conservatifs et systèmes dissipatives.

1.1.5 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatives

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie.

Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

1.1.6 Points critiques (ou point fixe)

Les points \bar{x} où le champ de vitesse v s'annule sont appelés points critiques, ou points d'équilibre. Ils correspondent à des points fixes du flot : $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$ pour tout t .

Un point d'équilibre est une trajectoire particulière. Une autre trajectoire particulière est la trajectoire qui se referme sur elle-même.

1.1.7 Orbites périodiques

On appelle cycle (ou trajectoire périodique ou orbite périodique) une trajectoire $\phi_t(x)$ qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe $T > 0$ vérifiant $\phi_T(x) = x$. Le plus petit réel T strictement positif tel que $\phi_T(x) = x$ est appelé période, il est indépendant du point x pris sur la trajectoire.

1.2 Systèmes discret dans le temps

1.2.1 Définition et représentation

L'étude de la stabilité des solutions périodiques, grâce à la méthode de Poincaré aux multiplicateurs caractéristiques, permet d'entrevoir l'importance des systèmes dynamiques discrets, ou, dans un langage plus prosaïque, des suites récurrentes. Un système dynamique discret est de la forme :

$$x_{n+1} = G(x_n) \tag{1.4}$$

où G est une application régulière d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans lui-même. Le système continu $\frac{dx}{dt} = v(x)$ peut être étudié comme un système discret si, au lieu de considérer son flot continu ϕ_t , on considère $\tau > 0$ ("sorte" de période d'échantillonnage) et le système associée.

$$G : \begin{array}{l} U \longrightarrow U \\ x \longmapsto G(x) = \phi_\tau(x) \end{array}$$

Comme $\phi_\tau \circ \phi_\tau = \phi_{2\tau}$, il est clair que l'étude de ϕ_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et celle de

$$G^k = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k\text{-fois}}$$

lorsque l'entier k tend vers $+\infty$ doivent être très similaires.

Nous rappelons ici succinctement, comment les notions et résultats précédents, introduits pour les applications continues se transposent aux les systèmes discrets.

1.2.2 Orbites négatives et orbites positives

Orbite positive

Définition 1.2 Une orbite positive O^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^+(x_0) = \{x_0, G(x_0), G^2(x_0), \dots, G^k(x_0), \dots\}$$

Si G inversible alors :

$$\underbrace{G^{-k}(x_0) = G^{-1} \circ G^{-1} \circ \dots \circ G^{-1}(x_0)}_{k \text{ -fois}}$$

Orbite négative

Définition 1.3 Une orbite négative O^- d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de G :

$$O^-(x_0) = \{x_0, G^{-1}(x_0), G^{-2}(x_0), \dots, G^{-k}(x_0), \dots\}$$

Si $O^+(x_0)$ et $O^-(x_0)$ existent alors l'orbite $O(x_0)$ de x_0 est l'ensemble :

$$O(x_0) = O^+(x_0) \cup O^-(x_0)$$

1.3 Sensibilité aux conditions initiales

La **S.C.I** est un phénomène découvert dès la fin du $XIX^{ième}$ siècle par Poincaré dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par Hadamard avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé « flot géodésique sur une surface à courbure négative ». Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux

importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie.

Cette sensibilité explique le fait que, pour un application chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entrainer des résultats imprévisibles sur le long terme. Ce résultat est souvent vulgarisé sous le nom « d'effet papillon ».

La **S.C.I** se traduit mathématiquement par l'hyperbolicité d'une partie de l'espace des phases d'application, hyperbolicité à laquelle est associée un ensemble d'exposants de Lyapunov positifs, ainsi qu'une entropie topologique également positive.

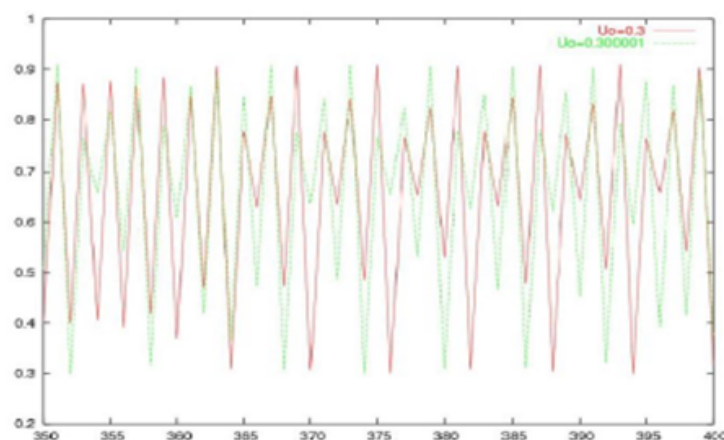


Fig. (1.1) L'évolution d'une population d'individus dans le temps pour des conditions initiales

1.4 Bifurcation et attracteurs chaotiques

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de définition communément admise l'attracteur. La notion d'attracteur est liée à un type de régime asymptotique. Dire d'une système qu'il possède plusieurs attracteurs, c'est aussi dire qu'il admet plusieurs types notablement différents de régimes asymptotiques.

En effet, puisqu'un attracteur est un ensemble invariant, sa dimension dans un espace

tridimensionnel doit être strictement inférieure à 3. Mais nous cherchons également un attracteur dont la dimension n'est $n = 1$ (point fixe) $n = 2$ (cycle). Nous recherchons donc des objets géométriques complexes de dimension non - entière.

Les objets considérés ici, par contre, sont le siège de phénomènes apériodiques et du chaos. On les appelle des attracteurs étranges ou chaotiques. Et pour cause : il s'agit d'ensembles compacts, donc bornés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques, dont l'une des caractéristiques essentielles est la S C I. (les trajectoires issues de conditions initiales proches s'écartent exponentiellement) [1].

1.4.1 Bifurcation

Un bifurcation est un changement qualitatif de la solution du système lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions .

Définition 1.4 *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

1.4.2 Différents types de bifurcations régulières

Dans cette section on considère trois types de bifurcations locales : la bifurcation de doublement de période la bifurcation point selle (ou nœud-col) et la bifurcation de Neimark Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation de le système au voisinage d'un point fixe ou d'un cycle limite . Tous les types de bifurcations étudiées correspondent toujours à $|\lambda_i| = 1$ (où λ_i représentent les multiplicateurs)

Bifurcation flip ou doublement de période ($\lambda = -1$)

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un des multiplicateurs est égales à -1 Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et créer un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est- à- dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

Bifurcation flood ou nœud-col ($\lambda = +1$)

La bifurcation $\lambda = +1$ correspond à la situation où l'un des multiplicateurs est égale à $+1$. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est stable .

Bifurcation de Neimark($\lambda = e^{\pm i\theta}$)

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux multiplicateurs complexes conjugués ($\lambda_1 = \lambda_2$) et de plus $|\lambda_{i=1,2}| = 1$.

1.4.3 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un tracé des points de l'état stationnaire du système en fonction du paramètre du contrôle (ou bifurcation). Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés diagrammes de bifurcation. Typiquement, on choisit un état variable et on trace la valeur limite de celui-ci en fonction un d'un seul paramètre de contrôle. Pour les systèmes discontinus, on trace simplement les valeurs successives d'un état variable. Un diagramme de bifurcation résume l'information sur l'espace d'état et la variation en fonction du paramètre peut être visualisée. La transition d'un état stationnaire vers le chaos peut être observées.

1.4.4 Attracteurs

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteurs. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Il n'existe pas à proprement parler de définition positive des orbites chaotiques. Un mouvement chaotiques est non déterministe mais il ne s'agit pas d'un mouvement aléatoire. Il possède un spectre fréquentiel continu (caractère erratique) et présente en outre une extrême sensibilité aux conditions initiales. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée

à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

On peut définir un attracteur chaotique (ou attracteur étrange) comme étant un attracteur de volume nul qui n'est ni un point fixe, ni cycle limite, ni quasi-périodique. Dans une section de Poincaré, un attracteur chaotique décrit une infinité de points dont l'ensemble possède une structure topologique auto-similaire avec une dimension fractale non entière [7], [6].

Définition d'attracteur

Définition 1.5 soit $\langle \mathbb{R}^n, f \rangle$ un système dynamique discret, une sous partie A de \mathbb{R}^n est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

- 1- A est fermée ;
- 2- A est positivement invariante ;
- 3- A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
 - (a) U est positivement invariant ;
 - (b) U est attiré par $A : \forall u \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(u), A) = 0$

Exemple 1.1 Dans l'espace \mathbb{R}^2 considérons l'application discret dont la fonction successeur est la suivante :

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La variété instable $\mathbb{R}_i^2 = W^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ est non-vide, fermée, et strictement positivement invariante. De plus, elle est un attracteur global en un seul pas.

Propriétés d'attracteurs

1. A est un sous ensemble borné de l'espace est de volume nul, invariant par le flot φ_t autrement dit, tout point de l'espace d'état qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .
2. Il existe un ensemble $B \subset A$, tel que pour tout voisinage de A , la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de

A. Autrement dit, toute trajectoire qui a son origine dans B tend vers l'attracteur, cette "zone d'influence" est le (Bassin d'attraction) .

3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

Différents types d'attracteurs :

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution d'application non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

1- Les points fixes

2- Les cycles limites : orbites périodiques

3- Les cycles limites pseudo - périodiques(quasi-périodique)

1.4.5 Attracteurs chaotiques :

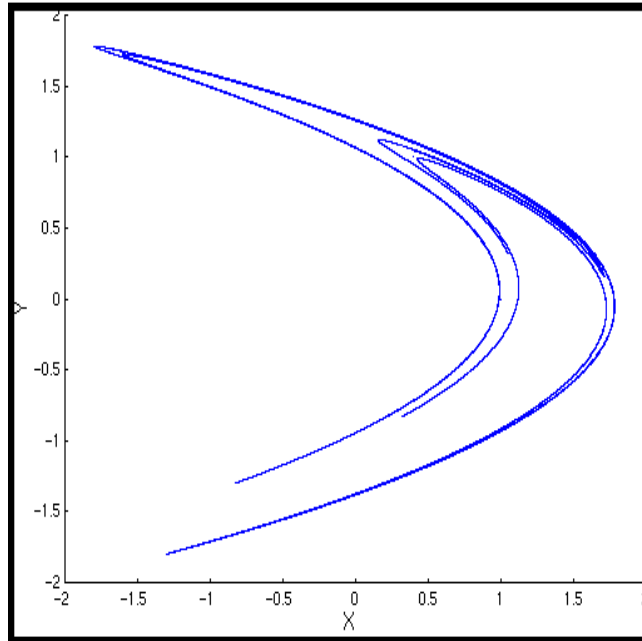
Définition d'attracteur chaotique :

Définition 1.6 Soit A est un attracteur de \mathbb{R}^n , on dit que A est un attracteur étrange si il est chaotique (A vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), un lecteur intéressé pourra consulter [18].

Exemple : L'attracteur de Hénon :

L'attracteur de M. Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$(x, y) \longrightarrow (X = a - x^2 + by, Y = x), \quad (1.5)$$



Figure(1.2) Attracteur de exemple (1.5), avec
 $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

1.5 Exposant de L'yapunov

L'étude formelle de la théorie du chaos met à notre disposition différents outils permettant d'identifier sans ambiguïté si la dynamique d'une application est chaotique ou non. Parmi ces outils, on peut citer les exposants de Lyapunov qui constituent une approche très naturelle de la mesure de l'état de chaos d'une application. Le chaos déterministe se reconnaît essentiellement par la manière dont il est apparu. Mais, une fois établi, sa signature consiste en un objet de l'espace de phases que l'on appelle un attracteur étrange. Ce non d'attracteur provient du fait que l'objet en question "attire" les trajectoires de l'espace de phases, en imposant deux conditions initiales différentes, on obtient deux trajectoires produisant des figures ayant même allure générale mais où la répartition exacte des points est différente. Quant au terme d'étrange

Les trajectoires de l'attracteur vérifient la notion de sensibilité aux conditions initiales (S.C.I). C'est dans ce sens qu'elles sont chaotiques. on peut quantifier la sensibilité aux conditions initiales par le degré de divergence. L'exposants de Lyapunov mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace de phases, ayant des conditions initiales différentes.

Définition 1.7 *On considère l'application discret du plan suivant :*

$$X_{k+1} = G(X_k), X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

où la fonction $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est le champ de vecteurs associé avec le système (1.4). Soit $J(X_k)$ sa Jacobiennne en $X_k \in \mathbb{R}^2, k = 0, 1, 2, \dots$, et de définir la matrice :

$$T_n(X_0) = J(X_{n-1}) J(X_{n-2}) \dots J(X_1) J(X_0). \quad (1.7)$$

Par ailleurs, soit $J_i(X_0, n)$ le module de la $i^{\text{ième}}$ valeur propre de la $n^{\text{ième}}$ matrice $T_n(X_0)$, où $i = 1, 2$ et $n = 0, 1, 2, \dots$. Maintenant on a la définition : les exposants de Lyapunov pour le système discret en dimension deux (1.5) sont définis par la relation :

$$l_i(X_0) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} J_i(X_0, n)^{\frac{1}{n}} \right), i = 1, 2. \quad (1.8)$$

Exemple 1.2 *Soit l'équation discrète quadratique suivant :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k - ax_k^2 = ax_k(1 - x_k) \\ y_{k+1} = b - x_k - by_k + x_k y_k = (b - x_k)(1 - y_k) \end{cases}$$

La matrice jacobienne du équation est :

$$\begin{pmatrix} a(1 - 2x) & 0 \\ (-1 + y) & -b + x \end{pmatrix}$$

parce que La matrice jacobienne est triangulaire, les exposants de Lyapunov sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln a |1 - 2x| \\ \lambda_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} \ln |-b + x| \end{array} \right.$$

Chapitre 2

Critères algébrique attestant de la stabilité

Puisque les solutions de la plupart des systèmes ne s'expriment, pas au moyen des fonctions élémentaires ou par des quadratiques on recourt également à des méthodes d'intégrations approchées. Le défaut de ces méthodes, c'est qu'elles ne donnent qu'une solution particulière, il faut refaire tous les calculs. Connaissant une solution particulière, on ne peut pas se prononcer sur le caractère des autres solutions.

La question de la stabilité d'une solution ou des positions d'équilibre est une des questions fondamentales de la théorie qualitative des applications, la réponse de cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe A. Lyapunov (1857 - 1918).

Un point d'équilibre de systèmes continu correspond à ce que l'on appelle aussi un régime stationnaire. La question de la stabilité expose alors des termes très simples : si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou encore : une petite perturbation, qui éloigne légèrement le système de son régime stationnaire, peut-elle avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps.

2.1 Stabilité asymptotique

De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mathématiques et en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction réelle définie une système discrète, soit $Df(x_0)$ sa matrice Jacobienne évaluée au point fixe x_0 de la fonction f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe x_0 on introduit la notion de multiplicateur et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

Définition 2.1 *Les valeurs propres du jacobien $Df(x_0)$ sont appelées multiplicateurs caractéristiques de f en x_0 .*

Définition 2.2 *Le point fixe x_0 de f est dit asymptotiquement stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.*

Définition 2.3 *Le point fixe x_0 de f est dit asymptotiquement instable si l'un des multiplicateurs est de module strictement supérieur à 1.*

Définition 2.4 *Le point fixe x_0 de f est dit point selle si au moins un multiplicateur est de module strictement inférieur à 1 et les autres multiplicateurs sont tous de module strictement supérieur à 1.*

Définition 2.5 *Si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1, alors le point fixe x_0 de f est dit asymptotiquement stable.*

2.2 Fonction de transfert [3]

1- On rappelle qu'un système continu est asymptotiquement stable si et seulement les pôles de sa fonction de transfert :

$$G(p) = N(p)/D(p) \tag{2.1}$$

qui sont les racines de l'équation $D(p)$, sont tous à partie réelle négative.

2- Un système à temps discret est asymptotiquement stable si et seulement tous les pôles de sa fonction transfert :

$$G(z) = N(z)/D(z) \quad (2.2)$$

se trouve à l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon unité .

$$G(z) = N(z)/D(z)$$

racines de l'équation $D(z) = 0$, ont tous un module inférieur à 1, c'est -à-dire se trouvent tous l'intérieur du l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon unité du plan z .

On note :

$G(z) = G_1(z) G_2(z)$ la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\frac{x(z)}{\varepsilon(z)} = G(z)$$

$F(z)$ la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G(z)}$$

Lorsque le système étudié est un système bouclé (asservi ou régulé), on s'intéresse d'abord à sa stabilité en étudiant les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée $F(z)$; c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique $1 + G(z) = 0$.

Cette équation n'est généralement facile à résoudre que dans le cas où le degré du polynôme $1 + G(z)$ est inférieur ou égal à deux.

Cette résolution se complique lorsque ce polynôme dépend d'un paramètre (ou plusieurs). En effet, dans ce cas il est difficile, voire impossible, de calculer les racines afin de conclure sur la stabilité. D'où la nécessité de disposer des outils (critères) pour étudier

la stabilité sans passer par la résolution de l'équation caractéristique.

2.3 Critères de stabilité

On classe les critères en deux catégories : les critères algébriques et les critères géométriques. Parmi les critères algébriques, il y'a le critère de Jury et le critère de Routh-Hurwitz.

2.3.1 Critère algébrique de Jury

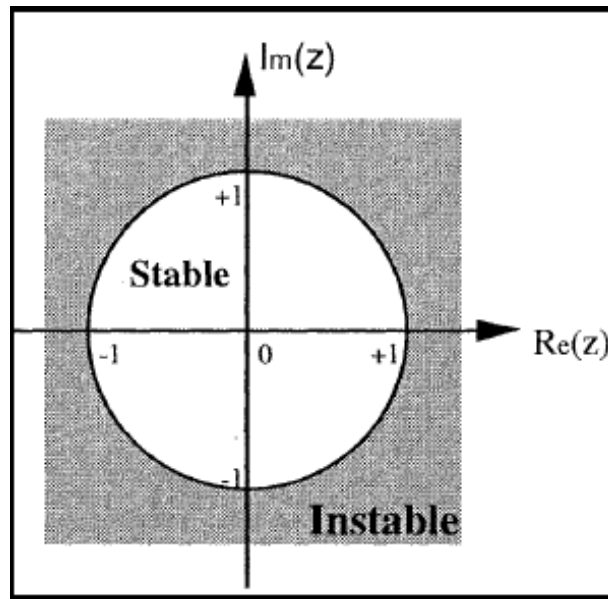
Le critère de Jury est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), le module des racines de l'équation caractéristique $1 + G(z) = 0$, sans résoudre cette équation.

Pour ce faire, on écrit la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme :

$$F(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G(z)} = \frac{N_F(z)}{D_F(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}$$

et on en déduit l'équation caractéristique suivante :

$$D_F(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0 = 0, \quad b_n > 0$$



Fig(2.1) : Zone de stabilite de (2.2 Discret)

Pour simplifiée du critère de Jury, valable pour les polynômes à caractéristique à coefficients réels, dont nous donnons l'expression pour les systèmes d'ordre 2, 3 et 4.

Cas 1- polynômes à caractéristique du second degré :

$$P(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0, \text{ avec } b_2 > 0$$

le critère de Jury impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |b_0| < b_2 \text{ ou } b_0 - b_2 < 0 \\ P(+1) = b_2 + b_1 + b_0 > 0 \\ P(-1) = b_2 - b_1 + b_0 > 0 \end{cases}$$

Exemple 2.1 On considère l'équation caractéristique suivante :

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 0.25 = 0$$

$$\begin{cases} b_2 - b_0 = -0.25 - 1 < 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 = 1 + 1 - 0.25 > 0 \\ b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 1 - 0.25 > 0 \end{cases}$$

La troisième condition de stabilité n'est pas vérifiée et donc le système associé à cette équation caractéristique est asymptotiquement instable.

Cas 2- polynômes à caractéristique du troisième degré :

$$P(z) = b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0, \text{ avec } b_3 > 0$$

le critère de Jury impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |b_0| < b_3 \text{ ou } b_0 - b_3 < 0 \\ P(1) = b_3 + b_2 + b_1 + b_0 > 0 \\ P(-1) = -b_3 + b_2 - b_1 + b_0 < 0 \\ b_0^2 - b_3^2 < b_0 b_2 - b_1 b_3 \end{cases}$$

Exemple 2.2 On considère l'équation caractéristique suivante :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (k - 0.75)\lambda - 0.25 = 0.$$

Il s'agit d'étudier la stabilité en fonction du paramètre k . L'application du critère algébrique de Jury conduit à l'ensemble des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} b_0 - b_3 = -0.25 - 1 < 0 \\ b_3 + b_2 + b_1 + b_0 = k > 0 \\ -b_3 + b_2 - b_1 + b_0 = -1 - (k - 0.75) - 0.25 < 0 \\ b_0^2 - b_3^2 < b_0 b_2 - b_1 b_3 \Leftrightarrow (-0.25)^2 - 1 < -(k - 0.75) > 0 \end{cases}$$

Le critère de Jury affirme que le système associé à cette équation caractéristique est

asymptotiquement stable si :

$$0 < k < 1.6875$$

Cas 3- polynômes à caractéristique du quatrième degré :

$$P(z) = b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0, \text{ avec } b_4 > 0$$

le critère de Jury impose les es conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} |b_0| < b_4 \text{ ou } b_0 - b_4 < 0 \\ P(1) = b_4 + b_3 + b_2 + b_1 + b_0 > 0 \\ P(-1) = b_4 - b_3 + b_2 - b_1 + b_0 > 0 \\ b_0^2 - b_4^2 > b_0 b_3 - b_1 b_4 \\ (b_0 - b_4)^2 (b_0 - b_2 + b_4) > (b_1 - b_3) (b_0 b_3 - b_1 b_4) \end{array} \right.$$

2.3.2 Critère algébrique Routh-Hurwitz

On rappelle que le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer l'existence de pôles à partie réelle positive à partir de l'étude des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, et ceci sans expliciter ces pôles.

Il est possible d'appliquer ce critère aux systèmes discrets en utilisant la transformation bilinéaire appelée aussi la transformation en w , qui fait correspondre à l'intérieur du cercle unité (le domaine de stabilité des systèmes discrets), le demi-plan complexe gauche (le domaine de stabilité des systèmes continus).

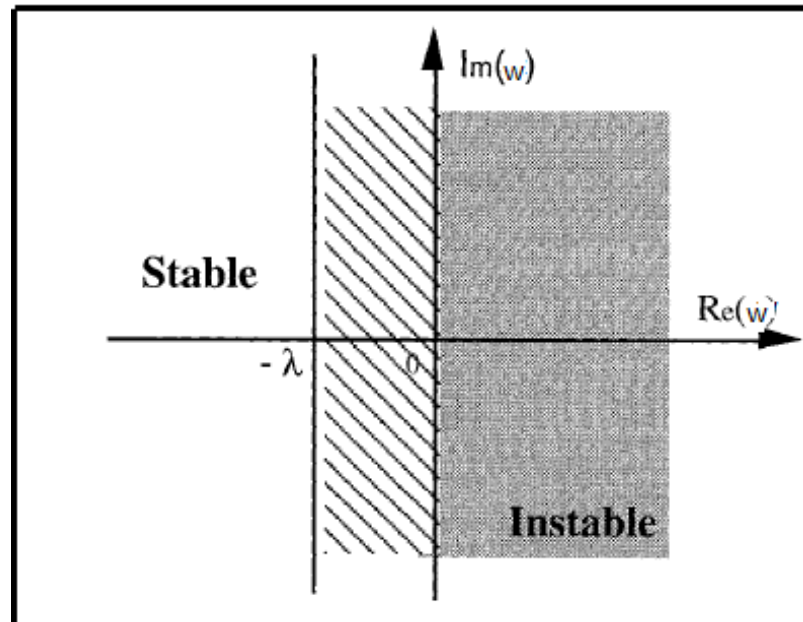
La transformation en w est la fonction complexe de la variable complexe z définie par l'expression suivante :

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Lorsque z parcourt l'intérieur du cercle unité, w parcourt le demi-plan complexe à partie réelle négative de manière bi - univoque. La fonction réciproque de la transformée

en w est définie par :

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$



Fig(2.2) : Zone de stabilite de (2.1 continue) .

Pour appliquer le critère de Routh-Hurwitz à un système discret, il suffit alors de transformer son équation caractéristique par la transformée en w et d'appliquer le critère de Routh pour le nouveau polynôme obtenu.

Exemple 2.3 On reprend l'exemple ci-dessus : $D(z) = z^2 + z - 0.25 = 0$.

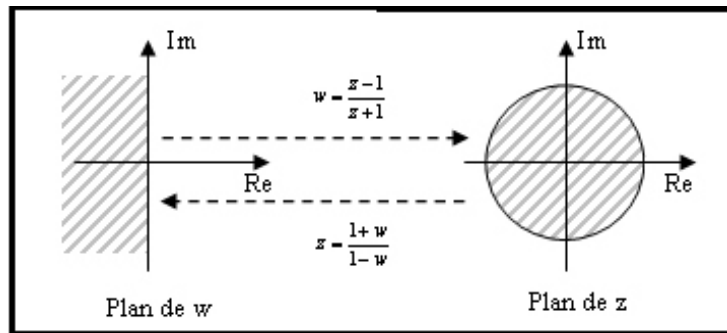
On applique la transformation en w :

$$D(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} - 0.25 = 0 ; \text{ soit : } -0.25w^2 + 2.5w + 1.75 = 0 .$$

La table de Routh correspondant est donnée par :

$$\begin{array}{r} w^2 \quad -0.25 \quad 1.75 \\ w^1 \quad 2.5 \quad 0 \\ w^0 \quad 1.75 \end{array}$$

Il y'a un changement de signe dans la première colonne de la table de Routh, cela implique la présence de pôle à partie réelle positive. D'où la même conclusion sur la stabilité à savoir que le système associé à l'équation caractéristique est instable.



Fig(2.3) :Transformation de (2.2)(discret) vers de (2.1) (continue) .

Chapitre 3

Critère du jury pour contrôler le chaos

La recherche des racines de l'équation caractéristique d'un système dynamique discret devient rapidement difficile lorsque son degré est supérieur à trois. C'est pourquoi nous allons présenter des critères permettant de savoir si le module de ces racines est inférieur à 1 sans avoir à résoudre cette équation. Il permet de savoir si les racines d'un polynôme caractéristique d'un système dynamique sont inférieures à 1 en module.

Pour étudier la stabilité asymptotiques des points fixe d'un système dynamique discret nous appliquons dans ce chapitre le critère de Jury [17] . sur quelques systèmes dynamiques discrets pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes satisfaisant par les paramètres de bifurcation pour lesquelles les solutions du polynômes caractéristiques sont à l'intérieur du cercle d'unité, le critère de Jury. Comme exemple, nous examinons les domaines des paramètres de bifurcation pour que les solutions du polynômes caractéristiques sont tous à inférieures à 1 en module, nous savons que dans le cas général chaos peut se produit dans un système dynamique si elle a admis au moins un point fixe n'est pas asymptotiquement stable (point fixe instable).

3.1 Systèmes en temps discret en 2-D

Commençons par le système discret en 2-D [14]

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x_n^2 - by_n \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

tel que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont des paramètres réels, appelés les paramètres de bifurcation. Ce système est largement étudié dans la littérature, voir, par exemple.[10],[11],[12], [13].

3.1.1 Points fixes et leurs stabilités

un point fixe (x, y) de système (3.1) :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} = x \\ y_{n+1} = y \end{pmatrix} \text{ Alors } \begin{pmatrix} a - x^2 - by = x \\ x = y \end{pmatrix}$$

doit satisfaire simultanément les égalités suivantes :

$$a - x^2 - by = x, \quad x = y$$

Alors on a l'équation :

$$-x^2 - (1 + b)x + a = 0$$

Son discriminant est : $\Delta = (1 + b)^2 + 4a$.

si $\Delta > 0 \implies a > -\frac{(1+b)^2}{4}$.

si $\Delta < 0$.ne possède pas de point fixe .

donc on obtient les deux points fixes :

$$S_1 = (x, y) = \left(\frac{-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2} \right).$$

$$S_2 = (x, y) = \left(\frac{-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2}, \frac{-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a}}{2} \right).$$

La matrice Jacobienne du système (3.1) correspondant au point fixe (x, y) est écrite sous la forme :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenant la matrice Jacobienne $J(x, y)$, la stabilité d'un point fixe peut être établie en calculant les valeurs propres λ de $J(x, y)$ correspondant au point fixe (x, y) en utilisant l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0.$$

Pour le point fixe S_1 On a :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} (1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\text{tr}(J) = (1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a}$ et $\det J = b$ donc :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) \lambda + b.$$

$$\Delta = \left((1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right)^2 - 4b. \text{ Alors } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\left((1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\left((1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

On applique le critère du jury , nous obtenons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 1 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\
(ii) \quad & 1 - \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\
(iii) \quad & 1 - b > 0.
\end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), nous avons

$$\begin{aligned}
-(1+b) &< -(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 1+b. \\
\implies & 0 < \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 2(1+b) \\
\implies & 0 < (1+b)^2 + 4a < 4(1+b)^2 \\
\implies & 0 < a < \frac{3(1+b)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Alors, le point fixe S_1 est asymptotiquement stable pour :

$$a \in \left] 0, \frac{3}{4}(1+b)^2 \right[.$$

Pour le point fixe S_2 On a :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} (1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $tr(J) = (1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}$ et $\det J = b$ donc :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left((1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) \lambda + b.$$

$$\Delta = \left((1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right)^2 - 4b. \text{ Alors } \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\left((1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + \sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\left((1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

On applique le critère du jury , nous obtenons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & 1 + \left(-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\ (ii) \quad & 1 - \left(-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\ (iii) \quad & 1 - b > 0. \end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), nous avons

$$\begin{aligned} -(1+b) &< -(1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 1+b \\ \implies & 0 < -\sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 2(1+b) \\ \implies & 0 < \frac{3}{4}(1+b)^2 < a. \end{aligned}$$

Le point fixe S_2 est instable pour tous $a \in]0, +\infty[$.

Remarque 3.1 donc les systèmes dynamiques quadratiques discrets avec la dimension $n = 2$ à $n = 4$ le point fixe S_2 est instable pour tous $a \in]0, +\infty[$.

Par exemple, en fixer le paramètre b à la valeur $b = 0.1$, nous obtenons que le point fixe S_1 est stable pour $a < 0.9075$, le point fixe S_1 perd sa stabilité au point $a = a_1 = 0.9075$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ et une bifurcation doublement de période se produit. Par la suite, les orbites périodiques supérieures deviennent stables jusqu'à ce que le chaos vienne enfin s'installer. Le diagramme de bifurcation de la (Fig.2. 1)donne une description graphique de ce scénario.

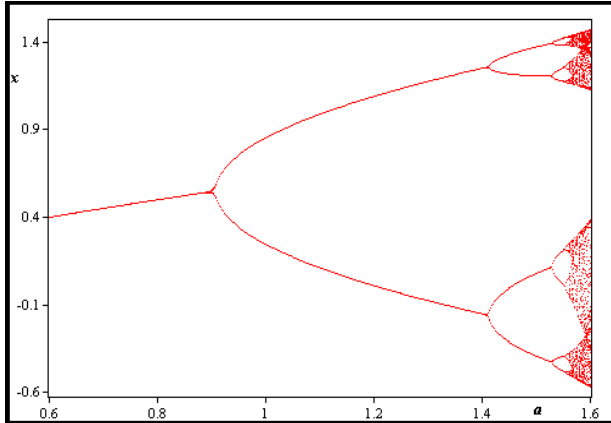


Fig. 2.1 : Diagramme bifurcation du (3.1) en 2-D pour $b = 0.2$, $0.6 \leq a \leq 1.6$.

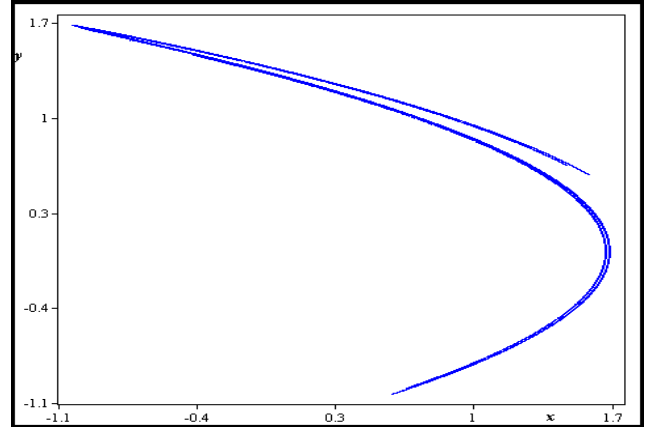


Fig. 2.2 : Attracteur chaotique du (3.1) en 2-D pour $a = 1.80$ et $b = 0.2$.

3.2 Systèmes en temps discret en 3-D

Les systèmes dynamiques discrets en 3-D n'ont pas été aussi largement étudiés comme les systèmes discrets en 2-D, ces dernières années il y a une augmentation considérable de leurs études [22], [16], [21], [20], [19].

Ensuite, nous considérons la système 3-D :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - y_n^2 - bz_n \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

3.2.1 Points fixes et leurs stabilités

Un point fixe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de système (3.2)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} = x \\ y_{n+1} = y \\ z_{n+1} = z \end{pmatrix} \text{ Alors } \begin{pmatrix} a - y^2 - bz = x \\ y = x \\ z = y \end{pmatrix}.$$

doit satisfaire simultanément les égalités suivantes :

$$a - y^2 - bz = x, \quad x = y, \quad y = z$$

Alors on a l'équation :

$$-x^2 - (1 + b)x + a = 0$$

Son discriminant est : $\Delta = (1 + b)^2 + 4a$.

donc on obtient les deux points fixes :

$$S_1 = (x, y, z) = \frac{-(1 + b) + \sqrt{(1 + b)^2 + 4a}}{2} (1, 1, 1)^T.$$
$$S_2 = (x, y, z) = \frac{-(1 + b) - \sqrt{(1 + b)^2 + 4a}}{2} (1, 1, 1)^T.$$

La matrice Jacobienne du système (3.2) correspondant au point fixe (x, y, z) est écrite sous la forme :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -2y & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenant la matrice Jacobienne $J(x, y, z)$, la stabilité d'un point fixe peut être établie en calculant les valeurs propres λ de $J(x, y, z)$ correspondant au point fixe (x, y, z) en utilisant l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(J) \lambda^2 + \text{mp}(J) \lambda - \det(J) = 0.$$

Pour le point fixe S_1 On a :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & (1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $tr(J) = 0$ et $mp(J) = -(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a}$ $\det J = b$ donc :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) \lambda + b.$$

On applique le critère du jury à ce polynôme donne les conditions :

$$\begin{aligned} (i) \quad & 1 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\ (ii) \quad & -1 - \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0, \\ (iii) \quad & (1-b) > 0, \\ (iv) \quad & 1 - b^2 > -(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), Nous obtenons

$$b - 1 < \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) < 1 + b.$$

et du (iv) nous avons :

$$\begin{aligned} & -(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 1 - b^2 \\ \implies & 0 < \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < 1 - b^2 + (1+b) \\ \implies & 0 < a < \frac{(1-b^2)(1+b)(3-b)}{4}. \end{aligned}$$

La conditions (iv) donne la zone de stabilité pour les points fixes. Donc, le point fixe

S_1 est localement stable pour :

$$a \in \left] 0, \frac{(1-b^2)(1+b)(3-b)}{4} \right[.$$

Au contraire, le point fixe S_2 est instable pour tous $a \in]0, +\infty[$ (pour lui même en 2D).

En fixant le paramètre b à la valeur $b = 0.1$ on obtient que le point fixe S_1 perd sa stabilité au point $a = a_1 = 0.7895$, où $|\lambda_{i=1,2}| = 1$, une bifurcation de Hopf se produit donnant lieu à une orbite quasi-périodique stable.

L'augmentation du paramètre a conduit de nouveau à des orbites périodiques avant le début comportement chaotique peut être observé, voir Fig. 3.1 qui montre la diagramme bifurcation . Pour la valeur du paramètre $a = 1.76$, nous obtenons deux positifs de L'exposant de Lyapunov $L_1 = 0.2246$, $L_2 = 0.1872$ et $L_3 = -2.7144$ (resultats numériques). Le comportement dynamique correspondant est connu comme hyper-chaotique, comme le montre [15]

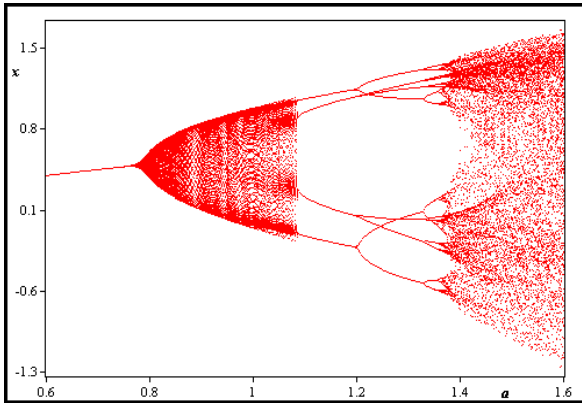


Fig. 3.1 : Diagramme bifurcation du (3.2) en 3-D pour $b = 0.2$, $0.6 \leq a \leq 1.6$.

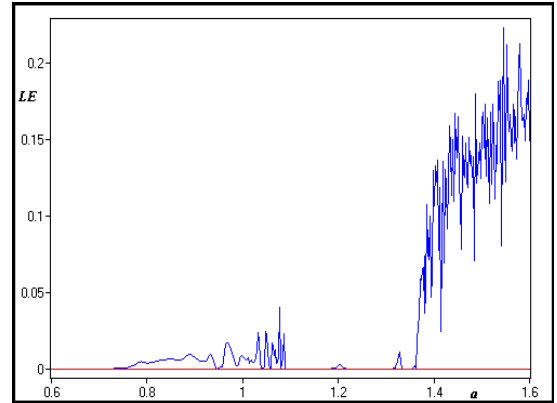


Fig. 3.2 : Variation de LE du (3.2) en 3-D pour $b = 0.2$ et $0.6 \leq a \leq 1.6$.

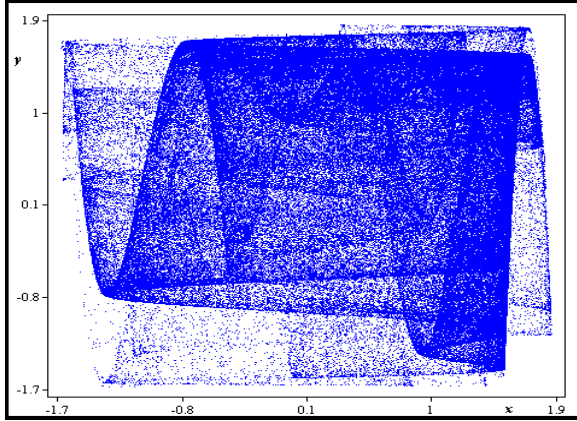


Fig. 3.3 : Attracteur chaotique du (3.2) en 3-D pour $a = 1.76$ et $b = 0.2$.

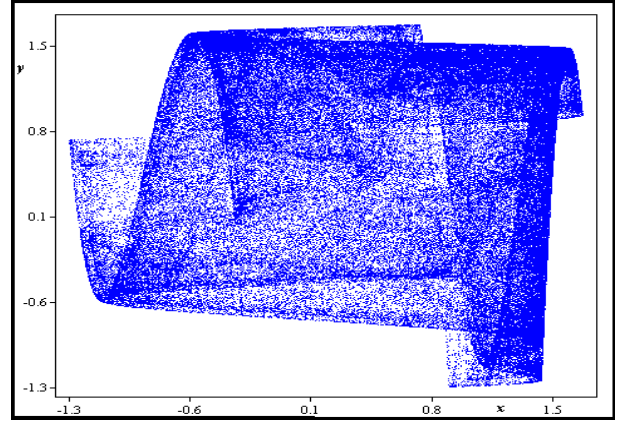


Fig. 3.4 : Attracteur chaotique du (3.2) en 3-D pour $a = 1.6$ et $b = 0.2$.

3.3 Systèmes en temps discret en 4-D

Enfin, nous considérons le système 4-D

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - z_n^2 - bw_n \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

3.3.1 Points fixes et leurs stabilité

Un point fixe (x, y, z, w) de système (3.3) :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} = x \\ y_{n+1} = y \\ z_{n+1} = z \\ w_{n+1} = w \end{pmatrix} \text{ Alors } \begin{pmatrix} a - z^2 - bw = x \\ y = x \\ z = y \\ w = z \end{pmatrix}.$$

doit satisfaire simultanément les égalités suivantes :

$$a - z^2 - bw = x, \quad x = y, y = z, z = w.$$

On a alors l'équation :

$$-x^2 - (1 + b)x + a = 0$$

Son discriminant est : $\Delta = (1 + b)^2 + 4a$.

donc on obtient les deux points fixes :

$$S_1 = (x, y, z, w) = \frac{-(1 + b) + \sqrt{(1 + b)^2 + 4a}}{2} (1, 1, 1, 1)^T$$

$$S_2 = (x, y, z, w) = \frac{-(1 + b) - \sqrt{(1 + b)^2 + 4a}}{2} (1, 1, 1, 1)^T$$

La matrice Jacobienne du système (3.3) correspondant au point fixe (x, y, z, w) est écrite sous la forme :

$$J(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2z & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenant la matrice Jacobienne $J(x, y, z, w)$, la stabilité d'un point fixe peut être établie en calculant les valeurs propres λ de $J(x, y, z, w)$ correspondant au point fixe (x, y, z, w) en utilisant l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I).$$

Pour le point fixe S_1 On a :

$$J(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \left((1+b) - \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) & -b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) \lambda + b.$$

Nous appliquons le critère du jury sur le système (3.3) nous obtenons les conditions :

$$\begin{aligned} (i) \quad & 1 + \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0 \\ (ii) \quad & 1 - \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + b > 0 \\ (iii) \quad & 1 - b > 0 \\ (iv) \quad & 1 - b^2 > \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) \\ (v) \quad & (1+b)(1-b)^2 > \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right)^2. \end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), nous obtenons

$$-(1+b) < \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) < (1+b),$$

de (iv) nous avons

$$1 - b^2 > \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right)$$

et de (v) nous trouvons

$$\begin{aligned}
& -(1-b)\sqrt{1+b} < \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) < (1-b)\sqrt{1+b} \\
\implies & 0 < \left(-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 + 4a} \right) + (1-b)\sqrt{1+b} < 2(1-b)\sqrt{1+b} \\
& \implies 0 < \sqrt{(1+b)^2 + 4a} < (1+b) + (1-b)\sqrt{1+b} \\
\implies & 0 < (1+b)^2 + 4a < (1+b)^2 + (1-b)^2(1+b) + 2(1-b)(1+b)\sqrt{1+b} \\
& \implies 0 < a < \frac{(1-b^2)(1-b+2\sqrt{1+b})}{4}.
\end{aligned}$$

Ici, la condition (v) donne la zone de stabilité asymptotique du point fixe S_1 :

$$a \in \left] 0, \frac{(1-b^2)(1-b+2\sqrt{1+b})}{4} \right[.$$

Encore une fois, le point fixe S_2 est instable pour tous $a \in]0, +\infty[$. (pour le même dans 2-D)

Nous terminons cette section avec des résultats numériques pour le système 4-D. Réparer à nouveau $b = 0.1$, nous trouvons la stabilité jusqu'à $a = a_1 = 0.7419$. Comme avec le système 3-D, pour cette valeur de paramètre $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ et une bifurcation de Hopf se produit.

En comparant les diagrammes de bifurcation (Figures 2.1 et 3.1), on peut voir qu'une riche variété de comportement dynamique existe, par exemple pour le système 4-D il y a deux grandes échelles fenêtres périodiques. Encore une fois, comme avec le système 3-D, pour certaines valeurs du paramètre a un comportement hyper - chaotique survient. Fig. 4.2 et Fig. 4.3 illustres deux attracteurs chaotiques du système (3.2).

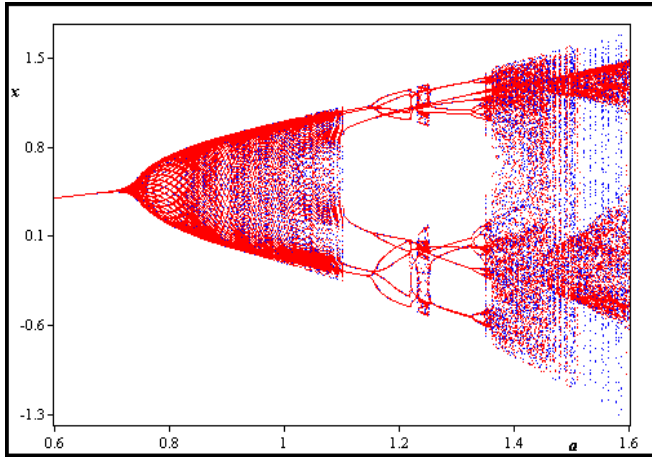


Fig. 4.1 : Diagramme bifurcation du (3.3) en 4-D pour $b = 0.2$, $0.6 \leq a \leq 1.6$.

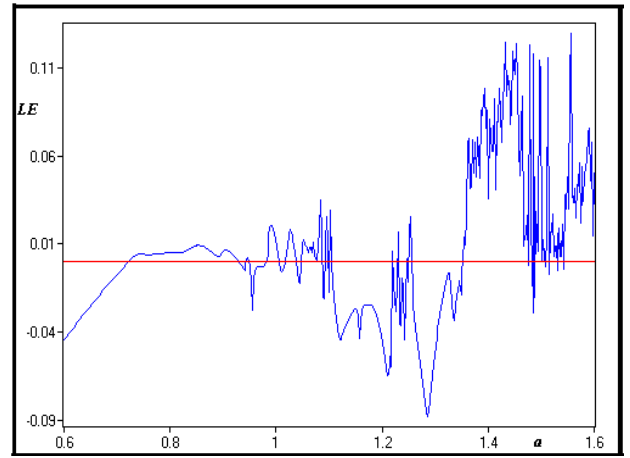


Fig. 4.2 : Variation de LE du (3.3) en 4-D pour $b = 0.2$ et $0.6 \leq a \leq 1.6$.

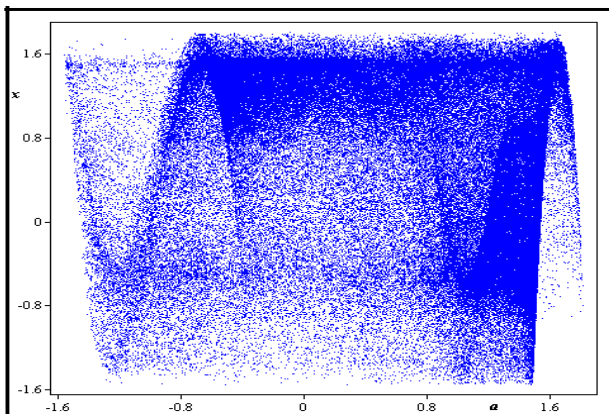


Fig. 4.3 : Attracteur chaotique du (3.3) en 4-D pour $a = 1.66$ et $b = 0.2$.

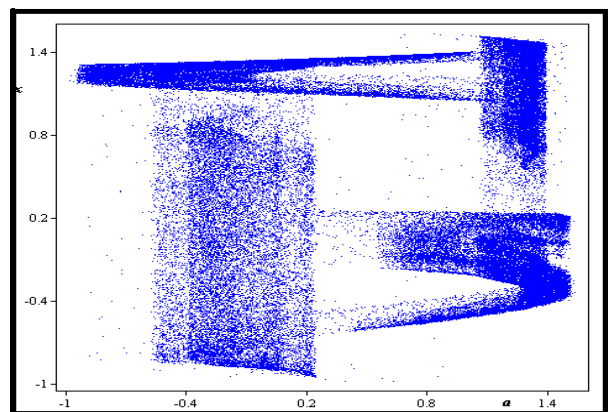


Fig. 4.4 : Attracteur chaotique du (3.3) en 4-D pour $a = 1.4$ et $b = 0.2$.

Conclusion général et perspective

La recherche des racines de l'équation caractéristique d'un système dynamique discret est difficile lorsque son degré est supérieur à trois. C'est pourquoi nous allons présenter le critère du jury, dans ce mémoire nous utilisons ce critère pour contrôler le chaos des systèmes dynamiques quadratiques discrets en 2-D, 3-D et 4-D. Notre prochain projet sera l'étude du cas où $n \geq 5$.

Bibliographie

- [1] A. Chenciner, Stabilité Structurale et Ergodicité (ou catégorie et mesure), Journal de Physique, (1978).
- [2] C. P. Li, W. H. Deng, D. Xu, Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order, Physica A360, 171-185, (2006).
- [3] A. Jutard M. Betemps, Automatique Systeme Asservis Lineaire continu, Insa de Lyon, 43-45, (1997).
- [4] E. Zeraouia. Etude de Quelques Types de Systemes Chaotique : Generalisation d'un Modele Issu du Modele de Chen (2006).
- [5] H. G. Schuster. Handbook of Chaos Control. Weinheim Wiley-VCH, (1999).
- [6] H. Schuster Georg. "Deterministic Chaos-an Introduction". 4 edition, Wiley, 288pp, (2005).
- [7] L. Y. Lu and Z. H. Lu, The Periodicity of chaotic Impact Oscillators in Hausdroff Phase Spaces. Journal of Sound and Vibration, 235(1), 105-116, (2000).
- [8] M. Mammeri. A larde Chaotic Region in 3-D Sinusoid Discret Map, (2016).
- [9] R. Botet. Les fractales en physique. Technique de L'Ingénieur, AF 4500, 1-18, (2000).
- [10] Benedicks M. & Carleson, L. The dynamics of the Hénon map, Ann.of Math. 133, 73-169, [1991].
- [11] Kaplan, H. [1993] Type-I intermittency for the Hénon map family, Phys.Rev. E48, (1655-1669).

- [12] Hansen, K.T. & Cvitanovic, P. Bifurcation structures in maps of Hénon type, *Non-linearity* 11, 1233-1261, (1998)
- [13] Sterling, D., Dullin, H.R. & Meiss, J.D. Homoclinic bifurcations for the Hénon map, *Physica D134*, 153-184, (1999)
- [14] Hénon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. Math. Phys.* 50, 69-77, (1976).
- [15] Baier, G. & Klein, M. Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps, *Phys. Lett. A151*, 281-284, (1990).
- [16] S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simó, and D. Turaev., Three-Dimensional Hénon-like Maps and Wild Lorenz-like Attractors, *International Journal of Bifurcation and Chaos.*, 15 (11), 3493–3508, (2005).
- [17] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, 2nd. Ed. (Prentice Hall, Englewood Cliffs., N.J.), 185-186, (1995).
- [18] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott., *Robust chaos and its applications*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series, no 79, A12 ,(2011). ISBN : 978-981-4374-07-1, (2011).
- [19] M. Mammeri., A novel chaotic attractors in piecewise version of the 3D Hénon map, *Advanced Studies in Theoretical Physics.*, Vol. 9. no.10, 461-473, 2015.
- [20] M. Mammeri., Existence of bounded orbits in 3-D quadratic map, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 8, no. 32, 1581-1589, 2014.
- [21] S. V. Gonchenko, J. D. Meiss, and I. I. Ovsyannikov., Chaotic Dynamics of Three-Dimensional Hénon Maps that Originate from a Homoclinic Bifurcation, *Regular and Chaotic Dynamics.*, 11 (2), 191–212, 2006.
- [22] S. V. Gonchenko, V. S. Gonchenko, and J. C. Tatjar., Bifurcation of Three-Dimensional Diffeomorphisms Non-Simple Quadratic Homoclinic Tangencies and Generalized Hénon Maps, *Regul. Chaotic Dyn.*, 12 (3), 233-266, 2007.

الملخص:

نهتم في هذه المذكرة بدراسة الأنظمة الديناميكية التربيعية المتقطعة (التحليل و المراقبة). الهدف من هذه المذكرة مراقبة الفوضى في الأنظمة الديناميكية المتقطعة باستعمال كتابة معينة تسمى كتابة جوري (jury). قمنا ابتداء بعرض المفاهيم الأساسية للأنظمة الجبرية, ثم تطرقنا لعرض بعض الكتابات الجبرية لتحديد الاستقرار منها الكتابة الجبرية لجوري, الكتابة الجبرية لروث هيرويتز, كما قدمنا بعض الأمثلة عن هاته الكتابات الجبرية, في الأخير عرضنا بعض الأمثلة في الأنظمة التربيعية المتقطعة في البعد 2 و 3 و 4 بتطبيق كتابة جوري.

كلمات مفتاحية :

الأنظمة الديناميكية, القيم الذاتية, الاستقرار, النقاط الثابتة, كتابة جوري, التوجه نحو الفوضى.

Abstract :

The work discussed in this thesis focuses on discrete quadratic dynamic systems over time (analysis and control).

Our memory aims to control the chaos of discret dynamics systems using the Jury Criterion. At the beginning, we did some preliminary (definitions and general concept and specific to dynamic systems). Then we present the algebraic criteria attesting to the asymptotic stability and their definition, the algebraic criterion of stability (the algebraic criterion of jury, criterion Routhi Hurwitz). Finally, the Jury Algebraic Criteria are applied to 2-D, 3-D and 4-D time discrete quadratic systems .

Key Word:

quadratique Dynamics system, Eigen values, stability, fixed point, jury criterion, route to chaos.

Résumé :

Le travail abordé dans ce mémoire port sur les systèmes dynamiques quadratiques discrets dans le temps (analyse et contrôle).

Notre mémoire a que but de contrôle le chaos des systèmes dynamique discrets en utilisant le Critère de Jury .

Au début , nous avons fait quelque préliminaire (Définitions et notion générales et spécifiques aux systèmes dynamiques) . Ensuite, on présente les critère algébriques attestant de la stabilité asymptotique et leur définition , les critère algébrique de stabilité (le critère algébrique de jury, critère Routhi Hurwitz). En fin, on applique les critère algébriques de Jury sur des exemple des systèmes quadratiques discrets dans le temps en 2-D,3-D et 4-D.

Mots clés :

système dynamique quadratique, valeurs propres ,stabilité, point fixes, critère de jury, route vers le chaos.