



جامعة قاصدي مرباح ورقلة



كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات وإعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة وتحليل عددي

من إعداد الطالبة : زيدي فاطمة

الموضوع

طريقة مويجات لوجندر في حل معادلات تفاضلية
-تكاملية من رتب كسرية

تناقش يوم 2018/06/07 من طرف لجنة المناقشة :

رئيسا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	معمري محمد
ممتحنا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	عباسي حسين
مشرفا	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	الرتبة أستاذ مساعد "أ"	بن الشيخ ع/ الكريم

شكر و عرفان

الشكر و عرفان

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم

"من لم يشكر الناس لم يشكر الله"

الحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه وامتنانه ونشهد أن لا اله إلا الله وحده لا شريك له ونشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله الداعي إلى رضوانه صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه وأتباعه وسلم.

بعد شكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه لي لإتمام هذا البحث المتواضع أتقدم بجزيل الشكر إلى " الوالدين العزيزين الذين أعاناني وشجعاني على الاستمرار في مسيرة العلم والنجاح وإكمال الدراسة الجامعية والبحث كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى من شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ المحترم " بن هيف عبد الكريم الذي لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره الكبير على وتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن. إلى كل أساتذة قسم " الرياضيات " كما أتقدم بخالص شكري وتقديري إلى كل من ساعدني من قريب أو بعيد على إنجاز وإتمام العمل

" ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي أن أعمل صالحا ترضاه أدخلني برحمتك في عبادك الصالحين "

إهداء

الإهداء

أحمد الله عز وجل على منحه ودعوته لإتمام هذا البحث
إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أتمكن له أهله، إلى الإنسان الذي امتلك
الإنسانية بكل قوة، إلى الذي سهر على تعليمي بتضحيات بسام مترجمة في تديسه
للعلم، إلى مدرستي الأولى في الحياة **أمي** الغالي على قلبي أطل الله في
عمرك

إلى النبي وهبته قلعة كبدما كل العاء والحنان، إلى النبي صبرته على كل شيء،
التي رعنتني حق الرعاية وكانك سندي في الشدائد، وكانك دعواها لي بالتوفيق

إلى نبع الحنان **أمي** جزاها الله عنى الجزاء في الدارين
التي من يدعني كلما ندم الأمام لنيل المبتغى وضحي من أجلي لتكلمة مشاوري
زوجي — **بي** الغالي على قلبي

إلى إخوتي **" خالد ومحمد الجبار واسحاق وأنوارتي " زينب وأسماء**
التي طاب قلبه الطيب والنوايا الصادقة والتي ساعدتني في عملي هذا **صديقتي " نور**
المدي نصير "

إلى صديقاتي رفقاء دربي: **الرميضاء وعروى، فائزة، أسماء وربيعة**
والتي كل من تقاسمت معهن أفراحي وأحزاني صديقاتي في السكن الجامعي **وسيلة**
وفاطمة واسمان وزهية ودنيا

والتي كل من يحمل لقب **" زي كتي "**

وإلى كل من سقط مني اسمه سموا

وإلى كل طلبة سنة ثانية ماستر 2017-2018

أهدي لكم ثمرة هذا العمل المتواضع

الفهرس

2	1	التكامل والتفاضل الكسري
3	1.1	الدوال الخاصة
3	1.1.1	دالة غاما
4	2.1.1	دالة بيتا
4	3.1.1	علاقة دالة بيتا بدالة غاما
5	4.1.1	تكاملات كثيرة يمكن إيجادها بإستعمال الدالتين بيتا وغاما
5	2.1	التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل [1]
5	3.1	التفاضل الكسري بمفهوم Riemann-Liouville
5	4.1	المشتق الكسري بمفهوم Caputo [1]
6	5.1	مقدمة في المعادلات التكاملية
8	2	مويجات لوجندر وتقريب تابع
9	1.2	لمحة عن المويجات
9	1.1.2	المويجات
9	2.1.2	تعريف المويجات Wavlets
10	3.1.2	[14] التوابع المولدة من تابع الموجة
11	2.2	تحويل CWT المويجات المستمر
12	3.2	تحويل المويجات المتقطع Wavlet(DWT) Discrete Transform
13	4.2	التحليل المتعدد الدقة وتابع المقاس
13	1.4.2	التحليل المتعدد الدقة Multi-Resolution Analysis(MRA)
15	5.2	مويجات لوجندر
15	1.5.2	كثيرات حدود ليجاندر
15	2.5.2	تعاريف كثيرات حدود ليجاندر
24	3.5.2	مويجات لوجندر
25	4.5.2	مصنوفة العمليات للتكامل لمويجات لوجندر
28	3	مويجات لوجندر في حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية
29	1.3	حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الخطية
31	2.3	حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الغير خطية



31	3.3	تقريب الخطأ
35	4.3	تطبيقات عددية

مقدمة

في السنوات الأخيرة ، اجتذب حساب التفاضل والتكامل الكسري العديد من الباحثين بنجاح في مجالات مختلفة من العلوم والهندسة. أحد المزايا الرئيسية للحساب الكسري هو أن المشتقات الكسرية توفر منهجاً متفوقاً لوصف الذاكرة وخصائص وراثية لمختلف المواد والعمليات [19، 17، 9، 21]. المعادلات التفاضلية الكسرية و المعادلات التكاملية الكسرية يتم استخدامها لنمذجة الكثير من المشاكل العملية ، مثل المجال الاستقطاب العازلة ، الموجات الكهرومغناطيسية ، اللزوجة ، ومعادلات الانتشار [16، 8، 6، 3]. منذ تطبيقاتها الهائلة في العديد من التخصصات ، تم إيلاء اهتمام كبير إلى الحلول الدقيقة والحساسية للمعادلات التفاضلية الكسرية والتكاملية الكسرية حتى تقريب التفاضل الكسري للدوال الصعبة هو أمر شاق لأنه مشكلة غير متوقعة من المهم جداً استكشاف طرق الحل لهذه المعادلات التفاضلية الكسرية ومعادلات تكاملية كسرية. من أجل الحصول على حلول عالية الدقة ، وقد تم اقتراح طرق عديدة. وتشمل هذه الطرق طريقة التكرار المتغيرة [13] ، طريقة التحلل Adomian [5، 2] ، وطريقة التحويل التفاضلي المعمم [14، 12] ، وطريقة المويجات [22، 1] في هذه المقدمة، يمثل الهدف الرئيسي في إدخال طريقة مصفوفة العمليات الخاصة التي تعمل بطريقة مويجات Legendre لحل المعادلات التكاملية التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية. تستند الطريقة على تحويل المعادلة إلى جملة معادلات جبرية عن طريق تمديد الحل كما مويجات لوجندر مع معاملات غير معروفة. خصائص طريقة العمليات هي التحويل المعادلة التكاملية التفاضلية إلى معادلة جبرية. فهي لا تبسط المشكلة فحسب ، بل تسرع أيضاً عملية الحساب.

في هذه المقدمة نتطرق إلى :

الفصل الأول:

نتطرق فيه إلى بعض المفاهيم الأساسية في الحساب الكسري والتي نستعملها في كل من الفصل الثاني والثالث

الفصل الثاني: مقسم إلى جزئين: الجزء الأول: تقدم فيه لمحة عن المويجات وتحويل المويجة المستمر والمتقطع.

أما الجزء الثاني نتطرق فيه إلى تعريف كثير حدود لوجندر ومويجات لوجندر وخصائصها وتقريب تابع لمويجات لوجندر ودراسة مصفوفة العمليات

الفصل الثالث: ينقسم إلى 4 أجزاء:

الجزء الأول: يوضح طريقة تحويل المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات الرتب الكسرية الخطية وغير خطية إلى جملة معادلات غير خطية.

الجزء الثاني تحليل الخطأ

الجزء الثالث: تطبيق طريقة مويجات لوجندر على بعض المعادلات التفاضلية التكاملية ذات الرتب الكسرية الخطية وغير خطية ومقارنة النتائج مع الحلول الحقيقية وبعض الحلول الأخرى.

الفصل الأول

التكامل والتفاضل الكسري

قائمة المحتويات

3	الدوال الخاصة	1.1
5	التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل [1]	2.1
5	التفاضل الكسري بمفهوم Riemann-Liouville	3.1
5	المشتق الكسري بمفهوم Caputo [1]	4.1
6	مقدمة في المعادلات التكاملية	5.1



1.1 الدوال الخاصة

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتد عليها في هذه المذكرة , وهي:

1.1.1 دالة غاما

تعرف دالة غاما على النحو التالي :

$$\Gamma(n) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{n-1} e^{-x} dx \quad n > 0, x \in \mathbb{R}$$

فمثلا لإيجاد $\Gamma(2)$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{2-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(-\frac{M}{e^M} - \frac{1}{e^M} + 0 + e^0 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

قواعد الأساسية للدالة غاما:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad \forall n \neq 0 \quad .1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{إذا كانت } n \text{ عددا صحيحا فإن:} \quad .2$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad .3$$

ملاحظة 1 لا يمكن إيجاد $\Gamma(n)$ إذا كان n عددا صحيحا سالبا .

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0_+) = +\infty$$

$$0 < n \leq 1 \quad \text{دالة متناقصة من أجل}$$

مثال 1

$$\Gamma(4) = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$\frac{\Gamma(5)}{2\Gamma(4)} = \frac{4!}{2 \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{2 \times 3!} = \frac{4}{2} = 2$$



$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta = \pi \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

2.1.1 دالة بيتا

تعرف الدالة بيتا كمايلي:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad n > 0 \quad m > 0$$

فمثلا لإيجاد

$$\begin{aligned}B(2, 3) &= \int_0^1 x(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\ &= \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

ملاحظة 2

$$B(m, n) = B(n, m)$$

3.1.1 علاقة دالة بيتا بدالة غاما

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$B(2, 3) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} = \frac{1!2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

4.1.1 تكاملات كثيرة يمكن إيجادها بإستعمال الدالتين بيتا وغاما

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m, n) \quad .1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1 \quad .2$$

2.1 التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل [1]

التكامل الكسري بمفهوم ريمان ليوفيل يعطى بالعلاقة:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, \quad (1.1)$$

$$J^0 f(x) = f(x) \quad (2.1)$$

3.1 التفاضل الكسري بمفهوم Riemann-Liouville

لنفرض أن $\alpha, a, t \in \mathbb{R}, \alpha > 0, t > a$

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.1)$$

4.1 المشتق الكسري بمفهوم Caputo [1]

لنفرض أن $\alpha, a, t \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(r)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha+1-r}} d\tau, & 0 \leq r-1 < \alpha < r, \\ \frac{d^r}{dx^r} f(x), & \alpha = r \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.1)$$



5.1 مقدمة في المعادلات التكاملية

المعادلة التكاملية في علم الرياضيات هي معادلة حيث يظهر فيها دالة غير مُعرفة بجوار إشارة التكامل، وهناك صلة كبيرة بين المعادلات التكاملية و المعادلات التفاضلية، وفي بعض المسائل يمكن إعادة صياغتها بإحدي الطريقتين، على سبيل المثال معادلات ماكسويل. النوع الأكثر شيوعاً من المعادلات التكاملية يُدعى معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول وتكون علي شكل:

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

ومن خلال تدوينات العالم جورج براون أركفين فإن φ هي دالة غير معروفة، f هي دالة معروفة، و k هي دالة أخرى من متغيرين معروفة وعادة ما تُدعى دالة كيرنل، ويجب ملاحظة أن نهايات التكامل عبارة عن وهذا ما يميز دالة فريدهولم.

إذا كانت الدالة الغير معروفة توجد داخل وخارج التكامل فإنها تُدعى دالة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني وتكون علي شكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

حيث المتغير λ هو معامل غير معروف، والذي يلعب نفس دور متجه ذاتي في الجبر الخطي. وإذا كانت إحدى النهايات للتكامل متغيرة القيمة فإنها تُدعى معادلة فولتيرا. ومعادلة فولتيرا من النوع الأول والثاني تكون على الشكل الآتي بالترتيب:

$$f(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad f(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt.$$

وإذا كانت الدالة f في المعادلات السابقة تساوي صفرًا فإنها تُدعى معادلة تكاملية متجانسة، وأما إذا كانت f بقيمة غير صفرية فإنها تُدعى معادلة تكاملية غير متجانسة. الحل العددي والمعادلات التكاملية ليس لها مدلول إذا عادة لا يكون لها حل تحليلي ويجب أن يتم حلها عددياً، ومثال علي ذلك هو حساب معادلة المجال الكهربائي التكاملية أو معادلة المجال المغناطيسي التكاملية علي جسم مُشكل بإحكام في مسائل التشتت الكهرومغناطيسي.

وهناك طريقة للحل عددياً تتطلب متغيرات جديدة واستبدال التكامل بطريقة التربيع.

$$\sum_{j=1}^n w_j K(s_i, t_j) u(t_j) = f(s_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

من ثم فإننا الآن لدينا نظام بعدد معادلات n ومتغيرات عددها n وعن طريق حل تلك المعادلات فإننا نحصل على قيمة لتلك المتغيرات.

أنواع مختلفة: $u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)$. يتم تصنيف المعادلات التكاملية طبقاً لثلاث تفرعات ليكون الكل هو ثمان

نهايات التكامل كلتا النهايتين ثابتتين: معادلة فريدهولم التكاملية

إحدي النهايات متغيرة: معادلة فولتيرا التكاملية

مكان المعادلة الغير معروفة

بداخل التكامل فقط: النوع الأول

بداخل وخارج التكامل: النوع الثاني

طبيعة الدالة المعروفة f

تساوي صفرًا: متجانسة

لا تساوي صفرًا: غير متجانسة

والمعادلات التكاملية مهمة جداً في كثير من التطبيقات فكثيراً ما يتم استخدام المعادلات التكاملية بداخلها مثل انتقال الطاقة المشعة و تموج الحبل والأغشية و محور العجلة. ومسائل التوج أو التذبذب يمكن أن يتم حلها بواسطة المعادلات التفاضلية.

ومعادلات فولتيرا وفريدهولم التكاملية كلاهما معادلات تكاملية خطية نتيجة للسلوك الخطي ل φ خلال التكامل، ومعادلة فولتيرا الغير خطية يكون لها صيغة عامة على شكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) F(x, t, \varphi(t)) dt,$$

حيث F دالة معروفة.

الفصل الثاني

مويجات لوجندر وتقريب تابع

قائمة المحتويات

9	1.2	لمحة عن المويجات
11	2.2	تحويل CWT المويجات المستمر
12	3.2	تحويل المويجات المتقطع Wavlet(DWT) Discrete Transform
13	4.2	التحليل المتعدد الدقة وتابع المقاس
15	5.2	مويجات لوجندر

1.2 لمحة عن الموجات

1.1.2 الموجات

تعرف الموجة على أنها تابع تذبذبي مثل توابع الجيب والجيبي تمام، أما الموجة فهي تعدّ موجة صغيرة أي تابع يمثل ذبذبة واحدة.

والسبب في رواج الموجات هو فعاليتها في تمثيل ومعالجة الإشارات غير المستقرة، وهي حالة معظم الإشارات المطلوب معالجتها عادة. بالإضافة أيضا إلى تنوعها، حيث هناك العديد من الموجات التي نستطيع أن نختار منها ما يناسب مسألتنا المعالجة، والتي أيضا تعطي تنوعا في حلول المسائل مما يترك الباب مفتوحا للباحثين لإيجاد موجات جديدة تعطي نتائج أفضل من الموجات الحالية.

وتعدّ نظرية الموجات من الناحية الرياضية نظرية مكتملة تقريبا، ولكن الأبحاث الحالية تدور حول تطوير تطبيقاتها وإيجاد موجات جديدة أكثر ملاءمة للمسائل المطروحة في الوقت الراهن.

الموجات وتحويل الموجات للإشارات المستمرة

نقدم في هذا الفصل تعريفا للموجات وعرضا لبعض المبرهنات الأساسية، وسنقوم أيضا بدراسة تحويل الموجات المستمر وتحويل الموجات المتقطع للإشارات المستمرة، وسنجد في هذا الفصل أنّ الموجات تعطي النتائج المطلوبة في وصف الحالة الفيزيائية للإشارة في حالتها المستقرة والإشارات غير المستقرة.

2.1.2 تعريف الموجات Wavlets

تعرف الموجات بأنها توابع ذات قيم حقيقية أو عقدية وذات متغير حقيقي (الزمن) $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ وتحقق عدة خواص:

1. تكامل التابع على كامل المحور الحقيقي يساوي الصفر.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0 \quad (1.2)$$

2. أن ينتمي إلى الفضاء $L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty \quad (2.2)$$

نسمي Ψ تابع الموجة الأم أو موجة Wavlet.

مبرهنة 1 العلاقتان (b) و (a) متكافئتان، وإذا حقق تابع Ψ العلاقة (c) فإنه يحقق (b) و (a).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0 \quad (a)$$

$$\tilde{\Psi}(0) = 0 \quad (b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\Psi}(w)|^2}{w} dw < \infty \quad (c)$$

حيث $\tilde{\Psi}$ هو تحويل فورييه ل Ψ ونسمي الشرط (c) شرط القبول *Admissibility Condition*

3.1.2 [14] التوابع المولدة من تابع الموجية

نعرف أسرة التوابع $\Psi_{a,b}(x)$ المولدة من تابع الموجية Ψ بالعلاقة:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

حيث a وسيط يدل على المقاس scale وقياس درجة انضغاط الدالة .

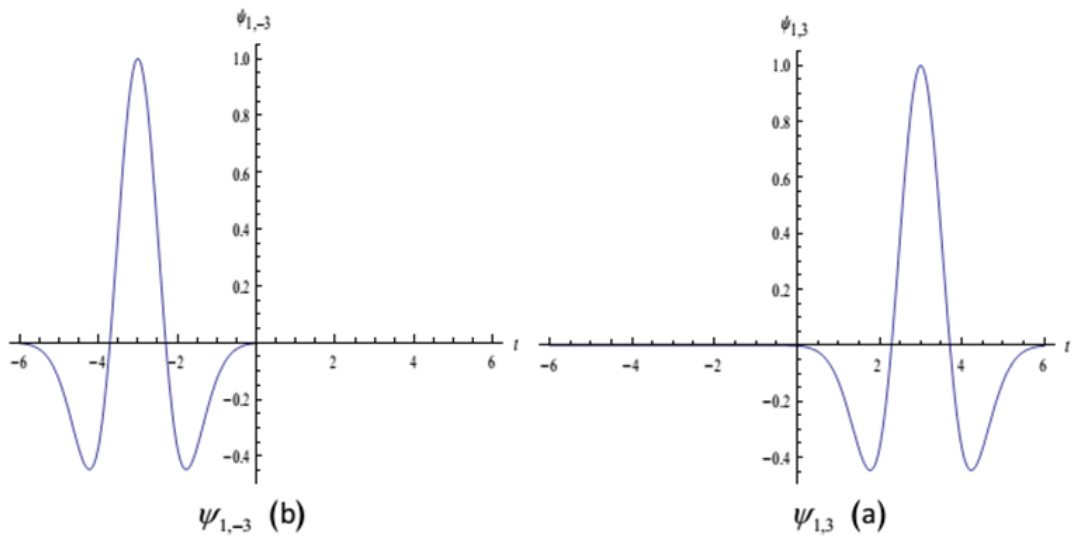
أما b وسيط يدل على الانسحاب على محور الزمن .

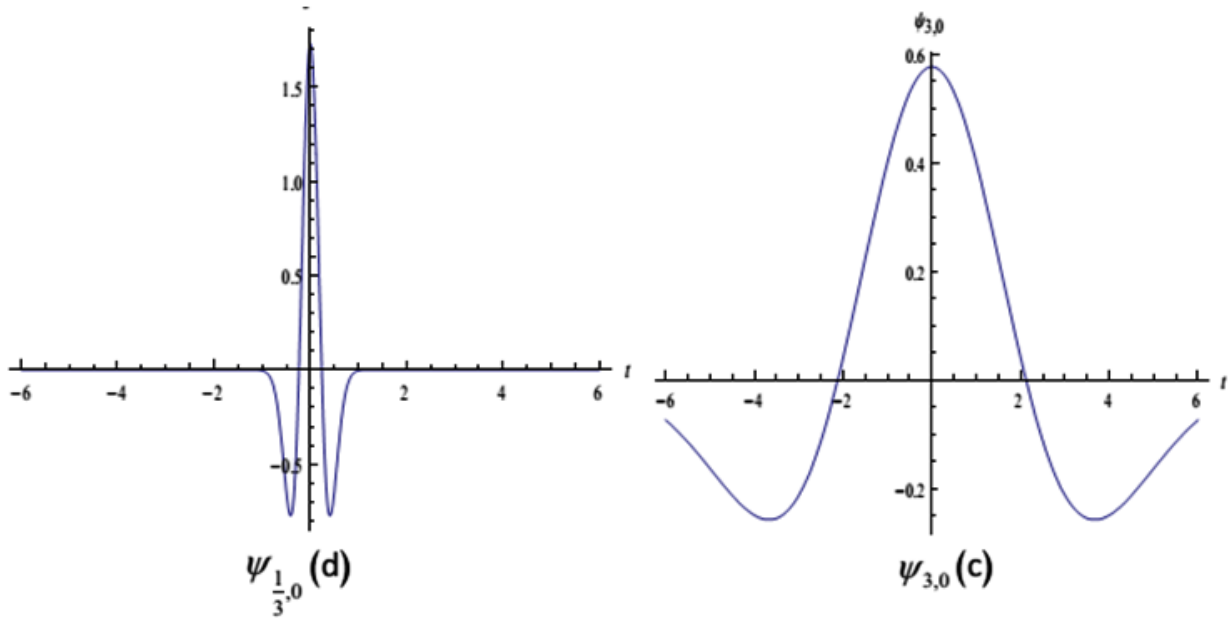
نلاحظ أنّ

$$\Psi_{1,0}(t) = \Psi(t)$$

مثال 2 الأسرة المولدة بموجبة القبة المكسيكية:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(1 - 2\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}$$





2.2 تحويل الموجبات المستمر

ليكن لدينا التابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ نعرف تحويل الموجبات المستمر للتابع f بالنسبة للموجة Ψ كما يلي :

$$CWT : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

(4.2)

$$CWT(f) = W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\Psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\Psi}_{a,b}(t) dt$$

تدل $\bar{\Psi}$ على المرافق العقدي للتابع Ψ و a, b أعداد حقيقية و $a \neq 0$ بما أن Ψ و f ينتميان إلى الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ فيمكننا كتابة:

$$W(a, b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle \quad (5.2)$$

ومن المتراجحة كوشي شوارتز نجد:

$$|W(a, b)|^2 \leq \|f\|^2 \|\Psi_{a,b}\|^2 \quad (6.2)$$

أي أن تحويل الموجبات موجود ومحدود لأن التتابع Ψ و f ذات نظم محدود.
ومن تعريف الإلتفاف نجد أيضا:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\Psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\Psi} \left(\frac{x}{a} \right) dx = f * \bar{\Psi}_{a,0}(-b) \quad (7.2)$$

باعتبار CWT مؤثر من الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ إلى فضاء التوابع لمتغيرين حقيقيين، فإنه يمكن كتابة :

$$W_{\Psi}[f] \equiv W(a, b)$$

أي أنّ $W_{\Psi}[f]$ تعني تحويل الموجبات المستمر للتابع f بالنسبة للموجة Ψ .

3.2 تحويل الموجبات المتقطع Wavlet(DWT) Discrete Transform

وجدنا مما سبق أنّه لإيجاد تحويل الموجبات المستمر يجب إجراء التحويل من أجل جميع مقاسات الإشارة وينتج عن هذا كمية كبيرة من المعلومات، ولكن ليس جميع هذه المعلومات لازمة لتوصيف الإشارة أي ستولد معلومات كثيرة وزائدة عن الحاجة، ولهذا تمّ إيجاد تحويل الموجبات المتقطع الذي يجري التحويل من أجل عدد كاف من المقاسات.

وجدنا أنّ التوابع المولدة بتابع موجبة Ψ في التحويل المستمر تعطي بالعلاقة:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$$

وتحويل الموجبات المستمر لتابع

$f \in L^2(\mathbb{R})$ بالنسبة ل Ψ يعطي بالعلاقة:

$$CWT(f) = W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\Psi_{a,b}(t)} dt$$

أي لإيجاد تحويل الموجبات لتابع نحن بحاجة إلى معرفة $W(a, b)$ على الساحة $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ وهذا مكلف حسابيا. فالحل هو حساب التحويل من أجل قيم محددة. نأخذ قيم خاصة ل a, b

$$a = \{a_0^{-j}\}_{j \in \mathbb{Z}}; b = \{ka_0^{-j}b_0\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \quad (8.2)$$

ومنه:

$$\Psi_{j,k}(t) = a_0^{\frac{j}{2}} \Psi\left(\frac{t - ka_0^{-j}b_0}{a_0^{-j}}\right) = a_0^{\frac{j}{2}} \Psi(a_0^j t - kb_0) \quad (9.2)$$

حيث $a_0 > 1, b_0 > 0$ قيم ثابتة. ونأخذ غالبا $a_0 = 2, b_0 = 1$ (حسب العالم شانون). وتصبح التوابع المولدة من الموجبات المستخدمة في هذا التحويل هي:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k) \quad (10.2)$$

ويكون تحويل الموجبات المتقطع معرفًا بالعلاقة:

$$DWT(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{\frac{j}{2}} \bar{\Psi}(2^j t - k) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\Psi}_{j,k}(t) dt; j, k \in \mathbb{Z} \quad (11.2)$$

أي أن الفرق الأساسي بين تحويل الموجبات المتقطع وتحويل الموجبات المستمر هو أن التحويل المتقطع يستخدم عددا محددًا من المقاسات بدلا من إجراء التحويل من أجل كافة المقاسات وينتج عن التحويل كمية كافية من المعلومات بحيث يكون زمن الحساب قليلا مع الحفاظ على المعلومات الأساسية الموصفة للإشارة (أي دون خسارة معلومات هامة).

تعريف 1 [10] نقول عن الموجبة Ψ أنها موجبة متعامدة منظمة إذا كانت المجموعة $\{\Psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ متعامدة ومنظمة في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$

4.2 التحليل المتعدد الدقة وتابع المقاس

سنقوم في هذا الفصل بتعريف التحليل المتعدد الدقة وتابع المقاس ومرشحة المقاس وعرض بعض المبرهنات والخواص الهامة.

وسنجد في هذا الفصل أن لكل تحليل متعدد الدقة تابع مقاس تعريفًا والذي بدوره يعرف مرشحة مقاس، وسنعرض بعض المبرهنات التي تبين أننا نستطيع إيجاد تحليل متعدد الدقة انطلاقًا من تابع مقاس وسنوجد الخواص اللازمة لكي تولد المرشحة تابع مقاس.

1.4.2 التحليل المتعدد الدقة (MRA) Multi-Resolution Analysis

إن التحليل المتعدد الدقة (MRA) عبارة عن متتالية $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ من الفضاءات الجزئية من الفضاء $L^2(\mathbb{R})$ بحيث تحقق الخواص التالية:

(1) الفضاءات المتداخلة أي:

$$\forall j \in \mathbb{Z} : V_j \subset V_{j+1}$$

(2) يشكل اجتماع هذه الفضاءات مجموعة كثيفة في $L^2(\mathbb{R})$ أي:

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$



(3) تقاطع هذه الفضاءات يقتصر على العنصر الصفري .أي:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

(4) تتحقق العلاقة التالية:

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0$$

(5) يوجد تابع $\varphi \in V_0$ بحيث تشكل المجموعة $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ قاعدة متعامدة منظمّة لـ V_0 نسمي φ تابع المقاس المرتبط بالتحليل المتعدد الدقة $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ أو تابع الموجة الأب.

5.2 موجبات لوجندر

1.5.2 كثيرات حدود ليجاندر

2.5.2 تعاريف كثيرات حدود ليجاندر

التعريف المباشر لكثيرات حدود ليجاندر :

كثيرات حدود ليجاندر هي كثيرات الحدود المعرفة على الفتر $[1, -1]$ بالعلاقة:

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (n \geq 1) \quad (12.2)$$

حيث $[]$ تعني الجزء الصحيح. $P_n(x)$ كثيرات الحدود من الدرجة n للمتغير x .

$$n!! = n(n-2)(n-4) \dots 2, \quad (n = 2k),$$

$$n!! = n(n-2)(n-4) \dots 3.1(n = 2k+1). 0! = 0!! = 1$$

هذا نورد كثيرات الحدود هذه من $P_0(X)$ وحتى $P_{10}(X)$

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

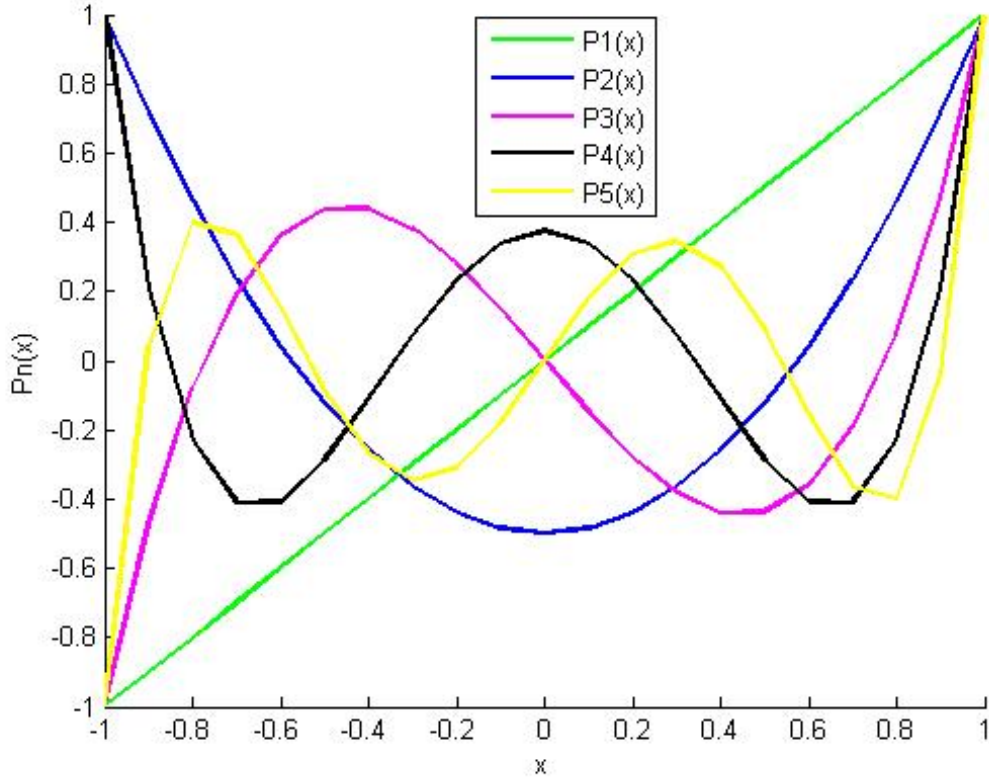
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(23x^6 - 315x^4 + 15x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{1}{48}(1287x^7 - 2049x^5 + 945x^3 - 105x),$$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(1237x^8 - 16024x^6 + 630x^4 - 1260x^2 + 35),$$

$$P_9(x) = \frac{1}{256}(35530x^9 - 51480x^7 + 4036x^5 - 105x^3 + 630x),$$

$$P_{10}(x) = \frac{4}{256}(24086x^{10} - 109395x^8 + 360360x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 36).$$



شكل 1.2: تمثيل لبعض حدوديات ليجاندر

تعريف كثيرات حدود ليجاندر بالاشتقاق :

يمكن تعريف كثير حدود ليجاندر من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة 2 تعطي كثيرات حدود ليجاندر من أجل $x \in [-1, 1]$ بعلاقة رودريدج

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n \geq 0. \quad (13.2)$$

حيث الثوابت C_n كيفية كما يمكن أن تأخذ قيما معطاة بشكل ملائم.

الإثبات 1 كثير الحدود $X_n(x)$ لها n جذر محتوى في المجال $[-1, 1]$ ولليسر نضع $C_n = 1$ عندها من الواضح أن $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$ والمشتقات لهذا الحد من المراتب $0, 1, 2, \dots, n - 1$ تنعدم في النقطتين $x = 1, x = -1$ وعندها حسب مبرهنة "رول" ينعدم المشتق الأول في نقطتين تقعان بين -1 و 1 وأيضا اعتمادا على نفس المبرهنة فإن المشتق الثاني ينعدم في نقطتين تقعان بين -1 و 1 وهكذا ... اعتمادا على نفس المبرهنة المشتق الثاني من المرتبة $n - 1$ ينعدم في $n - 1$ نقطة أي له $n - 1$ جذرا

و جميع هذه الجذور تقع بين 1 و -1 وحسب قاعدة "لايبنتز" في الإشتقاق يمكن أن نكتب العلاقة

$$\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} = (x + 1)^n \frac{d^n(x - 1)^n}{dx^n} + C_n^1 \frac{d(x + 1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x - 1)^n}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^n(x + 1)^n}{dx^n} (x - 1)^n$$

باعتبار $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ وعن هذا ينتج أن $X_n(1) = 2^n n!$ و $X_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$

لذا بإختيار الثابت بالشكل $C_n = \frac{1}{2^n n!}$ نجد كثير حدود زمر لها بالرمز $P_n(x)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (n \geq 0) \quad (14.2)$$

ملاحظة 3 يمكن الحديث على كثيرات حدود ليجاندر المعرفة على الفترة $[a, b]$ والتي تعطى بالشكل التالي:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x - a)^n (x - b)^n]}{dx^n}. \quad (15.2)$$

يمكن تطبيق دستور لايبنتز على هذه العلاقة لإعطائها بتعبير مماثل للتعبير الذي أوردناه أعلاه.

ملاحظة 4 يمكن اختيار التحويل الخطي

$$x = \alpha t + \beta \quad (16.2)$$

للإنتقال من الشكل (15.2) إلى الشكل (14.2) بعد ضربه بثابت ملائم وعندها بوضع: $x = b$ من أجل $t = 1$ و $x = a$ من أجل $t = -1$ نجد المعادلتين

$$a = -\alpha + \beta, \quad (17.2)$$

$$b = \alpha + \beta \quad (18.2)$$

ومن المعادلتين (17.2)، (18.2) نجد

$$\beta = \frac{a + b}{2} \quad (19.2)$$

$$\alpha = \frac{b - a}{2} \quad (20.2)$$

و بتعويض المعادلتين (19.2) و (20.2) في المعادلة (16.2) يأخذ التحويل الخطي الشكل التالي:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \quad (21.2)$$

وعندها من المعادلة (21.2) نجد المعادلتين التاليتين:

$$x - b = \frac{b-a}{2}(t-1) \quad (22.2)$$

$$x - a = \frac{b-a}{2}(t+1), \quad (23.2)$$

بضرب المعادلة (22.2) في المعادلة (23.2) و في الأخير نجد:

$$(x-a)(x-b) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 (t^2-1) = c(t^2-1) \quad (24.2)$$

يمكن إعطاء كثيرات حدود ليجاندر بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 3 كثيرات حدود ليجاندر $P_n(x)$ المعرفة على الفترة $[-1, 1]$ يمكن إعطاؤها بالشكل

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \quad (25.2)$$

الإثبات 2 وجدنا أن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \quad (26.2)$$

ونعلم أن

$$(2m)! = 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m m!$$

أي

$$\frac{(2m)!}{m!} = 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_m \quad (27.2)$$

حيث أن

$$\left(\frac{1}{2}\right)_m = \frac{(2m-1)!!}{2^m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m}$$

ومن أجل $m = n - k$ في المعادلة (27.2) نجد

$$\frac{(2n - 2k)!}{(n - k)!} = 2^{2n-2k} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}$$

ومنه

$$2^{n-2k} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} = \frac{(2n - 2k)!}{2^n(n - k)!} \quad (28.2)$$

وبتعويض العلاقة (28.2) في العلاقة (26.2) نستنتج أن:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n - 2k)! x^{n-2k}}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} \quad (29.2)$$

وبإستخدام الرمز $D = \frac{d}{dx}$ نجد أن

$$D^s X^m = \frac{m! X^{m-s}}{(m - s)!}, \quad (30.2)$$

ومنه من أجل $X = x$ و $m = 2n - 2k$, $s = n$ نجد

$$D^n x^{2n-2k} = \frac{(2n - 2k)! x^{n-2k}}{(n - 2k)!} \quad (31.2)$$

وبتعويض العلاقة (31.2) في العلاقة (29.2) ينتج عن هذا

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{D^n x^{2n-2k}}{2^n k! (n - k)!} \quad (32.2)$$

إذا

$$P_n(x) = \frac{D^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k} \quad (33.2)$$

حيث $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$ ومن أجل $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n$ و $0 \leq 2n - 2k < n$ فإن:

العلاقة الأخيرة لكثير الحدود $P_n(x)$ تأخذ الشكل $D^n x^{2n-2k} = 0$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{D^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2^n n!} D^n [(x-1)^n (x+1)^n] \end{aligned} \quad (34.2)$$

التي تسمى "علاقة رودريدج" وبعد الأخذ بعين الإعتبار "علاقة لايبنتز" في الإشتقاق التي هي

$$D^n(U, V) = \sum_{k=0}^n C_n^k (D^k U) (D^{n-k} V) \quad (35.2)$$

بفرض $U = (x-1)^n$, $V = (x+1)^n$

نضع $X^m = V$ أي $m = n$ و $s = n - k$ وبالتعويض في العلاقة (30.2) نجد

$$D^{n-k} V = D^{n-k} (x+1)^n = \frac{n!(x+1)^k}{(k)!} \quad (36.2)$$

وبوضع $X^m = U$ أي $m = n$ و $s = k$ وبالتعويض كذلك في العلاقة (30.2) نجد

$$D^k U^n = D^k (x-1)^n = \frac{n!(x-1)^{n-k}}{(n-k)!} \quad (37.2)$$

وكذلك بتعويض العلاقتين (36.2) (37.2) في العلاقة (35.2) نجد

$$D^n(U, V) = D^n [(x-1)^n (x+1)^n] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!(x-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!(x+1)^k}{(k)!} \quad (38.2)$$

وفي الأخير بتعويض العلاقة (38.2) في العبارة الأخيرة من العلاقة (34.2) نجد العلاقة التالية:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!(x-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!(x+1)^k}{(k)!} \quad (39.2)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل (25.2) والمبرهنة قد أثبتت.

ملاحظة 5 الشكل (13.2) هو تعبير آخر للعلاقة (25.2).

تعريف كثيرات حدود ليجاندر بالمكاملة :

يمكن تعريف كثيرا حدود ليجاندر اعتمادا على المكاملة بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 4 تعرف كثيرا حدود ليجاندر من الدرجة n من أجل $x \in [a, b]$ بدلالة كثيرا حدود من الدرجة $2n$ نزمز لها بالرمز $R(x) = R_{2n}(x)$. وبحيث لكل كثيرا حدود $Q(x)$ من كثيرا حدود ليجاندر التي هي من درجة أقل من n يتحقق أن

$$\int_a^b R_n(x)Q_n(x)dx = 0 \quad (40.2)$$

و

$$(41.2)$$

$$R(a) = R'(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0, \quad R(b) = R'(b) = \dots = R^{(n-1)}(b) = 0.$$

الإثبات 3 يمكن إيجاد كثيرا حدود $X_n(x)$ من الدرجة n معرفة من أجل $x \in [a, b]$ باعتبار a, b ثابتان اختياريان وبحيث لكل كثيرا حدود $Q_n(x)$ أقل من n ومعرفة على نفس المجال يتحقق أن

$$\int_a^b X_n(x)Q_n(x)dx = 0$$

إن لكل كثيرا حدود $X_n(x)$ من الدرجة n يمكن النظر إليها كمشقت من الدرجة n لكثير حدود من الدرجة $2n$ ولتكن $R_n(x)$. أو أن $R_n(x)$ يمكن الحصول عليها من $X_n(x)$ بالمكاملة n مرة متتالية وفي كل مرة نختار ثابت التكامل بحيث أن $R(a) = R'(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0$ ولهذا تؤول المسألة إلى إيجاد كثيرا الحدود $R_n(x)$ الذي يحقق الشرط (40.2) لكل كثيرا حدود $Q_n(x)$ من درجة أقل من n وباجراء مكاملة الطرف الأيسر في (40.2) بالتجزئة نجد

$$\int_a^b R^n(x)Q_n(x)dx = [Q(x)R^{n-1}(x) - Q'(x)R^{n-2}(x) + \dots + (-1)^{n-1}Q(x)^{n-1}R(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b Q^n(x)R(x)dx$$

وإذا أخذنا (41.2) بعين الاعتبار كون $Q^n(x) \equiv 0$ لكل كثيرا حدود درجته أصغر من n فإننا نجد أن

$$Q(b)R^{n-1}(b) - Q'(b)R^{n-2}(b) + \dots + (-1)^{n-1}Q(b)^{n-1}R(b) = 0$$

والقيم $Q(b), Q'(b), Q^n(b), \dots, Q^{n-1}(b)$ هي قيم عديدة كيفية وهكذا نجد علاقات التساوي

$R(b) = R'(b) = R^n(b) = \dots = R^{n-1}(b) = 0$ ومنه نجد أن لكثير الحدود $R(x)$ الجدران a, b

من المرتبة n ويكون له الشكل $R(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ وبالتالي نجد أن

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n [(x-a)^n(x-b)^n]}{dx^n}$$

أو باختيار $a = -1, b = 1$ و $C_n = \frac{1}{2^n n!}$ نجد (15.2) وعادة نختار $P_0(x) = 1$ من تعريف كثيرات حدود ليجاندر فإن

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_n(x)dx = 0$$

حيث $Q_n(x)$ كثيرات حدود ليجاندر التي هي من درجات أقل من n ولهذا فإنه من أجل $m \neq n$ نجد

$$\int_{-1}^1 P_n(x)Q_m(x)dx = 0$$

لكن من أجل $m = n$ وبالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{dx^{2n}(x^2 - 1)^n}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx \\ &= 2(2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2}{2n + 1}. \end{aligned}$$

التعريف من خلال الدوال المولدة :

تعريف كثيرات حدود ليجاندر اعتمادا على الدالة المولدة نرده في المبرهنة التالية:

مبرهنة 5 تعطي كثيرات حدود ليجاندر بدلالة الدالة المولدة وفق العلاقة التالية:

$$G(t, x) = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (42.2)$$

الإثبات 4 لنشر الدالة $G(t, x)$ وفق ثنائي الحد حيث نجد

$$\begin{aligned} G(t, x) &= (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \\ &= [1 - (2x + t)t]^{-1/2} \\ &= -1[-t(2x - t)] + \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} + [-t^2(2x - t)^2] + \dots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2r + 1)!!}{2^n \cdot r!} (-1)^r t^r (2x - t)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^r \cdot r!} \sum_{q=0}^{\infty} C_q^r (-1)^q t^r (2x)^{r-q} \end{aligned}$$

والمعاملات أمام t^n هي

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \binom{n}{2k}}{k!(n-2k)!} (2x)^{k-2n}$$

وبهذا يتم الاثبات .

نلاحظ أن كثيرات الحدود الناتجة هي كثيرات الحدود من الدرجة n لهذا نكتب

$$P_n(x) = \frac{(2)^k \binom{n}{2k}}{k!(n-2k)!} x^n + \pi_{n-2}(x),$$

حيث π_{n-2} كثيرات حدود من الدرجة $n-2$ أو أقل .

ملاحظة 6 يمكن نشر الدالة المولدة بالشكل

$$\begin{aligned} G(t, x) &= (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= [(1 - xt)^2 - t^2(x^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1 - xt} \left[1 - \frac{t^2(x^2 - 1)}{(1 - xt)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{1}{2}_k}{k!(1 - xt)^{2k-1}} t^{2k}(x^2 - 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{1}{2}_k (2k+1)_n (x^2 - 1)^k t^{2k-n}}{k!n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{1}{2}_k (n+2k)! (x^2 - 1)^k t^{n+2k}}{k!(2k)!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{1}{2}_k n! (x^2 - 1)^k x^{n-2k}}{k!(2k)!(n-2k)!} t^n \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(x^2 - 1)^k x^{n-2k}}{2^{2k} (k!) (n-2k)!}$$

ملاحظة 7 يمكن التعبير عن حدود ليجاندر بعلاقات مكافئة للعلاقة (12.2) بالشكل

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{k!(n-k)!(n-2k)!}$$

و من أجل أدلة زوجية أو فردية نكتب

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \left(1 - \frac{2n(2n+1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{4!} x^4 - \dots \right)$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} \left(x - \frac{2n(2n+3)}{3!} x^3 + \frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{5!} x^5 - \dots \right).$$

3.5.2 موجبات لوجندر

موجبات لوجندر $\psi_{nm}(x)$ معطاة على المساواة التالية:

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2m+1}{2}\right)^{1/2} 2^{k/2} p_m(2^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-1}{2^k} \leq x < \frac{\hat{n}+1}{2^k} \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases} \quad (43.2)$$

حيث $k = 1, 2, \dots, \hat{n} = 2n - 1, n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, m = 0, 1, \dots, M - 1$ حدود لوجندر و M عدد موجب و ثابت ، $p_m(x)$ هي كثير حدود لوجندر ذات رتبة m الدالة $f(x) \in L^2[0, 1]$ قد تتمدد بموجبات لوجندر كما هو موضح

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \quad (44.2)$$

حيث $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ و \langle, \rangle هو ناتج الضرب بين $f(x)$ و $\psi_{nm}(x)$. إذا كانت السلسلة محدودة في المعادلة (44.2) ، ثم يمكن كتابة المعادلة (44.2) كما يلي

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) = c^T \Psi(x), \quad (45.2)$$

حيث C و $\Psi(x)$ هما $\hat{m} = 2^{k-1}$ شعاع عمودي تعطي بي

$$C = [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1M-1}, c_{20}, c_{21}, \dots, c_{2M-1}, c_{2^{k-1}0}, c_{2^{k-1}1}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T, \quad (46.2)$$

$$(47.2)$$

$$\Psi(x) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \dots, \psi_{1M-1}, \psi_{20}, \psi_{21}, \dots, \psi_{2M-1}, \dots, \psi_{2^{k-1}0}, \psi_{2^{k-1}1}, \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}]^T.$$

للتبسيط، نكتب المساواة (45.2) بالشكل

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_i \psi_i(x) = C^T \Psi(x), \quad (48.2)$$

حيث $c_i = c_{nm}, \psi_i = \psi_{nm}$ يتم تحديد المؤشر i بواسطة العلاقة $i = M(n-1) + m + 1$. لذلك ، لدينا

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_M, c_{M+1}, \dots, c_{2M}, \dots, c_{M(2^{k-1}-1)+1}, \dots, c_{\hat{m}}]^T, \quad (49.2)$$

$$\Psi(x) = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, \psi_{M+1}, \dots, \psi_{2M}, \dots, \psi_{M(2^{k-1}-1)+1}, \dots, \psi_{\hat{m}}]^T. \quad (50.2)$$

وبالمثل، الدوال الكيفية لمتغيرين $u(x, y)$ معرفة على طول المجال $[0, 1) \times [0, 1)$ قد يتم تمديدها الى اساس موجبات لوجندر

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^{\hat{m}} \sum_{j=1}^{\hat{m}} u_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y) = \Psi^T(x) U \Psi(y), \quad (51.2)$$

حيث $U = [u_{ij}]$ و $u_{ij} = \langle \psi_i(x), \langle u(x, y), \psi_j(y) \rangle \rangle$. نحقق التقارب بين تمدد موجبات لوجندر في النظريات التالية.

مبرهنة 6 (11) الدالة $f(x)$ ، المعرفة $[0, 1]$ ، هي مع المشتق الثاني المحدود ، على سبيل المثال $|f''(x)| \leq M$ ، يمكن تمديده كمجموع لا بأس به من موجبات لوجندر ، والسلسلة تتقارب بشكل موحد للدالة $f(x)$ ، وهذا هو ،

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x)$$

حيث $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ ، و \langle , \rangle هو ناتج الضرب بين $f(x)$ و $\psi_{nm}(x)$.

مبرهنة 7 (11) اذا كانت الدوال المستمرة $u(x, y)$ معرفة على المجال $[0, 1) \times [0, 1)$ يحد من المشتقات الجزئية الرابعة المختلطة $|\partial^4 u(x, y) / \partial x^2 \partial y^2| \leq \hat{M}$ ثم يتقارب توسع موجبات لوجندر ل $u(x, y)$ بشكل موحد.

4.5.2 مصفوفة العمليات للتكامل لموجبات لوجندر

في هذا الفصل ، قد نبسط مصفوفة العمليات للتكامل الكسري لموجبات لوجندر، يمكن العثور على مقدمة أكثر تفصيلاً في [7]. بصرف النظر عن موجبات لوجندر ونعتبر مجموعة أساس أخرى من دوال القطع

النبضية تم تحديد مجموعة هذه الدوال، خلال المجال $[0,1]$ ، معرفة ب: [10]

$$b_i(x) = \begin{cases} 1, & ih \leq x < (i+1)h \quad i = 0, 1, 2, \dots, \hat{m} - 1 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases} \quad (52.2)$$

مع قيمة عدد موجبة ل \hat{m} و $h = 1/\hat{m}$. سيتم في هذا البحث استخدام الخصائص التالية لدوال القطع النبضية:

$$b_i(x)b_j(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ b_i(x), & i = j, \end{cases} \quad (53.2)$$

$$\int_0^1 b_i(x)b_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{\hat{m}}, & i = j, \end{cases} \quad (54.2)$$

لتكن $B(x) = [b_0(x), b_1(x), \dots, b_{\hat{m}-1}(x)]^T$ نفرض

$$J^\alpha(B(x)) \approx F^\alpha B(x) \quad (55.2)$$

حيث F^α تسمى مصفوفة العمليات للتكامل الكسري للدوال القطع النبضية [10]، والآن

$$F^\alpha = h^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{\hat{m}-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{\hat{m}-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \xi_{\hat{m}-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

و

$$\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \hat{m} - 1$$

هذه هي العلاقة بين دوال القطع النبضية وموجبات لوجندر، أي [18]

$$\Psi(x) = \Phi B(x), \quad (56.2)$$

حيث $i = 0, 1, \dots, \hat{m} - 1$. $x_i = i/\hat{m}$, $\Phi = [\Psi(x_0), \Psi(x_1), \dots, \Psi_{\hat{m}-1}]$

إذا J^α عبارة عن عمليات تكاملية كسرية لموجبات لوجندر، نحصل على:

$$J^\alpha \Psi(x) \approx P^\alpha \Psi(x), \quad (57.2)$$

حيث P^α تسمى مصفوفة العمليات التكاملية الكسرية لموجبات لوجندر بإستعمال (55.2) و(56.2)، لدينا

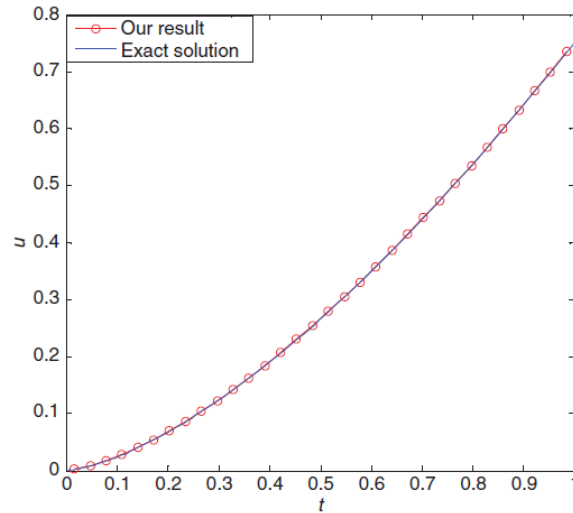
$$J^\alpha \Psi(x) \approx J^\alpha \Phi B(x) = \Phi J^\alpha B(x) \approx \Phi F^\alpha B(x). \quad (58.2)$$

من المعادلات (57.2) و (58.2) ، يمكننا الحصول على

$$P^\alpha \Psi(x) = P^\alpha \Phi B(x) = \Phi F^\alpha B(x). \quad (59.2)$$

ثم ، يتم إعطاء مصفوفة P^α بواسطة

$$P^\alpha = \Phi F^\alpha \Phi^{-1} \quad (60.2)$$



شكل 2.2: رتبة التكامل للدوال $u(t)=t$

رتبة التكامل الكسري للدالة t تم اختيارها للتحقق من صحة المصفوفة P^α رتبة التكامل الكسري للدوال $u(t) = t$ يتم الحصول عليه بسهولة على النحو التالي:

$$J^\alpha u(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha + 2)} t^{\alpha+1}. \quad (61.2)$$

عندما تكون $\alpha = 0.5, \hat{m} = 32$ مقارنة نتائج التكامل الكسري موضحة في الصورة 2.2

الفصل الثالث

مويجات لوجندر في حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية

قائمة المحتويات

29	حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الخطية
31	حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الغير خطية
31	تقريب الخطأ
35	تطبيقات عددية



1.3 حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الخطية

نعتبر المعادلات التفاضلية-التكاملية ذات رتب كسرية خطية

$$D^\alpha f(x) = \lambda_1 \int_0^x u_1(x, y) f(y) dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2(x, y) f(y) dy + g(x) \quad (1.3)$$

تخضع للشروط الأولية

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, r-1, \quad r-1 < \alpha \leq r, \quad r \in N, \quad (2.3)$$

حيث $f^{(s)}(x)$ لتقف على المشتق رتبته sth من $D^\alpha(\cdot) f(x)$ يدل على ترتيب المشتق الكسري ل caputo من الرتبة α $g(x)$ هو مصطلح الإدخال و $f(x)$ هو استجابة الإخراج. $u_1(x, y), u_2(x, y)$ يعطيا دوال $\lambda_1 \lambda_2$ هي ثوابت حقيقية.

الآن نقوم بتقريب $D^\alpha f(x)$, $u_1(x, y), u_2(x, y)$ و $g(x)$ من حيث مويجات لوجندر على النحو التالي

$$D^\alpha f(x) \approx c^T \Psi(x), \quad u_1(x, y) \approx \Psi^T(x) U_1 \Psi(y), \quad u_2(x, y) \approx \Psi^T(x) u_2 \Psi(y)$$

و

$$g(x) \approx G^T \Psi(x). \quad (4.3)$$

حيث $U_2 = [u_{ij}^{(2)}]$, $U_1 = [u_{ij}^{(1)}]$, و $G = [g_1, g_2, \dots, g_{\hat{m}}]^T$. و $i, j = 1, 2, \dots, \hat{m}$ والآن نستعمل المعادلة (3.3) و (57.2) نحصل على

$$f(x) = J^\alpha D^\alpha f(x) \approx J^\alpha (C^T \Psi(x)) = C^T P^\alpha \Psi(x). \quad (5.3)$$

وبتعويض المعادلة (56.2) في المعادلة (5.3) نحصل على

$$f(x) \approx C^T P^\alpha \Phi B(x). \quad (6.3)$$

لتكن $E = [e_0, e_1, \dots, e_{\hat{m}-1}] = C^T P^\alpha \Phi$, إذن

$$\int_0^x u_1(x, y) f(y) dy = \int_0^x \Psi^T(x) U_1 \Psi(y) \Psi^T(y) [C^T P^\alpha]^T dy \quad (7.3)$$

$$= \Psi^T(x) U_1 \int_0^x \Phi B(y) B^T(y) [C^T P^\alpha \Phi]^T dy \quad (8.3)$$

$$= \Psi^T U_1 \Phi \int_0^x B(y) B^T(y) E^T dy \quad (9.3)$$

$$= \Psi^T(x) U_1 \Phi \int_0^x \text{diag}(E) B(y) dy \quad (10.3)$$

$$= \Psi^T(x) U_1 \Phi \text{diag}(E) F^1 B(x) \quad (11.3)$$

$$= B^T(x) \Phi^T U_1 \Phi \text{diag}(E) F^1 B(x) \quad (12.3)$$

$$= \varphi^T B(x). \quad (13.3)$$

حيث $\tilde{\varphi}$ هو \hat{m} شعاع مع عناصر مساوية لقطر المصفوفة التالية:

$$\varphi = \Phi^T U_1 \Phi \text{diag}(E) F^1 \quad (14.3)$$

و

$$\int_0^1 u_2(x, y) f(y) dy = \int_0^1 \Psi^T(x) U_2 \Psi(y) \Psi^T(y) [C^T P^\alpha]^T dy \quad (15.3)$$

$$= \Psi^T(x) U_2 \Phi \int_0^1 B(y) B^T(y) [C^T P^\alpha \Phi]^T dy \quad (16.3)$$

$$= \Psi^T U_2 \Phi \int_0^1 B(y) B^T(y) dy E^T \quad (17.3)$$

$$= \frac{1}{\hat{m}} \Psi^T(x) U_2 \Phi E^T \quad (18.3)$$

$$= \frac{1}{\hat{m}} B^T(x) U_2 \Phi E^T \quad (19.3)$$

$$= \frac{1}{\hat{m}} E \Phi^T U_2^T \Phi B(x) \quad (20.3)$$

استبدال المعادلات المذكورة أعلاه في المعادلة (1.3) ، لدينا

$$C^T \Phi B(x) = \lambda_1 \tilde{\varphi}^T B(x) + \frac{\lambda_2}{\hat{m}} E \Phi^T U_2^T \Phi B(x) + G^T \Phi B(x) \quad (21.3)$$

بنشر المعادلة (21.3) ، نحصل على

$$C^T \Phi = \lambda_1 \tilde{\varphi}^T + \frac{\lambda_2}{\hat{m}} E \Phi^T U_2^T \Phi + G^T \Phi \quad (22.3)$$

وهي جملة معادلات جبرية خطية. من خلال حل هذا الجملة يمكننا الحصول على تقريب المعادلة (5.3).



2.3 حل معادلات تفاضلية-تكاملية من رتب كسرية الغير خطية

في هذا الجزء نتعامل مع معادلات تفاضلية-تكاملية ذات رتب كسرية غير خطية من الشكل :

$$D^\alpha f(x) = \lambda_1 \int_0^x u_1(x, y)[f(y)]^p dy + \lambda_2 \int_0^1 u_2(x, y)[f(y)]^q dy + g(x). \quad (23.3)$$

تخضع للشروط الأولية $f^{(s)}(0) = 0$ حيث $p, q \in N$ ووسائط أخرى ومتغيرات هي نفسها التي في الجزء 3.1. في التعامل مع مثل هذا الموقف ، نفس الإجراء (في حالة الخطية) من التوسع في رتبة الاشتقاق الكسري عن طريق استخدام مويجات لوجندر اعتمد مع استثناء الحد الذي يحتوي $[f(y)]^p, [f(y)]^q$. من المعادلة (6.3) ، لدينا $f(x) \approx EB(x)$ وبالتالي

$$[f(y)]^p \approx [EB(y)]^p = [e_0^p, e_1^p, \dots, e_{\hat{m}-1}^p]B(y) = E_P B(y) \quad (24.3)$$

و

$$[f(y)]^q \approx [EB(y)]^q = [e_0^q, e_1^q, \dots, e_{\hat{m}-1}^q]B(y) = E_q B(y) \quad (25.3)$$

اتباع إجراءات الجزء 3.1 واستخدام المعادلات (24.3) و (25.3) ، يتم تحويل المعادلة (23.3) إلى جملة معادلات جبرية غير خطية

$$C^T \Phi = \lambda_1 \tilde{W}^T + \frac{\lambda_2}{\hat{m}} E_q \Phi^T U_2^T \Phi + G^T \Phi, \quad (26.3)$$

حيث \tilde{W} هو شعاع مع عناصر مساوية لقطر المصفوفة التالية:

$$W = \Phi^T U_1 \Phi \text{diag}(E_p) F^1. \quad (27.3)$$

حل جملة المعادلات المعطى بالمعادلة (26.3) ، الحل العددي التقريبي $f(x)$ يتم الحصول عليه يمكن حل المعادلة (26.3) بواسطة تقنية رقمية تكرارية مثل طريقة Newton . أيضا Matlab الدالة "fsolve" متاحة للتعامل مع جمل المعادلات الجبرية الغير خطية

3.3 تقريب الخطأ

في هذا الجزء ، من أجل توضيح فعالية $D^\alpha f(x) \approx C^T \Psi(x)$ في المعادلة (3.3) ، لقد أعطينا النظرية التالية. لتكن $D^\alpha f_{k,M}(x)$ هو التقريب التالي ل $D^\alpha f(x)$:

$$D^\alpha f_{k,M}(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x).$$

إذن لدينا $D^\alpha f(x) - D^\alpha_{K,M}(x) = \sum_{n=2^K}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x)$.



مبرهنة 8 لنفترض أن هذه الدوال $D^\alpha f_{k,M}(x)$ التي تم الحصول عليها باستخدام مويجات لوجندر هي تقريب $D^\alpha f(x)$ و $D^\alpha f(x)$ تكون مع المشتق الثاني المحدود ، ثم لدينا الحد الأعلى من الخطأ التالي:

$$\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,M}(x)\|_E \leq \left(\frac{\tilde{M}^2}{31} \frac{1}{2^{5k+3}} \left(\frac{\Gamma'(M-1.5)}{\Gamma(M-1.5)} \right)^m \right)^{\frac{1}{2}},$$

حيث $\|f(x)\|_E = \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}$ و $c_{nm} = \langle D^\alpha f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ هو الجداء السلمي ل $D^\alpha f(x)$ و $\psi_{nm}(x)$ هي دالة غاما المزدوجة $\Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

الإثبات 5 لتكن $D^\alpha f(x)$ دالة معرفة على $[0, 1]$ مثل ذلك

$$|D^{\alpha+2} f(x)| \leq \tilde{M},$$

حيث M هو ثابت موجب

تشير عبارة التعامد للسلسلة $\psi_{nm}(x)$ على $[0, 1]$ يعني أن $\int_0^1 \Psi(x)[\Psi(x)]^T dx = I$,

حيث I هي مصفوفة الوحدة اذن

$$\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,M}(x)\|_E^2 = \int_0^1 (D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,M}(x))^2 dx \quad (28.3)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=2^k}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \right)^2 dx \quad (29.3)$$

$$= \sum_{n=2^k}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} c_{nm}^2 \int_0^1 \psi_{nm}^2(x) dx \quad (30.3)$$

$$= \sum_{n=2^k}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} c_{nm}^2, \quad (31.3)$$

حيث $c_{nm} = \langle D^\alpha f(x), \psi_{nm}(x) \rangle = \int_0^1 D^\alpha f(x) \cdot \psi_{nm}(x) dx$ ، ثم يمكننا الحصول على

$$c_{nm} = \int_0^1 D^\alpha f(x) \psi_{nm}(x) dx = \int_{(\hat{n}+1)frm-e^k}^{(\hat{n}-1)/2^k} D^\alpha f(x) \left(\frac{2m+1}{2} \right)^{1/2} 2^{k/2} P_m(2^k x - \hat{n}) dx.$$



والآن لتكن $2^k x - \hat{n} = t$, إذن

$$\begin{aligned}
 c_{nm} &= \int_{-1}^1 D^\alpha f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{2m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} 2^{k/2} p_m(t) \frac{1}{2^k} dt \\
 &= \left(\frac{2m+1}{2^{k+1}} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^\alpha f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) p_m(t) dt \\
 &= \left(\frac{1}{2^{k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^\alpha f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) d(p_{m+1}(t) - p_{m-1}(t)) \\
 &= \left(\frac{1}{2^{k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \left(D^\alpha f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) (p_{m+1}(t) - p_{m-1}(t)) \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2^{k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+1} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \frac{1}{2^k} (p_{m+1}(t) - p_{m-1}(t)) dt \\
 &= - \left(\frac{1}{2^{3k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+1} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) (p_{m+1}(t) - p_{m-1}(t)) dt \\
 &= - \left(\frac{1}{2^{3k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+1} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) d \left(\frac{p_{m+2}(t) - p_m(t)}{2m+3} - \frac{p_m(t) - p_{m-2}(t)}{2m-1} \right) \\
 &= - \left(\frac{1}{2^{3k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} D^{\alpha+1} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{p_{m+2}(t) - p_m(t)}{2m+3} - \frac{p_m(t) - p_{m-2}(t)}{2m-1} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2^{5k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+2} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{p_{m+2}(t) - p_m(t)}{2m+3} - \frac{p_m(t) - p_{m-2}(t)}{2m-1} \right) dt \\
 &= \left(\frac{1}{2^{5k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+2} f \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{p_{m+2}(t) - p_m(t)}{2m+3} - \frac{p_m(t) - p_{m-2}(t)}{2m-1} \right) dt.
 \end{aligned}$$



و

$$\begin{aligned}
 |c_{nm}|^2 &= \left| \left(\frac{1}{2^{5k+1}(2m+1)} \right)^{1/2} \int_{-1}^1 D^{\alpha+2} f \left(\frac{\hat{n}+t}{2^k} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{p_{m+2}(t) - p_m(t)}{2m+3} - \frac{p_m(t) - p_{m-2}(t)}{2m-1} \right) dt \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2^{5k+1}(2m+1)} \left| \int_{-1}^1 D^{\alpha+2} f \left(\frac{\hat{n}+t}{2^k} \right) \right. \\
 &\quad \left. \frac{(2m-1)p_{m+2}(t) - (4m+2)p_m(t) + (2m+3)p_{m-2}(t)}{(2m+3)(2m-1)} dt \right|^2 \\
 &\leq \frac{1}{2^{5k+1}(2m+1)} \int_{-1}^1 |D^{\alpha+2} f \left(\frac{\hat{n}+t}{2^k} \right)|^2 dt \\
 &\quad \int_{-1}^1 \left| \frac{(2m-1)p_{m+2}(t) - (4m+2)p_m(t) + (2m+3)p_{m-2}(t)}{(2m+3)(2m-1)} \right|^2 dt \\
 &< \frac{\tilde{M}^2}{2^{5K}(2m+1)} \int_{-1}^1 \frac{(2m-1)^2 p_{m+2}^2(t) + (4m+2)^2 p_m^2(t) + (2m+3)^2 p_{m-2}^2(t)}{(2m+3)^2(2m-1)^2} dt \\
 &= \frac{\tilde{M}^2}{2^{5K}(2m+1)(2m+3)^2(2m-1)^2} \\
 &\quad \left[(2m-1)^2 \frac{2}{2m+5} + (4m+2)^2 \frac{2}{2m+1} + (2m+3)^2 \frac{2}{2m-3} \right] \\
 &< \frac{\tilde{M}^2}{2^{5K}(2m+1)(2m+3)^2(2m-1)^2} \frac{12(2m+3)^2}{2m-3} \\
 &= \frac{12\tilde{M}^2}{2^{5K}(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)} \\
 &< \frac{12\tilde{M}^2}{(2n)^5(2m-3)^4}.
 \end{aligned}$$

وبالتالي لدينا

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2^k}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} c_{nm}^2 &< \sum_{n=2^k}^{+\infty} \sum_{m=M}^{+\infty} \frac{12\tilde{M}^2}{(2n)^5(2m-3)^4} \\
 &= 12\tilde{M}^2 \sum_{n=2^k}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^5} \sum_{m=M}^{+\infty} \frac{1}{(2m-3)^4} \\
 &= \frac{\tilde{M}^2}{31} \frac{1}{2^{5k+3}} \left(\frac{\Gamma'(M-1.5)}{\Gamma(M-1.5)} \right)^m.
 \end{aligned}$$

ثم نحصل على



$$\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,m}(x)\|_E^2 \leq \frac{\tilde{M}^2}{31} \frac{1}{2^{5k+3}} \left(\frac{\Gamma'(M-1.5)}{\Gamma(M-1.5)} \right)^m,$$

أي

$$\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,M}(x)\|_E \leq \left(\frac{\tilde{M}^2}{31} \frac{1}{2^{5k+3}} \left(\frac{\Gamma'(M-1.5)}{\Gamma(M-1.5)} \right)^m \right)^{1/2}.$$

من هذه النظرية يمكننا أن نرى بوضوح أنه $\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_{k,M}(x)\|_E \rightarrow 0$ عندما يكون M ثابت و $k \rightarrow +\infty$.

4.3 تطبيقات عددية

من أجل توضيح فعالية الطريقة المقترحة ، فإننا نقدم بعض الأمثلة العددية لمعادلات تفاضلية تكاملية من رتب كسرية خطية وغير خطية.

مثال 3 نعتبر المعادلة الخطية التالية

$$D^{1.7} f(x) = \int_0^x (x-y)f(y)dy + \int_0^1 (x+y)f(y)dy + g(x) \quad (32.3)$$

مع هذا الشرط $f'(0) = f(0) = 0$ و

$$g(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1.3)} x^{0.3} + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.3)} x^{1.3} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} - \frac{7x}{12} - \frac{9}{20}.$$

الحل الدقيق لهذه المشكلة $f(x) = x^2 + x^3$ وبين الجدول 1.3 الحلول التقريبية التي تم الحصول عليها من طريقة مويجات لوجندر (LWM) وتتموج طريقة CAS (CASW) من أجل قيم مختلفة ل k ، $M = 2$ ، على الترتيب

من الجدول 1.3، يمكننا أن نرى بوضوح أن الحلول العددية هي أكثر وأكثر قريبة من الحل الدقيق عندما يزيد k . مقارنة مع التقريب التي حصل عليها بطريقة CASW، LWM يمكن أن تصل إلى درجة أعلى من الدقة.

مثال 4 نعتبر المعادلة التالية:

$$D^{2.3} f(x) = \frac{1}{4} \int_0^x (x-y)f(y)dy + \frac{1}{2} \int_0^1 xy.f(y)dy + g(x), \quad (33.3)$$

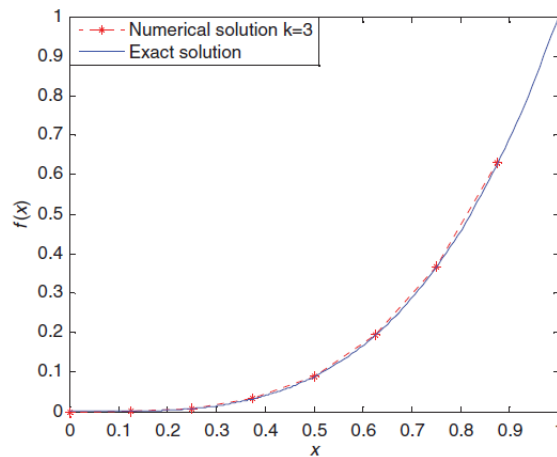
حيث $g(x) = (\Gamma(4.5)/\Gamma(2.2))x^{1.2} - (x^{5.5}/99) - (x/11)$, مثل ذلك

$$f''(0) = f'(0) = f(0) = 0,$$

الحل الدقيق هو $f(x) = x^{7/2}$. النتائج العددية ل $M = 2, k = 3, 4, 5, 6$ موضحة في الجدول التالي:

جدول 1.3: الحل التقريبي في نقاط مختلفة لمختلف $K, M=2$

Exact solution	$k = 7$		$k = 6$		$k = 5$		$k = 4$		x
	CASW	LWM	CASW	LWM	CASW	LWM	CASW	LWM	
0.000000	0.000149	0.000000	0.000532	0.000007	0.002743	0.000012	0.007462	0.000024	0
0.017578	0.018642	0.017566	0.019677	0.017198	0.021438	0.016551	0.023571	0.015822	1/8
0.078125	0.079232	0.078115	0.081325	0.077920	0.084365	0.077098	0.093265	0.075531	2/8
0.193359	0.198711	0.193351	0.200321	0.193317	0.204620	0.193159	0.216487	0.192880	3/8
0.375000	0.379050	0.374988	0.385647	0.373205	0.392246	0.368505	0.398469	0.361498	4/8
0.634765	0.642014	0.634693	0.648892	0.631080	0.651032	0.626293	0.652830	0.622950	5/8
0.984375	0.112546	0.984162	0.122439	0.981423	0.128764	0.963194	1.134367	0.930901	6/8
1.435546	1.439672	1.434649	1.457231	1.422946	1.498832	1.408939	1.525654	1.391340	7/8



شكل 1.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=3, M=2$

من الشكل 1.3 يمكننا أن نجد بسهولة أن الحلول الرقمية متفقة بشكل جيد مع الحلول الدقيقة. الأخطاء

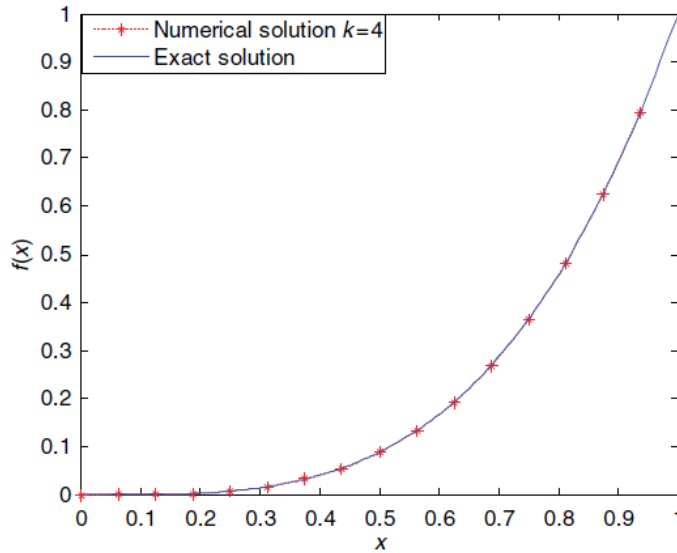
المطلقة التي حصل عليها LWM و $ADOMAIN$ تحلل طريقة من (ADM) أجل قيم مختلفة ل K وتعطى في الجدول 2.3.

من خلال الجدول 2.3، يمكننا أن نرى أيضا أن الأخطاء أصغر وأصغر عندما يزداد k . عندما استخدمنا ADM لحل هذه المشكلة، يجب أن نشكل متعدد حدود $ADOMIAN$. وكانت عملية التشكيل معقدة إلى حد ما. ومع ذلك، فإن تشكيل مصفوفة العمليات يسهل الحصول على الحلول العددية. ما هو أكثر من ذلك، فإن النظر في الجدول 2.3 يكشف أن الأخطاء المطلقة التي تم الحصول عليها بواسطة ADM في زيادة كبيرة. هذا هو مؤشر على أن الاستقرار قليلا من جانب ADM ، على عكس LAM .

مثال 5 نعتبر المعادلة غير خطية التالية :

$$D^{2.2}f(x) = \frac{1}{3} \int_0^x (x+y)[f(y)]^2 dy + \frac{1}{4} \int_0^1 (x-y)[f(y)]^3 dy + g(x), \quad (34.3)$$

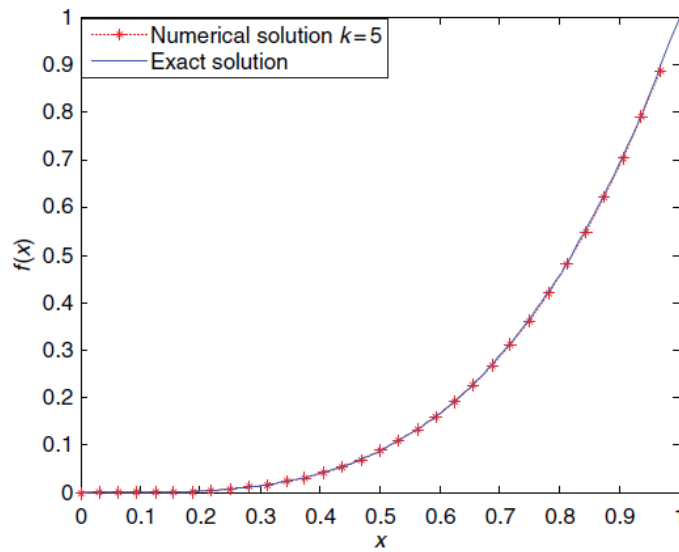
مثل ذلك، $f''(0) = f'(0) = f(0) = 0$ ، فإن الحل الدقيق للمعادلة هو $f(x) = x^3$ و $g(x) = (\Gamma(4)/\Gamma(1.8))x^{0.8} - (5x^8/56) - (x/40) + (1/44)$.



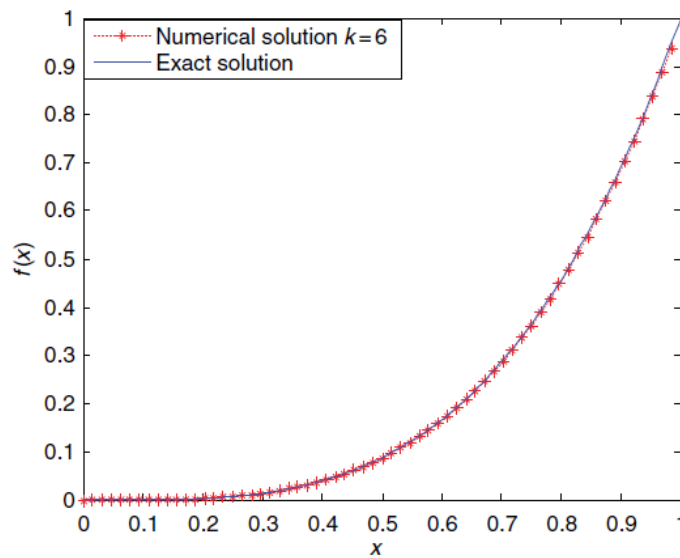
شكل 2.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=4, M=2$

لمقارنة النتائج العددية التي حصل عليها LWM و $CASW$ وسوف نستخدم L_∞ نظيم. التقريب L_∞ نظيم للخطأ المطلق يعطى ب:

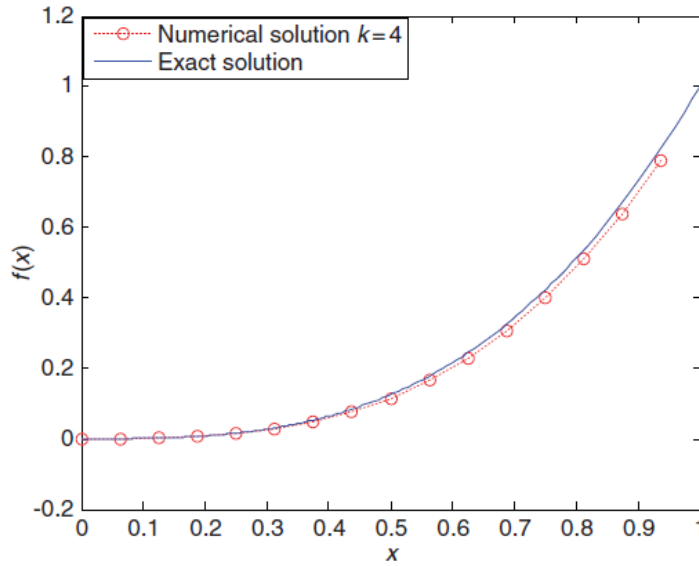
$$\|e_{\hat{m}(x)}\|_{l_\infty} = \max_{1 \leq i \leq \hat{m}} \{|f(x_i) - f_{\hat{m}}(x_i)|\},$$

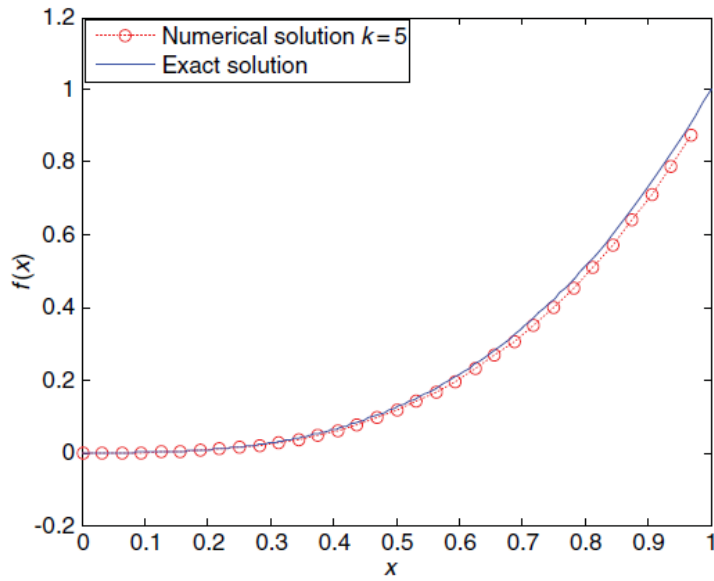
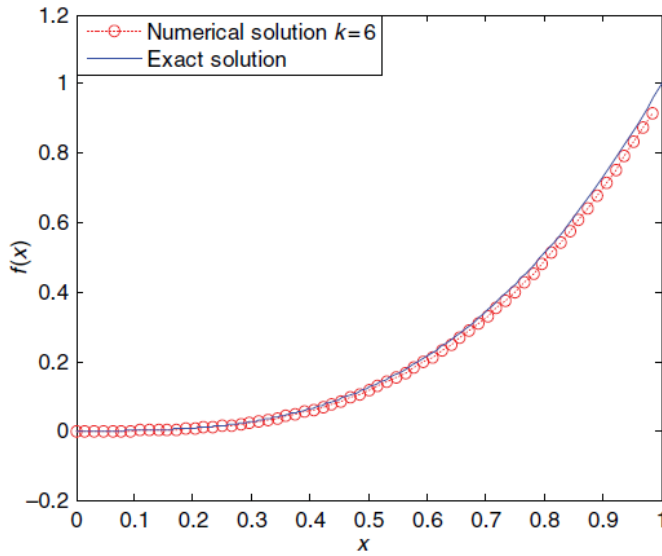

 شكل 3.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=5, M=2$

حيث $f(x)$ الحل الدقيق و $f_{\hat{m}}(x)$ الحل التقريبي . الجدول 3.3 يوضح l_{∞} تنظيم للأخطاء المطلقة للمثال 5 التي حصل عليها بواسطة LWM و CAS طريقة المويجات, على الترتيب. الشكل 5.3 يوضح الحلول العددية والحل الدقيق من أجل $M = 2, K = 4, 5, 6, 7$. يمكننا أن نرى أن الحلول العددية أكثر وأكثر قريبة من الحل الدقيق مع قيمة K تصبح كبيرة عن طريق الاقتراب انظر الى 5.3


 شكل 4.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=6, M=2$

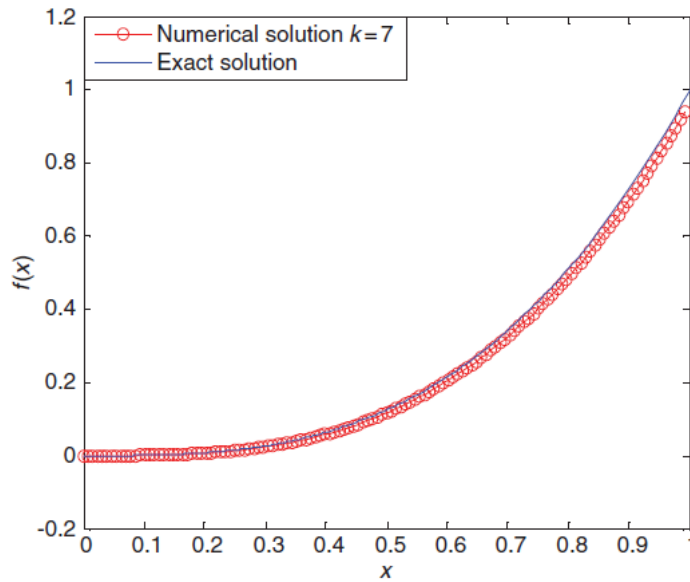
ADM	LWM	ADM	LWM	ADM	LWM	
$n=5$	$k=5$	$n=4$	$k=4$	$n=3$	$k=3$	x
0	0	0	0	0	0	0
$1.0174e-005$	$6.6391e-006$	$2.1658e-005$	$4.8662e-005$	$7.2373e-005$	$2.2475e-004$	1/8
$4.1987e-005$	$4.5289e-005$	$5.2365e-005$	$8.9201e-005$	$6.2642e-005$	$5.6882e-004$	2/8
$9.2364e-005$	$3.1373e-005$	$8.2316e-005$	$7.0931e-005$	$3.1236e-005$	$8.0634e-004$	3/8
$4.1726e-004$	$7.3681e-005$	$2.4582e-004$	$2.3634e-004$	$5.2374e-004$	$2.3712e-003$	4/8
$8.1648e-004$	$2.4400e-004$	$7.0243e-004$	$7.1094e-004$	$3.6285e-004$	$2.8084e-003$	5/8
$2.3112e-003$	$3.8086e-004$	$4.4565e-003$	$2.5072e-003$	$2.2364e-003$	$3.1612e-003$	6/8
$8.0723e-003$	$6.0180e-004$	$8.2364e-003$	$3.0368e-003$	$9.1287e-003$	$3.3599e-003$	7/8

 جدول 2.3: مختلفة k الأخطاء المطلقة من أجل قيم $k, M=2$

 شكل 5.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=4, M=2$ للمثال 5

شكل 6.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=5, M=2$ للمثال 5شكل 7.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما $k=6, M=2$ للمثال 5

CAS	LWM	norm l_∞
7.844735e-002	4.432652e-003	$\ e_{16}\ _{l_\infty}(k=4, M=2)$
5.243756e-003	2.143872e-003	$\ e_{32}\ _{l_\infty}(k=5, M=2)$
1.240482e-003	5.182365e-004	$\ e_{64}\ _{l_\infty}(k=6, M=2)$
8.426387e-004	3.340564e-004	$\ e_{128}\ _{l_\infty}(k=7, M=2)$

جدول 3.3: تقريبي قاعدة L_∞ من الأخطاء المطلقة لبعض قيم k

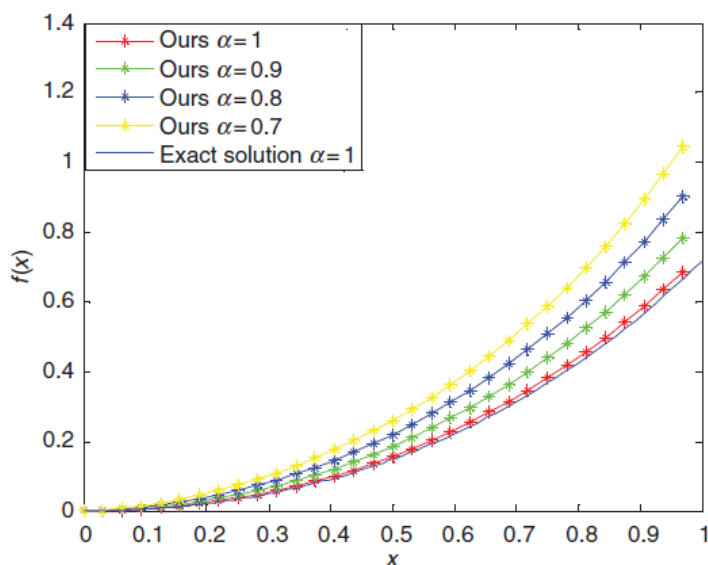


شكل 8.3: مقارنة الحل العددي مع الحل الدقيق لما للمثال $k=7, M=2$

مثال 6 نعتبر المعادلة التالية:

$$D^{\alpha+1} f(x) = \int_0^x (e^y + 1)[f(y)]^2 dy + \int_0^1 xy[f(y)]^2 dy + g(x), \quad (35.3)$$

حيث $g(x) = e^x - ((e^x - x - 1)^3/3) - x((e^2/4) - 2e + (11/3))$ مع الشروط الابتدائية $f'(0) = f(0) = 0$ والحل الدقيق لهذه المشكلة من أجل $\alpha = 1$ هو $f(x) = e^x - x - 1$. مقارنة النتائج العددية ل $\alpha = 1, \alpha = 0.9, \alpha = 0.8, \alpha = 0.7$ والحلول الدقيقة من أجل $\alpha = 1$ الموضحة في الشكل 9.3



شكل 9.3: الحل العددي والحل الدقيق لما $\alpha = 1$

6 Exemple	5 Exemple	2 = M
1.152	0.823	4 = k
2.794	2.427	5 = k
9.358	8.821	6 = k
36.725	32.385	7 = k

جدول 4.3: CPU الوقت (بالثانية) للمثال 5, 6 مختلف k

من الشكل 9.3 يمكننا أن نرى بوضوح أن الحلول العددية قريبة جدا من الحل الدقيق عندما $\alpha = 1$ من الواضح من الشكل 9.3 أنه , كما α قريب من 1 , الحلول العددية بواسطة موجبات لوجندر ، قريبة من الحل الدقيق الجدول 4.3 يوضح CPU الوقت (بالثانية) للمثال 5 والمثال 6

خاتمة

في هذا العمل ، قدمنا لكم موجات Legendre "Legendre" wavelets ومصفوفة العمليات للتكامل الكسري واستخدامها في حل المعادلات التكاملية التفاضلية الخطية وغير الخطية ذات الرتب الكسرية. من خلال حل الجمل الخطية وغير خطية ، يتم الحصول على حلول عددية. وقد تم وضع مقارنة بين الطريقة المقترحة وبعض الطرق العددية الأخرى حيث لاحظنا أن الحل التقريبي يقترب بسرعة نحو الحل الحقيقي حيث أظهرت النتائج العددية أن الطريقة المقدمة هي الأكثر كفاءة بالمقارنة مع بقية الطرق العددية الأخرى و ذلك بناء على الأمثلة التي إستخدمناها.

Adrien-Marie Legendre

أدريان ماري ليجاندر



الميلاد: 18 سبتمبر 1752 باريس, فرنسا

الوفاة: 10 يناير 1833 (80 سنة) باريس, فرنسا

الإقامة: فرنسا

الجنسية: فرنسي

هو عالم كان له دور معطاء في عدة فروع من الرياضيات ومنها الاحصاء ونظرية العداد والجبر التجريدي والتحليل الرياضي. عضو في الجمعية الملكية، والأكاديمية الفرنسية للعلوم، والأكاديمية الأمريكية للفنون والعلوم، والأكاديمية البروسية للعلوم

المراجع العلمية

- [1] Y.M.Chen, M.X.Yi, and C.X. Yu, Error analysis for numerical solution of fractional differential equation by Haar wavelets method, *J. Comput. Sci.* 5(3) (2012), pp. 367–373.
- [2] I.L. EI-Kalla, Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 21 (2008), pp. 372–376.
- [3] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Chelsea, New York, 1971.
- [4] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, and F. Mohammadi, Legendre wavelets method for solving fractional partial differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* 234 (2014), pp. 267–276.
- [5] M.M. Hosseini, Adomian decomposition method for solution of nonlinear differential algebraic equations, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006), pp. 1737–1744.
- [6] M. Ichise, Y. Nagayanagi, and T. Kojima, An analog simulation of noninteger order transfer functions for analysis of electrode process, *J. Electroanal. Chem.* 33 (1971), pp. 253–265.
- [7] H. Jafari and S.A. Yousefi, Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 62(3) (2011), pp. 1038–1045.
- [8] R.C. Koeller, Application of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, *J. Appl. Mech.* 51(1984), pp. 299–307.
- [9] C.P. Li and G.J. Peng, Chaos in Chen's system with a fractional order, *Chaos. Solit. Fract.* 22(2004), pp. 443–450.
- [10] Y.L. Li and N. Sun, Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011), pp. 1046–1054.
- [11] N. Liu and E.B. Lin, Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations, *Numer. Methods Partial Diff. Equ.* 26 (2010), pp. 81–94.
- [12] S. Momani and Z. Odibat, Generalized differential transform method for solving a space and time-fractional diffusion-wave equation, *Phys. Lett. A* 370 (2007), pp. 379–387.



- [13] Z. M. Odibat, A study on the convergence of variational iteration method, Math. Comput. Model. 51 (2010), pp. 1181–1192.
- [14] Z. Odibat and S. Momani, Generalized differential transform method: Application to differential equations of fractional order, Appl. Math. Comput. 197 (2008), pp. 467–477.
- [15] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.

الملخص:

في هذه المذكرة قمنا بتقديم طريقة عددية لحل معادلات تفاضلية-تكاملية ذات رتب كسرية خطية وغير خطية وذلك باستخدام طريقة موجات لوجندر ومصفوفة العمليات ومن خلال تحويل هذه المعادلات الى جملة معادلات جبرية تحل بطريقة معروفة وسهلة البرمجة كطريقة نيوتن.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية –التكاملية ذات رتب كسرية،موجات لوجندر،مصفوفة العمليات،التقارب

Abstract:

In this work ,we purpose the numerical method for solving fractional integro-differential equations ,using the Legendre wavelets method and operational matrix to reduce integro differential equations to system of nonlinear algebraic equations which will be solved using Newton iteration method

Key words: fractional integro –differential equation;Legendre wavelets;operational matrix;convergence

Résumé:

Dans cette mémoire nous présentons une méthode numérique pour résoudre l'équations fractionnel

différentielle d'intégration non linéaire et linéaire en utilisant les Méthode des ondelettes de Legendre

matrice opérationnelle,et en convertissant cette équation pour la phrase

équations algébrique correction d'un bien connu et le mode de programmation facile .comme un méthode de Newton

Mots-clés : équation intégr-différentielle fractionnaire ; Ondelettes de Legendre; matrice opérationnelle ; convergence.