UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTE DES MATHEMATIQUES
ET DES SCIENCES DE LA MATIERE
Département de Physique

Mémoire
MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences de la Matière
Filière : Physique
Spécialité : Théorique

Présenté par : Bensaci Fatma Zohra
Terriche Sabrine

Thème :

Etude de quelques équations phénomènes physiques sous les relations d'incertitude de la langueur minimale

Soutenu publiquement
Le : 10 /06/2018
Devant le jury composé de

M.A.Benbitour	MCA	Président	UKM Ouargla
B.Nawiwa	MCA	Examinateur	UKM Ouargla
L. Khodja	MCA	Rapporteur	UKM Ouargla

Année Universitaire : 2017/2018

Table des matières

(Didicac)

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir aidée à réaliser ce travail.

tant arrivé à ce point, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les personnes qui m'ont aidée à réaliser cette étude, mes remerciements vont à :

mes parents pour leur affection, amour et patience à mon égard ;

mon directeur de recherche M KHODJA .L pour son aide, ses orientations et sa confiance en moi ;

mes amies : Mlle BENZAIR. TH, Mlle BENHAOUED. Z et Mlle KORICHI A

Mlle A.MERAD, Mlle A. BENSAADIA, Mlle M. LAGOUGI.

Les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail ;

sans oublier mon enseignante Mlle BENZAIR. H qui a contribué à ma formation tout au long de ce parcours.

Et a toute personne qui a contribué de près ou de loin à m'aider et à me soutenir moralement ou matériellement.

Bensaci Fatma et Trriche Sabrine

Résumé

Dans ce mémoire, on a présenté le formalisme de la longueur minimale, et l'appliquer sur quelque équation en l'occurrence: l'équation de Schrodinger, Dirac et Klein-Gordon en présence de quelques potentiels (coulombiens, oscillateur harmonique), et nous avons dérivé les fonctions d'onde et on a obtenu les corrections d'énergie dans certains cas.

Mots clés : Algébre de Heinsemberg modifiée, longueur minimale, équation de Klein-Gordon, équation de Dirac.

Abstract

In this work, we have presented the formalism of the manimal length, and applied it to some equation, the occurrence:
Schrodinger, Dirac and Klein-Gordon in the presence of some potntiels (Coulomb, harmonic oscillator), and the wave functions are derived and the energy correction of certain cases.

keywords: moderated algebra of Heinsemberg, minimal length, Klein-Gordon equation, Dirac equation..

1

Introduction générale

1.1 Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée

1.1.1 Longueur minimale

Des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg [1] qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\triangle x)_{\text{min}}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire. Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $\ell_p = 10^{-35}m$, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires [2]. En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ; l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisabilité des particules : à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle [3]. En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s'intéresser à cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempf et ses collaborateurs [4]. Dans la section qui suit, nous allons présenter une approche [5] qui généralise le principe d'incertitude de Heisenberg en tenant compte de cette notion de longueur élémentaire.

1.1.2 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale) ℓ_m en mécanique quantique, nous allons suivre l'approche de GUP . Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $\frac{1}{\ell_m}$ [5]. En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, $\left(\overrightarrow{p}=\hbar\overrightarrow{k}\right)$ lorsque approche l'échelle $\left(\frac{\hbar}{\ell_m}\right)$ physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde $\left(\frac{2\pi}{k}\right)$arbitrairement petites, et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées [6]. Dans un but de simplicité, raisonnons à une seule dimension. Pour tenir compte de ce postulat, on suppose une relation $p=f\ (k)$entre k et p . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre$\frac{1}{\ell_m}$ lorsque p tend vers l'infini. On suppose aussi que $f\ (k)$ est bien définie, lisse et différentiable [5]. Plusieurs formes de la function f peuvent être trouvées : par exemple dans les références [5], Hossenfelder a fait le choix :

$$p=\frac{\hbar}{\ell_m}\tanh^{-1}\left(\ell_m k\right). \tag{1.1.1}$$

En utilisant le développement :

$$\tanh y=y+\frac{y^3}{3}+$$

au deuxième ordre en ℓ_m, p s'écrit :

$$p=\frac{\hbar}{\ell_m}\left(\left(\ell_m k\right)+\frac{\left(\ell_m k\right)^3}{3}+......\right),$$

$$p=\hbar\left(k+\frac{\ell_m^2}{3}k^3+...\right). \tag{1.1.2}$$

Supposant que le commutateur entre $\hat{X}$ et $\hat{k}$ garde la forme standard, c'est-à-dire $\left[\hat{x},\hat{k}\right]=i\delta_{ij}$,et utilisant la relation générale :

$$\left[\hat{X},A(\hat{k})\right]=i\frac{\partial A}{\partial k},$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$\left[\hat{X},\hat{P}\left(k\right)\right]=i\frac{\partial\hat{p}}{\partial k}, \tag{1.1.3}$$

La relation (1.1.2) donne :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial k} = \hbar \left(1 + \frac{\ell_m^2}{3} 3k^2 + ...\right),$$

$$i\frac{\partial \hat{p}}{\partial k} = i\hbar \left(1 + \ell_m^2 k^2 + ...\right).$$

Or, on a :

$$\ell_m^2 k^2 = \frac{\ell_m^2 \hat{p}^2}{\hbar^2} + O\left(\ell_m^4\right).$$

Alors on trouve :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\left(k\right)\right] = i\hbar \left(1 + (\frac{\ell_m}{\hbar})^2 \hat{p}^2 + ...\right).$$

En introduisant un parameter β , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = (\frac{\ell_m}{\hbar^2})^2 \text{ soit } \ell_m = \hbar\sqrt{\beta},$$

on aboutit à la relation de commutation suivante :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\left(k\right)\right] = i\hbar \left(1 + \beta \hat{p}^2 + ...\right). \tag{1.1.4}$$

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule [7] :

$$\left(\Delta A\right)_\Psi \left(\Delta B\right)_\Psi \geq \frac{1}{2} \mid \langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \rangle_\Psi \mid.$$

Ce qui donne :

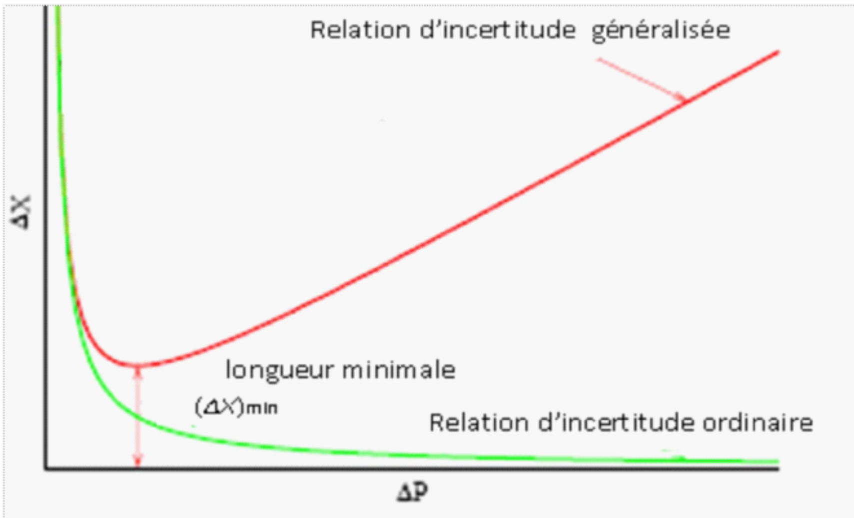
$$\left(\Delta X\right)\left(\Delta P\right) \geq \frac{1}{2} \mid \langle (\partial \hat{p}) \left(\partial \hat{k}\right) \rangle \mid.$$

Au premier ordre du paramètre β, la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$\left(\Delta X\right)\left(\Delta P\right) \geq \frac{1}{2}\hbar \left(1 + \beta \langle \hat{p}^2 \rangle\right). \tag{1.1.5}$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen :$(\Delta P)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$

$$\left(\Delta X\right)\left(\Delta P\right) \geq \frac{\hbar}{2} \left\{1 + \beta \left(\left(\Delta P\right)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2\right)\right\},$$



$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\left\{1+\beta\left((\Delta P)^2+\gamma\right)\right\}, \tag{1.1.6}$$

$$\gamma = \beta\,(\hat{p})^2 .$$

La relation d'incertitude1.1.6 implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été etudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs[4]. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence [3], pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

1.1.3 Représentation théorique et conséquences de la relation d'incertitude généralisée

Considérons la relation d'incertitude modifiée1.1.6 :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\left\{1+\beta\left((\Delta P)^2+\gamma\right)\right\}. \tag{1.1.7}$$

Où β et γ sont des paramètres positifs. Le parameter β est relié à la longueur élémentaire à travers la relation $\ell_m = \hbar\sqrt{\beta}$; γ dépend de la valeur moyenne de l'impulsion par la formule $\gamma = \beta\,(\hat{p})^2$ En mécanique quantique ordinaire $(\beta = \gamma = 0)$,ΔX peut être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des

Fig. 1 — La relation d'incertitude généralisée, impliquant une 'longueur minimale $(\Delta x)_{\min}\rangle 0$

Echelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation1.1.6 du fait de la présence du terme $\beta\left(\Delta p\right)^2$ dans le membre droit de l'inégalité ; même pour de grandes valeurs de ΔP, ΔX est toujours supérieur à une valeur minimale $\left(\Delta x\right)_{\min}$ non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée sur la figure (1). On observe que pour les petites valeurs de ΔP , la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques ; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand ΔP .

Le postulat de l'introduction d'une incertitude minimale non nulle se justifie par le fait qu'une longueur élémentaire (dimension de la particule, longueur de Planck, longueur de Compton) peut être représentée par une incertitude supplémentaire qui s'ajoute à l'incertitude sur la mesure de la position.

Il est à noter que l'on peut avoir une relation d'incertitude avec des incertitudes minimales non nulles sur la position et sur l'impulsion $\left(\Delta x\right)_{\min} \neq 0$

$\left(\left(\Delta p\right)_{\min} \neq 0\right)$ Cette relation a la forme [4] :

$$\left(\Delta X\right)\left(\Delta P\right) \geq \frac{\hbar}{2}\left(1+\alpha\left(\Delta x\right)^2+\beta\left(\Delta p\right)^2+\gamma\right), \qquad (1.1.8)$$

$$\gamma = \alpha\langle\hat{x}\rangle^2+\beta\langle\hat{p}\rangle^2.$$

Par la suite nous allons nous limiter seulement au cas $\alpha = 0$, c'est-à-dire une incertitude minimale non nulle sur la position seulement. Ce cas représente un intérêt particulier en mécanique quantique car cette longueur élémentaire, introduite naturellement dans les équations, représente une réalité physique telle que la nature non ponctuelle des particules [3].

Hermiticité et états propres de l'opérateur de position

En mécanique quantique ordinaire les opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont représentés par des opérateurs de multiplication ou de dérivation agissant sur des fonctions d'onde dans l'espace des coordonnées ou des impulsions

$\left(\Psi\left(x\right) = \langle x \mid \Psi\rangle\right.$ ou $\left.\Psi\left(p\right) = \langle p \mid \Psi\rangle\right)$;$\mid x\rangle$ et $\mid p\rangle$sont des états propres de$\hat{x}$ et $\hat{p}$ respectivement. Strictement parlant, $\mid x\rangle$ et $\mid p\rangle$ ne sont pas des états physiques, car ils ne sont pas normalisables et donc n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert. Cependant, les opérateurs$\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont auto-adjoints et leurs états propres peuvent être approchés, avec une précision arbitrairement grande, par une séquence d'états physiques $\mid \Psi_n\rangle$, ayant une localisation croissante dans l'espace des coordonnées ou des impulsions [3], c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta x) \mid \Psi_n\rangle = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta p) \mid \Psi_n\rangle = 0.$$

Cette situation change si on introduit une incertitude minimale non nulle sur la Position $((\Delta x)_{\min}\rangle 0)$,

car on a alors :

$$(\Delta x)^2_{|\Psi\rangle} = \Psi \mid \left(\hat{x} - \langle \Psi \mid \hat{x} \mid \Psi\rangle^2\right) \mid \Psi\rangle \geq (\Delta x)_{\min} ; \forall \mid \Psi\rangle. \tag{1.1.9}$$

Ceci, implique l'inexistence d'états propres, physiques, de l'opérateur $\hat{X}$ puisqu'un état propre de $\hat{X}$ devrait avoir une incertitude nulle sur la position [3], [8]. Bien évidemment, ceci n'exclut pas l'existence d'états non physiques "vecteurs propres formels" de $\hat{X}$ appartenant au domaine de $\hat{X}$ seul. Comme nous allons le voir, de tels états existent, et la valeur moyenne de l'énergie dans ces vecteurs propres est infinie. Le point le plus important à mentionner, c'est qu'à la différence de la mécanique quantique habituelle, il n'est pas possible d'approcher ces vecteurs formels par une séquence d'états physiques où les incertitudes, sur la position, dans ces états tendent vers zéro. Ceci parce que, maintenant, tous les états physiques ont au moins une incertitude égale à l'incertitude minimale $(\Delta x)_{\min}$

Techniquement, comme nous allons le voir, l'incertitude minimale sur la position se traduit par le fait que l'opérateur de position n'est plus essentiellement auto-adjoint ; il est seulement symétrique assurant que ses valeurs propres sont réelles [3].

Du moment qu'il n'y a plus d'états propres, $\mid X\rangle$ dans la représentation de l'algèbre de Heisenberg, alors il n'est pas possible de trouver une représentation de l'espace de Hilbert par les fonctions d'onde $\langle x \mid \Psi\rangle$Toutefois, nous le verrons dans le paragraphe (1.1.5), les états à localisation maximale $(\Delta x)_{\min}$ seront considérés comme des états physiques appropriés ; ils pourront alors être utilisés pour définir une "quasi-représentation des positions". Cependant, il est plus simple de travailler dans l'espace des impulsions, en choisissant une représentation adéquate satisfaisant à la relation de commutation déformée (1.1.4).

Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs

$\hat{X}$ et $\hat{P}$, satisfaisant à la relation de commutation :

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right) \qquad ;\beta\rangle 0 \tag{1.1.10}$$

La relation d'incertitude correspondante est :

$$(\Delta x)\,(\Delta p)\geq\frac{\hbar}{2}\left\{1+\beta\,(\Delta p)^{2}+\gamma\right\} \tag{1.1.11}$$

$$\gamma=\beta\,(\hat{p})^{2} \tag{1.1.12}$$

Pour un (ΔX) fixe, l'inégalité 1.1.11 est satisfaite dans l'intervalle :$[\Delta p_{-},\Delta p_{+}]$, tel que :

$$\frac{2\Delta X\Delta P}{\beta\hbar}-\frac{(\gamma+1)}{\beta}=\Delta p^{2}$$

$$\frac{2\Delta X\Delta P}{\beta\hbar}-\frac{(\gamma+1)}{\beta}-\Delta p^{2}=0$$

$$\Delta=4\left(\frac{\Delta x}{\beta\hbar}\right)^{2}-4\frac{\gamma+1}{\beta}$$

$$\Delta P_{\pm}=\frac{\Delta x}{\beta\hbar}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\beta\hbar}\right)^{2}-\frac{\gamma+1}{\beta}} \tag{1.1.13}$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P_{+}=\Delta P_{-}$, soit :

$$\left(\frac{(\Delta x)_{0}}{\beta\hbar}\right)^{2}-\frac{\gamma+1}{\beta}=0$$

$$\left(\frac{(\Delta x)_{0}}{\beta\hbar}\right)^{2}=\frac{\gamma+1}{\beta}$$

$$(\Delta x)_{0}^{2}=\frac{\gamma+1}{\beta}\,(\hbar\beta)^{2}$$

$$(\Delta x)_{0}=\hbar\sqrt{\beta}\,(\gamma+1)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{1.1.14}$$

La valeur minimale $(\Delta x)_{\min}$, correspond à $\gamma=0$ $(\langle\hat{p}\rangle=0)$

$$(\Delta x)_{\min}=\hbar\sqrt{\beta}. \tag{1.1.15}$$

Dans l'espace des impulsions, où $\hat{X}$ et $\hat{P}$ agissent sur les fonctions $\Psi(p) = \langle p \mid \Psi \rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$, satisfaisant la relation de commutation canonique : $\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\hbar$ Alors on peut trouver une representation de $\hat{X}$ et $\hat{P}$ qui vérifie la relation de commutation modifiée(1.1.10). La réalisation la plus simple s'écrit [3] :

$$\hat{X} = \left(1 + \beta\hat{p}^2\right)\hat{x}, \qquad \hat{P} = p, \tag{1.1.16}$$

où l'on a :

$$\hat{P}\Psi(p) = P\Psi(p)$$

$$\hat{x}\Psi(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\Psi(p).$$

Alors, $\hat{X}$ et $\hat{P}$ écrivent explicitement :

$$\hat{X} = i\hbar\left(1 + \beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \hat{P} = p \tag{1.1.17}$$

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (1.1.10).

Il est important de souligner qu'il est possible de trouver une représentation plus générale en ajoutant un terme $\tilde{\gamma}f(p)$ à l'opérateur , $\hat{X}$, $\tilde{\gamma}$ étant une constante et $f(p)$ est une fonction arbitraire de p L'importance de cette représentation réside dans le fait que la valeur de $\tilde{\gamma}$ ut être choisie de façon à render $\hat{X}$ auto-adjoint sans altérer les valeurs propres des observables physiques [9], [10].

1.1.4 Fonctions propres de l'opérateur de position

Dans l'espace des impulsions, le problème des valeurs propres de l'opérateur $\hat{X}$ s'écrit :

$$i\hbar\left(1 + \beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p}\Psi_x(p) = x\Psi_x \tag{1.1.18}$$

Où$\Psi_x(p) = \langle p \mid x \rangle$, $\mid x\rangle$ étant un vecteur propre de $\hat{X}$ ayant une localisation Infinite($(\Delta\hat{x})_x = 0$) , donc il ne représente pas un état physique car la relation d'incertitude généralisée ne permet pas l'existence de tel état. Les fonctions $\Psi_x(p)$ seront considérées alors comme des "fonctions propres formelles" de l'opérateur de position.

La solution de l'équation (1.1.18) est donnée par la formule suivante :

$$\Psi_x(p) = c \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right),$$

c est une constante de normalisation :

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} = \frac{cc^*\pi}{\sqrt{\beta}},$$

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}.$$

Alors, les fonctions propres normalisées de l'opérateur de position ont la forme :

$$\Psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right). \tag{1.1.19}$$

En utilisant la relation (1.1.19), on peut montrer que la nouvelle relation de fermeture satisfaite par les vecteurs formels $\mid X \rangle$ a la forme suivante

$$\frac{1}{(2\hbar\sqrt{\beta})} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x\rangle\langle x = 1. \tag{1.1.20}$$

Calculons maintenant le produit scalaire entre deux états formels $\mid X \rangle$ et $\mid X' \rangle$:

$$\langle x' \mid x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \langle x' \mid p\rangle \langle p \mid x\rangle,$$

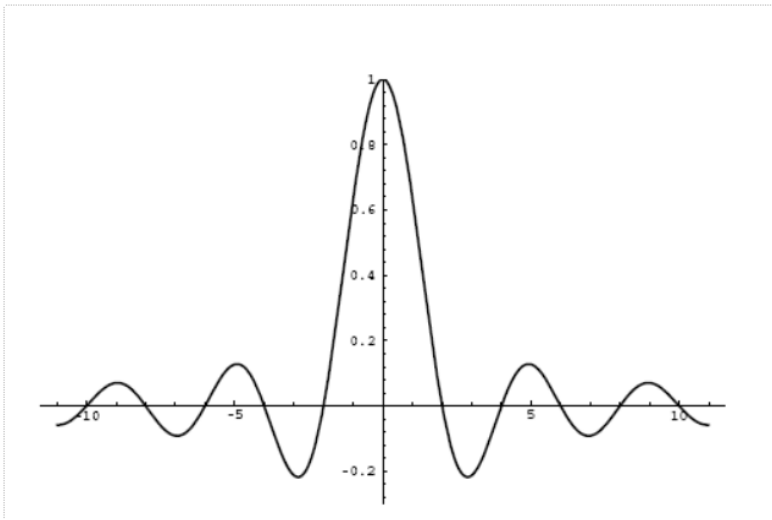
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \Psi^*_{x'}(p)\, \Psi(P),$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(i\frac{x'}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right)\right) \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right)\right),$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \exp\left[-i\frac{(x-x')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right],$$

$$= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(x-x')} \sin\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi. \tag{1.1.21}$$

La courbe représentant cette relation est donnée par la figure (2).



La relation (1.1.21) montre clairement que les états formels de l'opérateur de position ne sont pas, engénéral,orthogonaux. Ceci est dû au fait que $\hat{X}$ n'estpas essentiellement auto-adjoint. Cependant, si :

$$\frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi = n\pi, \qquad n = \pm 1 \pm 2...$$

Ou

$$x - x' = 2n\hbar\sqrt{\beta}.$$

Dans ce cas on a :

$$\left\langle (x + 2n)\,\hbar\sqrt{\beta} \mid (x + 2n')\,\hbar\sqrt{\beta} \right\rangle = \delta_{n,n'}. \tag{1.1.22}$$

Les vecteurs propres $\left\{\mid (x + 2n)\,\hbar\sqrt{\beta}\rangle_{n=\pm 1,\pm 2}\right\}$, constituent, alors, un ensemble complet et orthogonal ; et l'opérateur $\hat{X}$ ut être diagonalisé dans cette base. Ce résultat pourrait être interprété par le fait qu'on a affaire à une physique sur réseaux dans l'espace des coordonnées [3]. Cependant, ceci n'est pas le cas car, comme il a été déjà souligné, les kets : $\mid (x + 2n)\,\hbar\sqrt{\beta}\rangle$ ne sont pas physiques. Il est important de mentionner que tout comme en mécanique quantique ordinaire, la valeur moyenne de l'énergie dans les états formels $\mid x\rangle$ $\mid$ est infinie.

Fig.2. — Le produit scalaire des états formels $\langle x \mid x'\rangle$ en fonction de $x - x'$ en unité de $(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$

En effet, on a :

$$\langle x \mid x\rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2},$$

$$\left\langle x \mid \frac{p^2}{2m} \mid x\right\rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{2m\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2},$$

$$= \frac{1}{2m\pi}\left[\frac{p}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\beta}\arctan\left(\sqrt{\beta}\pi\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \infty.$$

Ce résultat a une conséquence très importante, à savoir : tout état $\mid \Psi\rangle$ pour lequel l'incertitude sur la position $(\Delta x)_{|\Psi\rangle}$ se trouve à l'intérieur de l'intervalle interdit $0 \leq (\Delta x)_{|\Psi\rangle} \leq (\Delta x)_{|\Psi\rangle}$ ne peut pas avoir une énergie finie [3].

Ainsi, contrairement à la mécanique quantique ordinaire, les états formels $\mid x\rangle$ ayant une incertitude nulle sur la position, ne peuvent plus maintenant être approchés par une série d'états physiques où l'incertitude décroît vers zéro, car il y a maintenant une limite à la localisabilité.

Pour ceci, il est plus utile d'introduire ce que l'on appelle "les états à localisation maximale" et définir une "quasi-représentation de configuration".

Quasi-représentation de configuration : Etats à localisation maximale

Les états à localisation maximale autour de la position x sont, par définition,des états $\mid \Psi_x^{\ell m}\rangle$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\left\langle \Psi_x^{lm} \mid \hat{X} \mid \Psi_x^{\ell m}\right\rangle = 0, \tag{1.1.23}$$

$$(\Delta x)_{|\Psi_x^{\ell m}\rangle} = (\Delta x)_{\min}.$$

Rappelons $(\Delta x)_{\min}$ que représente la plus petite valeur de l'incertitude minimale$(\Delta x)_0$; cette valeur correspond à $\langle \hat{p}\rangle = 0$

On sait, en mécanique quantique, que la relation d'incertitude peut être établie en exprimant que la norme d'un vecteur d'état est positive. En effet, à partir de la condition:

$$\left\| \left(\hat{x} - \langle \hat{x}\rangle + \frac{\langle [\hat{x};\hat{p}]\rangle}{2\left(\Delta p\right)^2}\left(\hat{p} - \langle \hat{p}\rangle\right)\right) \mid \Psi\rangle \right\| \geq 0. \tag{1.1.24}$$

$\langle [\hat{x};\hat{p}]\rangle$ étant imaginaire, on obtient [7] :

$$\left\langle \Psi \left| (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 + \left(\frac{\langle [\hat{x};\hat{p}] \rangle}{2\left(\Delta p\right)^2} \right)^2 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right| \Psi \right\rangle \geq 0,$$

qui implique immédiatement la relation d'incertitude :

$$\Delta x.\Delta p \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x};\hat{p}] \rangle \right|. \tag{1.1.25}$$

Il est clair que pour qu'un état $\mid \Psi\rangle$ obéisse à l'équation $\Delta x.\Delta p \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x};\hat{p}] \rangle \right|$, il faut qu'il satisfasse à la condition :

$$\left(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x};\hat{p}] \rangle}{2\left(\Delta p\right)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) \mid \Psi\rangle = 0. \tag{1.1.26}$$

L'état$\mid \Psi\rangle$ se trouve dans la limite de la région des états permis (Fig. (2)).

Dans l'espace des impulsions, cette dernière équation prend la forme suivante :

$$\left(i\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} - \langle \hat{x} \rangle + i\hbar \frac{1+\beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) \Psi_{(p)} = 0.$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\Psi_{(p)} = N \frac{\exp\left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{\left(1+\beta(\Delta p)^2+\beta\langle \hat{p} \rangle^2\right)\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta p)^2\sqrt{\beta}} \right) \arctan\sqrt{\beta}p \right]}{(1+\beta p^2)^{\frac{\left(1+\beta(\Delta p)^2+\beta\langle \hat{p} \rangle^2\right)}{4\beta(\Delta p)^2}}}. \tag{1.1.27}$$

Les états à localisation maximale correspondent au cas$\langle \hat{p} \rangle = 0$ ou$(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$. Ce qui implique $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Alors, en remplaçant dans l'équation

(1.1.27), on obtient l'expression des états à localisation maximale :

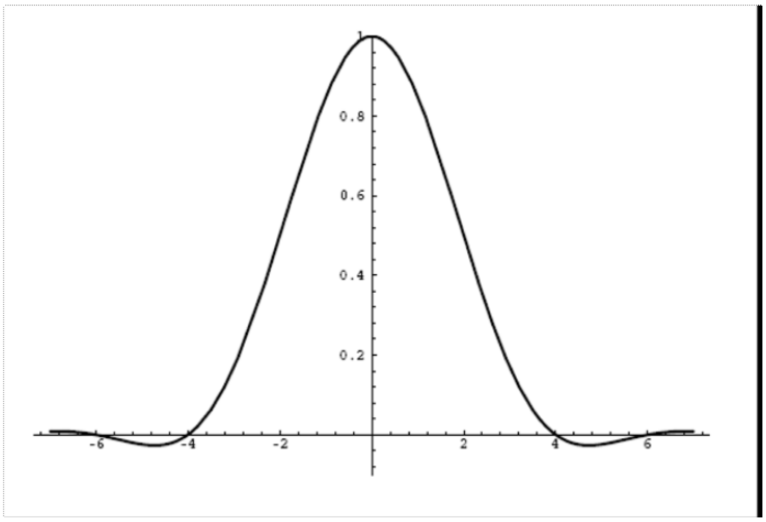
$$\Psi_x^{lm}(p) = N(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p \right). \tag{1.1.28}$$

La constante de normalisation$N$ se calcule en utilisant :

$$N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \tag{1.1.29}$$

Les états (1.1.28) généralisent les ondes planes (les fonctions δ), dans l'espace des impulsions (des coordonnées), qui représentent des états à localisation maximale en mécanique quantique ordinaire.

Contrairement aux ondes planes, maintenant, les états $\mid \Psi_x^{lm}\rangle$ sont des états physiques ; la valeur moyenne de l'énergie n'est plus infinie. En effet :



$$\left\langle \Psi_x^{lm} \mid \frac{p^2}{2m} \mid \Psi_x^{lm} \right\rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m\beta}. \tag{1.1.30}$$

Du fait du caractère "flou" de l'espace, les états à localisation maximale ne sont pas en général orthogonaux. Ainsi, en utilisant la définition du produit scalair et la relation (1.1.28), on a :

Fig. 3 — Le produit scalaire des états à localisation maximale $\left\langle \Psi_x^{lm} \mid \Psi_x^{lm} \right\rangle$ en fonction de $x - x'$ en unité de $(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_x^{lm} \mid \Psi_x^{lm} \right\rangle &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2} \exp\left[\frac{-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p}{\hbar\sqrt{\beta}} \right] \\ &= \left[\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin\left(\frac{x-x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi \right). \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

La courbe représentant ce produit scalaire est donnée par la figure (3).

1.1.5 Généralisation à plusieurs dimensions

Dans cette section nous allons étendre le formalisme étudié au cas à plusieurs dimensions ; le principe étant le même que dans le cas à une dimension, nous allons présenter les outils nécessaires sans démonstration.

Relation d'incertitude généralisée à N dimensions

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (1.1.7), préservant la symétrie rotationnelle, s'écrit [3] :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_i\right] = i\hbar\delta_{ij}\left(1 + \beta\hat{p}^2\right), \tag{1.1.32}$$

$$\hat{p}^2 = \sum_{i=0}^{N} \hat{p}_i^2.$$

Si on impose :

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \tag{1.1.33}$$

l'identité de Jacobi donne :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = \frac{2\beta i\hbar}{(1 + \beta\hat{p}^2)}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i\right), \tag{1.1.34}$$

ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative.

La relation d'incertitude impliquée par (1.1.32) s'écrit :

$$(\Delta x_i)(\Delta p_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left(1 + \beta\sum_{(k=1)}^{N}\left[(\Delta p_k)^2 + \langle p_k\rangle^2\right]\right). \tag{1.1.35}$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta x_i)_{\min} = \hbar\sqrt{N\beta} \quad ,\forall i. \tag{1.1.36}$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation (1.1.32) a la forme [3] :

$$\hat{X}_i = i\hbar\left(1 + \beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i}, \hat{P}_i = p_i. \tag{1.1.37}$$

Les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle\Psi \mid \varphi\rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d^N p}{(1 + \beta\hat{p})^2}\Psi^*(p)\,\varphi(p). \tag{1.1.38}$$

Comme dans le cas à une dimension, contrairement aux opérateurs d'impulsion qui sont toujours essentiellement auto-adjoints, les opérateurs de position sont simplement symétriques, et ne possèdent pas d'états propres physiques. Quoique les états à localisation maximale puissent toujours être utilisés pour définir une "quasi-représentation de configuration", l'analyse de celle-ci est compliquée [3] et n'a pas été étudiée dans la littérature.

Il est important de noter, que la relation de commutation (1.1.32) a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$ soient auto-adjoints [2]. La relation de commutation la plus générale s'écrit [2], [9], [11], [12] :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\left[\delta_{ij}\left(1+\beta\hat{p}^2\right)+\beta'\hat{p}_i\hat{p}_j\right], (\beta,\beta')\rangle 0. \tag{1.1.39}$$

En supposant :

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0. \tag{1.1.40}$$

alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+\beta(2\beta-\beta')\hat{p}^2}{1+\beta\hat{p}^2}\left(\hat{P}_i\hat{X}_j-\hat{P}_j\hat{X}_i\right). \tag{1.1.41}$$

En supposant que Δp_j ne dépend pas de j , on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (1.1.39) :

$$(\Delta x_i)(\Delta p_j) \geq \frac{\hbar}{2}\delta_{ij}\left[1+(N\beta-\beta')(\Delta p_j)^2+\gamma\right], \tag{1.1.42}$$

$$\gamma = \beta\sum_{k=1}^{N}\langle p_k\rangle^2+\beta'\langle pi\rangle^2.$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à (Δp_j) donne :

$$(\Delta x_i)_{\min} = \hbar\sqrt{(N\beta-\beta')}, \forall i. \tag{1.1.43}$$

Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ontété utilisées. Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ comme des fonctions des opérateurs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_j$ satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

La première représentation qui a été utilisée est celle de la référence [2], à savoir :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \beta\frac{\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2}{2} + \beta'\frac{\hat{p}_i\hat{p}_j + \hat{x}_j\hat{p}_i\hat{p}_j}{2}, \hat{P}_i = \hat{p}_i, \tag{1.1.44}$$

où dans l'espace des impulsions :

$$\hat{x}_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i}, \hat{P}_i = \hat{p}_i.$$

La forme explicite de (1.1.44), utilsée pour la première fois dans la référence [2], s'écrit :

$$\hat{X}_i = i\hbar\left[(1+\beta\hat{p}^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta\hat{p}_i\hat{p}_j\frac{\partial}{\partial p_j} + \left(\beta + \frac{N+1}{2}\beta'\right)p_i\right], \hat{P}_i = \hat{p}_i. \tag{1.1.45}$$

Une autre forme similaire à (1.1.45) a été donnée dans les références [9],[13],
en introduisant un paramètre arbitraire e $\tilde{\gamma}$:

$$\hat{X}_i = i\hbar\left[(1+\beta\hat{p}^2)\frac{\partial}{\partial p_i} + \beta\hat{p}_i\hat{p}_j\frac{\partial}{\partial p_j} + \tilde{\gamma}p_i\right], \hat{P}_i = \hat{p}_i, \tag{1.1.46}$$

soit :

$$\hat{X}_i = (1+\beta\hat{p}^2) + \beta'\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{x}_j + \tilde{\gamma}p_i, \hat{P}_i = \hat{p}_i. \tag{1.1.47}$$

Le paramètre positif $\tilde{\gamma}$ n'affecte ni les relations de commutation ni les observables physiques ; son choix assure l'hermiticicité de l'opérateur de position par rapport au produit scalaire modifié suivant [9], [14] :

$$\langle \Psi \mid \varphi \rangle = \int \frac{d^N p}{\left[1+(\beta+\beta')\,p^2\right]^{1-\alpha}}\Psi^*(p)\,\varphi(p), \tag{1.1.48}$$

$$\alpha = \frac{\gamma - \beta'\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\beta+\beta'}.$$

Il est à noter que la représentation (1.1.45) correspond à. $\alpha = 1$. Il a été montré [15] que l'introduction du paramètre $\tilde{\gamma}$ dans le traitement des problèmes dela mécanique quantique est une généralité "apparente", car on peut toujours ver une transformation sur la fonction d'onde pour éliminer ce paramètre.

Par exemple, la représentation (1.1.46) avec un $\tilde{\gamma}$arbitraire est équivalente à la représentation (1.1.45) en effectuant le changement de fonction :

$$\Psi(p) = \left[1+(\beta+\beta')\,p^2\right]^{\frac{1-\alpha}{2}}\tilde{\Psi}(p).$$

Etant donné l'équivalence de la famille des représentations (1.1.46), la valeur e $\tilde{\gamma} = 0$ serait le choix le plus approprié pour simplifier les calculs.

Quasi-représentation de position

La résolution de l'équation de Schrodinger en utilisant la présentation (1.1.46), est rarement simple, en particulier lorsque le potentiel dépend des opérateurs de position d'une manière non triviale comme dans le potentiel de Coulomb, proportionnel à l'inverse de la racine carrée de l'opérateur $\hat{X}_1^2 + \hat{X}_2^2 + \hat{X}_3^2$. Pour cette raison, plusieurs auteurs ont recouru à la quasi-représentation de position, où plusieurs expressions des opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ satisfaisant à la relation de commutation déformée (1.1.39) ont été trouvées.

Dans la référence [11], l'auteur considère le cas$\beta' = 2\beta$ dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (1.1.41) s'annulent au premier ordre de β . Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotationnelle, le formalisme devient invariant par rapport aux translations :$X_i \rightarrow X_i + \alpha_i$ [2]. Pour ce cas particulier, les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ satisfaisant au premier ordre en β à l'algèbre de Heisenberg déformée (1.1.39) sont représentés par :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i \,, \qquad \hat{P}_i = \hat{p}_i \left(1 + \beta \hat{p}^2\right), \tag{1.1.49}$$

avec :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i \,, \qquad \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations.

Dans la référence [16], une représentation généralisant (1.1.49) au cas $\beta' \neq 2\beta$ a été donnée, elle a la forme suivante :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \frac{2\beta - \beta'}{4} \left(\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2\right), \qquad \hat{P}_i = \hat{p}_i \left(1 + \frac{\beta'}{2} \hat{p}^2\right), \tag{1.1.50}$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de β et β' . Elle se réduit dans le cas $\beta' = 2\beta$ à la représentation (1.1.49).

Plus généralement, on peut introduire un paramètre δet considérer la représentation suivante :

$$\begin{aligned}\hat{X}_i &= \hat{x}_i + (\beta - \delta)\frac{\hat{p}^2\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}^2}{2} + (\beta' - 2\delta)\frac{\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{x}_i + \hat{x}_i\hat{p}\hat{p}_j}{2}, \\ \hat{P}_i &= \hat{p}_i\left(1 + \frac{\beta'}{2}\hat{p}^2\right),\end{aligned} \tag{1.1.51}$$

Cette famille de représentations, valables au premier ordre de β et β' , englobe toutes les représentations présentées plus-haut. En effet, elle se réduit à :

la représentation (1.1.44) pour,$\delta = 0$

la représentation (1.1.50) pour, $\delta = \frac{\beta'}{2}$;et

la représentation (1.1.49) pour, $\delta = \beta = \frac{\beta'}{2}$

Un examen de ces représentations montre que le problème des valeurs propres ne dépend pas du choix

du paramètre δ[15].

Représentation du groupe des rotations

Les relations de commutation (1.1.39), (1.1.40) et (1.1.41) ne brisent pas la symétrie par rapport aux rotations. En effet, les générateurs de rotations peuvent encore s'exprimer en fonction des opérateurs de position et d'impulsion comme :

$$\hat{L}_{ij} = \frac{\hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i}{1 + \beta\hat{p}^2}. \tag{1.1.52}$$

Ainsi, il satisfont les relation de commutation :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{L}_{jk}\right] = i\hbar\left(\delta_{ik}\hat{X}_j - \delta_{ij}\hat{X}_k\right),$$

$$\left[\hat{P}_i, \hat{L}_{jk}\right] = i\hbar\left(\delta_{ik}\hat{P}_j - \delta_{ij}\hat{P}_k\right) \tag{1.1.53}$$

$$\left[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}\right] = i\hbar\left(\delta_{ik}\hat{L}_{jl} + \delta_{jl}\hat{L}_{ik} - \delta_{il}\hat{L}_{jk} - \delta_{jk}\hat{L}_{il}\right).$$

Dans le cas particulier à trois dimensions, l'opérateur de moment angulaire modifié s'écrit :

$$\hat{L}_i = \frac{1}{\left(1 + \beta\hat{P}^2\right)}\varepsilon_{ijk}\hat{X}_i\hat{P}_k. \tag{1.1.54}$$

Les relations de commutation habituelles entre les opérateurs de position, d'impulsion et de moment angulaire restent valables :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{X}_k,$$

$$\left[\hat{P}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{P}_k, \tag{1.1.55}$$

$$\left[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k.$$

La relation de commutation (1.1.41) peut s'écrire comme :

$$\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = i\hbar\left((2\beta - \beta') + \beta(2\beta - \beta')\hat{p}^2\right)\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k.$$

1.2 Systèmes simples avec une longueur élémentaire

Comme il a été mentionné dans l'introduction générale, plusieurs problèmes physiques ont été abordés dans le formalisme de cette mécanique quantique avec une longueur élémentaire. Le premier système simple qui a été considéré est l'oscillateur harmonique. Les corrections au premier ordre du spectre d'énergie ont été obtenues par Kempf dans l'espace des impulsions [3], [2], et par Brau [11] dans sa propre quasi-représentation de configuration. Plus tard, Chang et ses collaborateurs [9] ont résolu analytiquement l'équation de Schrdinger déformée en considérant une dimension arbitraire dans l'espace des impulsions. Ils ont obtenu ainsi le spectre d'énergie exact et les fonctions propres correspondantes en fonction des Polynômes de Jacobi. L'autre problème fondamental traité dans ce formalisme est le potentiel de Coulomb, qui a constitué le sujet de plusieurs études [11], [17], [16], [18], [14]1. C'est ce problème qui va être présenté dans ce chapitre ; mais avant cela, nous allons commencer par un potentiel simple à une dimension.

1.2.1 Potentiel delta de Dirac a une dimension

Pour voir comment on peut incorporer une longueur élémentaire dans le traitement des problèmes physiques, il est intéressant d'étudier un potentiel simple à une dimension et d'illustrer comment l'équation de Schrodinger peut être écrite et résolue.

Considérons le potentiel delta de Dirac :

$$V\left(x\right)=-k\delta\left(x\right). \tag{1.2.1}$$

L'équation de Schrdinger s'écrit :

$$\left(\frac{\hat{p}^{2}}{2m}+V\left(\hat{X}\right)\right)\mid\Psi\rangle=E\mid\Psi\rangle. \tag{1.2.2}$$

Dans l'espace des impulsions, l'équation (1.2.2) prend la forme :

$$\left\langle P\left|\frac{\hat{p}^{2}}{2m}\right|\Psi\right\rangle+\left\langle P\left|V\left(\hat{X}\right)\right|\Psi\right\rangle E\left\langle P\mid\Psi\right\rangle.$$

L'action de $\hat{X}$ et $\hat{P}$ définie par les relations (1.1.17) :

$$\left(\frac{\hat{P}^{2}}{2m}-E\right)\Psi\left(p\right)+\int_{-\infty}^{+\infty}dp'\tilde{v}\left(p,p'\right)\frac{\Psi\left(p'\right)}{\left(1+\beta p'^{2}\right)}=0. \tag{1.2.3}$$

$\tilde{v}\left(p,p'\right)$ est la transformée de Fourier généralisée, elle s'exprime en utilisant les relations (1.1.19) et (1.1.20) comme :

$$\tilde{v}\left(p,p'\right)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dxV\left(x\right)\exp\left(-i\frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}}\right)\left[\arctan\sqrt{\beta}p-\arctan\sqrt{\beta}p'\right]. \tag{1.2.4}$$

La transformée de Fourier du potentiel (1.2.1), est alors :

$$\tilde{v}\left(p,p'\right)=\frac{-k}{2\pi\hbar}, \tag{1.2.5}$$

et l'équation de Schrodinger s'écrit :

$$\left(\frac{\hat{P}^{2}}{2m}-E\right)\Psi\left(p\right)-\frac{k}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}dp'\frac{\Psi\left(p'\right)}{\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)}=0.$$

Elle peut être écrite dans la forme intégrale suivante :

$$\Psi\left(p\right)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}dp'k\left(p,p'\right)\Psi\left(p'\right). \tag{1.2.6}$$

Avec $\lambda=1$ et le noyau :

$$k\left(p,p'\right)=\frac{\frac{k}{2\pi\hbar}}{\left(\frac{\hat{p}^{2}}{2m}-E\right)}\frac{1}{\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)}.$$

Dans ce cas, le noyau$k\left(p,p'\right)$ est séparable. Posant :

$$k\left(p,p'\right)=f\left(p\right)g\left(p'\right),$$

où :

$$f\left(p\right)=\frac{\frac{k}{2\pi\hbar}}{\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}-E\right)}\text{ et }g\left(p'\right)=\frac{1}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)},$$

la fonction d'onde est donnée par :

$$\Psi\left(P\right)=Cf\left(p\right)\text{ ou }C=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp'g\left(p'\right)\Psi\left(p'\right). \tag{1.2.7}$$

En utilisant cette dernière expression et l'équation (1.2.6), on obtient :

$$\Psi\left(P\right)\left(1-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp'g\left(p'\right)\Psi\left(p'\right)\right)=0.$$

La solution de cette équation est évidente :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp'g\left(p'\right)\Psi\left(p'\right)=1. \tag{1.2.8}$$

Cette équation représente la condition spectrale qui va nous servir pour extraire les niveaux d'énergie possibles. Quant à la fonction d'onde, elle se calcule à partir de l'équation (1.2.7) avec la condition de normalisation suivante:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)}\left|\Psi\left(p\right)\right|^2=1,$$

qui donne la valeur de la constante C:

$$C^2=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)}fp^2\right)^{-1}.$$

En utilisant les expressions des fonctions $f\left(p\right)$et $g\left(p\right)$, les niveaux d'énergie seront calculés à partir de la condition suivante :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{\left(p^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(p^2+p_0^2\right)}=\frac{\beta\pi\hbar}{mk},p_0^2=-2mE.$$

Cette intégrale peut se calculer en utilisant le résultat suivant [19] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+b^2)(p^2+p_0^2)} = \frac{\pi}{b^2 p_0 + b p_0^2}.$$

$$\text{si} \quad \mathrm{Re}\,[b]\rangle 0; \qquad \mathrm{Re}\,[p_0]\rangle 0,$$

On trouve ainsi l'équation :

$$\sqrt{\beta} p_0^2 + p_0 - \frac{mk}{\hbar} = 0.$$

En utilisant la solution $p_0\rangle 0$ on aboutit à l'expression suivante de l'énergie :

$$E = -\frac{1}{8m\beta}\left(-1 + \left[1 + \frac{4mk}{\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

On peut developer $\left(1+\frac{4mk}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ en série de β . Ainsi, on trouve à l'ordre 1 :

$$E = -\frac{mk^2}{2\hbar^2}\left(1 - \frac{2mk}{\hbar}\sqrt{\beta} + 5\frac{m^2k^2}{\hbar^2}\beta\right). \tag{1.2.9}$$

A la limite $\beta = 0$, on trouve le résultat fini de la mécanique quantique ordinaire :

$$E = \frac{mk^2}{2\hbar^2}. \tag{1.2.10}$$

Le deuxième et le troisième terme dans l'équation (1.2.9) sont des corrections apportées par l'existence d'une longueur élémentaire ou une incertitude minimale non nulle sur la position.

Donc l'étude du potentiel de Dirac à une dimension, avec une incertitude minimale non nulle sur la position, montre qu'on a un seul niveau d'énergie qui tend à la limite $\beta \to 0$ vers le niveau de la mécanique quantique habituelle. L'effet de la longueur élémentaire $\hbar\sqrt{\beta}$ se limite à une correction qui dépend, au premier et au deuxième ordre, de $\sqrt{\beta}$ et de β , respectivement. Ces corrections sont similaires à celles du potentiel de Coulomb à une dimension$\left(\frac{1}{x}\right)$), traité dans le même formalisme [20],[21].

2

Etude de léquation de schrodinger dans L'algèbre de Heisenberg modifiée

Comme dans [22], on défini les relations de commutation ($\hbar = c = 1$) par:

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\left(\delta_{ij} + \beta\delta_{ij}\hat{P}^2 + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right),$$

$$\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] = 0, \tag{2.0.1}$$

où $\hat{P}^2 = \sum_{i=1}^{3}\hat{P}_i\hat{P}_i$ et où $\beta, \beta'>0$ sont considérés comme de petites quantités du premier orde. Dans chapitre, nous étudions seulement le cas $\beta' = 2\beta$

qui laisse les relations de commutation entre les opérateurs $\hat{X}_i$ inchangée [22], c'est-à-dire $\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] = 0$

Pour calculer le spectre pour un potentiel donné, nous devons trouver une représentation des opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$ impliquant des variables de position $x_i$et des dérivées partielles par rapport à ces positions variables, qui satisfont les équations (2.0.1), et résolvent l'équation differentielle:

2.1 L'équation de Schrodinger

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + V\left(\overrightarrow{\hat{X}}\right)\right]\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) = E\Psi\left(\overrightarrow{x}\right). \tag{2.1.1}$$

Il est facile de vérifier que les représentations suivantes verifient les relations (2.0.1):

$$\hat{X}_i \Psi\left(\overrightarrow{x}\right) = x_i \Psi\left(\overrightarrow{x}\right),$$

$$\hat{P}_i \Psi\left(\overrightarrow{x}\right) = p_i\left(1+\beta \overrightarrow{p}^2\right)\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) \text{et} p_i = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.1.2}$$

En négligeant les termes d'ordre 2, l'équation de Schrodinger (2.1.1) prend la form:

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{\beta}{m}\overrightarrow{p}^4 + V\left(\overrightarrow{x}\right)\right]\Psi\left(\overrightarrow{x}\right) = E\Psi\left(\overrightarrow{x}\right). \tag{2.1.3}$$

C'est l'équation de Schrodinger ordinaire avec un terme supplémentaire proportionnel à $\overrightarrow{p}^4$ nous calculons ses effets sur les spectres d'énergie dans le premier ordre de perturbations.

Les cerrection du spectre au premier ordre dans le paramètre de déformation β mène à

$$E_K = E_K^0 + \Delta E_K, \tag{2.1.4}$$

où K désigne l'ensemble des nombres quantiques qui marquent le niveau d'énergie avec ΔE_K sont les valeurs propres de la matrice

$$\frac{\beta}{m}\langle \Psi_K^0\left(\overrightarrow{x}\right) \mid \overrightarrow{p}^4 \mid \Psi_{K'}^0\left(\overrightarrow{x}\right)\rangle = \frac{\beta}{m}\langle K \mid \overrightarrow{p}^4 \mid K'\rangle. \tag{2.1.5}$$

où $\Psi_K^0\left(\overrightarrow{x}\right)$sont les solutions de (2.1.3) avec $\beta = 0$Cette matrice est calculée avec toutes les fonctions d'onde qui correspondent au niveau d'énergie non perturbée E_K^0

Pour un potentiel arbitraire $V\left(\overrightarrow{x}\right)$ utilisée dans l'équation de Schrodinger,la matrice (2.1.5) est non diagonale.

Cependant, puisque nous savons le terme de $\overrightarrow{p}^2$(à partir de l'équation (2.1.3)) l'expression de éléments de la matrice, pour un potentiel central, peuvent s'écrire:

$$4\beta m\left(\left(E_{n\ell}^0\right)^2\delta_{nn'} - \left(E_{n\ell}^0 + E_{n'\ell}^0\right)\langle n\ell m \mid V(r) \mid n'\ell m\rangle + \langle n\ell m \mid V(r)^2 \mid n'\ell m\rangle \delta_{l\ell\ell}\delta_{mm'}\right). \tag{2.1.6}$$

Et, dans les cas que nous avons étudiés ici, il n'y a pas d'états dégénérés avec des valeurs angulaires , la matrice (2.1.5) est diagonale et les corrections du spectre peuvent s'écrire:

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m\left(\left(E_{n\ell}^0\right)^2 - 2E_{n\ell}^0\langle n\ell m \mid V(r) \mid n\ell m\rangle + \langle n\ell m \mid V(r)^2 \mid n\ell m\rangle\right). \tag{2.1.7}$$

Cette relation peut être simplifiée si on considère que le potentiel central est $V(r) \sim r^p$ Dans ce cas, le théorème du Viriel donne:

$$\langle n\ell m \mid V(r) \mid n\ell m \rangle = \frac{2}{p+2} E^0_{n\ell}. \tag{2.1.8}$$

ce qui conduit à la forme suivante pour l'expression des corrections de niveau d'énergie pour le premier ordre dans β :

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \left(\left(E^0_{n\ell}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + \langle n\ell m \mid V(r)^2 \mid n\ell m \rangle \right). \tag{2.1.9}$$

Cette expression simple nous permettra de trouver les corrections de l'oscillateur harmonique et les spectres d'hydrogène en calculant simplement la valeur moyenne du carré du potentiel.

2.2 Oscillateur harmonique

Pour ce potentiel, le décalage du niveau d'énergie n'est donné que par la valeur moyenne du carré du potentiel. La fonction d'onde non perturbée normalisée de l'oscillateur harmonique est :

$$\Psi^0_{n\ell m}\left(\vec{r}\right) = \lambda^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)}} (\lambda r)^\ell e^{-\frac{(\lambda r)^2}{2}} L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left((\lambda r)^2\right) Y_{\ell m}(\theta,\varphi). \tag{2.2.1}$$

où $\lambda = \sqrt{m\omega}$et $L^\alpha_n(x)$sont des polynômes de Laguerre [23] (p 1037). n est le.nombre quantique radial En utilisant le changement de variable $x = \lambda r^2$, le décalage d'énergie est donné par

$$\langle n\ell m \mid V(r)^2 \mid n\ell m \rangle = \int r^2 dr \sin^2\theta d\theta d\varphi \Psi^*_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) V(r)^2 \Psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi),$$

$$\Delta E_{nl} = 4\beta m \left(\left(E^0_{nl}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + \int r^2 dr \sin^2\theta d\theta d\varphi \Psi^*_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) V(r)^2 \Psi_{n\ell m}(r,\theta,\varphi) \right),$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \begin{pmatrix} (E_{n\ell})^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + \int r^2 dr \sin^2\theta d\theta d\varphi \left(\lambda^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left(\sqrt{\frac{2n!}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)}}\right)^2 \\ (\lambda r)^{2\ell} e^{-(\lambda r)^2} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left((\lambda r)^2\right)\right]^2 Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) V(r)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \left(\left(E^0_{n\ell}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + \int r^2 dr \left(\lambda r\right)^{2\ell} e^{-(\lambda r)^2} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left(\left(\lambda r\right)^2\right)\right]^2 \left(\lambda^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{2n!}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)} V\left(r\right)^2 \right),$$

$$x = \left(\lambda r\right)^2, dx = 2\lambda^2 r dr,$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \frac{\lambda^3 2n!}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)} \int \frac{x}{\lambda^2} \frac{dx}{2\lambda\sqrt{x}} e^{-x} \left(x\right)^{\frac{2\ell}{2}} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left(x\right)\right]^2 V\left(r\right)^2,$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \frac{n!}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)} \int x^{1+\ell+\frac{1}{2}} e^{-x} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left(x\right)\right]^2 \frac{x^2}{\lambda^4} K^2 dx$$

$$\Delta E_{n\ell} = \frac{4\beta m \left(n!\right) k^2}{\Gamma\left(n+\ell+\frac{3}{2}\right)} \int x^{\ell+\frac{5}{2}} e^{-x} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}\left(x\right)\right]^2 dx, \tag{2.2.2}$$

où $2K = m\omega^2$. Le calcul de l'intégrale restante est simple. Connaissant les relations suivantes concernant les polynômes de Laguerre [23] (p 1037, p 844)

$$L_n^{\alpha-1}\left(x\right) = L_n^{\alpha}\left(x\right) - L_{n-1}^{\alpha}\left(x\right), \tag{2.2.3}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha\left(x\right) L_m^\alpha\left(x\right) dx = \frac{\Gamma\left(\alpha+n+1\right)}{n!}\delta_{nm}, \tag{2.2.4}$$

nous obtenons l'expression du spectre d'oscillateur harmonique pour l'algebre de Heisenberg modifiée (2.0.1)

$$E_{n\ell} = w\left(2n+\ell+\frac{3}{2}\right) + \left(\triangle x\right)^2 \frac{1}{5} m w^2 \left(6n^2 + 9n + 6n\ell + \ell^2 + 4\ell + \frac{15}{4}\right), \tag{2.2.5}$$

avec $\triangle x_0 = \sqrt{5\beta}$ Cet exemple montre l'utilité de cette approche qui fournit, avec des calculs, une expression analytique des corrections d'énergie.

L'intérêt principal de cette méthode est qu'il peut facilement être utilisé pour résoudre d'autres problèmes analytiquement ou numériquement, tels que le problème

de coulomb qui est résolu dans la section suivante.

2.3 Atome d'hydrogène

Pour l'équation de schrodinger, La fonction d'onde non perturbée normalisée de l'atome d'hydrogène est donnée par:

$$\Psi^0_{n\ell m}\left(\vec{r}\right) = (2\gamma_n)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n\,(n+\ell)!}}\,(2\gamma_n r)^{\ell}\, e^{-\gamma_n r} L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\,(2\gamma_n r)\, Y_{lm}\,(\theta,\varphi)\,, \tag{2.3.1}$$

où $\gamma_n = m\alpha/n$ et α est la constante de structure fine . n est le nombre quantique principal et ℓ varie entre 0 et $n-1$Le changement de variable $x = 2\gamma_n r$ nous permet d'écrire l'énergie changer comme

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \begin{pmatrix} \left(E^0_{n\ell}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + \int\limits_0^{\infty} r^2 dr \sin^2\theta d\theta d\varphi\, (2\gamma_n)^3\, \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!} \\ (2\gamma_n r)^{2\ell}\, e^{-2\gamma_n r} \left[L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\,(2\gamma_n r)\right]^2 Y^*_{lm}\,(\theta,\varphi)\, Y_{lm}\,(\theta,\varphi)\, V\,(r)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \begin{pmatrix} \left(E^0_{n\ell}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + (2\gamma_n)^3\, \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!} \\ \int\limits_0^{\infty} r^2\, (2\gamma_n r)^{2\ell}\, e^{-2\gamma_n r} \left[L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\,(2\gamma_n r)\right]^2 \left(-\frac{\alpha^2}{r^2}\right) dr \end{pmatrix},$$

$$\Delta E_{n\ell} = 4\beta m \begin{pmatrix} \left(E^0_{n\ell}\right)^2 \left(\frac{p-2}{p+2}\right) + (2\gamma_n)^3\, \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!} \\ \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{x}{2\gamma_n}\right)^2 x^{2\ell} e^{-x} \left[L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\,(x)\right]^2 \left(-\alpha^2 \frac{(2\gamma_n)^2}{x^2}\right) \frac{1}{(2\gamma_n)} dx \end{pmatrix},$$

$$\Delta E_{n\ell} = -12\beta m \left(E^0_{n\ell}\right)^2 + 8\beta m \gamma_n^2 \alpha^2 \frac{(n-\ell-1)!}{n\,(n+\ell)!} \int\limits_0^{\infty} x^{2l} e^{-x} \left[L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\,(x)\right]^2 dx. \tag{2.3.2}$$

En ce qui concerne le problème de l'oscillateur harmonique, l'évaluation de cette intégrale est assez simple. Effectivement, en utilisant la relation suivante pour les polynômes de Laguerre [13] (p 1038)

$$\sum_{m=0}^{n} L^{\alpha}_{m}\,(x) = L^{\alpha+1}_{n}\,(x)\,, \tag{2.3.3}$$

avec la relation (2.2.4) et la formule de sommation suivante

$$\sum_{p=0}^{b} \frac{(p+a)!}{p!} = \frac{(a+b+1)!}{(1+a)\,b!}, \tag{2.3.4}$$

l'expression du spectre de l'atom de hydrogène, dans le premier ordre du paramètre de déformation β est donnée par:

$$E_{n;\ell} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2} + (\Delta x_0)^2 \frac{m^3\alpha^4}{5} \frac{\left(4n - 3\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\right)}{n^4\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}, \tag{2.3.5}$$

Cette formule montre que les corrections au spectre sont toujours positives. La valeur de ce terme supplémentaire est maximum pour l'état fondamental et pour chaque valeur de n le maximum de la contribution est obtenue pour les niveaux $\ell = 0$En ce qui concerne le cas de l'oscillateur harmonique, les correction dépendent explicitement de ℓ enlev ce qui

la dégénérescence des niveaux d'énergie qui restent.

3

Mécanique quantique avec la relation d'incertitude généralisée:

3.1 L'algèbre de Heisenberg modifiée à une dimension

Nous dans ce chapiter,nous considérans les relation de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion:

$$\left[\hat{x}, \hat{P}\right] = i\hbar \left(1 + \beta \hat{p}^2\right). \tag{3.1.1}$$

Où β est un paramètre positif. Cette relation de commutation déformée conduit au principe d'incertitude généralisée suivant:

$$(\Delta x)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}\left[1 + \beta (\Delta P)^2\right]. \tag{3.1.2}$$

ce qui implique l'existence d'une incertitude minimale non nulle:

$$(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{3.1.3}$$

Une représentation explicite des opérateurs de position et de la quantité de mouvement obéissant à la relation (3.1.2) est donnée par:

$$\hat{x} = i\hbar\left[\left(1 + \beta \hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p\right], \hat{P} = p. \tag{3.1.4}$$

Où γ est une constante arbitraire . Son choix détermine uniquement la fonction de poids dans la définition du produit scalaire donnée par:

$$\langle \Phi \mid \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\left(1+\beta \hat{p}^2\right)^{1-\frac{\gamma}{\beta}}} \Phi^{\star}(p) \Psi(p) . \tag{3.1.5}$$

Dans la suite, nous allons définir $\gamma = 0$ afin de simplifier les calculs.Une conséquence fondamentale de la longueur minimale est la perte de la notion de localisation dans l'espace de position depuis coordonnées spatiales ne peuvent plus être calculés avec précision plus que$(\Delta x)_{\min}$.

3.2 Résolution de l'équation de Dirac:

Dans le cas unidimensionnel, l'équation de Dirac stationnaire décrivant une particule de masse m en présence d'un potentiel vectoriel $v(x)$ et un potentiel scalaire $s(x)$ s'écrit sons la forme:

$$c\alpha p \Psi + \beta \left[mc^2 + s(x)\right] \Psi = [E - v(x)] \Psi. \tag{3.2.1}$$

où Ψ est un spineur à deux composante. Ici nous choisissons la représentation des matrices de Dirac α et β :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & o \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

Pour résoudre l'équation (3.2.1) nous utilisons l'écriture suivante pour le spinor Ψ :

$$\Psi = \left\{c\alpha p + \beta \left[mc^2 + s(x)\right] + [E - v(x)]\right\} \Phi. \tag{3.2.3}$$

Ensuite,pour la fonction à deux composants Φ, nous obtenons l' équation suivante:

$$\left\{c^2 p^2 + \left[mc^2 + s(x)\right]^2 - [E - v(x)]^2 - c\left[p, \beta s + v\right] \alpha\right\} \Phi = 0. \tag{3.2.4}$$

Maintenant nous prenons les potentiels vectoriel et scalaire suivante:

$$v(x) = kx \qquad , s = \lambda x. \tag{3.2.5}$$

avec$k$ et λ deux constantes caractérisant la force des potentiels. En plus, nous supposons $|\lambda|\rangle\, |k|$ afin d'éviter que les valeur propres complexes [25],[26]. En substituant dans le système (3.2.4) les opérateurs x et p par leur représentation (3.1.5) l'équation différentielle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{c} c^2p^2 + \left[mc^2 + \lambda i\hbar\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p\right]\right]^2 - \left[E - ki\hbar\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p}\gamma p\right]\right]^2 \\ -c\left[p, \beta\lambda x + kx\right]\alpha \end{array} \right\} \Phi\left(p\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} c^2p^2 + m^2c^4 - \lambda^2\hbar^2\left(1+\beta\hat{p}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2mc^2\lambda i\hbar\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p}\right] - E^2 + k^2\hbar^2\left(1+\beta\hat{p}^2\right)^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} \\ +2Eki\hbar\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p\right] - c\left[p, x\left(\beta\lambda + k\right)\right]\alpha \end{array} \right\} \Phi = 0.$$

Avec:

$$\left[\hat{x}, \hat{P}\right] = -i\hbar\left(1+\beta\hat{p}^2\right).$$

Alors:

$$\left\{ \begin{array}{c} -\hbar^2\left(\lambda^2 - k^2\right)\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p}\right]^2 + 2i\hbar\left(\lambda mc^2 + kE\right)\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{\partial}{\partial p} + c^2p^2 + m^2c^4 - E^2 \\ +\hbar c\sqrt{\lambda^2 - k^2}\left(1+\beta\hat{p}^2\right)M \end{array} \right\} \Phi\left(p\right) = 0. \tag{3.2.6}$$

où M est la matrice définie comme:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda - k \\ \lambda + k & 0 \end{pmatrix}}. \tag{3.2.7}$$

Maintenant,considérons lechangement de variable suivant:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\sqrt{\beta}p\right). \tag{3.2.8}$$

avec $p \in (-\infty, +\infty)$ et $p \in \left(-\frac{\pi}{\left(2\sqrt{\beta}\right)}, \frac{\pi}{\left(2\sqrt{\beta}\right)}\right)$et aussi, on définit les quantités sans dimension:

$$\varepsilon = \frac{\left(m^2c^4 - E^2\right)}{\left(\hbar^2\beta\left(\lambda^2 - k^2\right)\right)} \qquad \theta = \frac{\left(\lambda mc^2 + kE\right)}{\left(\hbar\sqrt{\beta}\left(\lambda^2 - k^2\right)\right)} \qquad \delta = \frac{c}{\left(\hbar\beta\sqrt{\lambda^2 - k^2}\right)}.$$

Eq. (3.2.6) prend la forme:

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)}\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Nous obtenons le

$$\left\{\begin{array}{c} -\hbar^2\left(\lambda^2-k^2\right)\left[\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{1}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^2+2i\hbar\left(\lambda mc^2+kE\right)\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{1}{\left(1+\beta\hat{p}^2\right)}\frac{\partial}{\partial\rho} \\ +c^2p^2+m^2c^4-E^2+\hbar c\sqrt{\lambda^2-k^2}\left(1+\beta\hat{p}^2\right)M \end{array}\right\}\Phi\left(p\right)=,$$

avec

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan\left(\sqrt{\beta}p\right),$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta^2\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta\varepsilon-\beta\delta\left(1+\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right)M\right\}\Phi\left(\rho\right)=0. \tag{3.2.9}$$

Puisque les valeurs propres de la matrice M sont $\eta=\pm1$, la solution de la dernière équation peut être écrit comme suit:

$$\Phi\left(\rho\right)=u_\eta\Phi_\eta\left(\rho\right). \tag{3.2.10}$$

où $u_\eta$est un vecteur propre à deux composantes de la matrice M avec une valeur propre η , et la fonction $\Phi_\eta\left(p\right)$ est la solution de l' équation suivon:

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta^2\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta\varepsilon-\beta\delta\left(1+\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right)\eta\right\}\Phi_\eta\left(\rho\right)=0.$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta^2\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta\varepsilon-\beta\delta\left(\eta+\eta\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\right)\right\}\Phi_\eta\left(\rho\right)=0.$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta\left(\delta+\eta\right)\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta\left(\varepsilon+\eta\delta\right)\right\}\Phi_\eta\left(\rho\right)=0. \tag{3.2.11}$$

En faisent le changemaent suivant:

$$\Phi_\eta\left(p\right)=e^{i\theta\sqrt{\beta}\rho}f_\eta\left(\rho\right). \tag{3.2.12}$$

Alors, obtient l'équation diffirentielle pour $f_\eta\left(\rho\right)$ est:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}e^{i\theta\sqrt{\beta}\rho}f_\eta\left(\rho\right)=i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta}\rho}f_\eta\left(\rho\right)+e^{i\theta\sqrt{\beta}\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta\left(\rho\right).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}f_\eta(\rho)=-\theta^2\beta e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}f_\eta(\rho)+i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta(\rho)+i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta(\rho)+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_\eta(\rho).$$

donc:

$$\left\{\begin{array}{c} =-\theta^2\beta e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}f_\eta(\rho)+i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta(\rho)+i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta(\rho)+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_\eta(\rho) \\ -2i\theta\sqrt{\beta}i\theta\sqrt{\beta}e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}f_\eta(\rho)+e^{i\theta\sqrt{\beta\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}f_\eta(\rho)-\beta\delta(\delta+\eta)\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta(\varepsilon+\eta\delta)=0 \end{array}\right\},$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\theta^2-2\theta^2\beta-2i\theta\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}-\beta\delta(\delta+\eta)\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta(\varepsilon+\eta\delta)\right\}f_\eta(\rho)=0,$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\beta\delta(\delta+\eta)\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\beta\left(\theta^2-\varepsilon+\eta\delta\right)\right\}f_\eta(\rho)=0. \tag{3.2.13}$$

on définit:

$$f_\eta(\rho)=\cos^\nu\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(\rho). \tag{3.2.14}$$

où v est une constante à déterminer. Alors Eq. (3.2.13) devient:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos^\nu\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(\rho)\right)=-\nu\cos^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(\rho)+\cos^\nu\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\xi_\eta(\rho),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\cos^\nu\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(p) \;=\;& \nu(\nu-1)\cos^{\nu-2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(\rho)\\ &-\nu\cos^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta(\rho)-\nu\cos^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\\ &\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\xi_\eta(\rho)\\ &-\nu\sin^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\xi_\eta(\rho)\\ &+\cos^\nu\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_\eta\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho),\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \nu\left(\nu-1\right)\cos^{\nu-2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_{\eta}\left(\rho\right) \\ -\cos\nu^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_{\eta}\left(\rho\right)-\nu\cos^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\xi_{\eta}\left(\rho\right) \\ -\nu\sin^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\xi_{\eta}\left(\rho\right)+\cos^{\nu}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\xi_{\eta}\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}\left(\rho\right) \\ -\beta\delta\left(\delta+\eta\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)+\beta\left(\theta^{2}-\varepsilon-\eta\delta\right) \end{array} \right\} = 0,$$

$$\Rightarrow \cos^{\nu}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left\{ \begin{array}{c} \nu\left(\nu-1\right)\cos^{-2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin^{2}-\nu\cos^{-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \\ -\cos\nu^{-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\nu\sin^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\cos^{1-\nu}\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}-\beta\delta\left(\delta+\eta\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)+\beta\left(\theta^{2}-\varepsilon-\eta\delta\right) \end{array} \right\}\xi_{\eta}\left(p\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \cos^{\nu}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\left\{ \begin{array}{c} \nu\left(\nu-1\right)\frac{\sin^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{\cos^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\beta\_\nu\beta\frac{\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}-\left(\nu\frac{\sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\sqrt{\beta}+\nu\frac{\sin^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}{\cos^{\nu-1}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \\ +\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}-\beta\delta\left(\delta+\eta\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)+\beta\left(\theta^{2}-\varepsilon-\eta\delta\right) \end{array} \right\}\xi_{\eta}\left(\rho\right) = 0.$$

Alors:

$$\left\{ \begin{array}{c} \nu\left(\nu-1\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\beta-\nu\beta-2\nu\tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}} \\ -\beta\delta\left(\delta+\eta\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)+\beta\left(\theta^{2}-\varepsilon-\eta\delta\right) \end{array} \right\}\xi_{\eta}\left(\rho\right) = 0.$$

$$\left\{\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}-2\nu\sqrt{\beta}\tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}+\beta\left(\nu\left(\nu-1\right)-\delta\left(\delta+\eta\right)\right)\tan^{2}\left(\sqrt{\beta}\rho\right)+\beta\left(\theta^{2}-\eta\delta-\varepsilon-v\right)\right\}\xi_{\eta}\left(\rho\right) = \tag{3.2.15}$$

Nous fixons ν en demandant le coefficient du terme tangent au carré disparaitre:

$$\nu\left(\nu-1\right)-\delta\left(\delta+\eta\right)=0. \tag{3.2.16}$$

La fonction d'onde doit être non singulière à $\cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) = 0$, ce qui implique que $\nu = \frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\delta$. Alors Eq. (3.2.15) se réduit à:

$$\left\{\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}-2\nu\sqrt{\beta}\tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right)\sqrt{\beta}\frac{\partial}{\partial\rho}+\beta\left(\theta^{2}-\varepsilon-\eta\delta\right)\right\}\xi_{\eta}\left(\rho\right)=0. \tag{3.2.17}$$

Si, nous faisons le changement de variable $z = \sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right)$ on montre que la dernière équation à:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} = \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = -\beta \sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\beta \sin\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial z} + \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} \\ -2\nu \tan\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \sqrt{\beta}\sqrt{\beta} \cos\left(\sqrt{\beta}\rho\right) \frac{\partial}{\partial z} + \beta\left(\theta^2 - \varepsilon - \eta\delta\right) \end{array} \right\} \xi_\eta\left(z\right) = 0.$$

$$\left\{\left(1+z^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z\left(1+2\nu\right)\frac{\partial}{\partial z} + \beta\left(\theta^2 - \varepsilon - \eta\delta - \nu\right)\right\}\xi_\eta\left(z\right) = 0. \tag{3.2.18}$$

Afin de garantir un bon comportement de la fonction $\xi_\eta\left(z\right)$ à $z = \pm 1$ nous avons besoin d'une solution polynomiale pour Eq. (3.2.18). Cela mène à imposer la condition suivante :

$$\theta^2 - \varepsilon - \eta\delta - \nu = \acute{n}\left(\acute{n} + 2\nu\right). \tag{3.2.19}$$

où $\acute{n}$ est un nombre entier non négatif [27]; $\acute{n} = 0, 1, 2....$ Avec ça condition Eq. (3.2.18) ecrit:

$$\left\{\left(1+z^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z\left(1+2\nu\right)\frac{\partial}{\partial z} + \acute{n}\left(\acute{n} + 2\nu\right)\right\}\xi_\eta\left(z\right) = 0. \tag{3.2.20}$$

Finalement, cette équation differentielle est bien comme,et la solution géneral est donnée par:

$$\xi_\eta\left(z\right) = NC_{n'}^{\nu}\left(z\right).$$

4

Oscillateur de Klein-Gordon dans le cadre de la longeur minimale

4.1 Oscillateur de Klein-Gordon deux dimentions:

On dfinit l'équation de Klein-Gordon pour un oscillateur harmonique à 2 dimension par l'expression suivante:

$$\left[(p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x) + (py + im_0\omega y)(py - im_0\omega y) - \frac{E^2 - m_{0^2}c^4}{c^2}\right]\Psi_{KG} = 0. \tag{4.1.1}$$

Avec

$$\cup = (p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x)\ ,$$

$$= p_x^2 + m_0^2\omega^2 x^2 + im_0\omega[x, p_x]\ ,$$

$$= p_x^2 + m_0^2\omega^2 x^2 - m_0\omega\hbar, \tag{4.1.2}$$

$$\cap = (py + im_0\omega y)(py - im_0\omega y),$$

$$= p_y^2 + m_0^2\omega^2 y^2 + im_0\omega[y, p_y],$$

$$= p_y^2 + m_0^2\omega^2 y^2 - m_0\omega\hbar \ . \tag{4.1.3}$$

Maintenant, pour simplicité, nous introduisons la presentation suivante:

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, \hat{y} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} \quad , \tag{4.1.4}$$

$$\hat{p}_x = p_x, \hat{p}_y = p_y \ , \tag{4.1.5}$$

et passant sur les coordonnées polaires avec la définition suivante [[28]]

$$p_x = p\cos\theta, p_y = p\sin\theta, \text{avec } p^2 = p_x^2 + p_y^2 \ . \tag{4.1.6}$$

Avec

$$p = \sqrt{p_{x+}^2 p_y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{p_x}{p_y}\right),$$

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar\left(\frac{\partial p}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

$$= i\hbar\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin\theta}{p}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{4.1.7}$$

$$\hat{y} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} = \left(i\hbar\frac{\partial p}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \theta}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

$$= i\hbar\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos\theta}{p}\frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{4.1.8}$$

Eqs. (4.1.2) et (4.1.3) se transforment en

$$\cup = p^2\cos^2\theta - m_0^2 w^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \hbar m_0\omega, \tag{4.1.9}$$

$$\cap = p^2\sin^2\theta - m_0^2\omega^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \hbar m_0\omega. \tag{4.1.10}$$

Dans ce cas, Eq. (4.1.1) devient

$$\left(p^2 - m_0^2\omega^2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right) - 2\hbar m_0\omega^2 - \varsigma\right)\Psi_{KG} = 0. \tag{4.1.11}$$

En utilisant les Eqs. (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8), nous avons:

$$\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}=\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}, \tag{4.1.12}$$

et par conséquent, nous obtenons:

$$\left(p^2-\lambda^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\right)-2\lambda-\varsigma\right)\Psi_{KG}=0, \tag{4.1.13}$$

avec $\lambda=\ \hbar m_0 w$ et

$$\varsigma=\frac{E^2-m_{0^2}c^4}{c^2}. \tag{4.1.14}$$

Maintenant, nous choisissons la trensfarmation

$$\Psi_{KG}\left(p;\theta\right)=f\left(p\right)e^{il\prime\theta}. \tag{4.1.15}$$

l'Eq. (4.1.13) s'écrit son la forme:

$$\left(\frac{f\left(p\right)}{\lambda^2}p^2-\left(\frac{\partial^2 f\left(p\right)}{\partial p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f\left(p\right)}{\partial p}+\frac{1}{p^2}l^2 f\left(p\right)\right)-\frac{1}{\lambda^2}\left(2\lambda+\varsigma\right)f\left(p\right)\right)=0,$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 f\left(p\right)}{\partial p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f\left(p\right)}{\partial p}+\frac{1}{p^2}l^2 f\left(p\right)\right)+\left(\kappa^2-p^2k^2\right)f\left(p\right)=0. \tag{4.1.16}$$

Avec

$$\kappa^2=\frac{2\lambda+\varsigma}{\lambda^2},k^2=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.1.17}$$

4.1.1 Solutions en présence d'une longueur minimale:

Dans le formalisme de la longueur minimale, l'algèbre de Heisenberg est donnée par [[29]-[30]]

$$\left[\hat{x}_i,\hat{p}_i\right]=i\hbar\delta_{ij}\left(1+\beta p^2\right), \tag{4.1.18}$$

où $\beta>0$ est le paramètre de longueur minimale. Une représentation de xi et pi qui satisfait l'Eq. (4.1.18), peut être considéré comme suit:

$$\hat{x}=i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_x},\hat{p}_x=p_x, \tag{4.1.19}$$

$$\hat{y}=i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_y},\hat{p}_y=p_y. \tag{4.1.20}$$

Dans ce cas, l'équation de l'oscillateur KG est:

$$\left\{p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2\left(x^2+y^2\right) + im\omega\left[x,p_x\right] + im\omega\left[y,p_y\right] - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0. \tag{4.1.21}$$

En utilisant les équations (4.1.19) et (4.1.20), Eq. (4.1.21) devient:

$$\left\{P^2 - m^2\omega^2\hbar^2\left(1+\beta P^2\right)^2\left[\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2}\right] - 2m\omega\hbar\left(1+\beta P^2\right) - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0,$$

$$\left\{P^2 - \lambda^2\left(1+\beta P^2\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}\right) - 2\beta\lambda^2\left(1+\beta P^2\right)p\frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda\left(1+\beta P^2\right) - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0. \tag{4.1.22}$$

Maintenant, on pose:

$$\Psi_{KG} = h\left(p\right)e^{i|j|k},, \tag{4.1.23}$$

avec $j = 0, \pm\, 1, \pm\, 2, ...$, alors Eq. (4.1.22) se transforme comme:

$$\left\{-a\left(p\right)\frac{\partial^2}{\partial p^2} + b\left(p\right)\frac{\partial}{\partial p} = c\left(p\right) - \varsigma\right\}h\left(p\right) = 0, \tag{4.1.24}$$

avec

$$\begin{aligned}
a\left(p\right) &= \lambda^2\left(1+\beta P^2\right)^2, \\
b\left(p\right) &= \frac{\lambda^2\left(1+\beta P^2\right)^2}{p} - 2\beta\lambda^2\left(1+\beta P^2\right)p = \frac{a}{p} - 2\beta\lambda\sqrt{ab}, \\
c\left(p\right) &= p^2 + \frac{j^2\lambda^2\left(1+\beta P^2\right)^2}{p^2} - 2\lambda^2\left(1+\beta P^2\right) = p^2 + j^2\frac{a}{p^2} - 2\sqrt{a}.
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Maintenant, avec les définition suivante [31]:

$$h\left(p\right) = \rho\left(p\right)\varphi\left(p\right), q = \int\frac{1}{\sqrt{a\left(p\right)}}dp, \tag{4.1.26}$$

$$\rho\left(p\right) = \left(\int\chi\left(p\right)dp\right), \chi\left(p\right) = \frac{2b+a'}{4a} = \frac{1}{2p}, \tag{4.1.27}$$

,nous avons

$$\left[\frac{\partial^2\varphi\left(p\right)}{\partial p^2} + V\left(p\right)\right]\varphi\left(p\right) = \varsigma\varphi\left(p\right), \tag{4.1.28}$$

avec

$$V(p) = p^2 - 2\lambda\left(1+\beta P^2\right) + \beta\lambda^2\left(1+\beta P^2\right) + \frac{\lambda^2\left(1+\beta P^2\right)}{p^2}\left(j^2 - \frac{1}{4}\right). \tag{4.1.29}$$

Nous notons ici que la fonction $\rho(p) = p^{-\frac{1}{2}}$:

.

Maintenant, si nous mettons:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan\left(q\lambda\sqrt{\beta}\right), \tag{4.1.30}$$

le terme $V(p)$ devient:

$$V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2\left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 aq} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 aq}\right), \tag{4.1.31}$$

$$\beta\lambda^2 = U_0$$

et par conséquent, la forme finale de notre équation différentielle est:

$$\left\{-\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial q^2} + \frac{U_0}{2}\left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 aq} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 aq}\right)\right\}\varphi(p) = \overline{\varsigma}\varphi(p), \tag{4.1.32}$$

où $\overline{\varsigma} = \varsigma + \frac{1}{\beta}$Eq. (4.1.32) alors, on écrit:

$$\left\{-\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial q^2} + \frac{U_0}{2}\left(\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\cos^2 aq} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\sin^2 aq}\right)\right\}\varphi(p) = \overline{\varsigma}\varphi(p), \tag{4.1.33}$$

où

$$V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2\left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2 aq} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2 aq}\right\}, \tag{4.1.34}$$

avec

$$\zeta_1(\zeta_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4}, \tag{4.1.35}$$

$$\zeta_2(\zeta_2 - 1) =^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}. \tag{4.1.36}$$

Ainsi, nous avons:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi(p)}{\partial q^2}+\frac{1}{2}U_0\left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1-1)}{\sin^2 aq}+\frac{\zeta_2(\zeta_2-1)}{\cos^2 aq}\right\}\right)\varphi(p)=\overline{\xi}^2\varphi(p), \tag{4.1.37}$$

où $U_0=a^2$ avec $a=\lambda\sqrt{\beta}$. Eq. (4.1.37) est l'équation bien connue de Schrodinger dans un potentiel de Pschl-Teller avec [31]

$$U=\frac{1}{2}U_0\left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1-1)}{\sin^2 aq}+\frac{\zeta_2(\zeta_2-1)}{\cos^2 aq}\right\}, \tag{4.1.38}$$

et avec les conditions suivantes $\zeta_1\rangle 1$ et $\zeta_2\rangle 1$

Par comparaison, l'équation (4.1.32) avec l'équation. [?], on trouve:

$$\zeta_1=|j|\pm\frac{1}{2}, \tag{4.1.39}$$

$$\zeta_2=\frac{1}{2}\pm\left(\frac{1}{\beta\lambda}-1\right)\sqrt{1+\frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda}-1\right)^2}}. \tag{4.1.40}$$

Maintenant, afin de résoudre l'équation. (4.1.32), nous introduisons la nouvelle variable

$$z=\sin^2 aq. \tag{4.1.41}$$

Dans ce cas, Eq. (4.1.32) peut être écrit comme suit:

$$z(1-z)\varphi''+\left(\frac{1}{2}-z\right)\varphi'+\frac{1}{4}\left\{\frac{\overline{\xi}^2}{a^2}-\frac{\zeta_1(\zeta_1-1)}{z}-\frac{\zeta_2(\zeta_2-1)}{1-z}\right\}\varphi=0. \tag{4.1.42}$$

avec la nouvelle fonction φ d'onde définie par:

$$\varphi=z^{\frac{\zeta_1}{2}}(1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}}\Psi(z), \tag{4.1.43}$$

nous arrivons à:

$$z(1-z)\Psi''\left[\left(\zeta_1+\frac{1}{2}\right)-(\zeta_1+\zeta_2+1)\right]\Psi'+\frac{1}{4}\left\{\frac{\overline{\xi}^2}{a^2}(\zeta_1+\zeta_2)\right\}\Psi=0. \tag{4.1.44}$$

La solution générale de cette équation est donné:

$$\Psi=c_{12}F_1(a;b;c;z)+c_2z_2^{1-c}F_1(a+1-c;b+1-c;2-c,z), \tag{4.1.45}$$

avec

$$a=\frac{1}{2}\left(\zeta_1+\zeta_2-\frac{\overline{\xi}}{a^2}\right), b=\frac{1}{2}\left(\zeta_1+\zeta_2-\frac{\overline{\xi}}{a^2}\right), c=\zeta_1+\frac{1}{2}. \tag{4.1.46}$$

Avec la condition $a=-n$, on obtient

$$\overline{\xi}^2=a^2\left(\zeta_1+\zeta_2+2n\right)^2. \tag{4.1.47}$$

Ainsi, la forme exacte de $\zeta_1$etζ_2 sont

$$\zeta_1=|j|+\frac{1}{2}, \tag{4.1.48}$$

$$\zeta_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\beta\lambda}-1\right)\sqrt{1+\frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda}-1\right)^2}}, \tag{4.1.49}$$

où$j\neq 0$

A l'aide des Eqs. (4.1.39), (4.1.40) et (4.1.47), nous obtenons la forme finale du spectre d'énergie, qui est donnée par

$$\frac{E}{m_0c^2}=\pm\sqrt{1-2r+2\Sigma r\left(N+1\right)+\frac{\beta}{\beta_0}\left(N^2-2\Sigma\left(N+1\right)+j^2\right)}, \tag{4.1.50}$$

avec

$$\Sigma=\sqrt{1+\frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda}-1\right)^2}}. \tag{4.1.51}$$

Nous pouvons voir que par $\beta\rightarrow 0, \Sigma\rightarrow 1$, et le spectre d'énergie est celui de cas ordinaire :

$$E_n=\pm mc_0^2\sqrt{1+2rN}.$$

.

La fonction d'onde correspondante est

$$\Psi_{KG}=Ne^{i|j|\theta}p^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{\zeta_1}{2}}\left(1-z\right)_2^{\frac{\zeta_2}{2}}F_1\left(a,b,c,z\right). \tag{4.1.52}$$

avec$N$ est la constante de normalisation.

4.2 Un oscillateur de Klein-Gordon à troi dimentions:

dans ce cas l'equation differentielle est donnée par:

$$\left\{(p_i + im\omega x_i)(p_i - im\omega x_i) - \frac{E^2 - m^2c^2}{c^2}\right\}\Psi_{KG} = 0, \tag{4.2.1}$$

$$\left\{p^2 - im\omega p_i x_i + im\omega x_i p_i + m^2\omega^2 r^2 - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0,$$

$$\left\{p^2 + im\omega\left[x_i, p_i\right] + m^2\omega^2 r^2 - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0,$$

$$\left\{p^2 - m\omega\hbar\left(1 + \beta p^2\right) + m^2\omega^2 r^2 - \varsigma\right\}\Psi_{KG} = 0.$$

En coordonnées sphériques,

$$\nabla^2 = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p^2\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{1}{p^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{p^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

alors l'équation (4.2.1) pend la forme:

$$\left\{\begin{array}{c} p^2 - \lambda^2\left(1 + \beta p^2\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{\cos\theta}{p^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{p^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \\ -2\beta\lambda^2\left(1 + \beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda\left(1 + \beta p^2\right) - \varsigma \end{array}\right\}\Psi_{KG} = 0, \tag{4.2.2}$$

on pose:

$$\Psi_{KG} = e^{im\varphi}\phi\left(p, \theta\right),$$

alors:

$$\frac{1}{p^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi_{KG} = \frac{1}{p^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(e^{im\varphi}\phi\left(p, \theta\right)\right) = \frac{-m^2}{p^2\sin^2\theta}e^{im\varphi}\phi\left(p, \theta\right). \tag{4.2.3}$$

En remplaçant desl'équation (1.1.39) (4.2.2)on trouve:

$$\left\{\begin{array}{c} p^2 - \lambda^2\left(1 + \beta p^2\right)^2\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p}\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{\cos\theta}{p^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{m^2}{p^2\sin^2\theta}\right] \\ -2\beta\lambda^2\left(1 + \beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda\left(1 + \beta p^2\right) - \varsigma \end{array}\right\}\phi\left(p, \theta\right) = 0, \tag{4.2.4}$$

on dfint la separation de variable suivant:

$$\phi\left(p,\theta\right)=P\left(p\right)\boxminus\left(\theta\right),$$

alors

$$\left\{\begin{array}{c} p^2P\boxminus-\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left[\left(\boxminus\frac{\partial^2}{\partial p^2}P+\frac{2\boxminus}{p}\frac{\partial}{\partial p}P\right)+\frac{P\cos\theta}{p^2\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}+\frac{P}{p^2}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}-\frac{m^2}{p^2\sin^2\theta}P\boxminus\right] \\ -\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right)P\left(p\right)\boxminus\left(\theta\right) \end{array}\right\}=0. \tag{4.2.5}$$

En partageant sur $P\boxminus$:

$$\left\{\begin{array}{c} p^2-\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left[\left(\frac{1}{P}\frac{\partial^2}{\partial p^2}P+\frac{2}{pP}\frac{\partial}{\partial p}P\right)+\frac{1}{\boxminus}\frac{\cos\theta}{p^2\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}+\frac{1}{\boxminus}\frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}-\frac{m^2}{p^2\sin^2\theta}\right] \\ -\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right) \end{array}\right\}=0. \tag{4.2.6}$$

multiplient par p^2 :

$$\left\{\begin{array}{c} p^4-\lambda^2p^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left[\left(\frac{1}{P}\frac{\partial^2}{\partial p^2}P+\frac{2}{pP}\frac{\partial}{\partial p}P\right)+\frac{1}{\boxminus}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}+\frac{1}{\boxminus}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] \\ -p^2\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right) \end{array}\right\}=0, \tag{4.2.7}$$

$$\begin{aligned} p^4-\lambda^2p^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left(\frac{1}{P}\frac{\partial^2}{\partial p^2}P+\frac{2}{pP}\frac{\partial}{\partial p}P\right)-p^2\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right) &= \\ -\frac{1}{\boxminus}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}-\frac{1}{\boxminus}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}+\frac{m^2}{\sin^2\theta} &= \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

$$p^2-\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left(\frac{1}{P}\frac{\partial^2}{\partial p^2}P+\frac{2}{pP}\frac{\partial}{\partial p}P\right)-\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{\partial}{\partial p}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right)=\frac{(l+1)}{p^2}, \tag{4.2.9}$$

$$-\frac{1}{\boxminus}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}-\frac{1}{\boxminus}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\left(l+1\right). \tag{4.2.10}$$

En fasant le changement de variable suivant

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\sqrt{\beta}p\right),p^2=\frac{1}{\beta}\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right).$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial p}=\frac{1}{\left(1+\beta p^2\right)}\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial^2}{\partial p^2}=\frac{-\beta p}{\left(1+\beta p^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\left(1+\beta p^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}, \tag{4.2.11}$$

alors (4.2.11)pent étre écrite sons:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta}\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)^2\left(\frac{1}{P}\left(\frac{-\beta p}{\left(1+\beta p^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\left(1+\beta p^2\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)P+\frac{2}{pP}\left(\frac{1}{\left(1+\beta p^2\right)}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)P\right)\\
&-\left(2\beta\lambda^2\left(1+\beta p^2\right)p\frac{1}{\left(1+\beta p^2\right)}\frac{\partial}{\partial\rho}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right)\\
=\;&\frac{\beta l\left(l+1\right)}{\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}\ , \qquad (4.2.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{P}{\beta}\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\lambda\left(\left(-\beta p\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)P+\frac{2}{p}\left(\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\right)P\right)\\
&-\left(2\beta\lambda^2 p\frac{\partial}{\partial\rho}+2\lambda\left(1+\beta p^2\right)-\varsigma\right)P\\
=\;&\frac{P\beta l\left(l+1\right)}{\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}, \qquad (4.2.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{P}{\beta}\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)-\lambda\left(\left(-\beta p\frac{\partial P}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2}\right)+\frac{2}{p}\left(\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)\right)\\
&-\left(2\beta\lambda^2 p\frac{\partial P}{\partial\rho}+2\lambda P\left(1+\beta p^2\right)-P\varsigma\right)\\
=\;&\frac{P\beta l\left(l+1\right)}{\tan^2\left(\sqrt{\beta}\rho\right)}, \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

l'équation différentielle pour la fonction $\boxminus$ est donnée par:

$$\frac{1}{\boxminus}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\boxminus}{\partial\theta}+\frac{1}{\boxminus}\frac{\partial^2\boxminus}{\partial\theta^2}-\left[\frac{m^2}{\sin^2\theta}+^{(l+1)}\right]=0. \qquad (4.2.15)$$

les solutions de l'équation différentielle (4.2.13) sont appelées les fonctions toroïdales.harmoniques sphériques Ils sont équivalents (sous une transformation de coordonnées) aux fonctions de Legendre. En particulier:

$$p_l^m\left(\cos\theta\right), Q_l^m\left(\sin\theta\right).$$

La solution générale de l'équation;

$$\Psi\left(p,\theta,\varphi\right)=P\left(\rho\right)\boxminus\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right)=P\left(p\right)p_l^m\left(\cos\theta\right)e^{im\varphi}.$$

5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les outils fondamentaux formalisme de la mécanique quantique non relativiste en présence d'une langueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude d'Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme suivante $\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}\left\{\left(1+\beta\hat{P}^2\right)+\beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\right\}$, ce qui conduits à une algèbre non commutative des opérateurs de position $\left(\left[\hat{X}_i, \hat{X}_j\right] \neq 0\right)$ .Les nouveaux opérateurs de position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des anciens opérateurs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_j$ satisfaisant aux relations de commutation canonique de la mécanique quantique ordinaire Les représentations la plus utilisée dans la littérature $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ ont été explicitement aux introductions générales ; il a été mentionné que le choix d'une représentation n'a pas d'effet sur les observables physique, quoique l'espace des impulsions soit le plus approprié pour résoudre quel problème aux valeurs propres pour montrer comment incorporer la langueur minimale dans l'équation de Shrodinger et extraire le spectre d'énergie, deux exemples simples ont été donnés, à savoir le potentiel delta de Dirac à une et deux dimension ,qui a été traités exactement dans l'espace des impulsions.

Et nous avons appliqué sur quelque équation en l'occurrence celles de schrodinger, Dirac et Klein-Gordon . Nous avons pour obtenir des corrections des niveaux d'énergie que dépend du paramètre de la déformation β .

Dans certains cas nous sommes arrivés à dériver des solutions exactes des fonctions d'ondes

47

Bibliographie

[1] Achim kempf et H.Hinrichsen ,J.math. phys. 37 2121-2137 (1996).

[2] A.kempf,J.phys.A:Math.Gen.30,2093 (1997).

[3] Achim kempf ,Gianpiero Mangano,etRoberte B.Mann,Phys.Rev.D 52,1108.

[4] H.Hinrichsen et A.kempf J.math. phys.Rev.D55,7909(1997) .

[5] U.Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher et H. Stoecker, Proceeding of the Nuclear Physics, Winter Meeting , Bormio, Italy; e-print arXiv:hep-ph/0404205 (2004).

[6] U.Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher et H. Stoecker,Phys. Lett.B584, 109 (2004).

[7] K.Gttfried, Quantum mechanics, Vol.1:fundamentale, (Academic Press Inc, New Yor,), p213.(996)

[8] A.kempf,J .math. phys. 35, 4483 (1994).

[9] L.N.Chang, D. Minic, N.Okamura, et T. Takeuchi, Phys .Rev. D65 , 125027 (2002) .

[10] Kh. Nouicer, J . Math. Phys. A: Math. Gen. 39,5125 (2006) .

[11] F.Brau, J. Phys. A : Math . Gen. 32, 7691 (1999).

[12] H.Hinrichsen et A.kempf J.math. phys.Rev. D 37 2121-2137 (1996).

[13] L.N.Chang, D. Minic, N.Okamura, et T. Takeuchi, Phys .Rev. D65 , 125027 (2002) .

[14] R.Akhoury et Y.-P.Yao, Phys. Lett. B 572,37-42 (2003).

[15] S.Z Benczik , Investigation on the miniml -length uncertainty relation, PhD Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Poytechnic Institute et State University (2007).

[16] M.M.Stetsko et V.M.Tkachuk , Phys .Rev. A 74, 012101(2006).

[17] S.Benczik,L.N. Chang , D. Minic, et T. Takeuchi, Phys . Rev . A 72, 012104(2005).

[18] M.M.Stetsko, Phys . Rev . A 74, 062105 (2006).

[19] I. S. Gradshteyn et I.M.Ryzhik, Tables of Intgrals, Series, et Products, Corrected et Enlarged Edition (Academic Press , Inc, New York,),p.844, p.1038 (1998).

[20] Kh. Nouicer et D. Bouaziz,Acte des Journées Scientifiques Algéro-Françaises en Physique Théorique et Mathématique,Publication de l'Université de Haute Alsace ,p28(2006)

[21] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, et V. M. Tkachuk, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 2143(2006).

[22] A . Kempf, J. Phys. A 30, 2093 , et references therein (1997).

[23] I. S. Gradshteyn et I . M. Ryzhik, Table of Intgrals, Series, et Products, Corrected et Enlarged Edition (Academic Press , Inc, New York,1980).

[24] T. Udem et al. ,Phys. Rev. Lett. 79, 2646 (1997).

[25] R. K. Su, Z.Yuhong, J. Math, Phys. A 17 (1984) 851.

[26] H. Gali'c, Am . J . Phys, 56 (1988) 312 (1988).

[27] I.S. Gradshteyn, I.M . Ryzhik. Table of Intgrals, Series, et Products, Corrected et Enlarged Edition (Academic Press , Inc, New York,2000).

[28] L.Menculini, O.Panella et P.Roy, Phys. Rev. D,87, 065017, (2013).

[29] A.kempf,J.Math..phys.35,44832093 (1994).

[30] H.Hinrichsen et A.kempf J.math. phys..D37,2121,(1996) .

[31] T.K.Jana et P. Roy, Phys. Lett. A, 373, 1239-1241 (2009).

Annexe