



**UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA**
Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse Numérique

Par : GUENAOUA Maroua

Thème

Homogénéisation des plaques hétérogènes en piézoélectricité

Soutenu publiquement le : 05/ 09/ 2018

Devant le jury composé de :

Merabet Ismail	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
Bensayah Abdallah	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Ghezal Abderrazek	M.C.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examineur
Chacha Djamel Ahmed	Prof. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur
Tebib Hawa	D. Université KASDI Merbah- Ouargla	Co-Rapporteur



DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :
Mes chers parents qui ont tout fait pour que je réussisse dans ma vie, que
Dieu me les protège.
"Merci maman * *Merci papa"*
Mes frères, mes sœurs et leurs enfants
Tous mes amis surtout
Nadjet Aicha* Sarah* Khiera* Hind* Yasmine* Wafaa*
Mes collègues des mathématiques
Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez
m'excuser.

Maroua

REMERCIEMENT

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens tout a remercier premier lieu mon encadreur Monsieur **Chacha Djamal Ahmed** professeur au département de mathématiques de l'Université de Ouargla de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, .

Je remercie aussi mademoiselle **Hawa Tebib** Doctorante de l'Université de Ouargla, Je voudrai le remercier pour sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail. Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne de près ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Dédication	i
Remerciement	ii
Notations et Prémilitaires	vi
Introduction	1
1 Homogénéisation du problème ($P^{\varepsilon\eta}$) d'une plaque piézoélectrique hétérogène (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$)	2
1.1 Mise en équations. Hypothèses. Notations	3
1.2 Cadre fonctionnel. Existence et unicité de la solution	6
1.3 Homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques	8
1.4 Équations homogénéisées. Caractéristiques physiques homogénéisées	12
1.4.1 Résolution du premier système	12
1.4.2 Résolution du deuxième système	13
1.4.3 Résolution du troisième système	15
1.5 Les propriétés du problème homogénéisé	17
1.5.1 Les propriétés du tenseur d'élasticité homogénéisé	17
1.5.2 Les propriétés du tenseur de diélectricité homogénéisé	20
1.5.3 Les propriétés du tenseur de piézoélectricité homogénéisé	20
2 Analyse asymptotique du problème ($P^{H\eta}$) de la plaque piézoélectrique homogénéisé (lorsque $\eta \downarrow 0$)	21

2.1	Le modèle de plaque piézoélectrique en trois dimensions sur Ω^n	22
2.1.1	Géométrie du domaine	22
2.1.2	Définition de la configuration d'une plaque piézoélectrique	22
2.2	Description du problème	23
2.2.1	Le problème (P^n)	23
2.2.2	Le problème variationnel dans Ω^n	24
2.2.3	Théorème d'existence et d'unicité du problème homogénéisé	25
2.3	Analyse asymptotique	26
2.3.1	Le problème variationnel sur le domaine fixe Ω	26
2.3.2	Analyse de $(P(\eta))$ par la méthode de convergence	28
2.4	Le modèle de plaque piézoélectrique en deux dimensions sur ω	37
	Conclusion	42
3	Annexe A	43
4	Annex B	46

TABLE DES FIGURES

1.1	la cellule de base $\mathbf{Y} = [0, \mathbf{Y}_1] \times [0, \mathbf{Y}_2] \times [0, \mathbf{Y}_3]$	8
1.2	Homogénéisation d'une plaque périodique hétérogène et cellule de base modélisée comme une plaque mince	17
2.1	plaque piézoélectrique en trois dimensions sur Ω^n	23

NOTATIONS ET CONVENTIONS

On utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés ; les indices ou exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1; 2; 3\}$ tandis que les indices grecs prennent, à l'exception de ε , leurs valeurs dans l'ensemble $\{1; 2\}$.

- ε Un petit paramètre positif caractérisant la taille de la période .
- η Un petit paramètre positif caractérisant la demi-épaisseur de la plaque.
- $x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x = (x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, x_3^\varepsilon) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$ Un point arbitraire de Ω^ε .
- $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ La dérivée par rapport à x_i .
- $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$ La dérivée par rapport à x_i^ε .
- e_i Les vecteurs unitaires des axes.
- δ_{ij} Symbole de Kronecker.
- $L^2(\Omega)$ Espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx.

INTRODUCTION

La piézoélectricité peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes électromécaniques qui couplent les champs élastique et électrique. Une déformation mécanique du matériau génère un champ électrique, c'est l'effet direct de la piézoélectricité ou effet capteur. Inversement, l'application d'un champ électrique ou d'une différence de potentiel induit des déformations mécaniques, c'est l'effet inverse de piézoélectricité ou effet actionneur.

Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en [1819], l'effet de la piézoélectricité n'a été correctement expliqué qu'en [1880] par les frères Jacques et Pierre Curie (par expérimentation sur le quartz et le sel de Rochelle). La loi de comportement de ce type de matériaux a été établie par Lippmann [1881] en se basant sur des considérations thermodynamiques.

Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés, on trouve le briquet, le Capteur de pression piézoélectrique, les moteurs et actionneurs piézoélectriques.

Ce mémoire reprend un travail effectué durant mon circuit d'études de Master 2 en " Analyse numérique et modélisation". Elle est contenue dans deux chapitres. Dans le premier chapitre nous transformons d'abord le problème ($P^{\varepsilon\eta}$) de la plaque piézoélectrique hétérogène anisotrope tridimensionnelle, à un problème équivalent homogénéisée. En utilisons la méthode de développement asymptotique. Ce travail se base sur les travaux réalisés dans [1], [5] et [6].

En suite, dans la deuxième chapitre nous rappelons le modèle de la plaque piézoélectrique en trois dimensions, pour une plaque mince non-isotrope hétérogène. Nous partons des résultats du chapitre précédent, pour étudier la limite de l'état électromécanique lorsque la taille de l'épaisseur tend vers zéro, ceci nous permet d'obtenir le problème de plaque membranaire et en flexion. Ce travail se base sur les travaux réalisés dans [7].

**HOMOGENÉISATION DU PROBLÈME
($P^{\varepsilon\eta}$) D'UNE PLAQUE
PIÉZOÉLECTRIQUE HÉTÉROGÈNE
(LORSQUE $\varepsilon \downarrow 0$)**

CADRE PHYSIQUE

On suppose que la variation de température et du champ magnétique sont négligeables. Cette hypothèse est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques utilisés habituellement comme les céramiques, les polymères et les piézo-composites, donc cela signifie que l'on dispose uniquement d'un couplage électro-mécanique.

On se place dans le cadre de la piézoélectricité en petites déformations et on choisit de formuler le problème en deux inconnues : le déplacement mécanique et le potentiel électrique .

On suppose que le milieu est :

- soumis à une densité de force volumique f dans Ω ,
- soumis à une densité surfacique de force g agissant sur la face supérieure et inférieure de la plaque Γ_{\pm} ,
- encastré sur la face latérale de la plaque Γ_0 ,
- soumis à un potentiel fixé $\varphi_0 = 0$ sur le bord $\partial\Omega$.

1.1 MISE EN ÉQUATIONS. HYPOTHÈSES. NOTATIONS

L'homogénéisation de structures périodiques formées de composants piézoélectriques apparaît comme un passage obligé dans l'étude que nous menons.

Dans toute la suite, la géométrie des composites considérés sera supposée périodique. Afin de simplifier les notations, on va omettre le paramètre η dans les équations de ce chapitre.

On va considérer que le milieu piézoélectrique occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ " suffisamment régulière " ¹. Notons $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement le champ de déplacement élastique et le potentiel électrique.

On note par $\mathbf{X} = (x_{ijkl})$, $\mathbf{Y} = (y_{jkh})$, $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ des tenseurs respectivement d'ordre 4, 3 et 2, et par $\langle F \rangle$ la moyenne sur \mathbf{Y} d'une fonction F c-à-d :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} F dy,$$

et on introduit les espaces suivants :

$$H_p^1(\mathbf{Y}, \mathbb{R}) = \{v \in H^1(\mathbf{Y}) \text{ telle que } v \text{ est } Y - \text{périodique}\},$$

$$H_p^1(\mathbf{Y}, \mathbb{R}^3) = \{v = v_i \in H^1(\mathbf{Y}) \text{ telle que } v \text{ est } Y - \text{périodique}\},$$

1. Par exemple, $\partial\Omega$ est une surface de \mathbb{R}^3 de classe C^1

Les équations d'équilibre piézoélectrique sont :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij})(u, \varphi) = f_i, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(D_i)(u, \varphi) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Les lois de comportement

$$\sigma_{ij}(u, \varphi) = C_{ijkl}e_{kl}(u) - P_{kij}E_k(\varphi), \quad (1.2)$$

$$D_i(u, \varphi) = P_{ikl}e_{kl}(u) + \epsilon_{ik}E_k(\varphi), \quad (1.3)$$

et les relations

$$\begin{cases} e_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right), \\ E_k(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \end{cases} \quad (1.4)$$

- σ : tenseur des contraintes.
- u : vecteur déplacement.
- f : densité volumique de forces dans Ω .
- E : vecteur champ électrique.
- D : vecteur de déplacement électrique.
- φ : potentiel électrique.

Les coefficients C_{ijkl} (élastiques), P_{ijk} (piézoélectriques) et ϵ_{ij} (diélectriques) vérifient les hypothèses suivantes :

De symétrie :

$$\begin{cases} C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \\ P_{ijk} = P_{ikj}, \\ \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}. \end{cases} \quad (1.5)$$

De positivité :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0 \quad C_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} > \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in M_s^3, \\ \exists \beta > 0 \quad \epsilon_{ij}\theta_i\theta_j > \beta|\theta|^2 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.6)$$

M_s^3 étant l'espace des matrices 3×3 symétriques.

De bornitude :

$$C_{ijkl}; P_{ijk} \text{ et } \epsilon_{ij} \text{ sont dans } L^\infty{}^2. \quad (1.7)$$

En tenant compte des relations (1.2), (1.3) et (1.4), le système (1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = f_i, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

En plus, on considère les **conditions aux limites mixtes** suivantes :

$$\begin{cases} u = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}(u, \varphi) \nu_j = g_i, & \text{sur } \Gamma_\pm, \\ \varphi = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \cup (\Gamma_\pm). \end{cases} \quad (1.9)$$

2. $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$; $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$

1.2 CADRE FONCTIONNEL. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathbf{V} = \{v \in (H^1(\Omega))^3; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$\Psi = \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega = (\Gamma_0 \cup (\Gamma_{\pm}))\}.$$

Le produit $\mathbf{V} \times \Psi$ est un espace de Hilbert. Soient (v, ψ) dans $\mathbf{V} \times \Psi$ où $v = (v_i)$. En multipliant la première équation de (1.8) par v et la deuxième par ψ et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i dx &= \int_{\Omega} f_i v_i dx, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \psi dx &= 0. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux expressions et en appliquant la formule de Green³ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i \nu_j d\sigma \\ - \int_{\Omega} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \psi \nu_j d\sigma \\ = \int_{\Omega} f_i v_i dx. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(v) - \int_{\Omega} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i d\sigma \\ = \int_{\Omega} f_i v_i dx. \end{aligned}$$

Le problème variationnel se formule ainsi

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \varphi) \in \mathbf{V} \times \Psi & \text{tel que} \\ a((u, \varphi); (v, \psi)) = L(v, \psi), & \forall (v, \psi) \in \mathbf{V} \times \Psi. \end{cases} \quad (1.10)$$

3. Voir Annexe A

Avec la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}((u, \varphi); (v, \psi)) &= \int_{\Omega} [C_{ijkl} e_{kl}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(v) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} [P_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \, dx, \end{aligned}$$

et la forme linéaire :

$$L(v, \psi) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g_i v_i \, d\sigma.$$

■ **Lemme 1.2.1** *Sous les hypothèses (1.5), (1.6), et (1.7), le problème (1.8) admet une solution faible unique.*

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution faible de le problème (1.8) découle de l'application du lemme de Lax-Milgram⁴. En utilisant les hypothèses $f_i \in (L_2(\Omega))^3$, $g_i \in (L_2(\Gamma_{\pm}))^3$.

Il est facile de montrer que $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathbf{V} \times \Psi$.

Il reste à montrer la coercivité de la forme bilinéaire $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}((v, \psi); (v, \psi)) &= \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(v) + P_{kij} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}] e_{ij}(v) - \int_{\Omega} [P_{jkl} e_{kl}(v) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}] \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \, dx, \\ &= \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(v) e_{ij}(v) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}] \, dx, \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 + \beta \|\psi\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

■

4. Voir Annexe A

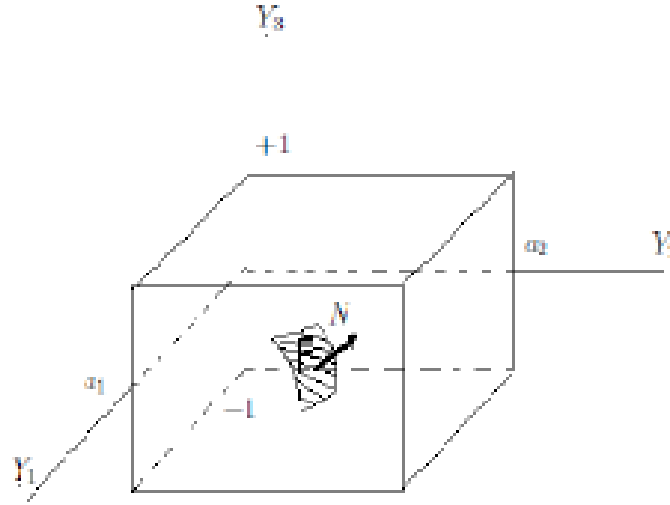


FIGURE 1.1 – la cellule de base $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$

1.3 HOMOGENÉISATION PAR LA MÉTHODE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

La technique d’homogénéisation que nous allons développer ici, utilise les idées de la méthode des échelles multiples et les techniques relatives aux équations aux dérivées partielles. L’hypothèse fondamentale, consiste à postuler que la structure du milieu est périodique, la période étant “petite” par rapport aux dimensions du milieu. Autrement dit, les valeurs des coefficients qui caractérisent le milieu, se reproduisent par déplacement périodique de petite échelle ε , $0 < \varepsilon < 1$.

On suppose donc que la structure du matériau est caractérisée par des coefficients C_{ijkl} , P_{ijk} et ϵ_{ij} présentant un caractère périodique en x . De manière plus précise, soit $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$ la cellule de base et soient les fonctions $C_{ijkl}(x, y)$, $P_{ijk}(x, y)$ et $\epsilon_{ij}(x, y)$ définies sur la période de base Y . On suppose que ces fonctions satisfont à (1.6) et (1.7).

Soit un scalaire $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0. Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$, ces fonctions deviennent :

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x, y) = C_{ijkl}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad P_{ijk}^\varepsilon(x, y) = P_{ijk}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \epsilon_{ij}^\varepsilon(x, y) = \epsilon_{ij}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1.11)$$

Les fonctions C_{ijkl}^ε , P_{ijk}^ε et $\epsilon_{ij}^\varepsilon$ sont Y -périodiques⁵.

5. Une fonction est dite Y -périodique si ses traces sur les faces opposées de Y sont égales.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème hétérogène se formule ainsi :

$$(P^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(u^\varepsilon) + P_{kij}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] = f_i, \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[P_{jkl}^\varepsilon e_{kl}(u^\varepsilon) - \varepsilon_{jk}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon, \\ \left[C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(u^\varepsilon) + P_{kij}^\varepsilon \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \nu_j^\varepsilon = g_i^\varepsilon, \quad \text{sur} \quad \Gamma_\pm, \\ u^\varepsilon = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \varphi^\varepsilon = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Ce problème admet une solution faible unique $(u^\varepsilon; \varphi^\varepsilon)$, par application de lemme du Lax-Milgram⁶.

Pour déterminer un problème homogène équivalent à (1.12), on cherchera u^ε et φ^ε sous la forme de développements asymptotiques à double échelle :

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots + \varepsilon^k u^k(x, y) + \dots \quad (1.13)$$

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y) + \dots + \varepsilon^k \varphi^k(x, y) + \dots \quad (1.14)$$

où $y = \frac{x}{\varepsilon}$ et les fonctions u^k et φ^k sont Y -périodiques par rapport à la variable y . $\forall k \in \mathbb{N}$.

On utilise la règle de dérivation :

Soit $\Phi(x) = \Phi(x; \frac{x}{\varepsilon}) = \Phi(x; y)$,

$$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1.15)$$

et par conséquent

$$e_{ij}(\Phi^\varepsilon(x)) = e_{ijx}(\Phi(x, y)) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(\Phi(x, y)) \quad (1.16)$$

En tenant compte de ce qui précède, le système (1.12) devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkl}(x, y) \left(e_{klx} + \frac{1}{\varepsilon} e_{kly} \right) (u^0 + u^1 + \dots) + P_{kij}(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (\varphi^0 + \varphi^1 + \dots) \right] + \\ & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl}(x, y) \left(e_{klx} + \frac{1}{\varepsilon} e_{kly} \right) (u^0 + u^1 + \dots) + P_{kij}(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) (\varphi^0 + \varphi^1 + \dots) \right] = f_i, \end{aligned} \quad (1.17)$$

6. Voir annexe A

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl}(x, y)(e_{klx} + \frac{1}{\varepsilon} e_{kly})(u^0 + u^1 + \dots) - \epsilon_{jk}(x, y)(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_k})(\varphi^0 + \varphi^1 + \dots)] + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}(x, y)(e_{klx} + \frac{1}{\varepsilon} e_{kly})(u^0 + u^1 + \dots) - \epsilon_{jk}(x, y)(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_k})(\varphi^0 + \varphi^1 + \dots)] = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

par identification des puissances de ε , on obtient :

A l'ordre ε^{-2} :

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0, \quad (1.19)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0. \quad (1.20)$$

A l'ordre ε^{-1} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] + \\ & - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{klx}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

A l'ordre ε^0 :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^2) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \\ & -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = f_i, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{klx}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl}e_{klx}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Les problèmes ci-dessus s'énoncent ainsi

Premier système : Trouver $(u^0, \varphi^0) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(Y, \mathbb{R})$ solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0, \\ u^0 \text{ et } \varphi^0 \text{ sont } Y - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Deuxième système : Trouver $(u^1, \varphi^1) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(Y, \mathbb{R})$ solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] + \\ - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] + \\ + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{klx}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0, \\ u^1 \text{ et } \varphi^1 \text{ sont } Y - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Troisième système : Trouver $(u^2, \varphi^2) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(Y, \mathbb{R})$ solutions de :

$$\begin{cases} - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^2) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = f_i, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{klx}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{klx}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0, \\ u^2 \text{ et } \varphi^2 \text{ sont } Y - \text{périodiques.} \end{cases} \quad (1.27)$$

1.4 ÉQUATIONS HOMOGENÉISÉES. CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES HOMOGENÉISÉES

1.4.1 Résolution du premier système

On utilise le Lemme suivant :

Lemme 1.4.1 Soit F une fonction de carré intégrable sur Y . On considère le problème aux limites :

$$\begin{cases} A\Phi = F \text{ sur } Y \\ \Phi Y - \text{périodique}; F \in L^2(Y). \end{cases}$$

Où A^7 est un opérateur aux dérivées partielles du deuxième ordre linéaire.

Alors on a :

- ▶ La solution périodique Φ existe si et seulement si $\langle F \rangle = 0$.
- ▶ De plus si la solution faible existe, elle est unique à une constante additive près.

Tout d'abord, notons que le premier système nous donne l'indépendance de la solution (u^0, φ^0) de la variable microscopique y :

$$u^0(x, y) = u(x) \quad (1.28)$$

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x) \quad (1.29)$$

En effet, d'après l'alternative de Fredholm, la solution de ce système existe à une constante additive près.

Si on multiplie la première équation par u^0 et la deuxième équation par φ^0 et on intègre sur Y , on obtient :

$$\begin{cases} \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \cdot u_i^0 dy = 0, \\ - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \cdot \varphi^0 dy = 0. \end{cases}$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte de la périodicité des fonctions on obtient :

$$\int_Y [C_{ijkl} e_{kly}(u^0) e_{ijy}(u^0) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0.$$

7. $A = -\frac{\partial}{\partial y_i} [a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j}]$

On utilise l'ellipticité des coefficients $C_{ijkl}(x, y)$ et $\epsilon_{jk}(x, y)$, on obtient :

$$0 \geq \alpha \sum_{kl=1}^3 \|e_{kly}(u^0)\| + \beta \left\| \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j} \right\|,$$

d'où

$$e_{kly}(u^0) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k} = 0.$$

Et par conséquent

$$u^0(x, y) = u(x), \quad (1.30)$$

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x). \quad (1.31)$$

1.4.2 Résolution du deuxième système

En tenant compte de (1.30) et (1.31), le deuxième système (1.26) devient :
Trouver $(u^2, \varphi^2) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(Y, \mathbb{R})$ solutions de :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}], \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{klx}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}]. \end{cases} \quad (1.32)$$

En appliquant l'opérateur $\langle \rangle$ (moyenne) aux deux seconds membres et en tenant compte de la périodicité on obtient

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(u) + P_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0,$$

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}e_{klx}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0.$$

Et donc d'après le lemme de Fredholm on a l'existence et l'unicité de la solution faible à une constante additive près. Grâce à la linéarité du problème (1.32) on peut mettre u^1 et φ^1 sous la forme :

$$u_k^1(x, y) = \chi_k^{mn}(y)e_{mnx}(u) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}, \quad (1.33)$$

$$\varphi^1(x, y) = \Psi^{mn}(y)e_{mnx}(u) + \mathcal{R}^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}. \quad (1.34)$$

Où χ^{mn} , Φ^m , Ψ^{mn} et \mathcal{R}^m sont des fonctions périodiques solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(\mathbf{y})(e_{kly}(\chi^{mn})e_{mnx}(u) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}) + \\ P_{kij}(\mathbf{y})(e_{mnx}(u) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \mathcal{R}^m}{\partial y_k})] = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijmn}e_{mnx}(u) + P_{mij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}], \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl}(e_{mnx}(u)e_{kly}(\chi^{mn}) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} e_{kly}(\Phi^m)) \\ -\epsilon_{jk}(e_{mnx}(u) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \mathcal{R}^m}{\partial y_k})] = \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jmn}e_{mnx}(u) - \epsilon_{jm} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}]. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

En multipliant les deux équations ci-dessus par la fonction test $v = (v_i) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3)$, en intégrant sur Y , en appliquant la formule de Green et en tenant compte de la condition de périodicité on obtient les problèmes cellulaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (C_{ijkl}(\mathbf{y})e_{kly}(\chi^{mn}) + P_{kij}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} + C_{ijmn})e_{ijy}(v) \, d\mathbf{y} = 0, \\ \forall v \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3), \end{array} \right. \quad (1.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (P_{jkl}(\mathbf{y})e_{kly}(\chi^{mn}) - \epsilon_{jk}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} + P_{jmn}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \, d\mathbf{y} = 0, \\ \forall w \in H_p^1(Y, \mathbb{R}), \end{array} \right. \quad (1.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (C_{ijkl}(\mathbf{y})e_{kly}(\Phi^m) + P_{kij}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathcal{R}^m}{\partial y_k} + P_{mij})e_{ijy}(v) \, d\mathbf{y} = 0, \\ \forall v \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3), \end{array} \right. \quad (1.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (\epsilon_{jm}(\mathbf{y}) - P_{jkl}(\mathbf{y})e_{kly}(\Phi^m) + \epsilon_{jk}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathcal{R}^m(\mathbf{y})}{\partial y_k} + P_{mij}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \, d\mathbf{y} = 0, \\ \forall w \in H_p^1(Y, \mathbb{R}), \end{array} \right. \quad (1.39)$$

1.4.3 Résolution du troisième système

Le troisième système s'écrit sous la forme : Trouver $(u^2, \varphi^2) \in H_p^1(Y, \mathbb{R}^3) \times H_p^1(Y, \mathbb{R})$ solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^2) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + f_i, \\ \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{kly}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y_j} [P_{jkl} e_{klx}(u^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} [P_{jkl} e_{klx}(u^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}], \\ \\ u^2 \text{ et } \varphi^2 \text{ sont } Y - \text{périodiques.} \end{array} \right. \quad (1.40)$$

D'après le lemme de Fredholm ce système admet une solution périodique si les deux seconds membres ont des moyennes nulles. Ainsi la moyenne de la première équation donne :

$$\int_Y \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(u^1) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(u^0) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + f_i \right) dy = 0,$$

en remplaçant u^1 et φ^1 par leurs expressions on a :

$$\int_Y \left[(C_{ijmn}(y) e_{mny}(\chi^{kl}(y)) + P_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}}{\partial y_m}(y) + C_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \right. \\ \left. + (P_{mij}(y) \frac{\partial \mathcal{R}^k}{\partial y_m} + C_{ijmn} \frac{\partial \Phi_m^k}{\partial y_n} + P_{kij}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + f_i \right] dy = 0,$$

alors

$$C_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} + P_{kij}^H \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial x_j \partial x_k} + f_i = 0,$$

avec

$$C_{ijkl}^H = \int_Y (C_{ijmn}(y) e_{mny}(\chi^{kl}(y)) + P_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}}{\partial y_m}(y) + C_{ijkl}) dy, \quad (1.41)$$

$$P_{kij}^H = \int_Y (P_{mij}(y) \frac{\partial \mathcal{R}^k}{\partial y_m} + C_{ijmn} \frac{\partial \Phi_m^k}{\partial y_n} + P_{kij}) dy, \quad (1.42)$$

où

C_{ijkl}^H : tenseur élastique homogénéisé.

P_{kij}^H : tenseur piézoélectrique homogénéisé.

On applique l'opérateur moyenne a la deuxième équation de (1.40) et en remplaçant u^1 et φ^1 par leurs expressions de la même manière on obtient :

$$P_{jmn}^H \frac{\partial^2 u_m^h}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^H \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial x_j \partial x_m} = 0,$$

où

$$\epsilon_{jm}^H = \int_Y (\epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \mathcal{R}^m}{\partial y_k} - P_{jkl}(y) e_{kly}(\Phi^m) + \epsilon_{jm}(y)) dy, \quad (1.43)$$

$$P_{jmn}^H = \int_Y (P_{jkl}(y) e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} + P_{jmn}(y)) dy, \quad (1.44)$$

avec

ϵ_{jm}^H : est le tenseur diélectrique homogénéisé.

Les équations piézoélectriques homogénéisées s'écrivent donc :

$$(P^H) \begin{cases} C_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_k^h}{\partial x_j \partial x_l} + P_{kij}^H \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial x_j \partial x_k} + f_i = 0, & \text{dans } \Omega, \\ P_{jmn}^H \frac{\partial^2 u_m^h}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^H \frac{\partial^2 \varphi^h}{\partial x_j \partial x_m} = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour Les conditions aux limites du problème homogénéisé de type Dirichlet se déduisent facilement des conditions aux limites de même type du problème hétérogène et sont donc telles que :

$$\begin{cases} u^h = 0, & \text{sur } \Gamma_0, \\ \varphi^h = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} u^h = u^0 = u, \\ \varphi^h = \varphi^0 = \varphi. \end{cases}$$

La deuxième condition aux bord de type Neumann $\sigma_{ij} \nu_j = g_i$ sur Γ_{\pm} , or σ_{ij}^0 dépend de (x, y) ce qui pose un problème de couche limite.

On peut résoudre ce problème en prenant $\tau_{ij} \nu_j = g_i$ sur Γ_{\pm} , avec $\langle \sigma_{ij} \rangle = \tau_{ij}$.

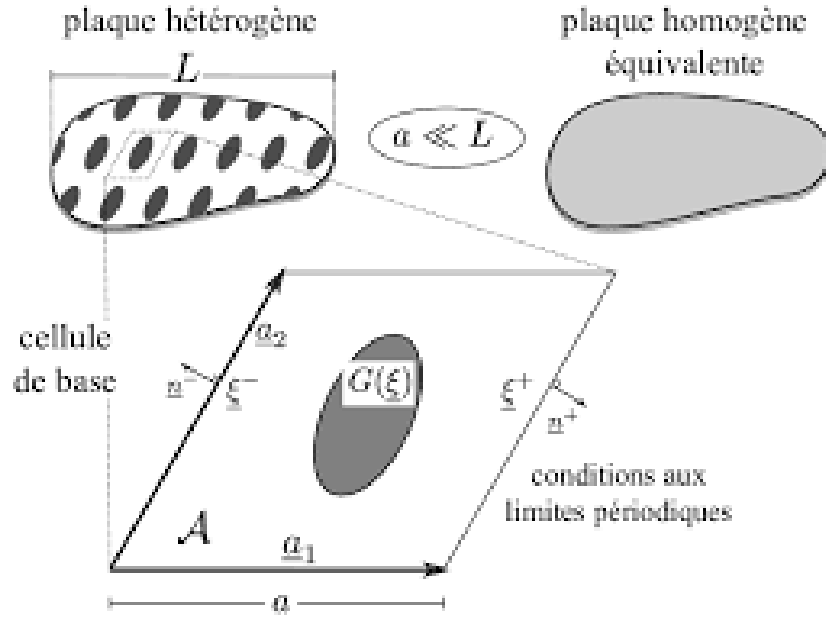


FIGURE 1.2 – Homogénéisation d’une plaque périodique hétérogène et cellule de base modélisée comme une plaque mince

1.5 LES PROPRIÉTÉS DU PROBLÈME HOMOGENÉISÉ

Enonçons maintenant quelques propositions concernant certaines propriétés des coefficients homogénéisés C_{ijkl}^H , P_{kij}^H , ϵ_{jm}^H et P_{jmn}^H .

1.5.1 Les propriétés du tenseur d’élasticité homogénéisé

Nous allons à présent donner un résultat concernant l’ellipticité et la symétrie du tenseur de rigidité homogénéisé.

Proposition 1.5.1 *Les coefficients C_{ijkl}^H du tenseur de rigidité homogénéisé $\mathcal{C}^H = (C_{ijkl}^H)$ défini par (1.41), vérifient :*

$$(i) \quad C_{ijkl}^H = C_{jikl}^H = C_{ijlk}^H = C_{klij}^H, \quad \forall 1 \leq i, j, k, l \leq 3,$$

(ii) C_{ijkl}^H est elliptique.

La deuxième assertion signifie qu’il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout tenseur d’ordre (2) χ_{ij} symétrique ($\chi_{ij} = \chi_{ji}$), on a :

$$C_{ijkl}^H \chi_{kl} \chi_{ij} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^3 (\chi_{ij})^2.$$

Preuve.**(i) Symétrie :**

Il est évident qu'une partie de la symétrie est vérifiée, c'est

$$C_{ijmn}^H = C_{jimn}^H = C_{ijnm}^H.$$

Intéressons-nous à la démonstration de :

$$C_{ijmn}^H = C_{mnij}^H.$$

L'idée est de transformer l'expression de C_{ijmn}^H de manière à obtenir une formule symétrique. Si on définit un tenseur Σ d'ordre 2, par :

$$\Sigma^{kl} = \frac{1}{2}(y_k \vec{e}_l + y_l \vec{e}_k),$$

ainsi qu'une matrice H^{kl} de dimension 3×3 par : $H^{kl} = e_{ijy}(\Sigma^{kl})$, il est clair que les coefficients de cette matrice sont donnés par :

$$[H^{kl}]_{mh} = \tau_{mh}^{kl} = \frac{1}{2}[\delta_{km}\delta_{lh} + \delta_{kh}\delta_{lm}] \quad 1 \leq k, l, m, h \leq 3.$$

A partir de ces nouvelles notations on peut réécrire les problèmes (1.36) et (1.37), sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{ijkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) + P_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \right\} = 0, \text{ dans } Y, \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ -P_{jkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \right\} = 0, \text{ dans } Y, \\ W^{mn}, \Psi^{mn} \end{array} \right. \quad Y - \text{périodiques.} \quad (1.46)$$

Soit (W^{mn}, Ψ^{mn}) solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ C_{kj pq} e_{pqy} (\Sigma^{ij} + W^{ij}) + P_{pkj} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} \right\} = 0, \text{ dans } Y, \\ -\frac{\partial}{\partial y_k} \left\{ -P_{kpq} e_{pqy} (\Sigma^{ij} + W^{ij}) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_j} \right\} = 0, \text{ dans } Y, \\ W^{ij}, \Psi^{ij} \end{array} \right. \quad Y - \text{périodiques.} \quad (1.47)$$

Les coefficients du tenseur de rigidité se réécrivent de la manière suivante :

$$C_{ijmn}^h = \int_Y C_{ijkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) dy + \int_Y P_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} dy, \quad (1.48)$$

La deuxième intégrale dans le membre de droite de l'expression (1.48), est évaluée de la manière suivante :

$$\int_Y P_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} dy = \int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \delta_{pi} \delta_{qj} dy,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} (\delta_{pi} \delta_{qj} + \delta_{pj} \delta_{qi}) dy, \\
&= - \int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} e_{pqy} (W^{ij}) dy \\
&+ \int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} e_{pqy} (W^{ij} + \Sigma^{ij}) dy. \tag{1.49}
\end{aligned}$$

En utilisant la formulation variationnel de la premier équation du problème (1.47), avec un choix de fonction test $v = W^{ij}$, on obtient :

$$\int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} e_{pqy} (W^{ij}) dy = \int_Y C_{pqkl} e_{pqy} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) e_{pkly} (W^{ij}) dy. \tag{1.50}$$

En multipliant la deuxième équation du problème (1.47), par Ψ^{mn} et en intégrant par parties, on aboutit à :

$$\int_Y P_{kpq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} e_{pqy} (\Sigma^{ij} + W^{ij}) dy = \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} dy. \tag{1.51}$$

En regroupant ces résultats et en utilisant la définition (1.48), on aboutit à :

$$\begin{aligned}
C_{ijmn}^H &= \int_Y C_{ijkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} dy + W^{mn}) dy + \int_Y P_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} dy, \\
&= \int_Y C_{ijkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) dy + \int_Y C_{pqkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) e_{pqy} (W^{ij}) dy \\
&+ \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} dy, \\
&= \int_Y C_{pqkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) e_{pqy} (\Sigma^{ij}) dy + \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} dy \\
&+ \int_Y C_{pqkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) e_{pqy} (W^{ij}) dy, \\
&= \int_Y C_{pqkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) e_{pqy} (\Sigma^{ij} + W^{ij}) dy + \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} dy. \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Il est alors immédiat par la formule (1.52), que les coefficients du tenseur de rigidité vérifient :

$$C_{ijmn}^H = C_{mnij}^H.$$

Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse à montrer l'ellipticité du tenseur d'élasticité homogénéisé.

(ii) Ellipticité :

En considérant l'expression (1.52) du tenseur C_{ijmn}^H , il s'en suit :

$$\begin{aligned}
C_{ijmn}^H \chi_{mn} \chi_{ij} &= \int_Y C_{pqkl} e_{kly} (\Sigma^{mn} + W^{mn}) \chi_{mn} e_{pqy} (\Sigma^{ij} + W^{ij}) \chi_{ij} dy + \\
&+ \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \chi_{mn} \frac{\partial \Psi^{ij}}{\partial y_p} \chi_{ij} dy, \\
&= \int_Y C_{pqkl} e_{kly}(\xi) e_{pqy}(\xi) dy + \int_Y \epsilon_{kp} \frac{\partial \eta}{\partial y_k} \frac{\partial \eta}{\partial y_p} dy, \\
&\geq \alpha \|e(\xi)\|_{H^1}^2 + \beta \left\| \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\|_{H^1}^2, \quad (L'ellipticité des C_{pqkl} et ϵ_{kp}) \\
&\geq \alpha' \|\xi\|_{H^1}^2 + \beta' \|\eta\|_{H^1}^2 \quad (L'inégalité de Korn et de Poincaré).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Alors le tenseur d'élasticité homogénéisé $C^H = (C_{ijkl}^H)$, est défini positif. ■

1.5.2 Les propriétés du tenseur de diélectricité homogénéisé

Nous allons à présent montrer une proposition concernant certaines propriétés d'ellipticité et de symétrie des coefficients du tenseur de diélectricité homogénéisé (ϵ_{ij}^H).

Proposition 1.5.2 Les coefficients ϵ_{ij}^H du tenseur de diélectricité homogénéisé (ϵ_{ij}^H), définis par (1.44), vérifient :

(i) $\epsilon_{ij}^H = \epsilon_{ji}^H$,

(ii) ϵ_{ij}^H est elliptique.

La dernière assertion signifie, qu'il existe $\alpha > 0$, tel que, pour tout vecteur χ_i , on a :

$$\epsilon_{ij}^H \chi_i \chi_j \geq \alpha \chi_i \chi_i.$$

Preuve. Voir. [5]. ■

1.5.3 Les propriétés du tenseur de piézoélectricité homogénéisé

Remarque 1.5.3 Les coefficients P_{kij}^H donnés par (1.42) et (1.45) sont identiques.

Proposition 1.5.4 Les coefficients P_{kij}^H du tenseur de piézoélectricité homogénéisé $P^H = (P_{kij}^H)$, définis par (1.42), vérifient :

$$P_{kji}^H(x; y) = P_{kij}^H(x; y)$$

Preuve. Pour la symétrie, on a par définition des coefficients P_{kij}^H . (en utilisant notamment le fait que $C_{ijkl}(x; y) = C_{jikl}(x; y)$ et $P_{kji}(x; y) = P_{kij}(x; y)$). ■

**ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU PROBLÈME
($P^{H\eta}$) DE LA PLAQUE
PIÉZOÉLECTRIQUE HOMOGÉNÉISÉ
(LORSQUE $\eta \downarrow 0$)**

2.1 LE MODÈLE DE PLAQUE PIÉZOÉLECTRIQUE EN TROIS DIMENSIONS SUR Ω^η

Dans cette section , Nous introduisons d'abord quelques notations. En suite, nous rappelons le modèle de la plaque piézoélectrique en trois dimensions, pour une plaque mince anisotrope hétérogène. Nous partons du résultat précédent, pour étudier la limite de l'état électromécanique lorsque la taille de l'épaisseur tend vers zéro, ceci nous permet d'obtenir le problème de plaque membranaire et en flexion et de déterminer aussi les expressions de tous les tenseurs correspondants.

Remarque 2.1.1 Dans toute la suite de ce chapitre, on va omettre le paramètre H , (i.e (P^{H^η}) sera noté par (P^η)).

2.1.1 Géométrie du domaine

On considère une surface bornée ω connexe, de frontière " $\gamma = \partial\omega$ " Lipschitzienne occupée par un matériau piézoélectrique.

2.1.2 Définition de la configuration d'une plaque piézoélectrique

En précisant la géométrie du domaine. On désigne par Ω^η un domaine cylindrique de \mathbb{R}^3 d'épaisseur 2η et de surface moyenne ω , occupé par un matériau piézoélectrique. Plus précisément, on pose pour chaque $0 < \eta \leq 1$:

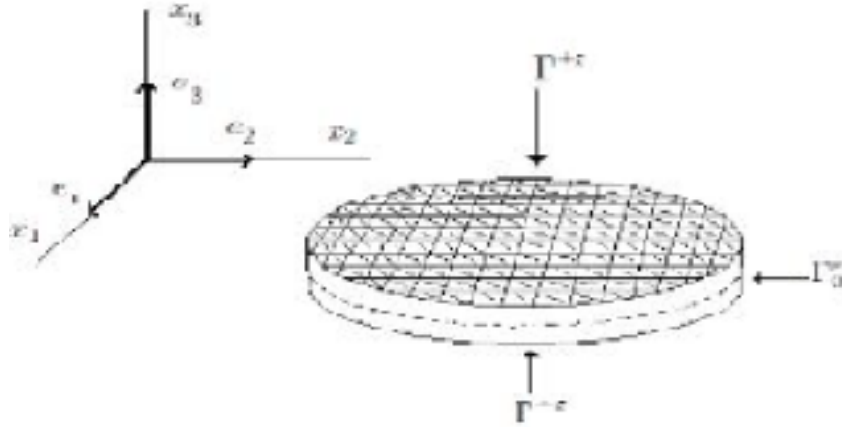
$$\Omega^\eta = \omega \times] - \eta, +\eta[, \quad (2.1)$$

Les faces supérieure et inférieure sont notées par :

$$\Gamma_\pm^\eta = \omega \times \{\pm\eta\}. \quad (2.2)$$

La surface latérale est définie par :

$$\Gamma_0^\eta = \gamma_0 \times] - \eta, +\eta[. \quad (2.3)$$

FIGURE 2.1 – plaque piézoélectrique en trois dimensions sur Ω^η

2.2 DESCRIPTION DU PROBLÈME

La plaque est soumise à des forces de densité volumique f^η et surfacique g^η , on suppose que :

$$f^\eta \in [L^2(\Omega^\eta)]^3, \quad g^\eta \in [L^2(\Gamma_\pm^\eta)]^3. \quad (2.4)$$

2.2.1 Le problème (P^η)

Le problème consiste à trouver le couple (u^η, φ^η) solution des équations :

$$(P^\eta) \begin{cases} P_1^\eta \\ P_2^\eta \end{cases}$$

(i) L'équation d'équilibre mécanique :

L'équation d'équilibre mécanique s'écrit :

$$(P_1^\eta) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^\eta)(u^\eta, \varphi^\eta) = f_i^\eta, & \text{dans } \Omega^\eta, \\ \langle \sigma_{ij}^\eta(u^\eta, \varphi^\eta) \rangle \nu_j^\eta = g_i^\eta, & \text{sur } \Gamma_\pm^\eta, \\ u^\eta = 0, & \text{sur } \Gamma_0^\eta. \end{cases} \quad (2.5)$$

(ii) Équations de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$(P_2^\eta) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(D_i^\eta)(u^\eta, \varphi^\eta) = 0, & \text{dans } \Omega^\eta, \\ \varphi^\eta = 0, & \text{sur } \Gamma_\pm^\eta \cup \Gamma_0^\eta. \end{cases} \quad (2.6)$$

(iii) Les équations constitutives

Le tenseur des contraintes $\sigma^\eta : \Omega^\eta \rightarrow \mathbb{R}^9$ et le vecteur des déplacements électriques $D^\eta : \Omega^\eta \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont reliés par les lois de comportement définies dans (1.2) et (1.3).

2.2.2 Le problème variationnel dans Ω^η

Nous définissons l'espace des déplacements admissibles :

$$V^\eta = \{v^\eta \in [H^1(\Omega^\eta)]^3 : v^\eta|_{\Gamma_0^\eta} = 0\}, \quad (2.7)$$

avec la norme $\|v^\eta\|_{V^\eta} = \|\nabla v^\eta\|_{[L^2(\Omega^\eta)]^9}$, est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega^\eta)^3$, d'après l'inégalité de Poincaré

et l'espace des potentiels électriques admissibles :

$$\Psi^\eta = \{\psi^\eta \in H^1(\Omega^\eta) : \psi^\eta|_{\Gamma_\pm^\eta \cup \Gamma_0^\eta} = 0\}, \quad (2.8)$$

avec la norme $\|\psi^\eta\|_{\Psi^\eta} = \|\nabla \psi^\eta\|_{[L^2(\Omega^\eta)]^3}$.

Ensuite, la formulation variationnelle du système (2.5) - (2.6) est définie par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u^\eta, \varphi^\eta) \in V^\eta \times \Psi^\eta & \text{tel que} \\ a^\eta((u^\eta, \varphi^\eta); (v^\eta, \psi^\eta)) = L^\eta(v^\eta, \psi^\eta) & \forall (v^\eta, \psi^\eta) \in V^\eta \times \Psi^\eta, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

$$\begin{aligned} a^\eta((u^\eta, \varphi^\eta); (v^\eta, \psi^\eta)) &= \int_{\Omega^\eta} [C_{ijkl} e_{kl}^\eta(u^\eta) + P_{kij} \frac{\partial \varphi^\eta}{\partial x_k^\eta}] e_{ij}^\eta(v^\eta) dx^\eta \\ &\quad - \int_{\Omega^\eta} [P_{ikl} e_{kl}^\eta(u^\eta) - \epsilon_{ik} \frac{\partial \varphi^\eta}{\partial x_k^\eta}] \frac{\partial \psi^\eta}{\partial x_i^\eta} dx^\eta, \end{aligned}$$

et la forme linéaire :

$$L^\eta(v^\eta, \psi^\eta) = \int_{\Omega^\eta} f_i^\eta v_i^\eta dx^\eta + \int_{\Gamma_\pm^\eta} g_i^\eta v_i^\eta d\sigma^\eta.$$

1. H^1 L'espace de Sobolev

2.2.3 Théorème d'existence et d'unicité du problème homogénéisé

Sous les propriétés des tenseurs homogénéisés C^H , P^H et ϵ^H , définies dans le premier chapitre nous avons :

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses habituelles de symétrie, de bornitude et d'ellipticité uniforme des tenseurs élastique, piézoélectrique et diélectrique et sous l'hypothèse (2.4). Le problème (2.5)-(2.6) admet une solution faible unique dans l'espace $V^n \times \Psi^n$.*

Preuve. Nous avons la coercivité uniforme de la forme bilinéaire a^n et sa continuité, grâce à la propriété d'ellipticité des tenseurs d'élasticité et de diélectricité, ainsi que les propriétés de symétrie et de bornitude des précédents tenseurs et sur le tenseur de couplage. La forme L^n est linéaire et continue.

Le lemme de Lax-Milgram² assure donc l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.9). ■

2. Voir Annexe A

2.3 ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Dans cette section, nous appliquons la procédure d'analyse asymptotique (telle que développée par Ciarlet [2]) au problème (2.9). Nous transformons d'abord le problème de la plaque piézoélectrique tridimensionnelle (2.9), a un problème équivalent dépendant de η , mais posé sur un ensemble $\Omega = \omega \times (-1, +1)$ indépendant de η , en utilisant les mises-à-l'échelle des inconnues u^η , φ^η et des hypothèses pratiques sur les données. Ensuite, nous étudions le comportement des déplacements mis-à-l'échelle, des potentiels électriques, des contraintes et des vecteurs électriques, pour obtenir ainsi un modèle de plaque 2D anisotrope et non homogène homogène asymptotiquement équivalent.

2.3.1 Le problème variationnel sur le domaine fixe Ω

Nous redéfinissons ici le problème variationnel tridimensionnel (2.9) dans le domaine $\Omega = \omega \times (-1, +1)$ indépendant de η . À chaque $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ on associe l'élément $x^\eta = (x_1, x_2, \eta x_3) \in \Omega^\eta$. On définit le tenseur $\kappa^\eta(v) = (\kappa_{ij}^\eta(v))$ par :

$$\begin{cases} \kappa_{\alpha\beta}^\eta(v) = e_{\alpha\beta}(v(\eta)) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) \\ \kappa_{\alpha 3}^\eta(v) = \frac{1}{\eta}e_{\alpha 3}(v(\eta)) = \frac{1}{2\eta}(\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3) \\ \kappa_{33}^\eta = \frac{1}{\eta^2}e_{33}(v(\eta)) = \frac{1}{\eta^2}(\partial_3 v_3 + \partial_3 v_3) \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous considérons également les sous-ensembles définis en (2.1)-(2.2)-(2.3) pour le choix $\eta = 1$, c'est-à-dire :

(i) *Mise-à-l'échelle du domaine Ω :*

$$\begin{cases} \Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}, \quad \Gamma_N = \Gamma_0 \cup \Gamma_\pm, \\ \Gamma_0 = \gamma_0 \times (-1, +1), \quad \Gamma_1 = \gamma_1 \times (-1, +1). \end{cases} \quad (2.11)$$

(ii) *Mise-à-l'échelle du déplacement u :*

$$\forall x \in \Omega \begin{cases} u_\alpha^\eta(x^\eta) = \eta^2 u_\alpha(\eta)(x), \\ u_3^\eta(x^\eta) = \eta u_3(\eta)(x). \end{cases} \quad (2.12)$$

(ii) *Mise-à-l'échelle du potentiel électrique φ :*

$$\varphi^\eta(x^\eta) = \eta^3 \varphi(\eta)(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.13)$$

(iii) *Mises-à-l'échelle des données :*

$$\begin{cases} f_\alpha^\eta(x^\eta) = \eta^2 f_\alpha(x), & f_3^\eta(x^\eta) = \eta^3 f_3(x), \\ g_\alpha^\eta(x^\eta) = \eta^3 g_\alpha(x), & g_3^\eta(x^\eta) = \eta^4 g_3(x), \end{cases} \quad (2.14)$$

avec

$$f_\alpha \in H^1(\Omega), \quad f_3 \in L^2(\Omega), \quad g_\alpha \in H^1(\Gamma_\pm), \quad g_3 \in L^2(\Gamma_\pm).$$

En plus, notons par $g_3^+ = g_3|_{\Gamma_+}$, $g_3^- = g_3|_{\Gamma_-}$.

(iv) *Mises-à-l'échelle du tenseur des contraintes et du vecteur de déplacement électrique*

Elles sont induites par (2,11)-(2,12) et sont définies par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^\eta(u^\eta, \varphi^\eta) = \eta^2 \sigma_{ij}(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)), \\ D_i^\eta(u^\eta, \varphi^\eta) = \eta^2 D_i(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)), \end{cases} \quad (2.15)$$

où

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)) = C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) + \eta P_{\alpha ij} \partial_\alpha \varphi(\eta) + P_{3ij} \partial_3 \varphi(\eta), \\ D_i(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)) = P_{ikl} \kappa_{kl}(\eta) - \eta \epsilon_{i\alpha} \partial_\alpha \varphi(\eta) - \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi(\eta). \end{cases} \quad (2.16)$$

(iiv) *Mise-à-l'échelle des espaces admissibles*

Nous introduisons également l'espace de déplacement admissible V et l'espace admissible électrique Ψ suivants :

$$\begin{cases} V = \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ \Psi = \{\psi \in H^1(\Omega) : \psi|_{\Gamma_\pm \cup \Gamma_0} = 0\}, \end{cases} \quad (2.17)$$

équipés des normes $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^9}$, et $\|\psi\|_\Psi = \|\nabla \psi\|_{[L^2(\Omega)]^3}$, respectivement.

2.3.2 Analyse de $(P(\eta))$ par la méthode de convergence

Proposition 2.3.1 *Le couple $(u(\eta), \varphi(\eta))$ mise-à-l'échelle est solution du problème variationnel suivant :*

$$(P(\eta)) \begin{cases} \text{Trouver } (u(\eta), \varphi(\eta)) \in V \times \Psi & \text{tel que} \\ a(\eta)((u(\eta), \varphi(\eta)); (v, \psi)) = L(v, \psi), & \forall (v, \psi) \in V \times \Psi, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} a((u(\eta), \varphi(\eta)); (v, \psi)) &= \int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}^{\eta}(u) \kappa_{ij}^{\eta}(v) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi \, dx \\ &+ \int_{\Omega} P_{3ij} [\partial_3 \varphi \kappa_{ij}^{\eta}(v) - \partial_3 \psi \kappa_{ij}^{\eta}(u)] \, dx \\ &+ \eta \int_{\Omega} \epsilon_{3\alpha} [\partial_{\alpha} \varphi \partial_3 \psi + \partial_3 \varphi \partial_{\alpha} \psi] \, dx \\ &+ \eta \int_{\Omega} P_{\alpha ij} [\partial_{\alpha} \varphi \kappa_{ij}^{\eta}(v) - \partial_{\alpha} \psi \kappa_{ij}^{\eta}(u)] \, dx \\ &+ \eta^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} [\partial_{\alpha} \varphi \partial_{\beta} \psi] \, dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

et

$$L(\eta)(v, \psi) = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g_i v_i \, d\sigma. \quad (2.20)$$

Preuve. Nous utilisons toutes les mis-à-l'échelle et les hypothèses sur les données dans (2.9) et on conclure. ■

Estimation a priori et convergence faible :

Notons dans la suite $\kappa^{\eta}(u)$ par $\kappa(\eta)$.

Proposition 2.3.2 *Il existe $C^* > 0$ (indépendant de η) tel que $\forall \eta, 0 < \eta < 1$,*

$$\|u\|_V^2 + \int_{\Omega} \kappa(\eta) : \kappa(\eta) \, dx + \|\eta \partial_1 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\eta \partial_2 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_3 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 < C^*, \quad (2.21)$$

De plus, il existe $u^ \in (H^1(\Omega))^3$, $\kappa^* \in (L^2(\Omega))^9$, $\varphi^* \in L^2(\Omega)$ et il existe des sous suites notées par $(u(\eta))_{\eta>0}$, $(\kappa(\eta))_{\eta>0}$ et $(\eta \partial_1 \varphi(\eta), \eta \partial_2 \varphi(\eta), \partial_3 \varphi(\eta))_{\eta>0}$ tels que :*

$$u(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} u^* \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^3, \quad (2.22)$$

$$\kappa(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} \kappa^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^9, \quad (2.23)$$

$$\varphi(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} \varphi^* \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (2.24)$$

$$(\eta \partial_1 \varphi(\eta), \eta \partial_2 \varphi(\eta), \partial_3 \varphi(\eta)) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} (0, 0, \partial_3 \varphi^*) \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3, \quad (2.25)$$

Preuve. Dans (2.19)-(2.20), on prend

$$(v, \psi) = (u(\eta), \varphi(\eta)) \text{ et } (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\eta \partial_1 \varphi(\eta), \eta \partial_2 \varphi(\eta), \partial_3 \varphi(\eta)).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) \kappa_{ij}(\eta) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \theta_{\alpha} \theta_{\beta} dx + 2 \int_{\Omega} \epsilon_{3\alpha} \theta_3 \theta_{\alpha} dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \theta_3 \theta_3 dx = \\ \int_{\Omega} f \cdot u(\eta) dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g \cdot u(\eta) d\sigma. \end{aligned}$$

C'est équivalent à :

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) \kappa_{ij}(\eta) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \theta_i \theta_j dx = \int_{\Omega} f \cdot u(\eta) dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g \cdot u(\eta) d\sigma. \quad (2.26)$$

En utilisant, l'inégalité de Cauchy³ ($2ab < ma^2 + \frac{1}{m}b^2 \quad \forall(a, b; m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$). Ainsi on trouve :

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot u(\eta) dx + \int_{\Gamma_{\pm}} g \cdot u d\sigma \right| \leq m \{ \|f\|_{0,\Omega}^2 + \|g\|_{0,\Gamma_{\pm}}^2 \} + \frac{c_1}{m} \|u\|_V^2. \quad (\text{théorème de trace}) \quad (2.27)$$

$$c \|u(\eta)\|_V^2 \leq \int_{\Omega} e(u(\eta)) : e(u(\eta)) dx \leq \int_{\Omega} C \kappa(\eta) : \kappa(\eta) dx. \quad (\text{inégalité de Korn}^4) \quad (2.28)$$

L'inégalité ci-dessus et les propriétés de coercivité des tenseurs C_{ijkl} et ϵ_{ij} donne l'estimation du premier terme de (2.26)

$$M \left\{ \int_{\Omega} \kappa(\eta) : \kappa(\eta) dx + \|\theta\|_{0,\Omega}^2 \right\} \leq \int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) \kappa_{ij}(\eta) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \theta_i \theta_j dx. \quad (2.29)$$

De (2.27) et (2.29) on obtient :

$$\|u(\eta)\|_V^2 + \int_{\Omega} \kappa(\eta) : \kappa(\eta) dx + \|\eta \partial_1 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\eta \partial_2 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_3 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 < C^*,$$

par conséquence

$$\text{i) } \|u(\eta)\|_{1,\Omega} \leq C_1,$$

$$\text{ii) } \|\kappa(\eta)\|_{0,\Omega} \leq C_2,$$

$$\text{iii) } \|\varphi(\eta)\|_{0,\Omega} \leq C_3,$$

$$\text{iv) } \|\eta \partial_1 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\eta \partial_2 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 + \|\partial_3 \varphi(\eta)\|_{0,\Omega}^2 \leq C_4.$$

3. Cas particulier de l'inégalité de Young

4. Voir Annexe A

Alors d'après le théorème de Eberlin-Šmuljan \exists une sous suite bornée extraite de $(u(\eta))_{\eta>0}$, $(\kappa(\eta))_{\eta>0}$, $(\varphi(\eta))_{\eta>0}$ et $(\eta\partial_1\varphi(\eta), \eta\partial_2\varphi(\eta), \partial_3\varphi(\eta))_{\eta>0}$ qu'on note par la même notation tels que :

$$\begin{aligned} u(\eta) &\xrightarrow{\eta\downarrow 0} u^* \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^3, \\ \kappa(\eta) &\xrightarrow{\eta\downarrow 0} \kappa^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^9, \\ \varphi(\eta) &\xrightarrow{\eta\downarrow 0} \varphi^* \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ (\eta\partial_1\varphi(\eta), \eta\partial_2\varphi(\eta), \partial_3\varphi(\eta)) &\xrightarrow{\eta\downarrow 0} (0, 0, \partial_3\varphi^*) \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3. \end{aligned}$$

■

Les convergences de la proposition 2.3.2 impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.1 Il existe $\sigma^* \in (L_2(\Omega))^9$ et $D^* \in (L_2(\Omega))^3$ tel que le tenseur de contrainte mise-à-l'échelle et le vecteur de déplacement électrique mise-à-l'échelle satisfont les convergences faibles suivantes :

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0} \sigma_{ij}(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)) = \sigma_{ij}^* = C_{ijkl}\kappa_{kl}^* + P_{3ij}\partial_3\varphi^*, \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} D_i(\eta)(u(\eta), \varphi(\eta)) = D_i^* = P_{ikl}\kappa_{kl}^* - \epsilon_{i3}\partial_3\varphi^*. \end{cases} \quad (2.30)$$

Identification du problème limite :

Soit

$$\begin{aligned} \Psi_l &= \{\psi \in L^2(\Omega) : \partial_3\psi \in L^2(\Omega)\}, \\ \Psi_{l_0} &= \{\psi \in L^2(\Omega) : \partial_3\psi \in L^2(\Omega), \psi|_{\Gamma_{\pm}} = 0\}, \end{aligned}$$

et

$$V_{KL} = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v|_{\Gamma_0} = 0, e_{i3}(v) = 0\},$$

\Leftrightarrow

$$V_{KL} = \{v = (v_\alpha, v_3) \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega), \partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

C'est l'espace des déplacements de Kirchhoff-Love.

Théorème 2.3.1 . Les limites u^* , κ^* , et φ^* trouvées dans la proposition précédente appartient à l'espace V_{KL} , $(L^2(\Omega))^9$ et Ψ_l respectivement.

D'une façon équivalente soit

$$V_H = \{h \in (H^1(\Omega))^2, h|_{\Gamma_0} = 0\},$$

$$V_3 = \{h \in H^2(\Omega), h|_{\Gamma_0} = \partial_\nu h|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Alors

$$\begin{cases} u_\alpha^* = \xi_\alpha - x_3 \partial_\alpha \xi_3, \\ u_3^* = \xi_3, \end{cases}$$

avec $\xi_\alpha = (\xi_1, \xi_2) \in V_H$, $\xi_3 \in V_3$.

Preuve. Nous avons déjà prouvé que :

$$u(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} u^* \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^3 \quad \text{et} \quad \kappa(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} \kappa^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^9.$$

Par le théorème de Rellich-Kondrachov ($H^1(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$), on a :

$$u(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} u^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^3.$$

Alors,

$$\kappa_{ij}(\eta) \xrightarrow{\eta \downarrow 0} \kappa_{ij}^* \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^9,$$

et par conséquence,

$$\left. \begin{aligned} e_{\alpha\beta}(u(\eta)) &= \kappa_{\alpha\beta}(\eta) \xrightarrow{L^2} e_{\alpha\beta}(u^*), \\ e_{\alpha 3}(u(\eta)) &= \eta \kappa_{\alpha 3}(\eta) \xrightarrow{L^2} 0, \\ e_{33}(u(\eta)) &= \eta^2 \kappa_{33}(\eta) \xrightarrow{L^2} 0. \end{aligned} \right\} \implies u(\eta) \longrightarrow u^* \quad \text{dans } H^1(\Omega). \quad (2.31)$$

En plus, on a :

$$\begin{cases} e_{33}(u^*) = 0 \\ e_{\alpha 3}(u^*) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_\alpha} = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} u_3^*(x_1, x_2, x_3) &\in H^1(\Omega) \\ u_3^*|_{\Gamma_0} &= 0 \\ \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right. \implies \exists \xi_3 \in H^1(w), \xi_3^*|_{\Gamma_0} = 0, \text{ tq } u_3^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_3(x_1, x_2), \quad (2.32)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha^*(x_1, x_2, x_3) \in H^1(\Omega) \\ u_\alpha^*|_{\Gamma_0} = 0 \\ \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3^*}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \xi_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \xi_\alpha \in H^1(w), \xi_\alpha^*|_{\Gamma_0} = 0, tq \\ u_\alpha^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial \xi_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha}, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Conclusion :

$$u^* \in V_{KL} = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v|_{\Gamma_0} = 0, e_{i3}(v) = 0\},$$

vérifie :

$$\exists \xi_\alpha \in V_H(w) = \{h_\alpha = (h_1, h_2) \in (H^1(w))^2, h_\alpha|_{\Gamma_0} = 0\},$$

$$\exists \xi_3 \in V_3(w) = \left\{ h_3 \in H^2(w), h_3|_{\Gamma_0} = \frac{\partial h_3}{\partial \nu}|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

telle que,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\alpha^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial \xi_3(x_1, x_2)}{\partial x_\alpha} \\ u_3^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_3(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

■

En plus, si on multiplie (2.19) par η et (2.20) par η^2 , on prend $\psi = 0$, et on soustrayant les deux expressions obtenues on obtient :

$$\begin{aligned} \eta \int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) \kappa_{ij}^\eta(v) dx + \eta \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi \kappa_{ij}^\eta(v) dx + \eta^2 \int_{\Omega} P_{\alpha ij} \partial_\alpha \varphi \kappa_{ij}^\eta(v) dx \\ - \eta^2 \int_{\Omega} f \cdot v dx - \eta^2 \int_{\Gamma_\pm} g \cdot v d\sigma = 0, \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} C_{ijkl} \kappa_{kl}(\eta) \kappa_{ij}^\eta(v) dx + \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi \kappa_{ij}^\eta(v) dx + \int_{\Omega} P_{\alpha ij} (\eta \partial_\alpha \varphi) \kappa_{ij}^\eta(v) dx \\ - \eta \int_{\Omega} f \cdot v dx - \eta \int_{\Gamma_\pm} g \cdot v d\sigma = 0, \end{aligned}$$

lorsque $\eta \downarrow 0$ on a,

$$\int_{\Omega} (C_{ijkl} \kappa_{kl}^* + P_{3ij} \partial_3 \varphi^*) \kappa_{ij}^*(v) = 0, \quad (2.35)$$

car

$$\int_{\Omega} P_{\alpha ij} (\eta \partial_\alpha \varphi) \kappa_{ij}^\eta(v) dx \leq C \int_{\Omega} |\eta \partial_\alpha \varphi| |\kappa_{ij}^\eta(v)| dx \xrightarrow{\eta \downarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

alors,

$$C_{ijkl}\kappa_{kl}^* = -P_{3ij}\partial_3\varphi^*, \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

Par conséquent

$$\begin{cases} C_{33kl}\kappa_{kl}^* = -P_{333}\partial_3\varphi^*, \\ C_{\alpha 3kl}\kappa_{kl}^* = -P_{3\alpha 3}\partial_3\varphi^*, \end{cases} \quad (2.36)$$

en suite si on prend $v_3 = 0$ dans (2.35), on obtient :

$$\begin{cases} C_{33\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta}^* + 2C_{\alpha 333}\kappa_{\alpha 3}^* + C_{3333}\kappa_{33}^* = -P_{333}\partial_3\varphi^*, \\ C_{\alpha\beta\gamma 3}\kappa_{\gamma 3}^* + 2C_{\alpha 3\beta 3}\kappa_{\beta 3}^* + C_{\alpha 333}\kappa_{33}^* = -P_{3\alpha 3}\partial_3\varphi^*. \end{cases} \quad (2.37)$$

Supposons que $C_{\alpha\beta\gamma 3} = C_{\alpha 333} = 0$ (la plaque est monoclinique)⁵, alors de la première équation de (2.37), on a :

$$\kappa_{33}^* = -\frac{1}{C_{3333}}(P_{333}\partial_3\varphi^* + C_{33\alpha\beta}e_{\alpha\beta}(u^*)). \quad (2.38)$$

De la deuxième équation de (2.37) on a :

$$2 \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{13}^* \\ \kappa_{23}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P_{313} \\ P_{323} \end{bmatrix} \partial_3\varphi^*,$$

comme la matrice carrée $C = \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}$ est inversible, alors le système de Cramer⁶ admet une solution unique ,

$$\begin{aligned} \kappa_{13}^* &= -\frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} P_{313} & C_{1323} \\ P_{323} & C_{2323} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}} \partial_3\varphi^*, \\ \kappa_{23}^* &= -\frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} C_{1313} & P_{133} \\ C_{3213} & P_{323} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}} \partial_3\varphi^*. \end{aligned} \quad (2.39)$$

5. Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.

6. Un système d'équations linéaires avec autant d'équations que d'inconnues et dont le déterminant de la matrice de coefficients est non nul.

Corollaire 2.3.2. Les équations constitutives limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^* = \left[C_{\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{C_{\alpha\beta 333} C_{33\gamma\rho}}{C_{3333}} \right] e_{\gamma\rho}(u^*) + \left[P_{3\alpha\beta} - \frac{C_{\alpha\beta 333} P_{333}}{C_{3333}} \right] \partial_3 \varphi^*, \\ \sigma_{i3}^* = 0, \\ D_i^* = \left[P_{i\alpha\beta} - \frac{C_{\alpha\beta 333} P_{i33}}{C_{3333}} \right] e_{\alpha\beta}(u^*) \\ - \left\{ \epsilon_{i3} + \frac{P_{i33} P_{333}}{C_{3333}} + \frac{1}{\det \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} P_{323} \\ P_{313} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{1313} & -C_{1323} \\ -C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i23} \\ P_{i13} \end{bmatrix} \right\} \partial_3 \varphi^*. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Le théorème suivant donne une première caractérisation de la limite faible (u^*, φ^*) définie aux théorème (2.3.1) et proposition (2.3.2).

On définit les coefficients d'élasticité coercive $A_{\alpha\beta\gamma\rho}$ par :

$$A_{\alpha\beta\gamma\rho} = C_{\alpha\beta\gamma\rho} - \frac{C_{\alpha\beta 333} C_{33\gamma\rho}}{C_{3333}}, \quad (2.41)$$

les coefficients $p_{3\alpha\beta}$ par :

$$p_{3\alpha\beta} = P_{3\alpha\beta} - \frac{C_{\alpha\beta 333} P_{333}}{C_{3333}}, \quad (2.42)$$

et les coefficients p_{33} par :

$$p_{33} = \epsilon_{33} + \frac{P_{333} P_{333}}{C_{3333}} + \frac{1}{\det \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} P_{323} \\ -P_{313} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{323} \\ -P_{313} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Théorème 2.3.2. La limite faible (u^*, φ^*) est la solution unique du problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^*, \varphi^*) \in V_{KL} \times \Psi_l \quad \text{tel que} \\ a((u^*, \varphi^*); (v, \psi)) = L(v, \psi) \quad \forall (v, \psi) \in V_{KL} \times \Psi_{l_0}, \end{array} \right. \quad (2.44)$$

où

$$\begin{aligned} a(u^*, \varphi^*); (v, \psi) &= \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(u^*) e_{\alpha\beta}(v) \, dx + \int_{\Omega} p_{33} \partial_3 \varphi^* \partial_3 \psi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p_{3\alpha\beta} [e_{\alpha\beta}(u^*) \partial_3 \psi - e_{\alpha\beta}(v) \partial_3 \varphi^*] \, dx, \end{aligned} \quad (2.45)$$

et

$$L(v, \psi) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g \cdot v \, d\sigma. \quad (2.46)$$

Preuve.

Existence : prenant $(v, \psi) \in V_{KL} \times \Psi$ dans (2.19)-(2.20), on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} a((u(\eta), \varphi(\eta)); (v, \psi)) &= \int_{\Omega} C_{\alpha\beta kl} \kappa_{kl}^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi^* \partial_3 \psi \, dx \\ &+ \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \varphi^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx - \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \psi \kappa_{ij}^* \, dx, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} L(v, \psi) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g \cdot v \, d\sigma. \quad (2.48)$$

En remplaçant dans (2.47)-(2.48) $\kappa_{ij}, \kappa_{kl}; i, j, k, l = 1, 2, 3$ par les expressions obtenues au corollaire (2.3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} a((u(\eta), \varphi(\eta)); (v, \psi)) &= \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\gamma\rho} \kappa_{\gamma\rho}^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx + 2 \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\gamma 3} \kappa_{\gamma 3}^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} C_{\alpha\beta 33} \kappa_{33}^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx + \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \varphi^* e_{\alpha\beta}(v) \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \psi e_{\alpha\beta}(u^*) \, dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} P_{3\alpha 3} \partial_3 \psi \kappa_{\alpha 3}^* \, dx + \int_{\Omega} P_{333} \partial_3 \psi \kappa_{33}^* \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi^* \partial_3 \psi, \\ &= \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(u^*) e_{\alpha\beta}(v) \, dx + \int_{\Omega} p_{33} \partial_3 \varphi^* \partial_3 \psi \, dx - \\ &\int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} [e_{\alpha\beta}(u^*) \partial_3 \psi - e_{\alpha\beta}(v) \partial_3 \varphi^*] \, dx, \end{aligned}$$

comme $\lim_{\eta \rightarrow 0} a((u(\eta), \varphi(\eta))) = \lim_{\eta \rightarrow 0} L(v, \psi)$, nous avons prouvé que

$$\forall (v, \psi) \in V_{KL} \times \Psi, \quad a((u^*, \varphi^*); (v, \psi)) = L(v, \psi). \quad (2.49)$$

Unicité : Pour prouver l'unicité de la solution, nous supposons que $(\hat{u}, \hat{\varphi})$ est une autre solution de (2.44) et définissons $\mathcal{Z} = \hat{u} - u$ et $\mathcal{X} = \hat{\varphi} - \varphi$. Puis en soustrayant les équations

$$\begin{aligned} a((u, \varphi); (\mathcal{Z}, \mathcal{X})) &= L(\mathcal{Z}, \mathcal{X}), \\ a((\hat{u}, \hat{\varphi}); (\mathcal{Z}, \mathcal{X})) &= L(\mathcal{Z}, \mathcal{X}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= a((\mathcal{Z}, \mathcal{X}); (\mathcal{Z}, \mathcal{X})) = \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\alpha\beta}(\mathcal{Z}) e_{\gamma\rho}(\mathcal{Z}) \, dx + \int_{\Omega} p_{33} \partial_3 \mathcal{X} \partial_3 \mathcal{X} \\ &\geq c_1 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \|e_{\alpha\beta}(\mathcal{Z})\|_{L^2(\Omega)} + c_2 \|\partial_3 \mathcal{X}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{Z} = 0$ sur V_{KL} , $\partial_3 \mathcal{X} = 0$ sur $L^2(\Omega)$ et $\mathcal{X} = 0$ sur Ψ_{l_0} . ■

Nous pouvons également démontrer que le potentiel électrique limite φ^* a une forme explicite en fonction de la troisième composante du déplacement limite u^* . Cette caractérisation de φ^* induit une simplification du limiter le problème variationnel défini en (2.44); il peut être réduit à un problème variationnel dont l'inconnue est seulement le déplacement de Kirchhoff-Love. Ces remarques sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.3. Nous supposons que $P_{3\alpha\beta}$ et p_{33} sont indépendants de x_3 . Quand $\eta \rightarrow 0$, la solution $(u(\eta), \varphi(\eta))$ de (2.18) converge fortement vers (u^*, φ^*) , dans l'espace fonctionnel $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et vérifiée les propriétés (i) et (ii) décrites ci-dessous.

(i) La limite u^* est un déplacement de Kirchhoff-Love, solution du problème suivant,

$$\begin{aligned} a(u^*, \varphi^*); (v, \psi) &= \int_{\Omega} A_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(u^*) e_{\alpha\beta}(v) \, dx - \int_{\Omega} x_3 \frac{p_{3\alpha\beta} p_{3\gamma\rho}}{p_{33}} \partial_{\gamma\rho} \xi_3 e_{\alpha\beta}(v) \, dx \\ &= L(v, \psi) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g \cdot v \, d\sigma. \end{aligned} \quad (2.51)$$

(ii) La limite du potentiel électrique φ^* est un polynôme de second ordre en x_3 , dont les coefficients dépendent de ξ_3 , et la forme analytique exacte de φ est la suivante,

$$\begin{aligned} \varphi^*(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{m=0}^2 \psi^m(x_1, x_2) x_3^m, \\ \psi^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} + \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \xi_3, \\ \psi^1 &= \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2}, \\ \psi^2 &= -\frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \xi_3. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Preuve. Voir. [4] ■

2.4 LE MODÈLE DE PLAQUE PIÉZOÉLECTRIQUE EN DEUX DIMENSIONS SUR ω

Dans cette section, nous donnons la formulation du problème (2.51) comme un problème limite, que nous appelons modèle de plaque piézoélectrique en deux dimensions. Le mot à deux dimensions signifie que la solution est complètement déterminée par la solution $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ d'un problème limite bidimensionnel posé sur la surface moyenne ω de la plaque, et le mot piézoélectrique signifie que ce modèle dépend des données élastiques et électriques imposées sur le problème en trois dimensions. Le théorème suivant donne la formulation de ce modèle.

Théorème 2.4.1. Nous faisons des hypothèses de régularité sur les données :

-la force volumique f satisfait $f_\alpha \in H^1(\Omega)$, $f_3 \in L_2(\Omega)$,

-la force surfacique g satisfait $g_\alpha \in H^1(\Gamma_\pm)$, $g_3 \in L_2(\Gamma_\pm)$

Alors, les déplacements ξ_3 et (ξ_1, ξ_2) sont des solutions de deux problèmes aux limites.

Le problème limite 2D de la plaque membranaire ($PL_H(\omega)$) :

$$(P_H(\omega)) \left\{ \begin{array}{l} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-1}^{+1} f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-), \text{ dans } \omega, \\ (\xi_1, \xi_2) = (0, 0) \text{ sur } \gamma_0, \\ n_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2)\nu_\alpha = 0, \text{ sur } \gamma_1, \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Le problème limite 2D de la plaque en flexion ($PL_3(\omega)$) :

$$(P_3(\omega)) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\xi_3) = \int_{-1}^{+1} (x_3 \partial_3 f_\alpha + f_3) dx_3 + (g_3^+ + g_3^-) + \partial_\alpha (g_3^+ - g_3^-), \\ \text{dans } \omega, \\ \xi_3 = \partial_\nu \xi_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0, \\ m_{\alpha\beta}(\xi_3)\nu_\alpha \nu_\beta = 0, \text{ sur } \gamma_1, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta} \nu_\beta + \partial_\tau (m_{\alpha\beta} \nu_\alpha \tau_\beta) = \int_{-1}^{+1} x_3 f_\alpha \nu_\alpha dx_3 + (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) \nu_\alpha \\ - \int_{-1}^{+1} g_3 dx_3 - \partial_\tau (\int_{-1}^{+1} g_\alpha x_3 dx_3 \tau_\alpha). \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Preuve. Nous devons définir les coefficients dépendants de $(x_1, x_2) \in \omega$ suivants,

$$\bar{A}_{\alpha\beta\gamma\rho}(x_1, x_2) = \int_{-1}^{+1} A_{\alpha\beta\gamma\rho}(x) dx_3,$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\rho}(x_1, x_2) = \int_{-1}^{+1} x_3 A_{\alpha\beta\gamma\rho}(x) dx_3,$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\rho}(x_1, x_2) = \int_{-1}^{+1} x_3^2 A_{\alpha\beta\gamma\rho}(x) dx_3,$$

et

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho}(x_1, x_2) = \int_{-1}^{+1} x_3^2 \frac{P_{3\alpha\beta} P_{3\gamma\rho}}{p_{33}}(x) dx_3.$$

De plus nous définissons aussi les tenseurs $\mathbf{n} = (n_{\alpha\beta})$ et $\mathbf{m} = (m_{\alpha\beta})$ dépendants des trois fonctions $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \boldsymbol{\xi}$ associés au déplacement de Kirchhoff-Love u , par

$$\begin{bmatrix} n_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{\alpha\beta\gamma\rho} & -B_{\alpha\beta\gamma\rho} \\ -B_{\alpha\beta\gamma\rho} & C_{\alpha\beta\gamma\rho} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\gamma\rho}(\boldsymbol{\xi}) \\ \partial_{\gamma\rho}(\boldsymbol{\xi}_3) \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

En suite, on prend u^* et v appartiennent V_{KL} dans (2.51), tels que

$$\begin{cases} u_\alpha^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \xi_3, \\ u_3^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_3(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2.56)$$

et

$$\begin{cases} v_\alpha(x_1, x_2, x_3) = h_\alpha(x_1, x_2), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases} \quad (2.57)$$

on obtient le problème variationnel $(P_M(\omega))$, en effet

$$\begin{aligned} \int_\omega \int_{-1}^{+1} \bar{A}_{\alpha\beta\gamma\rho} [e_{\gamma\rho}(\boldsymbol{\xi}) - x_3 \partial_{\gamma\rho} \xi_3] e_{\alpha\beta}(h) dx - \int_\omega \int_{-1}^{+1} x_3 \frac{P_{3\alpha\beta} P_{3\gamma\rho}}{p_{33}} \partial_{\gamma\rho} \xi_3 e_{\alpha\beta}(h) dx \\ = L(v), \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\int_\omega [\bar{A}_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(\boldsymbol{\xi}) - B_{\alpha\beta\gamma\rho} \partial_{\gamma\rho} \xi_3] e_{\alpha\beta}(h) dx_1 dx_2 = \int_\Omega f_\alpha h_\alpha dx + \int_{\Gamma_\pm} g_\alpha h_\alpha d\sigma,$$

\Leftrightarrow

$$\int_\omega n_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(h) dx_1 dx_2 = \int_\omega \left[\left(\int_{-1}^{+1} f_\alpha dx_3 \right) + g_\alpha^+ + g_\alpha^- \right] h_\alpha dx_1 dx_2. \quad (2.58)$$

$P_M(\omega)$:

$$\int_{\omega} n_{\alpha\beta} \partial_{\beta} h_{\alpha} d\omega = \int_{\omega} P_{\alpha} h_{\alpha} d\omega = L_{\alpha}(h), \quad \forall (h_{\alpha}) \in V_H(\omega) \quad (2.59)$$

$$n_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(\xi) - B_{\alpha\beta\gamma\rho} \partial_{\gamma\rho} \xi_3,$$

$$P_{\alpha} = \int_{-1}^{+1} f_{\alpha} dx_3 + g_{\alpha}^{+} + g_{\alpha}^{-}.$$

Corollaire 2.4.1. Le problème ($P_M(\omega)$) admet une solution unique.

Preuve. Pour l'existence et l'unicité de solution du problème ($P_M(\omega)$), on utilise le lemme de Lax-Milgram.

$L_{\alpha}(h)$ est une forme linéaire continue sur V_H , $a(\xi_{\alpha}, h_{\alpha})$ est une forme bilinéaire continue et coercive (on applique l'inégalité de Korn 2D) sur V_H , d'où $\exists!$ $\xi_{\alpha} \in V_H(\omega)$ d'après Lax-Milgram. ■

Le problème limite 2D de la plaque membranaire ($PL_H(\omega)$) :

On a,

$$\int_{\omega} n_{\alpha\beta} \partial_{\beta} h_{\alpha} d\omega = - \int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega + \int_{\gamma} (n_{\alpha\beta} \nu_{\beta}) h_{\alpha} d\sigma = \int_{\omega} P_{\alpha} h_{\alpha} d\omega,$$

$$\forall (h_{\alpha}) \in V_H(\omega),$$

\Leftrightarrow

$$\int_{\omega} n_{\alpha\beta} \partial_{\beta} h_{\alpha} d\omega = - \int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega + \int_{\gamma_1} (n_{\alpha\beta} \nu_{\beta}) h_{\alpha} d\sigma = \int_{\omega} P_{\alpha} h_{\alpha} d\omega,$$

$$\forall (h_{\alpha}) \in V_H(\omega),$$

aux sens des distribution, soit $h_{\alpha} \in D(\Omega)$

donc,

$$- \int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega = \int_{\omega} P_{\alpha} h_{\alpha} d\omega, \quad \forall (h_{\alpha}) \in D(\Omega),$$

$$\Rightarrow n_{\alpha\beta} h_{\alpha} = P_{\alpha} \text{ dans } \omega.$$

Avec les condition aux limites

$$\begin{cases} h_{\alpha} = 0 & \text{sur } \gamma_0 \\ n_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = 0 & \text{sur } \gamma_1 = \gamma - \gamma_0, \end{cases}$$

en effet,

$$-\int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega + \int_{\gamma_1} (n_{\alpha\beta} \nu_{\beta}) h_{\alpha} d\sigma = \int_{\omega} P_{\alpha} h_{\alpha} d\omega, \quad \forall (h_{\alpha}) \in D(\Omega),$$

\Leftrightarrow

$$-\int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega + \int_{\gamma_1} (n_{\alpha\beta} \nu_{\beta}) h_{\alpha} d\sigma = -\int_{\omega} \partial_{\beta} n_{\alpha\beta} h_{\alpha} d\omega \quad \forall (h_{\alpha}) \in D(\Omega),$$

$$\Leftrightarrow n_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = 0 \quad \text{sur} \quad \gamma_1.$$

Si on prend u^* et v appartiennent à V_{KL} dans (2.51), tels que

$$\begin{cases} u_{\alpha}^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_{\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \partial_{\alpha} \xi_3, \\ u_3^*(x_1, x_2, x_3) = \xi_3(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2.60)$$

et

$$\begin{cases} v_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \partial_{\alpha} h_3(x_1, x_2), \\ v_3(x_1, x_2, x_3) = h_3(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2.61)$$

on obtient le problème variationnel ($P_F(\omega)$), en effet

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \int_{-1}^{+1} A_{\alpha\beta\gamma\rho} [e_{\gamma\rho}(\xi) - x_3 \partial_{\gamma\rho} \xi_3] [-x_3 \partial_{\alpha\beta} h_3] dx \\ & - \int_{\omega} \int_{-1}^{+1} \left[x_3 \frac{P_{3\alpha\beta} P_{3\gamma\rho}}{p_{33}} \partial_{\gamma\rho} \xi_3 \right] [-x_3 \partial_{\alpha\beta} h_3] dx = L(v), \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} [-B_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(\xi) + (C_{\alpha\beta\gamma\rho} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} \partial_{\gamma\rho} \xi_3)] \partial_{\alpha\beta} h_3 dx_1 dx_2 \\ & = \int_{\Omega} [f_{\alpha}(-x_3 \partial_{\alpha} h_3) + f_3 h_3] dx \\ & + \int_{\Gamma_{\pm}} [g_{\alpha}(-x_3 \partial_{\alpha} h_3) + g_3 h_3] d\sigma, \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\int_{\omega} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} h_3 dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{+1} (x_3 \partial_3 f_{\alpha} + f_3) dx_3 + (g_3^+ + g_3^-) + \partial_{\alpha} (g_3^+ - g_3^-) \quad (2.62)$$

$P_F(\omega)$:

$$\int_{\omega} m_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} h_3 dx_1 dx_2 = \int_{\omega} P_3 h_3 d\omega - \int_{\omega} S_{\alpha} \partial_{\alpha} h_3 d\omega = L_3(h) \quad (2.63)$$

$$m_{\alpha\beta} = -B_{\alpha\beta\gamma\rho} e_{\gamma\rho}(\xi) + (C_{\alpha\beta\gamma\rho} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} \partial_{\gamma\rho} \xi_3)$$

$$S_{\alpha} = \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_3 f_{\alpha} d\omega + \partial_{\alpha} (g_3^+ + g_3^-)$$

Corollaire 2.4.2. Le problème $(P_F(\omega))$ admet une solution unique.

Preuve. Pour l'existence et l'unicité de la solution du problème $(P_F(\Omega))$, on utilise le lemme de Lax-Milgram.

$L_\alpha(\mathbf{3})$ est une forme linéaire continue sur V_3 , $a(\xi_3, h_3)$ est une forme bilinéaire continue et coercive (on applique l'inégalité de Poincaré) sur V_3 , d'où $\exists! \xi_3 \in V_3(\omega)$ d'après Lax-Milgram. ■

Le problème limite 2D de la plaque en flexion $(PL_3(\omega))$:

De la même façon que dans Le problème limite 2D de la plaque membranaire on obtient (2.54).

La régularité de la solution ξ_i : si γ est assez régulier et si les hypothèses précédentes sur les données (f, g) sont vérifiées, alors $\xi_3 \in H^4(\omega) \cap H_0^2(\omega)$ et $\xi_\alpha \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$. ■

Remarque 2.4.1 *Il existe dans la littérature plusieurs modèles de plaques. Le modèle de Reissner-Mindlin est basé sur l'approximation a priori suivante*

$$u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon) : \bar{\Omega}^\varepsilon \curvearrowright \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon = \xi_\alpha^\varepsilon - x_3^\varepsilon \theta_\alpha^\varepsilon, \\ u_3^\varepsilon = \xi_3^\varepsilon. \end{cases}$$

*En général $e_{\alpha 3}(u^\varepsilon) \neq 0$ les ingénieurs préfèrent le modèle de Reissner-Mindlin(R-M) par rapport au modèle de kirchhoff-Love(K-L) car le modèle K-L nécessite des **ELF** de classe C^1 par contre le modèle de R-M nécessite des **ELF** de classe C^0*

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'étude sur l'homogénéisation des plaques piézoélectrique hétérogène. Cette étude est basée sur l'analyse asymptotique d'un problème 3D par application de la méthode des développements asymptotiques à double et la méthode de convergence au problème considéré, pour obtenir un problème $2D$ moins difficile à résoudre.

Comme perspective, nous proposons d'étudier le cas thermopiézoélectrique, et d'étendre le cas étudié pour une plaque monoclinique au cas anisotrope en général.

CHAPITRE 3

ANNEXE A

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx , et de frontière (ou la bord) $\partial\Omega$ suffisamment régulière. V et H sont deux espaces de Banach des normes respectives $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H$.

Formule de Green

Théorème A.1.(Formule de Green¹). Soit ω une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elle vérifie la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \omega(x) \nu_i ds.$$

où ν_i la i -ème composante de la normale extérieure unité de Ω .

Corollaire A.1. Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ à support borné dans le fermé $\bar{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i, \quad \forall i \in 1, \dots, N$$

1. (juillet 1793 - 31 mai 1841) est un physicien britannique)

Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax²-Milgram³ est un théorème très important, la démonstration est basée sur le théorème de représentation de Riesz⁴ (voire [5]). Considérons un problème variationnel sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3.1)$$

Théorème A.2. (Lax-Milgram) . Soit V un espace de Hilbert équipé de la norme $\|\cdot\|_V$. On suppose que :

(i) la forme bilinéaire a est continue,

$$\exists \alpha < +\infty, \quad \forall (u, v) \in V \times V, \quad |a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V,$$

(ii) la forme bilinéaire a est coercive (on dit également V -elliptique),

$$\exists \beta > 0, \quad \forall u \in V \quad |a(u, u)| \geq \beta \|u\|_V^2,$$

(iii) la forme linéaire L est continue,

$$\exists \lambda < +\infty, \quad \forall v \in V, \quad |L(v)| \leq \lambda \|v\|_V.$$

Alors, le problème (3.1) admet une solution unique satisfait l'estimation a priori

$$\|u\|_V \leq \frac{\|L\|_{V'}}{\alpha}.$$

Théorème de trace

On définit l'opérateur de trace γ_0 par :

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\overline{\partial\Omega}) \quad (3.2)$$

$$u \longmapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$$

Théorème A.3. (Trace). L'application linéaire γ_0 définie par (3.2) se prolonge par continuité à une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, i.e, il existe une constante C tel que :

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{1,\Omega}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. Peter Lax, (1er mai 1926, est un mathématicien hongrois de nationalité américaine)

3. Arthur Norton Milgram (3 juin 1912–30 janvier 1961) est un mathématicien américain

4. En mathématiques, plus précisément en analyse fonctionnelle, le théorème de représentation de Riesz

L'inégalité de Poincaré et de Korn

Lemme A.1.

1- Inégalité de Poincaré ⁵ : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ouvert borné (au moins dans une direction). Il existe une constante strictement positive C ne dépendant que de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

2- Inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \left\| v - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v \, dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme A.2 . (Korn ⁶) Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 de frontière suffisamment régulière, alors les deux normes suivantes sont équivalentes.

$$v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3 \curvearrowright \|\cdot\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3 \curvearrowright \|\cdot\|_{1,\Omega} = \left[\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}(v)\|_{0,\Omega}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

5. est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev.

6. l'inégalité de Korn est un résultat démontré pour la première fois en 1908 par le physicien allemand Arthur Korn. Ce résultat, issu des recherches de Korn en théorie de l'élasticité.

ANNEX B

LA CONVERGENCE FAIBLE DANS UN ESPACE DE BANACH

Soit $(B; \|\cdot\|_B)$ un espace de Banach et $(B'; \|\cdot\|_{B'})$ son dual.

$$\|u\|_{B'} = \sup_{\|f\|_B \leq 1} \langle u, f \rangle_{B', B}.$$

Définition B.1. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ converge fortement vers $u \in B$ quand $n \rightarrow \infty$ si :

$$\|u_n - u\| \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0,$$

et on note $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans B .

Définition B.2. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ converge faiblement vers $u \in B$ quand $n \rightarrow \infty$ si :

$$\langle u^*, u_n \rangle_{B', B} \xrightarrow{n \uparrow \infty} \langle u^*, u \rangle_{B', B}, \quad \forall u^* \in B'.$$

Et on note $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans B .

Cas particulier : $B = L^p(\Omega)$

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans $L^p(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in L^q(\Omega) \text{ avec } (q = \frac{p}{p-1}), \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \varphi \, dx.$$

Théorème B.1. Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tel que $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans B . Alors :

(i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans B ,

(ii) $\|u\|_B \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_B$.¹

Par ailleurs, si B est réflexif et $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans B , et $\|u_n\|_B \xrightarrow{n \uparrow \infty} \|u\|_B$ dans B , alors $u_n \xrightarrow{n \uparrow \infty} u$ dans B .

Théorème B.2. (Eberlein-Šmuljan). Soit B un Banach réflexif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$, avec $\|u_n\|_B \leq C$ (bornée). Alors :

(i) \exists une sous suite extraite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $u \in B$ tel que :

$$u_k \xrightarrow{k \uparrow \infty} u \text{ dans } B.$$

(ii) Si chaque sous suite extraite converge faiblement vers la même limite u . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers u .

Théorème B.3. Soit B un Banach séparable. Alors de toute suite bornée de B , on peut extraire une sous suite qui converge faiblement.

Théorème B.4. (Ciarlet). Soit ω un domaine de \mathbb{R}^2 de frontière γ , soit $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ et $\varphi \in L^p(\Omega)$ ($p > 1$), tel que $\int_{\Omega} \varphi \partial_3 v \, dx = 0 \, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ avec $v = 0$ sur $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, alors $v = 0$.

Définition B.3. Soit B_1 et B_2 deux espaces.

On dit que B_1 s'injecte d'une façon continue dans B_2 et on note par $B_1 \hookrightarrow B_2$ si :

(i) $B_1 \subset B_2$,

(ii) $\exists C > 0 : \|u\|_{B_1} \leq C \|u\|_{B_2}$.

1. la norme dans B est semi-continue-inférieure pour la topologie faible

Définition B.3. Soit B_1 et B_2 deux espaces.

On dit que B_1 s'injecte d'une façon compacte dans B_2 et on note par $B_1 \hookrightarrow_c B_2$ si :

(i) $B_1 \hookrightarrow B_2$,

(ii) Tout borné dans B_1 est relativement compact dans B_2 .

Théorème B.5. (Rellich-Kondrachov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert borné à frontière Lipschitzienne),
 $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega)$

Alors toute suite de $H^m(\Omega)$ qui converge faiblement dans $H^m(\Omega)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers la même limite.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. A. Otero, J. B. Castillero and R. R. Ramos. Homogenization of heterogeneous piezoelectric medium. Institute Cybernetics, Mathematics and Physics (ICIMAF) Acoustic Group, Calle D No. 353 e/t 15 y 17, Vedado, Havana, Cuba, 1995.
- [2] H. Philippe G. Ciarlet :Mathematical elasticity VOLUME II : Theory of plates, 1997.
- [3] M. Brezis. H, Analyse fonctionnelle théories et applications. Dunod 1999.
- [4] Abdou Sene . Modelling of piezoelectric static thin plates. Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique, Université Gaston Berger, B.P. 234 St. Louis, Sénégal, 2001.
- [5] Houari Mechkour. Homogénéisation et simulation numérique de structures piézo-électriques perforées et laminées. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2004.
- [6] Mihaela Predoi Racila. Elaboration d'une modélisation mathématique du transfert multi-échelle des signaux mécaniques dans l'os cortical humain. Aspects théoriques et simulations numériques. Modélisation et simulation. Université de Franche-Comté, 2005.
- [7] Isabel M. Narra Figueiredo and Carlos M. Franco Leal. A piezoelectric anisotropic plate model. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3001-454 Coimbra, Portugal, 2005.
- [8] I. Merabet. COURS Méthode des éléments finis 1. Master M1 Modélisation et Analyse Numérique. Université Kasdi Merbah Ouargla, 2016.
- [9] D. A. Chacha. COURS Homogénéisation et Modélisation asymptotique des plaques. Master M2 Modélisation et Analyse Numérique. Université Kasdi Merbah Ouargla , 2017.

Abstract

The interest of this work is to modelize a problem ($P^{\varepsilon\eta}$) of 3D, piezoelectric, heterogeneous and anisotropic plate with periodic structure, and to obtain a model of plate Homogeneous 2D asymptotically equivalent. With Dirichlet-type electrical boundary conditions and mixed mechanical boundary conditions on the lateral boundary. Our goal is to study behavior of the electromechanical state, when the two small parameters ($0 < \eta, \varepsilon \leq 1$) : η the half-thickness of the plate and ε the size of the reference period, tend towards zero in the order $\lim_{\eta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^{\varepsilon\eta})$.

Keywords :Homogenization, heterogeneous, elasticity, piezoelectricity, plate, anisotropic.

Résumé

L'intérêt de ce travail consiste à modéliser un problème ($P^{\varepsilon\eta}$) de plaque 3D, piézoélectrique, hétérogène et anisotrope à structure périodique, et d'obtenir ainsi un modèle de plaque 2D homogène asymptotiquement équivalent. Avec des conditions aux limites électriques de type Dirichlet et des conditions aux limites mécaniques mixtes sur le bord latéral. Notre objectif est d'étudier le comportement de l'état électromécanique, quand les deux petits paramètres ($0 < \eta, \varepsilon \leq 1$) : η la demi-épaisseur de la plaque et ε la taille de la période de référence, tendent vers zéro suivant l'ordre $\lim_{\eta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^{\varepsilon\eta})$.

Mots clés : Homogénéisation, hétérogène, élasticité, piézoélectricité, plaque, anisotrope.