جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

ماستر

مسار: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: نمذجة و تحليل عددي

من إعداد الطالب : عطية خالد

الموضوع

الدوال القطع النبضية ذات المتغيرين و تطبيقاتها في حل المعادلات التكاملية غير الخطية

تناقش يوم 2018/06/02 من طرف لجنة المناقشة :

معمري محمد	الرتبة أستاذ محاضر "ب"جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
بن الشيخ عبد الكريم	الرتبة أستاذ مساعد "أ"جامعة قاصدي مرباح ورقلة	ممتحنا
عباسي حسين	الرتبة أستاذ مساعد "أ"جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

شكر و تقدير

الحمد لله الذي لا تنفعه طاعة من أطاع. ولا تضره معصية من عصى.
اللهم لك الحمد والشكر كما ينبغي لجلال وجهك وعظمة سلطانك.
أحمد الله وأشكره على توفيقي في إتمام هذا العمل.
وإتباعا لسبيل المصطفى صلى الله عليه وسلم
بقوله:" من لم يشكر الناس لم يشكر الله، ومن أسدى معروفا لكم فكافئوه
فإن لم تستطيعوا فادعوا له"
نتقدم بالشكر إلى أستاذنا الكريم:
عباسي حسين
الذي لمّ علينا بنصائحه وتوجيهاته طوال هذا العمل
وإلى اللجنة المشرفة

لقبولهما مناقشة هذه المذكرة

شكرا جزيلا

الإهداء

إلى من قال فـــيهما تعالى:

''واخفض لهما جناح الذل من الرحمة و قل ربي ارحمهما كما ربياني صغيرا ''.

إلى فخري إلى من كان لي شمـــعة تذوب لتنير لي درب حياتي إلى الذي رعـــاني وربـــاني وانتظر لحظة نجاحي أبي الغـــالي أطال الله في عمره.

إلى من منحتني الحيـاة إلى ينبوع الحـــب و الرأفة إلى الصدر الحنون إلى من أعــطتني و حــرمت نفســها إلى الغـــالية أمـــي أدامها الله لنا.

إلى من ساندوني وكانوا مصدرا لقـوتي، إلى فخـري واعتزازي إلى أخــوتي لخضر،نورالدين ، يوسف، صلاح، بلال ، عبد الحق، ،

إلى كل الأهـــل والأقارب.

إلى من لم أذكـرهم في مذكرتي ولكنهم حاضـرون في ذاكرتي، إليهم جميـــعا أهدي هذا العمل.

خالد عطية

الفهـــــــــرس

مقدمة

عندما تعقدت العلوم المختلفة نتيجة التداخلات بينها وتطورت بشكل رهيب وبدأ العلماء بدراسة الظواهر الطبيعية سواء كانت فيزيائية,كيميائية ,بيولوجيةأو هندسية كان للمعادلات التكاملية بمختلف أنواعها دورا بارزا في تفسير هذه الظواهر وإيجاد الحلول المختلفة التحليلية والعددية,لكن عادة مايصعب إيجاد الحلول للمعادلات التكاملية بالطرق التحليلية لذالك نلجأ إلى الطرق العددية وهذا أهم سبب لإختياري لهذا الموضوع.

لذالك خصصت هذه المذكرة لدراسة الدوال القطع النبضية ذات المتغيرين وتطبيقاتها في حل المعادلات التكاملية غير الخطية.

ومن المعلوم أ ن المعادلة التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل وقد يضاف المجهول أيضا خارج التكامل في أحد طرفي المعادلة . حيث تعتمد هذه الطريقة على تقريب التوابع بدلالة الدوال القطع النبضية ومصفوفات عملياتهاالتي من خلالها يتم تحويل هذه المعادلة إلى جملة معادلات جبرية سهلة البرمجة والحل.

سنحاول في هذه المذكرة إعطاء بعض المفاهيم والطريقة العددية لحل هذه المعادلات التكامليةوسنبعد قدر الإمكان عن الجانب النظري ونكثر من الأمثلة العلمية لكي تكون المعلومة سهلة المأخذ عضيمة الفائدة .

سنقدم في الفصل الأول شرح مبسط لأنواع المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية ولفتة سريعة حول المعادلات التكاملية ذات متغيرين ودراسة الدوال القطع النبضية ذات المتغير الواحد وذات المتغيرين ودراسة خصائصها وتقديم شكلها العام.أما الفصل الثاني نوضح فيه كيفيةتقريب تابع ذو متغير ,تقريب تابع ذو متغيرين ودراسة مصفوفات العمليات وذالك من خلال تعيين المصفوفة التنفيذية لتكامل والمصفوفة التنفيذية لتكامل الثنائي وكل ذالك بدلالة أساس الدوال القطع النبضية أما الفصل الثالث يوضح طريقة إستعمال المصفوفات التنفيذية لتكامل في تحويل المعادلات التكامليةذات المتغير الواحد وذات المتغيرين الخطية وغير الخطية إلى جملة معادلات جبرية التي من خلالهايتم تحديد الحل التقريبي , كذالك قمنا بتطبيق أمثلة لتوضيح هذه الطريقة ومقارنة نتائجها مع الحلول الحقيقية.

الفصل الأول

المعادلات التكاملية و دوال القطع النبضية

قائمة المحتويـــــات

مقدمة

تلعب المعادلات التكاملية دورا بارزا في حل المشاكل الفيزيائيةولقد تعددت طرق حلها سواءا كان حلا تحليليا أو عدديا , في هذا الفصل قمنا بدراسة عددية للمعادلة التكاملية ذات المتغير الواحدوذات المتغيرين الخطية وغير الخطية وتطرقنا كذالك إلى دراسة الدوال القطع النبضية ذات المتغيرالواحد وذات المتغيرين.

1.1 أنواع المعادلات التكاملية

بالرغم من أن معظم المسائل الفيزيائية يمكن صياغتها وتحليلها بدلالة المعادلات التفاضلية إلا أنه يمكننا استبدال المعادلات التفاضلية بمعادلات تكاملية سواء كانت خطية أو غير خطية ليكون حل المعادلة بكفاءةأكثر وبطرق أبسط وفي مايلي سوف نذكر أشكال المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية وأنواعها.
.[2],[1]

تعريف: المعادلة التكاملية هي المعادلة التي يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل وقد يضاف ايضا خارج التكامل ويكون في احد طرفي المعادلةوتكون على سبيل المثال :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt.$$
$$0 = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt.$$

فإذا كان x(الجزءالعلوي لتكامل) عدد ثابت فهي معادلة فريدهولم وأما إذا كان مجهول فهي لفولتيرا.
وهي عبارة عن معادلة تكاملية حيث الدالة :
$-\varphi(x)$هي الدالة المجهولة.
$-f(x).k(x,t)$دوال معلومة قد تكون مركبةأوحقيقيةوذالك من قيم xوt.
-وهناك نوعان من المعادلات التكاملية معادلات تكاملية خطية وغير خطية.

1.1.1 المعادلات التكاملية الخطية

يقال عن المعادلات التكاملية أنها خطية إذا كانت العمليات الخطية محققة على الدوال المجهولة وتكون المعادلات التكاملية الخطية بصفة عامة من الشكل:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{1.1}$$

حيث:

-λثابت يحمل معاني فيزيائية عن خواص المادة.

-$k(x,t)$ معلومة وتسمى نواة المعادلة وتحمل صفات وخواص المادة المستخدمة وقد تكون متصلة أو غير متصلة

-الدالة $f(x)$معلومة أيضا أ ما بالمفهوم الفيزيائي تمثل دالة السطح المرا د حساب التكامل عليه .

إما $\varphi(x)$ هي الدالة المجهولة المراد تعيينها وتمثل فيزيائيا دالة الهمد.

و المعادلة (1.1) خطية لأن الدالة المجهولة هي من الدرجة الأولى .

وهناك العديد من أنواع المعادلات التكاملية الخطية وهي :

* معادلة فريد هولم التكاملية .
* معادلة وينر هويف التكاملية.
*معادلة أبل التكاملية.
*معادلةرينوال التكاملية.
* المعادلةالتكاملية المختلطة .
* معادلة كوشي الشاذة التكاملية
* معادلة فولتيرا التكاملية.
*معادلة فولتيرا - فريدهولم التكاملية.
*معادلة فريدهولم-فولتيرا التكاملية.

وفي ما يلي سوف نذكر أصناف المعادلات التكاملية الخطية:

1) معادلة فريدهولم التكاملية:

في جميع معادلات فريدهولم التكاملية تكون نهاية الجزء العلوي عبارة عن ثابت محدد.معلوم اي $x \in [a.b]$ وتكون على الشكل التالي :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt. \quad (2.1)$$

* في المعادلة (2.1) إذا كان $\mu = 0$ أي المعادلة من الشكل :

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt.$$

فهي معادلة فريدهولم من الصنف الأول

* في المعادلة (2.1) إذا كان $\mu = C^{int}$ أي المعادلة من الشكل :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt.$$

فهي معادلة فريدهولم من الصنف الثاني

* في حالة خاصة لما تأخذ $\mu = 1$ و$f(x) = 0$أي تصبح المعادلة (2.1) من الشكل

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt.$$

وهي معادلة فريدهولم التكامليةالمتجانسة .

* تكون المعادلة (2.1) من الصنف الثالث إذا كان $\mu = \mu(x)$.

2) معادلة فولتيرا التكاملية:

تكون معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \quad (3.1)$$

وتكون من الصنف الأول إذا كان $\mu = 0$ ومن الصنف الثاني لما $\mu = C^{int}$ ومن الصنف الثالث لما $\mu = \mu(x)$.

ملاحظة: ليس نوع المعادلة هو الدليل على تصنيفها فمعادلة فريدهولم نشأت من مسألةتفاضلية ذات شروط حدية بينما معادلة فولتيرا فقد نشأت من مسألة تفاضلية ذات شروط إبتدائية .

3) معادلةوينر هويف التكاملية:

تسمى المعادلة التكاملية

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt. \qquad (4.1)$$

وينر هويف التكاملية

3) معادلة أبل التكاملية:

تكون معادلة أبل التكاملية من الشكل

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt. \qquad (5.1)$$

حيث $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

وسميت بهذا الإسم نسبة إلى العالم أبل الذي توصل إليها.

4) معادلة رينوال التكاملية:

تسمى المعادلة التكاملية من الشكل :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b} k(x-t)\varphi(t)dt. \qquad (6.1)$$

بمعادلة رينوال التكاملية

5vv) معادلةكوشي الشاذة التكاملية:

وتكون المعادلة من الشكل

$$a(x)\varphi(x) + b(x)\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{(x-t)}dt + \int_{\Gamma} k(x,t,\varphi(t))dt = f(x). \qquad (7.1)$$

حيث Γ يعني قوس مفتوح أومغلق

7) معادلةالتكامليةالمختلطة:

نعتبر المعادلات التالية

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^{t} F(T,t)\varphi(x,t)dT + \lambda \int_a^{b} k(x,r)\varphi(r,t)dr. \qquad (8.1)$$

$$\varphi(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^{t}\int_a^{b} F(T,t)k(x,r)\varphi(r,T)drdT \qquad (9.1)$$

حيث $T < \infty, t \in [a,b], x \in [a,b]$

-نسمي المعادلة (8.1) بمعادلة فريدهولم- فولتيرا أما المعادلة (9.1) بمعادلة فولتيرا - فريدهولم .
-الجزء التكاملي لفريدهولم مقاسا بالنسبة للموضوع بينما الجزء التكاملي الخاص بفولتيرا يعتبر مقاسا بالنسبة لزمن.
-الدالة $k(x,t)$ مقاسة بالنسبة للموضوع ،الدالة $F(T,t)$ مقاسة بالنسبة لزمن .
-الدالة $f(x,t)$ دالة معلومة، وλ ثابت قد يكون مركب ويحمل معاني فيزيائية.
-$\varphi(x,t)$هي الدالة المجهولة المراد تعيينها ،ويكون الحل محقق في الفضاء

$$L_2([a,b]) \times C[0,T], 0 \leq t \leq T \leq \infty$$

8)تصنيف المعادلات التكامليةالمختلطةبالنسبةلنواة:
يمكن تصنيف المعادلات التكاملية المختلطة بالنسبة لنواة $k(x,t)$ كالتالي:
1)-معادلة تكاملية ذات نواة متصلة في المجال $[a,b]$ وتحقق الشرط$M \geqslant | k(x,t) |$ حيث M ثابت.
2)-معادلة تكاملية ذات نواة شاذة وتحقق الشرط .

$$C = \sqrt{\int_a^b \int_a^b | k(x,t) |^2 \, dtdx}$$

حيث C;قيمة محدودة ومنتهية وبالتالي فإن المعادلة تسمى معادلة فريدهولم.
وتصنف المعادلات التكاملية على حساب النواة الشاذة على النحو التالي :
*إذا كانت النواة تأخذ الشكل :

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{A(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} & si \quad 0 < \alpha < 1 \\ B(x,t)\ln(x-t) & sinon \end{cases}$$

(10.1)

حيث $A(x,t)$ و $B(x,t)$ نواتان متصلتان ومشتقتان . وفي هذه الحالة يقال عن المعادلة التكاملية أنها ضعيفة الشذوذ , حيث تسمى $A(x,t)$ بنواة كارلمان والنواة $B(x,t)$بالنواة اللوغارتمية .
*إذا كانت النواة من الشكل :

$$k(x,t) = \frac{B(x,t)}{x-t}$$

فإنها تسمى نواة كوشي حيث تكون $B(x,t)$ نواة متصلة هي ومشتقاتها .
*إذا كانت النواة على الشكل :

$$k(x,t) = \frac{D(x,t)}{(x-t)^{\alpha}} / 0 < \alpha < 1$$

حيث $D(x,t)$ نواةمتصلة هي ومشتقاتها وهذا الشكل يسمى بالمعادلة التكاملية لأبل .
* النواة القابلة للفصل :إذا كانت النواة$k(x,t)$قابلة للفصل أي إذا أمكن التعبير عنها كمجموع عددمن الحدود

المنتهية بحيث أن كل عبارة عن حاصل ضرب دالة في x ودالة في t فقط ويمكن التعبير عن النواة بالشكل التالي :

$$k(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)b_i(t)$$

*النواة المتماثلة :الدالة المركبة $k(x,t)$ تسمى بالنواة المتماثلة إذا كان $k(x,t)=k^{*}(x,t)$ حيث ان * تعبر عن تبديل متغيرات الدالة أما إذا كانت النواة حقيقية فإن $k(x,t)=k(t,x)$
* إذا كانت $k(x,t)=-k(t,x)$فإن هذه النواة تسمى skew-symmetric
* تسمى النواة بنواة هرمتين إذا تحقق $k(x,t)=\tilde{k}(t,x)$

2.1.1 المعادلات التكاملية غير الخطية

تعريف: المعادلة التكاملية غير الخطية هي معادلة يكون فيها المجهول تحت علامة التكامل حيث تكون الدالة المجهولة عبارة عن دالة مركبة ،أي تكون $F(\Phi(x))$ على سبيل المثال:

$$\Phi^2(x),\Phi^3(x),\Phi^{\exp(x)},\cos(\Phi(x))..................$$

قد يضاف المجهول خارج علامةالتكامل .
وهناك العديد من الأنواع غير الخطيةنذكر البعض منها :
1)معادلةيورشون-فولتيرا:

$$\mu\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}k(x,t,\varphi(t))dtx\in[0,T],T<\infty. \qquad (11.1)$$

حيث $k(x,t,\varphi(t)),f(x)$ دالتان معلومتان أي $f(x)\in C[0,T]$ و λ ثابت يحمل معاني فيزيائية و$\Phi(x)$ الدالة المجهولة . نسمي المعادلة (1.1.1) بمعادلة فولتيرا غير الخطية .
وتكون من الصنف الأول إذا كان $\mu=0$
وتكون من الصنف الثاني إذا كان $\mu=C^{int}$
وتكون من الصنف الثالث إذا كان $\mu=\mu(x)$

وبصفة عامة نسمي معادلةتكاملية بغير خطية إذا أختلفت درجة الدالة المجهولة عن الواحد الصحيح.
1)معادلةهامريشتين التكاملية:
معادلة هامريشتين التكاملية تكون من الشكل:

$$\mu\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{D}k(x,t)F(t,\varphi(t))dtD\in\mathbb{R}^{\varkappa}n\geqslant 1. \qquad (12.1)$$

ونعتمد على قيم μ فإذا كانت $\mu = 1$ تصبح المعادلة من الشكل

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D k(x,t)F(t,\varphi(t))dt. \qquad (13.1)$$

تسمى هذه المعادلة بمعادلة هامريشتين-فولتيرا التكاملية من الصنف الثاني .
أما في حالة $\mu = 0$ تصبح المعادلة من الشكل

$$f(x) + \lambda \int_D k(x,t)F(t,\varphi(t))dt = 0. \qquad (14.1)$$

فإننا نسمي هذه المعادلة بمعادلة هامريشتين -فولتيرا التكاملية من الصنف الأول.

1) معادلةفريدهولم -فولتيرا التكاملية:

$$\mu\varphi(\bar{x},\bar{t}) + \lambda \int_D k(\bar{x}-\bar{z},\bar{y}-\bar{s})F(t,\varphi(\bar{z},\bar{s}))d\bar{z}d\bar{s} + \lambda \int_0^t G(t,T)\Phi(\bar{x},\bar{y},T)dT = f(\bar{x},\bar{y},T). \qquad (15.1)$$

$$\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_n)$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

نسمي هذه المعادلة بمعادلة فريدهولم - فولتيرا غير الخطية ،حيث D تعتمد على منحنى التكامل .

1) مسألة الوجود والوحدانية لمعادلةفولتيرا التكامليةغير الخطية:

سوف نكتفي في هذا الجزء على ذكر شروط وجود ووحدانية الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية والتي من الشكل :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x G(x,t,\varphi(t))dt. \qquad (16.1)$$

لإثبات وجود ووحدانية الحل لهذه المعادلة يكفي حل مسألة كوشي أي تحقيق الشروط التالية .

1) تكامل الدالة $f(x)$ محدودعلى المجال $x \in [a,b]$

2) تكامل الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ محدود أي $| G(x,t,\varphi(t)) | < k$ حيث $< x,t < ba$

3) الدالة $f(x)$ تحقق شرط لبشيتز على المجال $x \in [a,b]$ أي

$$| f(x) - f(t) | < k | x - t |$$

4) الدالة $G(x,t,\varphi(t))$ تحقق شرط لبشيتز أي

$$| G(x,t,z) - G(x,t,z') | < k | z - z' |$$

2.1 المعادلات التكاملية ذات متغيرين

تكون المعادلات التكاملية ذات المتغيرين بصفة عامة من الشكل :

$$\lambda u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d k(x,y,s,t) F(u(s,t)) dsdt,$$

حيث

$-u(x,y)$هي الدالة المجهولةالمطلوب تعيينها.

$-f(x,y)$ و$k(x,y,s,t)$دوال معلومة قد تكون مركبةأوحقيقية .

* d وb ثوابت نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني
أما إذا كانت $\lambda = 0$ نسمي هذه المعادلة معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول

* d وb دوال نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني
أما إذا كانت $\lambda = 0$ نسمي هذه المعادلة معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول
*أما إذا كان إحداهما ثابت والأخر متغير فإننا نسمي هذه المعادلة بمعادلة فولتيرا -فريدهولم أو فريدهولم- فولتيرا
تنقسم المعادلات التكاملية ذات المتغيرين إلى قسمين خطية وغير خطية .

المعادلات التكاملية ذات المتغيرين غير الخطية

نسمي المعادلة التكاملية السابقة بغير خطية إذا كان $u(s,t)$ مركب من دالة غير خطية .

مثال

$$F(t,s) = exp(u(t,s)) \longrightarrow f(x,y) = \int_a^b \int_c^d k(x,y,s,t) F(t,s) dsdt.$$

المعادلات التكاملية ذات المتغيرين الخطية

نقول أن المعادلة السابقة خطية إذا كان المؤثر F خطي وتكون من الشكل التالي

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d k(x,y,s,t) F(u(s,t)) dsdt.$$

3.1 دوال القطع النبضيةBPF's

1.3.1 دوال القطع النبضيةذات متغيرواحد

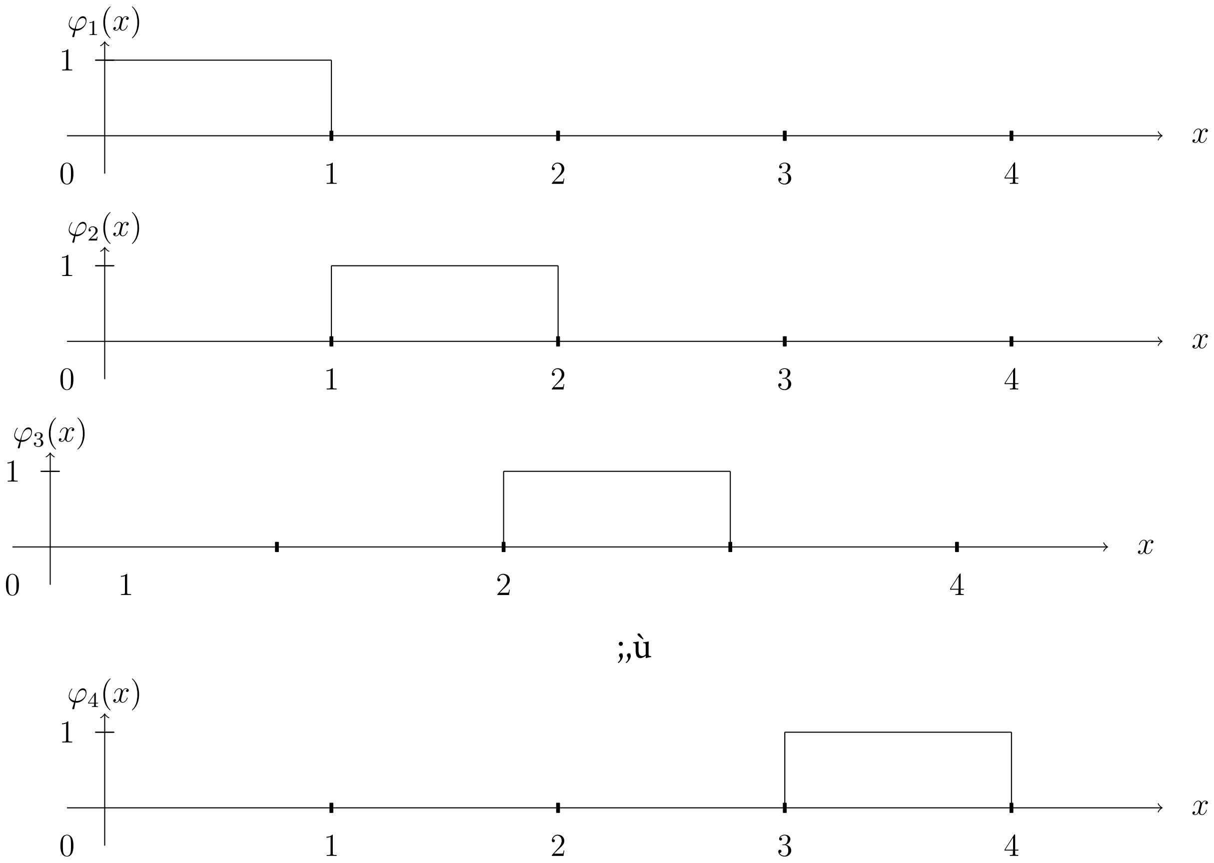
مقدمة: إن دوال القطع النبضية [3]
هي مجموعة دوال متعامدة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئي و هي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل، و مسائل التحكم و الأنظمة العلمية الأخرى. قدمت هذه المعادلات لأول مرة لمهندسي الكهرباء عن طريق هرميت في عام 1969، لكن لمدة حوالي سبع سنوات لم تلقى أي اهتمام من ناحية التطبيقات العملية. حتى منتصف السبعينات، حيث قام بعض الباحثين بدراسة دوال القطع النبضية و مصفوفة عملياتها الخاصة بالتكامل لإزالة تعقيد العبارات في حل مختلف مسائل التحكم بواسطة دوال والش. منذ ذلك الوقت ، أصبحت دوال القطع النبضية تطبق على نطاق واسع ويعود ذلك لبساطتها و سهولة عملياتها.

تعريف 1.3.1 نسمي دالة القطع النبضية كل دالة φ معرفة على $[0,T)$ كمايلي:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1 & \frac{iT}{m}\leq x\leq\frac{(i+1)T}{m}\\ 0 & non\ si\end{cases} \tag{17.1}$$

حيث $i=0,1,\ldots,m-1$ و m عدد صحيح موجب.

في مايلي نأخذ $T=1$
في مايلي الإنشاء الهندسي لدوال القطع النبضية من أجل $m=4$



شكل 1.1: دوال القطع النبضية، $(m = 4)$

ملاحظة 1.3.1 إن دوال القطع النبضية هي دوال متعامدة ولكن ليست متجانسة وتكون هذه الدوال متعامدة ومتجانسة من الشكل التالي :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} \sqrt{m} & \frac{iT}{m} \leq x \leq \frac{(i+1)T}{m} \\ 0 & non\ si \end{cases} \tag{18.1}$$

حيث $i = 0, 1, \ldots, m-1$ و m عدد صحيح موجب.

دوال القطع النبضية ذات متغير واحد تحقق الخواص التالية:

1. الفصل

$$\varphi_j(x)\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_j(x) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{19.1}$$

حيث $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

2. التعامد

$$< \varphi_i, \varphi_j >= \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = h\delta_{ij}$$

حيث $h=\frac{1}{m}$ و δ_{ij} هي دالة كرونكر.

3. تامة، أي من أجل كل $f\in L^2([0,1))$ إذا كان $\int_0^1\varphi_j(x)f(x)dx=0$ فإنه يستلزم $f=0$ حيثما كان.

ولما m تؤول إلى ∞تصبح الخاصية كالتالي .

$$\int_0^1 f_i^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \parallel \varphi_i(t)\parallel^2$$

كذالك

$$\parallel \varphi_i(t)\parallel^2=\int_0^1\varphi_i^2(t)dt$$

بحيث

$$f_i=\frac{1}{h}\int_0^1 f(t)\varphi_i(t)dt$$

دوال القطع النبضية تشكل أساس للدوال المستمرةالمعرفةعلى [0.1].

يمكن كتابة أساس الدوال القطع النبضية على شكل شعاع كمايلي:

$$\varphi(t)=[\varphi_0(t),\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\varphi_{m-1}(t)]^T$$

حيث $t\in[0,1]$

في هذه الحالة الخاصية (1) تمثل خاصية الفصل المتبعة.

$$\varphi(t)\varphi(t)^T=\begin{pmatrix}\varphi_0(t)&0&\cdots&0\\0&\varphi_1(t)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\varphi_{m-1}(t)\end{pmatrix}$$

$$\int_0^1\varphi(t)\varphi(t)^Tdt=\begin{pmatrix}h&0&\cdots&0\\0&h&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&h\end{pmatrix}=h*I=D.$$

ليكن X شعاع ذات m عنصر . [7]

$$\varphi(t)\varphi(t)^TX=\tilde{X}\varphi(t) \qquad (20.1)$$

$$\tilde{X}=diag(X_i^T\varphi_i(t))$$

. بحيث $\tilde{X}$ هو مصفوفة ذات الرتبة $m\times m$ الناتجة من جداء أساس الدوال القطع النبضية في منقوله في شعاع كيفي X كمايلي:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_0^T\varphi_0(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1^T\varphi_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{m-1}^T\varphi_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

أما في حالة إذا كان Xمصفوفة ولتكن A ذات الرتبة$(m \times m)$ يكون الناتج كمايلي:

$$\varphi(t)^T A\varphi(t) = \tilde{A}\varphi(t) \tag{21.1}$$

حيث$\tilde{A}$ هي عبارة عن شعاع ذات m عنصر .
أي

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varphi_1 a_{11} + \varphi_2 a_{12} + \cdots + \varphi_m a_{1m} + \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_1 a_{m1} + \varphi_2 a_{m2} + \cdots + \varphi_m a_{mm} \end{pmatrix}$$

2.3.1 دوال القطع النبضية ذات متغيرين

تعريف 2.3.1 نعرف دوال القطع النبضية ذات متغيرين
حيث
$x \in [0, T_1)$, $s \in [0, T_2)$ كمايلي:

$$\varphi_{i,j}(x,s) = \begin{cases} 1 & \frac{iT_1}{m_1} \le x \le \frac{(i+1)T_1}{m_1}; \frac{jT_2}{m_2} \le s \le \frac{(j+1)T_2}{m_2} \\ 0 & \textit{non si} \end{cases} \tag{22.1}$$

و $i = 0, 1, \ldots, m_1 - 1$, $j = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$ و m_1 ; m_2 عددان صحيحان موجبان.

في مايلي نأخذ $T_1 = 1$ $T_2 = 1$ و أي $h_1 = \frac{1}{m_1}$ و $h_2 = \frac{1}{m_2}$
تحقق دوال القطع النبضية ذات متغيرين الخصائص التالية :

1. الفصل

$$\varphi_{i,j}(x,s)\varphi_{k,l}(x,s) = \begin{cases} \varphi_{i,j}(x,s) & i = j, k = l \\ 0 & i \ne j, k \ne l \end{cases} \tag{23.1}$$

حيث $i, j = 1, 2, \ldots, m_1$، و $k, l = 1, 2, \ldots, m_2$.

2. التعامد

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{i,j}(x,s)\varphi_{k,l}(x,s)dxds = \begin{cases} h_1h_2 & i=j, k=l \\ 0 & i\neq j, k\neq l \end{cases} \qquad (24.1)$$

3. تامة، أي من أجل كل $f \in L^2([0,1]\times[0,1])$
إذا كان $\int_0^1 \varphi_{i,j}(x,s)f(x,s)dxds = 0$ فإنه يستلزم $f=0$ حيثما كان.
ولما m_1 و m_2 تؤول إلى ∞تصبح الخاصية كالتالي .

$$\int_0^1 \int_0^1 f_{ij}^2(x,s)dsdx = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_i^2 \parallel \varphi_{i,j}(x,s) \parallel^2$$

بحيث

$$f_{i,j}(x,s) = \frac{1}{h_1h_2}\int_0^1 \int_0^1 f(x,s)\varphi_{i,j}(x,s)dsdx$$

ملاحظة 2.3.1 كل دالة من دوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكن التعبير عنها بجداء دالتين من الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد كمايلي :

$$\varphi_{i,j}(x,s) = \varphi_i(x) \otimes \varphi_j(s)$$

بحيث $\otimes$ يدل على جداء كرونكر

$$\varphi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \varphi_m(t)]^T$$

$\varphi_i(s)$ و $\varphi_j(x)$ هما دوال القطع النبضية ذات متغير واحد ذات البعد m_1 و m_2 على التوالي .

*مجموعة الدوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكننا كتابتهاعلى شكل شعاع ذات(m_1m_2) عنصر .

$$\varphi_{i,j}(x,s) = [\varphi_{1,1}(x,s), \ldots\ldots\ldots, \varphi_{1,m_2}(x,s), \ldots\ldots, \varphi_{m_1,1}(x,s), \ldots\ldots\ldots, \varphi_{m_1,m_2}(x,s)]$$

بحيث
$(x,s) \in ([0,1]\times[0,1])$
في هذه الحالة الخاصية (1) تمثل خاصية الفصل المتبعة.

$$\varphi(x,s)\varphi(x,s)^T = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(x,s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_{1,2}(x,s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{m_1m_2(x,s)} \end{pmatrix} \qquad (25.1)$$

ليكن Xشعاع ذات m_1m_2 عنصر .

$$\varphi(x,s)\varphi(x,s)^TX=\tilde{X}\varphi(x,s) \tag{26.1}$$

بحيث $\tilde{X}$ هو مصفوفة ذات الرتبة $(m_1m_2)\times(m_1m_2)$ الناتجة من جداء أساس الدوال القطع النبضية في منقوله في شعاع كيفي X كمايلي:

إضافة على ذالك يمكننا الإستنتاج بوضوح أنه من أجل كل $(m_1m_2)\times(m_1m_2)$ مصفوفة A

$$\varphi(x,s)^TA\varphi(x,s)=\tilde{A}\varphi(x,s)$$

حيث$\tilde{A}$ هي عبارة عن شعاع ذات m_1m_2 عنصر ويساوي إلى الإدخالات القطرية للمصفوفة A .

الفصل الثاني

مصفوفات العمليات وتقريب التوابع

قائمة المحتويـــــات

مقدمة

دوال القطع النبضية هي مجموعة دوال متعامدة وغير متجانسة ذات قيم ثابتة على كل مجال جزئي وهي عادة تستخدم كطريقة مفيدة في التحليل, سنتطرق في هذا الفصل إلى دراسة دوال القطع النبضية ومصفوفات عملياتها الخاصة بالتكامل لإزالة التعقيدات في مختلف المشاكل وإستعمالها في تقريب التوابع ذات المتغير الوحد وذات المتغيرين.

1.2 تقريب تابع ذو متغير

1.1.2 تقريب تابع باستعمال الدوال القطع النبضيةذات متغير واحد

بمأن φ أساس للفضاء $L^2([0,1])$ يمكننا تقريب تابع ذات متغير واحد بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد.

الأن ليكن التابع $f(x) \in L^2([0,1])$

يمكننا تقريبه باستعمال أساس الدوال القطع النبضية بالشكل التالي :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i(x) = F^T \varphi_i(x) = \varphi_i^T(x) F$$

حيث

$$F^T = [f_1, f_2, ..., f_m]$$

و

$$\varphi(x)^T = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ...\varphi_m(x)].$$

و

$$f_i = \frac{1}{h} \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dt$$

خواص تحليل تابع بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية

-1 الدالة الثابتة

من أجل $f(t) = k$ يمكننا تحليل ثابت بإستعمال سلسلة الدوال القطع النبضية كمايلي :

$$k = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t)$$

أما في حالة إذا كانk شعاع يكون تحليله كما يلي:

$$k = (k, k, ...k)\varphi(t). = kE^T \varphi(t). \tag{1.2}$$

-2 جداءدالةفي ثابت

يمكننا تحليل جداء تابع ذات متغير في ثابت حقيقي بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية كمايلي:

$$\begin{aligned} kf(t) &= \sum_{i=1}^{m}(kf_i)\varphi_i(t). \\ &= kf\varphi(t). \end{aligned}$$

أما في حالة إذا كان $f(t)$ شعاع يكون تحليله كما يلي:

$$\begin{aligned} kf(t) &= k(f_1.........., f_m)\varphi(t). \\ &= kF^T\varphi(t). \end{aligned}$$

-3 جمع وطرح دالتين

لتكن الدالتين f و g يمكننا تحليل مجموعهما أو طرحهما بدلالة سلسلةالدوال القطع النبضية كمايلي:

$$f(t) \pm g(t) = (\sum_{i=1}^{m} f_i\varphi_i(t)) \pm (\sum_{i=1}^{m} g_i\varphi_i(t)). \qquad (2.2)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(f_i \pm g_i)\varphi_i(t). \qquad (3.2)$$

أما في حالة إذا كان f و gشعاعين يكون تحليلهما كما يلي:

$$f(t) \pm g(t) = (f_1 \pm g(t), ..., f_m \pm g(t))\varphi(t). \qquad (4.2)$$

$$= (F^T \pm G^T)\varphi(t). \qquad (5.2)$$

-4 جداء وقسمة دالتين

لتكن الدالتين f و g يمكننا تحليل جداؤهما أو قسمتهما بدلالة سلسلةالدوال القطع النبضية كمايلي:

$$f(t)g(t) = (\sum_{i=1}^{m}(f_i\varphi_i(t))(\sum_{i=1}^{m}(g_i\varphi_i(t)). \qquad (6.2)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(f_ig_i)\varphi_i(t). \qquad (7.2)$$

في حالة إذا كان $g \neq 0$ يمكننا أيضا تحليل (f/g) كمايلي:

$$f(t)/g(t) = (\sum_{i=1}^{m}(f_i\varphi_i(t))/(\sum_{i=1}^{m}(g_i\varphi_i(t)). \qquad (8.2)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(f_i/g_i)\varphi_i(t). \qquad (9.2)$$

أما في حالة إذا كان f و g أ شعة يكون تحليله كما يلي:

$$f(t)g(t) = (f_1(t)g_1(t), ..., f_m(t)g_m(t))\varphi(t). \quad (10.2)$$
$$= F^T D_G \varphi(t). \quad (11.2)$$
$$= G^T D_F \varphi(t). \quad (12.2)$$
$$= E^T D_F D_G \varphi(t). \quad (13.2)$$

$$f(t)/g(t) = (f_1(t)/g_1(t), ..., f_m(t)/g_m(t))\varphi(t). \quad (14.2)$$
$$= F^T D_G^{-1} \varphi(t). \quad (15.2)$$

بحيث D_F و D_G هي مصفوفات قطرية المحللة بدلالة معاملات الدوال القطع النبضية للأشعة F وG على التوالي .

توطئة 1.1.2 في حالة إذا كان رتبة الدالة ذات المتغير أكبر من أو تساوي الواحد نستدعي الشعاعينX_n و X معاملات بدلالةالدوال القطع النبضية لدوال $[x(s)]^n$ و $x(s)$
على التوالي
الأن نعرف X_n و X كمايلي:

$$X^T = [x_1, x_2, ..., x_m] \quad (16.2)$$

كذالك

$$X_n^T = [x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n] \quad (17.2)$$

بحيث $n \geqslant 1$ عدد صحيح موجب

برهان: من أجل $n = 1$

$$[x(s)]^n = x(s)$$

محققة
الأن نبرهن من أجل $n+1$

$$\begin{aligned}[x(s)]^{n+1} &= x(s)[x(s)]^n \\ &= XX_n \approx (X^T\varphi(s))(X_n^T\varphi(s)) \\ &\approx X^T\varphi(s)\varphi(s)^T X_n \\ &= X^T\tilde{X}_n\varphi(s)\end{aligned}$$

الأن بإستخدام المعادلة (17.2) نجد

$$X^T\tilde{X}_n = [x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, ..., x_m^{n+1}]$$

إذن بناءا عن المعادلة (17.2) ومن أجل $n+1$ هذه التوطئة محققة في تقريب التوابع ذات المتغير الواحد.

```
clear
clc
syms x
n=input('n=')
fun=input('fun=');
for i=1:n
    f(i)=n*int(fun,x,((i-1)/n),(i/n));
end
f
```

شكل 1.2: كيفية حساب قيم الشعاع F بالنسبة لتوابع ذات متغير واحدفي الماتلاب

مثال 1.1.2 تقريب التابع $f(x)$ ذات متغير بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية حيث $f(x) = x^2$
الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل $m = 4$

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{4} f_i \varphi_i(x) = F^T \varphi(x)$$

بحيث

$$F^T = [f_1, f_2, f_3, f_4]$$

الآن نقوم بحساب التوابع f_i.

$$f_1 = 4 \int_0^{\frac{1}{4}} x^2 dx = \frac{1}{48}$$

$$f_2 = 4 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{7}{48}$$

$$f_3 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x^2 dx = \frac{19}{48}$$

$$f_4 = 4 \int_{\frac{3}{4}}^{1} x^2 dx = \frac{37}{48}$$

ومنه

$$f(x) = \frac{1}{48}\varphi_1(x) + \frac{7}{48}\varphi_2(x) + \frac{19}{48}\varphi_3(x) + \frac{37}{48}\varphi_4(x)$$

مثال 2.1.2 $f(x) = \cos(x)$.
الآن نقوم بتقريب هذا التابع من أجل $m = 4$

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{4} f_i \varphi_i(x) = F^T \varphi(x)$$

بحيث

$$F^T = [f_1, f_2, f_3, f_4]$$

الآن نقوم بحساب التوابع f_i.

$$f_1 = 4\int_0^{\frac{1}{4}} \sin(x)dx = 0.9896$$

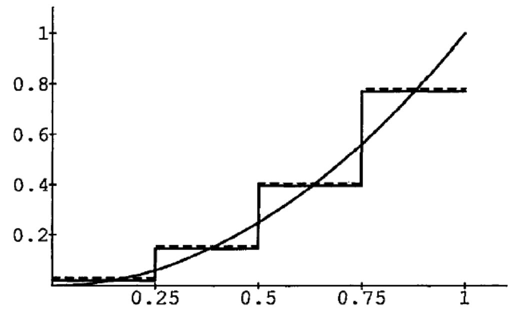
$$f_2 = 4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sin(x)dx = 0.9281$$

$$f_3 = 4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \sin(x)dx = 1.7984$$

$$f_4 = 4\int_{\frac{3}{4}}^{1} \sin(x)dx = 1.5674$$

ومنه

$$f(x) = 0.9896\varphi_1(x) + 0.9281\varphi_2(x) + 1.7984\varphi_3(x) + 1.5674\varphi_4(x)$$



شكل 2.2: سلسلة الدوال القطع النبضية لتابع $f(x) = x^2$ من أجل $m = 4$

2.2 تقريب تابع ذو متغيرين

1.2.2 تقريب تابع باستعمال أساس الدوال القطع النبضيةذات متغيرين

التابع $f(t,x) \in l^2([0,1] \times [0,1])$ يمكننا توسيعها وتحليلها وتقريبها بدلالة أساس الدوال القطع النبضية ذات متغيرين كمايلي:

$$f(t,x) \approx \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} f_{i,j}\varphi_{i,j}(t,x) = F^T\varphi(t,x) = \varphi(t,x)^T F$$

حيث

$$F^T = [f_{1,1}, f_{1,2}, ..., f_{1,m_2}, ..., f_{m_1,1}, ...f_{m_1,m_2}]$$

و

$$\varphi(t,x)^T = [\varphi_{1,1}(t,x), \varphi_{1,2}(t,x), ..., \varphi_{1,m_2}(t,x)........, \varphi_{m_1,1}(t,x), ..., \varphi_{m_1,m_2(t,x)}.]$$

$$f_{i,j} = \frac{1}{h_1}\frac{1}{h_2}\int_{(i-1)h_1}^{ih_1}\int_{(j-1)h_2}^{jh_2} f(t,x)dtds$$

الدوال القطع النبضية ذات متغيرين يمكننا التعبير عنها بجداء دالتين من الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد كمايلي :

$$\varphi_{i,j}(x,s) = \varphi_i(x)\phi_j(s). \qquad (18.2)$$

حيث $\phi_j(s)$و $\varphi_i(x)$ هما دوال قطع نبضية ذات متغير واحد .من هنا نستخدم هذه العلاقة في تقريب الدالة $f(s,x)$ بالعبارة التالية :

$$f(x,s) \approx \Phi(x)F\Psi(s)$$

حيث $\psi(s)$و$\phi(x)$ هما أساس الدوال القطع النبضية ذات البعد m_1 و m_2 على التوالي

في هذا النطاق نأخذ $m_1 = m_2$ هذا يعني أن $h_1 = h_2 = \frac{1}{m}$ و F مصفوفةذات الرتبة $(m \times m)$ معرفة بالعبارة

التالية :

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,m} \end{bmatrix}$$

توطئة 1.2.2 في حالة إذا كانت رتبة الدالة ذات المتغيرين أكبر من أو تساوي الواحد نستخدم الشعاعين U_p و U معاملات بدلالةالدوال القطع النبضية لدوال $[u(x,y)]^p$ و $u(x,y)$ على التوالي

الأن نعرف U_p و U كمايلي:

$$U^T = [u_{1,1}, u_{1,2}, ...u_{1,m}......u_{m,1}......., U_{m,m}] \qquad (19.2)$$

كذالك

$$U_p^T = [u_{1,1}^p, u_{1,2}^p, ...u_{1,m}.......u_{m,1}........, u_{m,m}^p] \qquad (20.2)$$

بحيث $p \geqslant 1$ عدد صحيح موجب

برهان: من أجل $p = 1$

$$[u(x,y)]^p = u(x,y)$$

محققة

الأن نبرهن من أجل $p + 1$

$$\begin{aligned} [u(x,y)]^{p+1} &= u(x,y)[u(x,y)]^p \\ &= UU_p \approx (U^T\varphi(x,y))(U_p^T\varphi(x,y)) \\ &\approx U^T\varphi(x,y)\varphi(x,y)^TU_p \\ &= U^T\tilde{U}_n\varphi(x,y) \end{aligned}$$

الأن بإستخدام المعادلة (20.2) نجد

$$U^T\tilde{U}_p = [u_{11}^{p+1}, u_{12}^{p+1}, ..., u_{1m}^{p+1}........., u_{mm}^{p+1}]$$

إذن بناءا عن المعادلة(20.2) ومن أجل $p + 1$ هذه التوطئة محققة في تقريب التوابع ذات المتغيرين

مثال 3.2.2 لتكن الدالة $f(x,y) = 2x - y$ الأن نقوم بتحليل هذه الدالة من أجل $m = 4$ أي

$$f(x) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_{ij}\varphi_{ij} = F^T\varphi(t)$$

حيث

$$F = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, f_{41}, f_{42}, f_{43}, f_{44}]$$

الأن نقوم بحساب هذه التوابع f_{ij}.

$$f_{11} = 16\int_0^{\frac{1}{4}}\int_0^{\frac{1}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{1}{8}$$

$$f_{12} = 16\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(2x-y)dxdy = \frac{-1}{8}$$

$$f_{13} = 16\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{-3}{8}$$

$$f_{14} = 16\int_0^{\frac{1}{4}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}(2x-y)dxdy = \frac{-5}{8}$$

$$f_{21} = 16\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{5}{8}$$

$$f_{22} = 16\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(2x-y)dxdy = \frac{3}{8}$$

$$f_{23} = 16\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{1}{8}$$

$$f_{24} = 16\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}(2x-y)dxdy = \frac{-1}{8}$$

$$f_{31} = 16\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\int_0^{\frac{1}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{9}{8}$$

$$f_{32} = 16\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(2x-y)dxdy = \frac{7}{8}$$

$$f_{33} = 16\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{5}{8}$$

$$f_{34} = 16\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\int_{\frac{3}{4}}^{1}(2x-y)dxdy = \frac{3}{8}$$

$$f_{41} = 16\int_{\frac{3}{4}}^{1}\int_0^{\frac{1}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{13}{8}$$

$$f_{42} = 16\int_{\frac{3}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(2x-y)dxdy = \frac{11}{8}$$

$$f_{43} = 16\int_{\frac{3}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}(2x-y)dxdy = \frac{9}{8}$$

$$f_{44} = 16\int_{\frac{3}{4}}^{1}\int_{\frac{3}{4}}^{1}(2x-y)dxdy = \frac{7}{8}$$

إذن

$$F = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \\ 13 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

أي

$$f(x,y) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \\ 13 & 11 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \\ \varphi_2(y) \\ \\ \varphi_3(y) \\ \\ \varphi_4(y) \end{pmatrix}$$

```
clear
clc
syms x y
n=input('n=')
fun=input('fun=')
for i=1:n
  for j=1:n
       f(i,j)=int(fun,x,((i-1)/n),(i/n));
    G(i,j)=n^2*int(f(i,j),y,((j-1)/n),(j/n));
  end

end
G
```

شكل 3.2: كيفية حساب قيم المصفوفة F بالنسبة لتوابع ذات متغيرين في الماتلاب

3.2 مصفوفات العمليات

1.3.2 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضيةذات متغير واحد

أثناء حلنا للمعادلات التكاملية تتصادف كثيرا مع تكامل $\int_0^x \varphi(t)dt$ وحيث أن الناتج هو دالة يمكن تحليلها باستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد على النحو التالي

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt \simeq P\varphi_i(x) \tag{21.2}$$

إن المصفوفة P تدعى المصفوفة التنفيذية للتكامل وهي من الرتبة $(m \times m)$ وللحصول عليها نتبع مايلي :

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = \begin{cases} 0 & si \quad x < ih \\ (x-ih)\varphi_i(x) & si \quad ih \leqslant x < (i+1)h \\ h\varphi_{i+1}(x) & si \quad (i+1)h \leqslant x < 1 \end{cases} \tag{22.2}$$

ثم يمكن كتابتها

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = (x-ih)\varphi_i(x) + h\sum_{j=i+1}^{m-1}\varphi_j(x)$$

يمكننا تقريب $x-ih$ من أجل $ih \leqslant x \leqslant (i+1)h$ إلى $\frac{h}{2}$
الأن نعبر عن التكامل $\int_0^x \varphi_i(t)dt$ بالعبارة التالية :

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt \simeq [0,0,0,0,0,....0,\frac{h}{2},h,h,h,h,h,h,h,h,h,....h]\varphi_i(x)$$

أي

$$\int_0^x \varphi_i(t)dt = \begin{pmatrix} \int_0^x \varphi_1(t)dt \\ \int_0^x \varphi_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^x \varphi_m(t)dt \end{pmatrix} \simeq \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

إذن الصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضية ذات متغير بالنسبة للتكامل هي

$$P = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ومن هنا يمكننا أيضا تقريب تكامل التابع $f(\tau)$ كمايلي:

$$\int_0^x f(\tau)d\tau = \int_0^x F^T\varphi(\tau)d\tau = F^T\int_0^x \varphi(\tau)d\tau \simeq F^T P\varphi(x) \qquad (23.2)$$

***مقلوب المصفوفةالتنفيذية للتكامل**

المصفوفة التنفيذية للتكامل Pهي مصفوفة مثلثية علوية ,هذا يعني أن المصفوفة P قابلة للقلب ومقلوبها يكون من الشكل :

$$P = \frac{2}{h}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & (-1)^{m-1}2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & (-1)^{m-2}2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

***مشتق دالة**

الإشتقاق هو العملية المعاكسة للتكامل وإشتقاق أي دالة يمكننا التعبير عنه بدلاله سلسلة الدوال القطع النبضية ونحصل عليه عن طريق التكامل كمايلي:. إذا كانت الدالة $g(t)$ قابلة للإشتقاق في المجال $[0,1]$ ونرمز له

$$f(t) = \frac{dg(t)}{dt} \qquad (24.2)$$

بعد تكامل المعادلة (24.2) من 0 إلى t نجد

$$g(t) - g_0^{(0)} = \int_0^t f(t)dt, \tag{25.2}$$

حيث القيمة الأولية لدالة $g(t)$ عند 0 نرمزلها بالرمز

$$g_0^{(0)} = g(0) \tag{26.2}$$

بإستخدام المعادلتين (1.2) و (24.2) في المعادلة (25.2) نحصل على مايلي :

$$(G^T - g_0^{(0)} E^T)\varphi(t) = F^T P\varphi(t) \tag{27.2}$$

بعد إختزال معاملات الدوال القطع النبضية $\varphi(t)$ من هذه المعادلة نجد

$$(G^T - g_0^{(0)} E^T) = F^T P \tag{28.2}$$

نعلم أن المصفوفة التنفيذية P قابلة للقلب هذا يعني P^{-1} موجود ومنه

$$F^T = (G^T - g_0^{(0)} E^T)P^{-1} \tag{29.2}$$

ومن ثم تكون عبارة مشتقة الدالة $g(t)$ بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية كمايلي :

$$\frac{dg(t)}{dt}\varphi(t) = (G^T - g_0^{(0)} E^T)P^{-1}\varphi(t) \tag{30.2}$$

المعادلة (30.2) تبين لنا أن مشتقة أي دالة يمكن أن تحول بدلالة التقريبات إلى عمليات جبرية .وكل ذالك يبنى على أساس مقلوب المصفوفة التنفيذية لتكامل.

الأن نفترض أن سلسلة الدوال القطع النبضية تحت جداء تكاملات على أي دالة , وبالأحرى هي سبب للحصول على طريقة للإشتقاق
أي يمكننا إستخدام العلاقة (1.2) و تطبيقها في جداء التكاملات لأي دالة.

$$\underbrace{\int_0^s \cdots \int_0^s}_{k} f(t)dt \cdots dt. \tag{31.2}$$

$$= \int_0^s \cdots \Big(\int_0^s \Big(\int_0^s f(t)dt\,)dt\,)\cdots dt. \tag{32.2}$$

$$= \int_0^s \cdots \Big(\int_0^s F^T P\varphi(t)dt\,)\cdots dt. \tag{33.2}$$

$$\vdots \tag{34.2}$$

$$= \int_0^s F^T P^{k-1}\varphi(t)dt \tag{35.2}$$

$$\tag{36.2}$$

$$= F^T P^k \varphi(t) \tag{37.2}$$

إذا كانت الدالة $g(t)$ قابلة للإشتقاق k مرة حيث $t \in [0,1]$ ونرمز لها كمايلي

$$f(t) = \frac{d^k g(t)}{dt^k} \tag{38.2}$$

بعد ذالك نكامل المعادلة (38.2) k مرة من0إلى t نجد

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k} f(t)dt \cdots dt. \tag{39.2}$$

$$= g(t) - g_0^{(0)} - g_0^1 \int_0^t dt - \cdots - g_0^{(k-1)} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{k-1} dt \cdots dt. \tag{40.2}$$

حيث $g_0^{(0)}$ هي القيمة الإبتدائيةلمشتقة الدالة $g(t)$ عند 0و $g_0^{(i)}(i = 0, 1, ...k-1)$ هي قيمة مشتقة الدالة $g(t)$
على التوالي

$$g_0^{(i)} = \frac{d^i g(t)}{dt^i} \mid_{t=0}$$

الأن من هذه العلاقة نجد

$$g_0^{(i)} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{i} dt \cdots dt = g_0^{(i)} E^T P^i \varphi(t). \tag{41.2}$$

من أجل $i = 1, 2.....k-1,$ ومن العلاقة (37.2) نجد

$$F^T = G^T P^{-k} - g_0^0 G^T P^{-k} - g_0^1 G^T P^{-(k-1)} \cdots - g_0^{k-1} G^T P^{-1} \tag{42.2}$$

ومن ثم تكون عبارة مشتقة الدالة $g(t)$ k مرة بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية كمايلي :

$$\frac{d^k g(t)}{dt^k} = (G^T P^{-k} - \sum_{i=0}^{k-1} g_0^{(i)} E^T P^{-(k-i)}) \varphi(t) \tag{43.2}$$

2.3.2 المصفوفة التنفيذية لدوال القطع النبضيةذات متغيرين

أثناء حلنا للمعادلات التكاملية ذات متغيرين نتصادف كثيرا مع التكامل $\int_0^x \int_0^y \varphi(t,s)dtds$ وحيث أن الناتج هو دالة يمكن تحليلها باستعمال الدوال القطع النبضية ذات متغيرين على النحو التالي

$$\int_0^x \int_0^y \varphi_{i,j}(t,s)dtds \backsimeq E\varphi(x,y) = [P_{(m_1 \times m_1)} \otimes P_{(m_2 \times m_2)}]\varphi(x,y), \tag{44.2}$$

المصفوفة P هي المصفوفة التنفيذية بالنسبة للتكامل ذات متغير واحد المعرفة كمايلي:

$$P = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

و المصفوفة E تدعى المصفوفة التنفيدية للتكامل الثنائي وهي من الرتبة $(m_1m_2) \times (m_1m_2)$ وللحصول عليها نتبع مايلي :

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y \varphi(t,s)dtds &= \int_0^x \int_0^y \varphi(t) \otimes \varphi(s)dsdt \\ &= \int_0^x \varphi(t)dt \otimes \int_0^y \varphi(s)ds \end{aligned}$$

بإستخدام المعادلة (21.2) نجد

$$E = [P_{(m_1 \times m_1)} \otimes P_{(m_2 \times m_2)}]$$

أي

$$E = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{h}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

حيث $\otimes$ يدل على جداء كرونوسكر المعرف كمايلي:

$$A \otimes B = (a_{ij}B)$$

وعليه فإن التكامل الثنائي لكل تابع ذات متغيرين $f(t,x)$ يمكننا تقريبه بالعبارة التالية :

$$\int_0^t \int_0^x f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \simeq \int_0^t \int_0^x F^T \varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \simeq F^T E \varphi(x,t)$$

***تحليل الخطأ ومعدل التقارب**

يمكننا الحصول على الخطأ التمثيلي عندما تكون الدالة $f(t,x)$ قابلة للمفاضلة بدلالة سلسلة الدوال القطع النبضية ذات المتغيرين في المجال $[0,1] \times [0,1]$ نحدد الخطأ التمثيلي بين التابع $f(t,x)$ وتحليله كمايلي:

$$e_{ij}(t,x) = f_{ij}\varphi_{ij}(t,x) - (t,x) \,|, \quad (t,x) \in D$$

حيث

$$D=\{(t,x):=\frac{i-1}{m}\leqslant t\leqslant\frac{i}{m};\quad \frac{j-1}{m}\leqslant x\leqslant\frac{j}{m}\}$$

بإستخدام نظرية القيم المتوسطة يمكن إضهار ذالك .

$$\| e_{ij}(t,x)\|^2\leqslant\frac{2}{m^4}M^2 \tag{45.2}$$

بحيث $\| f(t,x)\|\leqslant M$ تمثل الخطأ بين التابع $f(t,x)$ وتحليله $f_m(t,x)$ على المجال $[0,1]\times[0,1]$ كمايلي:

$$e(t,x)=f_m(t,x)-f(t,x), \tag{46.2}$$

بإستخدام (45.2) نجد

$$\| e(t,x)\|^2\leqslant\frac{2}{m^2}M^2 \tag{47.2}$$

لذالك $\| e_{ij}(t,x)\|=O(\frac{1}{m})$ ونفترض أن القيمه التقريبية لتابع $f(t,x)$ هي

$$f_m(t,x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}f_{ij}\varphi_{ij}(t,x),$$

ونرمز بـ $\bar{f_{ij}}$ إلى القيمة التقريبية f_{ij} و

$$\bar{f_m}(t,x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{f_{ij}}\varphi_{ij}(t,x),$$

من أجل $(t,x)\in D$ لدينا

$$\| \bar{f_m}\varphi_{ij}-f(t,x)\|\leqslant\| f_{ij}\varphi_{ij}-f(t,x)\|+\|\bar{f_{ij}}\varphi_{ij}-f_{ij}\varphi_{ij}\| \tag{48.2}$$

بإستخدام (47.2) يمكننا كتابة مايلي

$$\| \bar{f_{ij}}\varphi_{ij}-f(t,x)\|\leqslant\frac{\sqrt{2}M}{m}+\frac{\|\bar{f_{ij}}-f(t,x)\|_\infty}{m} \tag{49.2}$$

وبالتالي

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}f_m(t,x)=f(t,x)$$

للمزيدمن التفاصيل أنظر [7]

الفصل الثالث

طريقةحل المعادلات التكاملية بإستخدام الدوال القطع النبضية

قائمة المحتويـــــــات

مقدمة

لقد تعددت طرق حل المعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية من الصنفين الأول والثاني , منها .طريقة التقريب المتتابع ,طريقة الحل بسلسلة,طريقة تحويل لابلاص ,طريقة إستعمال أساس الدوال القطع النبضية , والتي هي محل دراستنا في حل هذه المعادلات التكاملية .

1.3 طريقةحل المعادلا ت التكاملية الخطية من الصنف الأول والثاني بإستخدام أساس الدوال القطع النبضية ذات متغير واحد

لنفتتح دراستنا بمعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من الصنف الأول والتي تكتب من الشكل :

$$f(t) = \int_0^t k(t,s)X(s)ds, \quad t \in [0.1]. \tag{1.3}$$

-$X(s)$هي الدالة المجهولة المطلوب إيجادها.

-$f(t) \in L^2([0,1])$ و $k(t,s)L^2([0,1]\times[0,1])$ هي دوال معلومة.

الأن نقوم بتقريب الدوال $X(t)$ و $f(t)$ و $k(t,s)$ بدلالة أساس الدوال القطع النبضية كمايلي:

$$\begin{aligned} f(t) &\simeq F^T\varphi(t) = \varphi(t)^T F, \\ X(t) &\simeq X^T\varphi(t) = \varphi(t)^T X, \\ k(t,s) &\simeq \varphi(t)^T k\varphi(s), \end{aligned} \tag{2.3}$$

بحيث F, X هماأشعة ذات m عنصر وk مصفوفة ذات الرتبة $(m\times m)$ بتعويض (2.3) في (1.3) نجد

$$\begin{aligned} F^T\varphi(t) &\approx \int_0^t \varphi(t)^T k\varphi(s)\varphi(s)^T X ds. \\ &\simeq \varphi(t)^T k \int_0^t \varphi(s)\varphi(s)^T X ds. \end{aligned}$$

بإستخدام (20.1) نجد

$$\begin{aligned} F^T\varphi(t) &\simeq \varphi(t)^T k \int_0^t \tilde{X}\varphi(s)ds. \\ &\simeq \varphi(t)^T k\tilde{X} \int_0^t \varphi(s)ds \end{aligned}$$

بإستخدام المصفوفة التنفيذيةلتكامل P على هذا التكامل نجد

$$F^T\varphi(t) \simeq \varphi(t)^T k\tilde{X}P\varphi(t) \tag{3.3}$$

ومنه $k\tilde{X}P$ هي مصفوفة ذات الرتبة $(m \times m)$ بتطبيق خاصية المعادلة (20.1) على المصفوفة $k\tilde{X}P$ نجد نرمز إلى $k\tilde{X}P$ بـ $\hat{X}$ كمايلي:

$$\varphi(t)^T k\tilde{X}P\varphi(t) = \varphi(t)^T \hat{X}^T. \tag{4.3}$$

بحيث $\hat{X}$ هو شعاع ذات m عنصر ويساوي للعناصر القطرية للمصفوفة $k\tilde{X}P$ ويكتب كما يلي :

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{h}{2}k_{1,1}x_1 \\ hk_{1,2}x_1 + \frac{h}{2}k_{2,2}x_2 \\ hk_{3,1}x_1 + hk_{3,2}x_2 + \frac{h}{2}k_{3,3}x_3 \\ \vdots \\ hk_{m,1}x_1 + hk_{m,2}x_2 + \cdots + \frac{h}{2}k_{m,m}x_m \end{pmatrix}$$

كذالك يمكننا كتابتها كمايلي :

$$\hat{X} = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2}k_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{2,1} & \frac{1}{2}k_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{3,1} & k_{3,2} & \frac{1}{2}k_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m,1} & k_{m,2} & k_{m,3} & \cdots & \frac{1}{2}k_{m,m}x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

الأن نضم المعادلتين (3.3) و (4.3) نجد

$$\hat{X} - F = 0 \tag{5.3}$$

أو

$$h\sum_{j=0}^{i} k_{ij}X_j = f_i, \quad i = 1, 2, ...m$$

و بعد استبدال = مع $\simeq$ ، يكون لدينا نظام خطي الذي يمكن حله بعدة طرق مثلا طريقة كرامر وقوص ....إلخ مع أن X غير معروف ،ثم عن طريق استخدام

$$X(t) \simeq X^T\varphi(t).$$

يتم إعطاء الحل التقريبي.

والأن سوف نقوم بدراسة معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من الصنف الثاني والتي تكتب من الشكل :

$$X(t) = f(t) + \int_0^t k(t,s)X(s)ds, \quad t \in [0.1]. \tag{6.3}$$

حيث

-$X(t)$هي الدالة المجهولة المطلوب إيجادها.

-$f(t) \in L^2([0,1])$ و $k(t,s)L^2([0,1]\times[0,1])$ هي دوال معلومة.
الأن نقوم بتقريب الدوال $X(t)$ و $f(t)$ و $k(t,s)$ بدلالة أساس الدوال القطع النبضية كمايلي:

$$X(t) \approx \sum_{i=1}^{m} X_i(t)\varphi_i(t) = X^T(t)\varphi(t) = \varphi(t)^T X^T \tag{7.3}$$

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{m} F_i\varphi_i(t) = F^T\varphi(t) = \varphi(t)^T F \tag{8.3}$$

$$K(t,s) \approx \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} K_{ij}\varphi_i(t)\phi_j(s) = \varphi(x)^T K\phi(s) \tag{9.3}$$

بتعويض المعادلات (7.3) و (8.3) و (9.3) في المعادلة (6.3) نجد

$$\begin{aligned} X^T\varphi(t) &\approx F^T\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t)^T K\varphi(s)\varphi(s)^T X ds. \\ &= F^T\varphi(t) + \varphi(t)^T K \int_0^t \varphi(s)\varphi(s)^T X ds. \end{aligned}$$

بإستخدام المعادلة (19.1) و (1.2) نجد

$$X^T\varphi(t) \approx F^T\varphi(t) + \varphi(t)^T k\tilde{X}P\varphi(t),$$

بحيث $k\tilde{X}P$ هي مصفوفة ذات البعد $m\times m$ نرمز لها بالرمز $\hat{X}$
بإستخدام المعادلة (20.1) نجد

$$X^T\varphi(t) \approx F^T\varphi(t) + \hat{X}^T\varphi(t),$$

بحيث $\hat{X}$ هي مصفوفة مثلثية سفلية معرفة كمايلي :

$$\hat{X}_{ij} = \begin{cases} hk_{ij}X_j & si \quad j<i \\ \frac{h}{2}k_{ii}X_i & si \quad i=j \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{10.3}$$

كذالك يتم تحويل المعادلة (5.3) إلى جملة معادلات يسهل حلها:

$$QX = F \tag{11.3}$$

بحيث
$X = [X_1, X_2, ...X_m]^T$ و $F = [F_1, F_2..........., F_m]^T$ و

$$Q_{ij} = \begin{cases} -hk_{ij} & si \quad j < i \\ 1 - \frac{h}{2}k_{ii} & si \quad i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

(12.3)

أي حل المعادلة التكاملية الخطيه (6.3) هو

$$X = Q^{-1}F$$

مثال 4.1.3 لتكن معادلة فولتيرا التكاملية الخطية التالية .

$$X(t) = \sin(t) + \int_0^t (t-s)X(s)ds. \tag{13.3}$$

الأن نقوم بتقريب الدالة $\sin(t)$ بالطريقة المذكورة سابقاوذالك من أجل $m = 2$

$$f_1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(t)dt = 0.2448.$$

$$f_2 = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(t)dt = 0.6748.$$

الأن نقوم بحساب عناصر k

$$k_{11} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(t-s)dtds = 0$$

$$k_{12} = 4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1(t-s)dtds = \frac{1}{2}$$

$$k_{21} = 4\int_{\frac{1}{2}}^1\int_0^{\frac{1}{2}}(t-s)dtds = -\frac{1}{2}$$

$$k_{22} = 4\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^1(t-s)dtds = 0$$

ومنه

$$k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

والأن نقوم بحساب المصفوفة Q بالطريقة المذكورة سابقا

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومن هنا نقوم بحل الجملة الخطية بطريقه المعكوس
أولا مقلوب المصفوفة Q هو

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,00007 \\ 0,0,0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9039 * 10^{-5} \\ 2,2845 * 10^{-4} \end{pmatrix}$$

إذن الحل التقريبي هو

$$X(t) = x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t)$$

$$X(t) = 1,9039 * 10^{-5}\varphi_1(t) + 2,2845 * 10^{-4}\varphi_2(t)$$

```
clear
clc
syms x y
n=input('n=')
fn2=input('fn2=')
for i=1:n
  for j=1:n
        f(i,j)=int(fn2,x,((i-1)/n),(i/n));
     G(i,j)=n^2*int(f(i,j),y,((j-1)/n),(j/n));
  end

end

fn1=input('fn1=');
for i=1:n
     R(i)=n*int(fn1,x,((i-1)/n),(i/n));
end
G

G1=triu((G),1)
G2=triu(G)
G3=G2-G1
G4= eye(n)-(1/(2*n))*G3
G5= -(1/n)*G1+G4
S=G5\R'
```

شكل 1.3: كيفية إيجاد الحل التقريبي لمعادلة تكاملية خطيةفي الماتلاب

2.3 طريقةحل المعادلا ت التكامليةذات متغيرين غيرالخطية بإستخدام أساس الدوال القطع النبضية ذات متغيرين

لتكن المعادلة التكاملية لفولتيرا- فريدهولم غير الخطية المعرفة كمايلي :

$$g(t,x) = \int_0^t \int_\omega k(t,s,x,\xi)G(u(s,\xi))dsd\xi \quad (t,x) \in [0,1] \times \omega \qquad (14.3)$$

مع أن $G(u(s,\xi)) = [u(s,\xi)]^p$ حيث p عدد صحيح موجب

يمكننا تقريب التوابع $g(t,x)$ ، $u(t,x)$ ، $[u(t,x)]^p$ و $k(t,s,x,\xi)$ بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية ذات متغيرين كمايلي:

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \varphi(t,x)^T G, \\ u(t,x) &= \varphi(t,x)^T U, \\ [u(t,x)]^p &= \varphi(t,x)^T F, \\ k(t,s,x,\xi) &= \varphi(t,x)^T K \varphi(s,\xi), \end{aligned}$$

(15.3)

الأن بتعويض المعادلة (14.3) في (2.3) نجد

$$\varphi(t,x)^T G = \int_0^t \int_0^1 \varphi(t,x)^T K \varphi(s,\xi)\varphi(t,x)^T F ds d\xi, \quad (16.3)$$

بإستخدام المعادلتين (25.1) و (18.2) نرمز بـ R_j إلى $\int_0^t \varphi_i(s)ds$ ونفرض أن $h = \int_0^1 \varphi_i(\xi)d\xi$

$$\int_0^t \int_0^1 \varphi(s,\xi)\varphi(s,\xi)^T ds d\xi = \begin{pmatrix} \int_0^t\int_0^1 \varphi_1(s)\varphi_1(\xi)dsd\xi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_0^t\int_0^1 \varphi_2(s)\varphi_2(\xi)dsd\xi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_0^t\int_0^1 \varphi_m(s)\varphi_m(\xi)dsd\xi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} hR_1\varphi_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & hR_2\varphi_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & hR_m\varphi_m(t) \end{pmatrix}$$

بتعويض قيمة هذا التكامل بالمصفوفة في المعادلة (2.3) نجد

$$\varphi(t,x)^T G = \varphi(t,x)^T Q F. \quad (17.3)$$

أي

$$G = QF. \quad (18.3)$$

حيث $f_{ij} = (u_{ij})^p$ و Q_{lz} مصفوفة مثلثية سفلية , $1 < l < m_2$ و $1 < z < m_1$ وتكون من الشكل التالي:

$$Q_{lz} = \begin{cases} 0 & si \quad l < z, \\ \frac{h^2}{2k_{ij}} & si \quad l = z, \\ h^2 k_{ij} & sinon, \end{cases} \quad (19.3)$$

حيث $m_1(l-1)+1 \leqslant i \leqslant m_1 l$ و $(z-1)m_2+1 \leqslant j \leqslant zm_2,$ و 0 هو مصفوفة صفرية .

والأن بعد تطبيق وضائف الدوال القطع النبضية ذات متغيرين يتم تحويل المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيرا-فريد هولم إلى معادلات جبرية التي يمكن حلها بسهولة وبعدة طرق .

إذا كان $u(x,t) \geqslant 0$ و
من أجل كل $(t,x) \in ([0,1] \times [0,1])$ الحل التقريبي يكون كمايلي:

$$u(t,x) = \varphi(t,x)^T U,$$

المحدد من المعادلة (2.3) حيث $u_{ij} = (f_{ij})^{\frac{1}{p}}$ و u_{ij} وf_{ij} هي العناصر المكونة منها الأشعة Uو F على التوالي.

لتكن المعادلة التكاملية غير الخطية لفولتيراالمعرفة كمايلي :

$$f(x,y) = \int_0^x \int_0^y R(x,y,s,t,u(s,t)))dsdt \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \qquad (20.3)$$

مع أن

$$R(x,y,s,t,u(s,t))) = k(x,y,s,t)[u(x,y)]^p$$

حيث p عدد صحيح موجب
يمكننا تقريب التوابع

$$f(x,y) \quad ,u(x,y) \quad , \quad [u(x,y)]^p$$

و $k(x,y,s,t)$ بإستعمال أساس الدوال القطع النبضية ذات متغيرين كمايلي:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi(x,y)^T F, \\ u(x,y) &= \varphi(x,y)^T U, \\ [u(x,y)]^p &= \varphi(x,y)^T U_p, \\ k(x,y,s,t) &= \varphi(x,y)^T K \varphi(s,t), \end{aligned}$$

(21.3)

$$\begin{aligned} \varphi(x,y)^T F &= \int_0^x \int_0^y \varphi(x,y)^T K \varphi(s,t) \varphi(s,t)^T U_p dsdy, \\ &= \varphi(x,y) K \int_0^x \int_0^y \varphi(s,t) \varphi(s,t)^T U_p dsdy, \end{aligned}$$

بإستخدام المعادلة (25.1) نجد

$$= \varphi(x,y)^T K \int_0^x \int_0^y \tilde{U}_p \varphi(s,t) dsdy.$$

$$= \varphi(x,y)^T K \tilde{U}_p \int_0^x \int_0^y \varphi(s,t) dsdy.$$

بإستخدام المعادلة (21.2)

$$= \varphi(x,y)^T K\tilde{U}_p E\varphi(x,y)$$

ومنه

$$\varphi(x,y)^T F = \varphi(x,y)^T K\tilde{U}_p E\varphi(x,y) \quad (22.3)$$

نرمز إلى $K\tilde{U}_pE$ بـ $\hat{U}_p$ بعد التعويض تصبح المعادلة (2.3)

$$\varphi(x,y)^T F = \varphi(x,y)^T \hat{U}_p \quad (23.3)$$

أي

$$F = \hat{U}_p \quad (24.3)$$

حيث $\hat{U}_p$هو شعاع ذات $(m+1)^2$ ويساوي إلى الإدخالات القطريه للمصفوفة $K\tilde{U}_pE$ كمايلي:

$$\sum_j^i e_{ij}k_{ji}v_j \quad i = 1......(m+1)^2$$

حيث k_{ij},e_{ij} و v_j عناصر من المصفوفة E , k , U_p على التوالي و

$$v_j = (U_j)^p$$

وبعد ذالك نحل الجملة غير الخطية بطريقةنيوتن رافسون . و بعد إيجاد قيم $(U_{ij})^p$ يكون الحل التقريبي كمايلي :

$$u(x,y) \approx \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^m u_{ij}^p \varphi_{i,j}(x,y) = U_p^T \varphi(x,y),$$

مثال 5.2.3 لتكن المعادلة التكاملية لفولتيرا فريدهولم غير الخطية التالية :

$$g(t,x) = \int_0^t \int_0^1 (\xi + x)exp(2s-t)u^2(x,\chi)d\chi d\xi$$

حيث

$$g(t,x) = \frac{t}{4}(-3e^{-2} - (2x)exp(-2) + 1 + 2x)e^t$$

الحل الحقيقي لهذه المعادلة هو $u(t,x) = e^{x-t}$

الشكل (3,2)يوضح أوجه المقارنة بين الحل الحقيقي والحل التقريبي وذالك من أجل $m = 16$ $m = 32,$ $m = 64,$.

$s=t$	Exact solution	Approximate solution		
		$m=16$	$m=32$	$m=64$
0	1	0.884685	0.939729	0.969925
0.1	0.670320	0.688146	0.645872	0.666217
0.2	0.449328	0.417045	0.443987	0.457780
0.3	0.301194	0.325041	0.305059	0.295923
0.4	0.201897	0.196871	0.209796	0.203119
0.5	0.135335	0.119585	0.127177	0.132192
0.6	0.090718	0.093564	0.092407	0.091175
0.7	0.060810	0.056496	0.060042	0.061960
0.8	0.040762	0.043917	0.041283	0.040119
0.9	0.027323	0.026681	0.028770	0.027492

شكل 2.3: الحل الحقيقي والحل التقريبي للمثال

خاتمة

حاولنا في هذا العمل تقديم طريقة عددية لحل المعادلات التكاملية حيث تعتمد هذه الطريقة على أساس دوال القطع النبضية ومصفوفات عملياتها ,أهم خصائص هذه الطريقة هو الحصول على الحلول العددية ,.لقد وجدنا حلول معادلات تكاملية على شكل كثير حدود بإستعمال دوال القطع النبضية ثم أعطينا طريقة الحل ثم أثبتنا فعالية الطريقة خلال أمثلة عددية حيث الحل الدقيق لها معلوم ثم قمنا بمقارنة هذا الحل مع الحل العددي مدى التقارب بين الحلين وبهذا يمكن القول أن إستخدام دوال القطع النبضية في حل المعادلات التكاملية له فعالية كبيرة ويسهل الحل حيث لاحظنا أن الحل التقريبي يقترب بسرعة كلما كان n كبير ,وذالك بناءا عن الأمثلة التي إستخدمناها.

المراجع العلمية

[1] مذكرةتخرج,طرق حل المعادلات التكاملية والتكامل-التفاضلية غير الخطية لفولتير , نوقشت29.05.2016 , قسم الرياضيات بورقلة.

[2] Abdul −majidwazwaz,Linearandnon−linearintegralequtionsmethodsandapplications, Saitxavieruniversitychicago.USA.

[3] M.rahman,integralequationsandtheirapplications,Dalhousieuniversity,Canada.

[4] M. Thoma and W. Wyner. Block Pulse functions and Thier Applications in Control systems.

[5] Voitovich N N, Reshnyak O O. Solutions of nonlinear integral equation of synthesis of the linear antenna arrays. BSUAE. J. Appl. Electromagn, 1999, 2: 43-52 .

[6] cation of block pulse functions and their application to solve numericaliy Volterra integral equation of the

rst kind, Com- munications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16 (2011) 2469 2477 .

[7] Maleknejad K, Sohrabi S, Baranji B. Application of 2D-BPFs to nonlinear integral equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2010;15(3):528–35 .

[8] Maleknejad, K., Sohrabi, S., and Baranji, B. Application of 2D-BPFs to nonlinear integral equations, Common Nonlinear Sci Numer Simulat, 2010 15(3), 528-535.

[9] Krasnov, M., Kiselev, A., and Makarenko, G., 1971, Problems And Exercises in Integral Equations, Mir Publishers, Moscow.

Résumé

L'importance de ce travail consiste à fournir de nombreuse façon de résoudre des équations intégratives linéaires et non linéaires d'une ou de deux variables en utilisant la base des fonctions des morceaux d'impulsion et des matrices de ses opérations,

Et à travers lequel nous avons converti cette équation en un ensemble d'équations faciles à programmer et à résoudre.

Mot clés :

Équations intégratives fonctions des morceaux d'impulsion

Summary

The importance of this work is to provide many ways to solve linear and non-linear integrative equations of one or two variables using the basis of the functions of the impulse pieces and matrices of its operations,
And through which we have converted this equation into a set of equations that are easy to program and solve.

Key words
Integrative équations–Block Pulse functions

الملخص:

تكمن أهمية هذا العمل بتقديم طريقة عددية لحل ا لمعادلات التكاملية الخطية وغير الخطية ذات المتغير الواحد وذات المتغيرين وذالك بإ ستخدام أساس الدوال القطع النبضية ومصفوفات عملياته, والتي من خلالها قمنا بتحويل هذه المعادلة إلى جملة معادلات سهلة البرمجة والحل

الكلمات المفتاحية :

- المعادلات التكاملية
- الدوال القطع النبضية

.-