# Résolution des équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites

**SARA Toubakh**

**(Encadreur: BRAHIM Tellab)**

Département de Mathématiques
Université Kasdi Merbah Ouargla 30000, Algerie
toubakhs1@gmail.com

**Résumé**

*Dans le présent travail, nous étudions un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec des conditions intégrales ei intégro-différentielles fractionnaires. Quelques nouveaux résultats d'existence et d'unicité seront obtenus en exploitant quelques thorèmes de point fixe.*

**Mots Clés :** Espace de Banach, Dérivée fractionnaire de Caputo, Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Thorèmes de point fixe.

## 1. Introduction

Dans [4], Jinrong, Linli, et Yong ont considéré le problème aux limites avec des conditions intégrales pour une équation différentielle fractionnaire dans un espace de Banach $X$, de type :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad \alpha \in (1,2), \quad J = [0,T], \\ y(0) = \int_0^T g(s, y(s))ds, \\ y(T) = \int_0^T h(s, y(s))ds, \end{cases} \tag{1.1}$$

où, ${}^{C}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ de Caputo et $f, g, h : J \times X \longrightarrow X$ trois fonctions données.

Dans ce travail, nous considérons un problème plus général. Aors, nous discuterons l'existence et l'unicité de solutions pour le problème suivant en utilisant quelques théorèmes de point fixe.

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad J = [0,T], \\ D^{\alpha-2}u(0) - D^{\alpha-1}u(0) = \int_0^T g(s, u(s))ds, \\ D^{\alpha-2}u(T) + D^{\alpha-1}u(T) = \int_0^T h(s, u(s))ds, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ de Riemann-Liouville et $f, g, h : J \times E \longrightarrow E$ des fonctions donnes vérifiant quelques hypothèses qui seront déterminés plus tard et $E$ est un espace de Banach.

## 2. Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats fondamentaux pour le calcul fractionnaire qui peuvent être trouvés dans [1] et [3].

**Définition 2.1** *[3] Si $g \in C[(0, +\infty); \mathbb{R}]$ et $\alpha > 0$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est définie par :*

$$I^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds. \tag{2.1}$$

**Définition 2.2** *[3] L'opérateur différentielle fractionnaire d'ordre $\alpha$ de Riemann-Liouville pour une fonction continue $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, est donné par :*

$$D^{\alpha}g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s)ds = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}g(t), \tag{2.2}$$

*où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de $\alpha$.*

**Lemme 2.3** *[1] Soient $\alpha > 0$, $\lambda > -1$ et $n = [\alpha]$. Alors nous avons :*

$$D^{\alpha}t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \tag{2.3}$$

*et*

$$D^{\alpha}t^{\alpha-k} = 0, \qquad k = 0, 1, 2..., n. \tag{2.4}$$

*Dans le cas particulier, nous avons :*

$$D^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \qquad \alpha \notin \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

*Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on obtient $D^{\alpha}1 = 0$.*

**Lemme 2.4** *[1] Pour $\alpha > 0$, $g \in C([0,T])$, l'équation différentielle fractionnaire homogène*

$$D^{\alpha}g(t) = 0,$$

*admet une solution*

$$g(t) = c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha-2} + c_{n-1} t^{\alpha-1},$$

*où $c_i \in \mathbb{R}$, (i=0,1,...,n-1) et $n = [\alpha] + 1$.*

**Lemme 2.5** *[1] Soit $g \in C([0,T])$ telle que $D^{\alpha}g(t) \in C([0,T])$. Alors*

$$I^{\alpha}D^{\alpha}g(t) = g(t) + c_0 t^{\alpha-n} + c_1 t^{\alpha-n-1} + ... + c_{n-2} t^{\alpha-2} + c_{n-1} t^{\alpha-1},$$

*pour certain $c_i \in \mathbb{R}$, (i=0,1,...,n-1).*

**Lemme 2.6** *[1] Soient $\alpha, \beta \geq 0$ et $g \in L^1([0,T])$. Alors,*

$$I^{\alpha}I^{\beta}g(t) = I^{\alpha+\beta}g(t) = I^{\beta}I^{\alpha}g(t),$$

*et*

$$D^{\alpha}I^{\alpha}g(t) = g(t), \qquad \forall t \in [0,T].$$

**Lemme 2.7** *[1] Soient $\beta > \alpha > 0$ et $g \in L^1([0,T])$. Alors pour tout $t \in [0,T]$, nous avons*

$$D^{\alpha}I^{\beta}g(t) = I^{\beta-\alpha}g(t).$$

*$L^1([0,T], \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions Lebesgue intégrables de $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

## 3. Énoncé des resultats

**Lemme 3.1** *Le problème aux limites (1.2) admet une solution $u$, si et seulement, si $u \in C(J,E)$ vérifie l'équation intégrale*

$$u(t) = P_u(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, u(s))ds,$$

*avec*

$$P_u(t) = \frac{\alpha(T+1)t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T g(s, u(s))ds + \frac{\alpha t^{\alpha-2} + t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} \int_0^T h(s, u(s))ds,$$

*et*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(s-T-1)t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha(s-T-1)t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t, \\ \frac{(s-T-1)t^{\alpha-1}}{(T+2)\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha(s-T-1)t^{\alpha-2}}{(T+2)\Gamma(\alpha)}, & t \leq s \leq T. \end{cases}$$

**Remarque 3.2** *En utilisant le lemme 3.1, le problème (1.2) peut se transformer en un problème de point fixe pour un opérateur $N : C(J,E) \longrightarrow C(J,E)$. défini par :*

$$(Nu)(t) = P_u(t) + \int_0^T G(t,s) f(s, u(s))ds.$$

**Théorème 3.3** *Notre but est de démontrer sous certains hypothèses que le problème (1.2) admet une solution unique, en appliquant quelques théorèmes de point fixe.*

## Références

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, j.j. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. In : North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam (2006).

[2] G. Infante, "Eigenvalues and positive solutions of ODEs involving integral boundary conditions," Discrete and Continuous Dynamical Systems, pp. 436-442, 2005.

[3] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, 1999.

[4] J. Wang, L. Linli and Y. Zhou, Solvability of boundary value problems with integral conditions for fractional differential equations, Fixed Point Theory, 14(2013), No. 2, 507-522.

[5] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Survey in Mathematics and its Applications, 3(2008), pp. 1-12.

[6] R. P. Agrawal, M. Benchohra, S. Hamani, Boundary value problems for fractional differential equations, Georgian Mathematical Journal, 2009, vol. 16, 3, pp. 401-411.

[7] R. W. Ibrahim, s. Momani, On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3334(2007), pp. 1-10.

[8] M. Benchohra, S. Hamani, and J. Henderson, "Functional differential inclusions with integral boundary conditions," Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 2007, no. 15, pp. 1-13, 2007.

[9] S. Abbas, M. Benchohra, Existence for impulsive partial hperbolic differential equations of fractional order at variable times, Fixed Point Theory, 12(2011), 3-16.

[10] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integral and Derivatives (Theory and Applications ). Gordon and Breach, Switzerland, 1993.

[11] S. Q. Zhang, The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 252 (2000), 804-812.

[12] S. Q. Zhang, Existence of a positive solution for some class of nonlinear fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003), 136-148.

[13] S. Peciulyte, O. Stikoniene, and A. Stikonas, "Sturm-Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition," Mathematical Modelling and Analysis, vol. 10, no. 4, pp. 377-392, 2005.