UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
Faculté de Mathématiques et Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et Géométrie

Par : Messaouda Bouta

Thème :

Systèmes hamiltoniens intégrables

Soutenu publiquement le : 06/06/2018

Devant le jury composé de :

Yassine Guerboussa	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Mohamed Boussaid	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Tayeb Benmoussa	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Amine Bahayou	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir accordé des connaissances de la science et de m'avoir aidé à réaliser ce travail.

Je remercie chaleureusement et respectivement tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce projet de fin d'étude. Mes vifs remerciements vont tout d'abord à mon encadreur Monsieur **Mohamed Amine Bahayou** enseignant à l'université de Ouargla pour ses valeureux conseils, puis un grand remerciement destiné aux enseignants qui m'ont initié aux mathématiques fondamentales et qui m'ont guidé durant toute ma formation.

Enfin, je remercie ma famille pour l'aide et le soutient moral tout ou long de mon cursus.

Résumé

Un système hamiltonien est la donnée d'un triplet (M, ω, H), où (M, ω) est une variété symplectique (de dimension $2n$) et H est une fonction lisse sur M. Le système est dit *intégrable* s'il existe un n-uplet $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ d'intégrales premières en involution dont les différentielles sont génériquement indépendantes.
Le Théorème d'Arnold-Liouville affirme que si l'application moment F est propre et régulière alors ses fibres sont des tores (une fibration lagrangienne) et il existe des coordonnées action-angle qui linéarisent le système hamiltonien.

Nous nous intéressons à la construction de fibrations lagrangiennes associées aux systèmes intégrables et aux idées qui sont derrière le Théorème d'Arnold-Liouville et sa démonstration.

Mots clefs : systèmes hamiltoniens intégrables, fibration lagrangienne, application moment.

Abstract

An hamiltonian system is the given of a triple (M, ω, H), where (M, ω) is a symplectic manifold (of dimension $2n$) and H is a smooth function on M. The system is said to be *integrable* if there exists a n-uplet $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ of first integrals in involution whose differentials are generically independent.
Arnold-Liouville's Theorem asserts that if the moment map F is proper and regular then its fibers are tori (a Lagrangian fibration) and there exist action-angle coordinates that linearize the hamiltonian system. We are interested in the construction of Lagrangian fibrations associated with integrable systems and ideas that are behind the Arnold-Liouville theorem and its demonstration.

Keywords : integrable hamiltonian systems, lagrangian fibration, moment map.

Table des matières

Introduction

Nous étudions dans ce mémoire le Théorème d'Arnold-Liouville qui concerne l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens.

Étant donné une variété symplectique (M, ω) et une fonction $H \in C^\infty(M)$. On associe à H un champ de vecteurs (appelé *champ hamiltonien*), dont les courbes intégrales sont les trajectoires du système. Une fonction $f \in C^\infty(M)$ qui commute avec H (pour le crochet de Poisson) est constante le long des trajectoires du système et est donc appelée une quantité conservée. L'identité de Jacobi pour le crochet de Poisson affirme que si $f, g \in C^\infty(M)$ sont des quantités conservées, leur crochet de Poisson $\{f, g\}$ l'est aussi.

On dit que deux quantités conservées sont en involution si elles commutent. On dit que le système est *intégrable* s'il admet "autant que possible" des quantités conservées *génériquement indépendantes* $f_1, f_2, ...$ en involution. Indépendance signifie que l'ensemble des points de M où les différentielles $df_1, df_2, ...$ sont linéairement indépendants est dense. Si M est de dimension $2n$, alors "autant que possible" veut dire exactement n fonctions. (On peut inclure H parmi les quantités conservées.)

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre de généralités et de rappels de géométrie symplectique.

2. Deuxième chapitre, consacré au théorème d'Arnold-Liouville.

Nous terminons par une petite conclusion, où nous indiquons les obstructions à l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens, à savoir la théorie de Galois différentielle.

À la fin, nous donnons comme bibliographie, une liste de documents qui nous ont servi à préparer ce mémoire.

Notation

V espace vectoriel.

ω forme symplectique.

M variété différentielle.

$C^{\infty}(M)$ fonction de classe C^{∞} de M dans $\mathbb{R}$.

$\Omega^k(M)$ espace des formes différentielles sur M de degré k.

X champ de vecteur.

X_f champ de vecteur hamiltonien associé à f.

$\langle .,. \rangle$ produit scalaire.

$\{.,.\}$ crochet de Poisson.

$[.,.]$ crochet de Lie.

G groupe de Lie.

$\mathcal{G}$ algèbre de Lie.

$\mathcal{G}^*$ espace vectoriel dual de $\mathcal{G}$.

df différentielle de f.

c valeur régulière d'une application.

ϕ_t flot local.

L_X dérivée de Lie.

T^n tore de dimension n.

S^n sphère de dimension n.

TM fibré tangent.

T^*M fibré cotangent.

Chapitre 1

Éléments de géométrie symplectiques

1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Soit V un espace vectoriel réel, de dimension finie. Une *forme symplectique* sur V est la donnée d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. le couple (V, ω) est alors appelé espace vectoriel symplectique.

Proposition 1.1.1 *Soit ω une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace vectoriel V de dimension finie. Il existe une base $(e_1, .., e_n, f_1, ..., f_n)$ (dite symplectique) telle que :*

$$\omega\left(e_i, f_i\right) = \delta_{i,j}, \ \ et\ \omega\left(e_i, e_j\right) = \omega\left(f_i, f_j\right) = 0.$$

Démonstration. Comme ω est non dégénérée, elle n'est pas nulle et on peut trouver deux vecteurs e_1 et f_1 tels que $\omega\left(e_1, f_1\right) = 1$. On vérifie que ω se restreint en une forme non dégénérée à l'orthogonal (pour ω) du plan $\langle e_1, f_1\rangle$ et on conclut par récurrence sur la dimension, après avoir remarqué qu'une forme bilinéaire alternée sur un espace de dimension 1 est nulle. ■

Exemple fondamental On munit le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la forme symplectique suivante :

$$\omega\left((q, p); (q', p')\right) = \langle p, q'\rangle - \langle p', q\rangle.$$

où $\langle\, , \,\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. La base canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est alors symplectique.

Définition 1.1.1 *Soient (V, ω) et (W, σ) deux espaces symplectiques. Un symplectomorphisme entre V et W est un isomorphisme f vérifiant :*

$$f^*\sigma = \omega.$$

Où f^* est le pull-back par f.

Définition 1.1.2 *Soit W un sous espace vectoriel d'un espace symplectique (V, ω). L'orthogonal symplectique de W, noté W°, est défini par :*

$$W^\circ = \{x \in V,\ \forall y \in W,\ \omega(x, y) = 0\}.$$

On a alors la relation :

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V,$$

car W° est isomorphe à

$$W^\perp = \{\varphi \in V^*,\ \forall y \in W,\ \varphi(y) = 0\}.$$

Définition 1.1.3 *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Un sous-espace vectoriel W de V est dit :*

1. *isotrope si $W \subset W^\circ$,*
2. *co-isotrope si $W^\circ \subset W$,*
3. *lagrangien si $W^\circ = W$,*
4. *symplectique si $W^\circ \cap W = \{0\}$.*

En particulier un espace isotrope, i.e. qui vérifie $W \subset W^\circ$ est de dimension au plus $\frac{dim(V)}{2}$.

Dans le cas où W est un espace isotrope de dimension $\frac{dim(V)}{2}$ on dit que W est un sous espace lagrangien.

Exemples.

1. Tout sous-espace de dimension 1 est isotrope ; tout sous-espace de codimension 1 est co-isotrope.

2. Un sous-espace W de (V, ω) est isotrope si et seulement si $orthW$ est co-isotrope.

3. Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique, $(e_1, ..., e_{2n})$ une base symplectique. Les sous-espaces engendrés par $(e_1, ..., e_n)$ et $(e_{n+1}, ..., e_{2n})$ sont lagrangiens, supplémentaires l'un de l'autre. Plus généralement, soit I une partie de $\{1, 2, ..., n\}$, et J son complémentaire. Le sous-espace engendré par les e_i, $i \in I$, et les e_{n+j}, $j \in J$, est lagrangien, ainsi que celui engendré par les e_{n+i}, $i \in I$, et les e_j, $j \in J$, et ces deux sous-espaces lagrangiens sont supplémentaires. Le sous-espace engendré par les e_i et les $e_{n+i}, i \in I$, est symplectique.

1.2 Variétés symplectiques

Une variété symplectique est la donnée d'un couple (M, ω), où M est une variété différentielle et ω est une 2-forme différentielle sur M, fermée (i.e. $d\omega = 0$) et non dégénérée (i.e. l'application $X \to i_X\omega$ est un isomorphisme entre le fibré tangent et cotangent de M).

Exemples.

1. $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$. Plus généralement, toute variété symplectique de dimension $2n$ est localement isomorphe à la variété ci-dessus (Théorème de Darboux).

2. Le fibré cotangent T^*M, d'une variété différentielle M, est munie d'une structure symplectique canonique.

3. La sphère S^2 est la seule sphère (de dimension non nulle) qui possède une structure symplectique. Plus généralement, une variété compacte M (de dimension $2n$) qui possède une structure symplectique doit avoir $H^{2k}(M) \neq 0$, $k = 1, ..., n$, (ω^k ne peut être exacte, grâce au Théorème de Stokes).

4. Les orbites de l'action co-Adjointe d'un groupe de Lie G sur $\mathcal{G}^*$, le dual de son algèbre de Lie, sont des variétés "canoniquement" symplectiques. Plus généralement, toute variété de Poisson est partitionnée en sous-variétés symplectiques.

1.3 Théorème de Darboux

Théorème 1.3.1 *Soient* (V, ω) *une variété symplectique et* $x \in V$*. Alors il existe des coordonnées locales* $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ *centrées en* x *dans lesquelles* $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$*.*

Démonstration. Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $f : U \to W$ une carte centrée en x sur U, Considérons deux formes symplectique

1. la forme $f^*\omega$.

2. et la forme constante $(f^*\omega)_0$.

Par définition, elles coïncident en 0. Le théorème affirme qu'elles sont difféomorphes. Les coordonnées $(q_1, ..., q_n.p_1, ..., p_n)$ dans une base symplectique pour $(f^*\omega)_0$, transportées par ψ.

■

Ce résultat est donc très utile puisqu'il permet de toujours se ramener localement au cas canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ quelque soit la variété symplectique considérer.

1.4 Mécanique hamiltonienne

Nous rappelons maintenant quelques rudiments de mécanique hamiltonienne. On se place dans le cas d'une variété symplectique (V, ω) de dimension $2n$.

On a vu précédemment qu'à l'aide de ω on peut construire une bijection canonique entre le plan tangent en un point de V et les formes linéaires sur ce plan tangent. Cette bijection permet la définition du champ hamiltonien associé à une fonction.

Définition 1.4.1 *Soit* H *une fonction réelle* C^∞*sur* V*. On lui associe le champ de vecteurs* X_H*, dit champ de vecteurs de hamiltonien* H*, défini par la relation :*

$$\forall (x, Y) \in V \times T_x V, \omega_x (Y, X_H (x)) = (dH)_x (Y) .$$

On appelle alors système hamiltonien, tout système défini par une relation de la forme :

$$\dot{x}(t) = X_H (x (t)) .$$

Expression dans les coordonnées locales : En coordonnées locales (p, q) telles que $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, l'expression suivante :

$$X_H (q, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)$$

Le système hamiltonien associé s'exprime donc sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{q}_i\left(t\right)=\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i\left(t\right)=\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right.$$

Exemples de systèmes hamiltoniens :

— L'oscillateur harmonique : Dans R^2 on prend pour hamiltonien la fonction : $H\left(q,p\right)=\frac{a^2q^2+p^2}{2}$. Le système hamiltonien associé est alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{q}(t)=p \\ \dot{p}(t)=-a^2q \end{array} \right.$$

Ce système se simplifie alors en : $\ddot{q}+a^2q=0$ i.e. l'oscillateur harmonique. On peut aussi créer des oscillateurs harmonique en plus grande dimension en prenant comme hamiltonien la fonction $H=\frac{1}{2}\sum\limits_i a_i^2q_i^2+p_i^2$.

— Le pendule simple : On considère cette fois l'hamiltonien : $H\left(q,p\right)=\frac{1}{2}p^2-\cos q$. Le système hamiltonien associé est alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{q}(t)=p \\ \dot{p}(t)=-\sin\left(q\right) \end{array} \right.$$

Ce système étant alors équivalent à : $\ddot{q}=-\sin(q)$ i.e. le pendule simple.

Une propriété fondamentale des solutions d'un système hamiltonien est la conservation de la fonction H le long des trajectoires :

Proposition 1.4.1 *soit* $(q,p):t\to\left(q\left(t\right),p\left(t\right)\right)$ *une solution du système hamiltonien associé à* H *avec* $\left(q\left(t_0\right),p\left(t_0\right)\right)=\left(q_0,p_0\right)$. *Alors pour tout* t *dans l'intervalle d'existence de la solution :*

$$H\left(q\left(t\right),p\left(t\right)\right)=H\left(q_0,p_0\right).$$

En particulier, les trajectoires du système hamiltonien sont contenues dans les courbes de niveaux de H.

Démonstration. Il suffit en fait d'observer que la dérivée par rapport à t la fonction est nulle. En effet, en coordonnées locales on a la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H\left(q\left(t\right),p\left(t\right)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{dq_i}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{dp_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Cette propriété pourra à l'inverse permettre de trouver une formulation hamiltonienne de certains problème physique. Par exemple via la loi de conservation de l'énergie en physique.

Enfin, un dernier outil important en mécanique hamiltonienne est le crochet de Poisson qui à deux fonctions réelles sur une variété symplectique associe une troisième fonction réelle.

Nous utiliserons dans la suite ce système de coordonnées dit canonique ou symplectique.

Lemme 1.4.1 *Soit $f \in C^\infty(M)$. Il existe un unique champ de vecteurs X_f sur M tel que :*

$$\boxed{i_{X_f}(\omega) = df}$$

Démonstration. L'unicité est évidente : si $i_X\omega_x = i_Y\omega_x$ alors pour tout Z $\omega_x(X-Y,Z) =$ et donc, ω_x étant non dégénérée, $X = Y$.
L'application $\omega_x : T_xM \to T_x^*M$, $X \mapsto i_X\omega$ est un isomorphisme donc pour tout $x \in X$ il existe $X_f(x) \in T_xM$ tel que $i_{X_f(x)}\omega_x = d_xf$. Ainsi il existe une unique section $X_f : M \to TM$ telle que pour tout x $i_{X_f(x)}\omega_x = d_xf$. Exprimons X_f dans le système de coordonnées symplectiques :

$$X_f = \sum_{i=1}^n Q_i dq_i + P_i dp_i$$

donc :

$$\begin{aligned} df &= i_{X_f}\omega \\ &= \sum_{i=1}^n \omega(X_f, \frac{\partial}{\partial q_i})dq_i + \omega_x(X_f, \frac{\partial}{\partial p_i})dp_i \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i dp_i - P_i dQ_i \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} Q_i(x) = \frac{\partial f}{\partial p_i}(x) \\ P_i(x) = -\frac{\partial f}{\partial q_i}(x) \end{cases}$$

Ainsi, f étant lisse au voisinage de x, Q_i et P_i sont lisses au voisinage de x pour tout x : $X_f : M \to TM$ est une section lisse i.e. un champ de vecteurs. ■

Remarque 1.4.1 *X_f s'écrit dans un système de coordonnées symplectiques :*

$$\boxed{X_f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}}$$

Définition 1.4.2 *Soient f, g deux fonctions sur une variété symplectique V à valeurs réelles. Le crochet de Poisson du couple (f, g), noté $\{f, g\}$ est la fonction définie par :*

$$\{f, g\} = -\omega\left(X_f, X_g\right) = dg\left(X_f\right) = X_f.g.$$

où, X_f est le champ hamiltonien associé à f et dg est la différentielle de g.

De part sa définition, on peut interpréter le crochet de Poisson comme étant la dérivée de g le long du flot du champ X_f . De part sa définition, on peut interpréter le crochet de Poisson comme étant la dérivée de g le long du flot du champ X_f .

Expression dans les coordonnées locales :$\{f, g\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$.

A l'aide de l'expression locale on déduit un certain nombre de propriétés essentielles du crochet de Poisson :

Proposition 1.4.2

1. *Antisymétrie $\{f, g\} = -\{g, f\}$.*
2. *Dérivation $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.*
3. *Identité de Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.*
4. *Relations sur les coordonnées locales $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.*

L'identité de Jacobi permet de démontrer un résultat important pour l'étude des systèmes hamiltoniens en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux champs hamiltoniens commutent.

Proposition 1.4.3 *Soit f, g deux hamiltoniens sur une variété symplectique (V, ω) Alors on a la relation :*

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

où $[.,.]$ désigne le crochet de Lie entre deux champs de vecteur. En admettant le résultat classique que deux champs commutent si et seulement si leurs crochet de Lie est nul (voir [2]) alors ceci peut être reformulé par le fait que deux champs hamiltoniens commutent si et seulement si le crochet de Poisson des hamiltoniens est nul.

Démonstration. Soit h un hamiltonien sur (V,ω). On va montrer que $\left[X_f, X_g\right].h = X_{\{f,g\}}.h$. La fonction h étant quelconque on aura bien l'égalité voulue.

$$\begin{aligned}
\left[X_f, X_g\right].h &= X_f\left(X_g.h\right) - X_g\left(X_f.h\right) \\
&= X_f.\left\{g.h\right\} - X_g.\left\{f.h\right\} \\
&= \left\{f, \left\{g, h\right\}\right\} - \left\{g, \left\{f, h\right\}\right\} \\
&= \left\{f, \left\{g, h\right\}\right\} + \left\{g, \left\{h, f\right\}\right\} \\
&= -\left\{h, \left\{f, g\right\}\right\} \\
&= \left\{\left\{f, g\right\}, h\right\} \\
&= X_{\{f,g\}}.h.
\end{aligned}$$

■

De plus la dernière propriété de la proposition (1.4.2) caractérise les coordonnées adaptées à la forme symplectique :

Proposition 1.4.4 *Un système de coordonnées (x,ξ) sur V sera dit symplectique si $\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$. Ceci est équivalent aux relations :*

$$\left\{x_i, x_j\right\} = \left\{\xi_i, \xi_j\right\} = 0, \left\{\xi_i, x_j\right\} = \delta_{ij}.$$

Démonstration. Il est immédiat que si $\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$ alors on a les relations entre les crochets de Poisson. Si on a les relations entre les crochets de Poisson. La forme symplectique dans la base (x,ξ) sera de la forme :

$$\omega = \sum_{i<j}\left(\alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j + \beta_{ij} d\xi_i \wedge d\xi_j\right) + \sum_{i,j} \gamma_{ij} dx_i \wedge d\xi_j.$$

On va montrer que cette expression se réduit à l'expression voulue pour ω. Pour cela on va évaluer cette expression sur les couples des vecteurs X_{x_i} et X_{ξ_i}.

Soient $k < l$, on a d'une part $\omega\left(X_{x_k}, X_{x_l}\right) = \left\{x_k, x_l\right\} = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
dx_i \wedge dx_j\left(X_{x_k}, X_{x_l}\right) &= \begin{vmatrix} dx_i\left(X_{x_k}\right) & dx_j\left(X_{x_k}\right) \\ dx_i\left(X_{x_l}\right) & dx_j\left(X_{xl}\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \left\{x_k, x_i\right\} & \left\{x_k, x_j\right\} \\ \left\{x_l, x_i\right\} & \left\{x_l, x_j\right\} \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De la même façon on vérifie les relations $d\xi_i \wedge d\xi_j \left(X_{x_k}, X_{x_l}\right) = \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}$ et $dx_i \wedge d\xi_j \left(X_{x_k}, X_{x_l}\right) = 0$.

Finalement $0 = \omega \left(X_{x_k}, X_{x_l}\right) = \sum_{i<j} \beta_{ij} \left(\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}\right) = \beta_{kl}$.Cette égalité étant vraie pour tout $k < l$.

De la même façon on montre que $\alpha_{kl} = 0$ pour tout $k < l$ en évaluant cette fois sur le couple $\left(X_{\xi_k}, X_{\xi_l}\right)$.

Finalement on évalue sur les couples de la forme $\left(X_{x_k}, X_{\xi_l}\right)$. On en déduit alors que $\gamma_{kl} = \delta_{kl}$ pour tout (k, l).

Ainsi, $\omega = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$. ■

Ajoutons maintenant un résultat qui sera très utile pour la suite. Ce résultat permet d'avoir une autre écriture d'un crochet de Poisson à l'aide d'un nouveau système de coordonnées.

Proposition 1.4.5 *(Changement de variables). Soient f, g deux fonctions réelles sur (V, ω) une variété symplectique avec $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Soient $(I.\varphi)$ un autre système de coordonnées locales. Alors :*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial I_i} \{f, I_i\} + \frac{\partial g}{\partial \varphi_i} \{f, \varphi_i\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial I_i} \{I_i, g\} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \{\varphi_i, g\}.$$

Démonstration. On passe en coordonnées locales, puis on utilise une formule de changement de variables dans les dérivées partielles.

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \right) \frac{\partial g}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial f}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \right) \frac{\partial g}{\partial p_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial I_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I_k}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial I_k}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial I_k} \{I_k, g\} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \{\varphi_k, g\}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Théorème d'Arnold-Liouville

Abordons désormais l'un des premiers points important de ce mémoire de ce mémoire, l'énoncé et la démonstration du Théorème d'Arnold-Liouville qui en substance décrit le comportement d'une certaine classe de système hamiltonien. Définissons d'abord cette classe de système.

Dans la suite de cette section nous nous placerons dans le cas d'une variété symplectique (V, ω)de dimension $2n$.

2.1 Systèmes intégrables

Le hamiltonien H est constant le long des trajectoires du système hamiltonien qu'il définit. Ceci s'écrit :

$$X_H.H = 0 \text{ ou } dH\left(X_H\right) = 0.$$

On dit que H est une intégrable première du système. Plus généralement, une fonction $f : W \to \mathbb{R}$ qui est constante sur les trajectoires d'un champ de vecteurs X est appelée une intégrable première. Dans le cas d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H, l'égalité $X_H.f = 0$ équivaut à $\{f, H\} = 0$.

On dit qu'un système hamiltonien est complètement intégrable s'il a autant d'intégrales premières en involution que possible .

Définition 2.1.1 *Le champ hamiltonien X_H sur la variété symplectique W de dimension $2n$ est dit complètement intégrable s'il possède n intégrables premières indépendantes en involution.*

Exemple 2.1.1 *Sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec la forme symplectique standard, tout hamiltonien ne dépendant que des coordonnées p_i,*

$$H = H(p_1, ..., p_n)$$

est complètement intégrable : les fonctions p_i sont des intégrables premières indépendantes en involution.

Tout système hamiltonien sur une surface est complètement intégrable. De même, un système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 4 est intégrable si et seulement s'il possède une deuxième intégrable premières .

2.2 Théorème d'Arnold-Liouville 1

Définition 2.2.1 *Un système hamiltonien (H, ω) sur une variété symplectique (M^{2n}, ω) est intégrable au sens de Liouville ou complètement intégrable si il existe des fonctions lisses $H_1, \ldots, H_n$ sur M telles que :*

1. $H_1 = H$
2. $\{H_i, H_j\} = 0$ *pour tout* $i, j = 1 \ldots n$.
3. *il existe un ouvert dense W de M tel que pour tout $x \in W$ $d_xH_1, \ldots, d_xH_n$ sont linéairement indépendantes.*

Remarque 2.2.1 *On note $\bar{H} = (H_1, \ldots, H_n) : M \to \mathbb{R}^n$. Une valeur régulière de $\bar{H}$ et un élément c de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{H}^{-1}(c) \subset W$. Comme $H : W \to \mathbb{R}^n$ est une submersion lorsque c est une valeur régulière $\bar{H}^{-1}(c)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension n et d'espace tangent*

$$T_x\bar{H}^{-1}(c) = Kerd_x\bar{H} = \bigcap_{i=1}^{n} d_xH_i$$

Soit (H, ω) un système hamiltonien complètement intégrable et $\bar{H} : M \to \mathbb{R}^n$ l'application associée.

Théorème 2.2.1 (Arnold-Liouville 1) *Si c est une valeur de $\bar{H}$ et $\bar{H}^{-1}(c)$ est compact alors les composantes connexes de $\bar{H}^{-1}(c)$ sont des tores $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.*

Démonstration. Supposons que $\bar{H}^{-1}(c)$ est connexe. Soit $X_i = X_{H_i} : i_{X_i} = -dH_i$.

1. $dH_i(X_j) = \{H_j, H_i\} = 0$ donc $X_j \in KerdH_i$ pour tout i. Autrement dit pour tout $x \in \bar{H}^{-1}(c)$, $X_i(x) \in T_x\bar{H}^{-1}(c)$.

2. Montrons que $[X_i, X_j] = 0$:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j]_x(f) &= X_i(x)(X_j(f)) - X_j(x)(X_i(f)) \\ &= X_i(x)(\{H_j, f\}) - X_j(x)(\{H_i, f\}) \\ &= \{H_i, \{H_j, f\}\} - \{H_j, \{H_i, f\}\} \\ &= \{H_i, \{H_j, f\}\} + \{H_j, \{f, H_i\}\} \\ &= \{f, \{H_j, H_i\}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. les dH_i étant linéairement indépendant les X_i sont linéairement indépendants

Ainsi $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'algèbre de Lie $D(\bar{H}^{-1}(c))$ et cette algèbre de Lie est commutative. Notons ϕ_i le flot de X_i considéré comme un champ de vecteurs sur $\bar{H}^{-1}(c)$ (qui est complet i.e. défini sur $\mathbb{R}$ puisque $\bar{H}^{-1}(c)$ est compact). On peut montrer que l'action de $\mathbb{R}^n$ sur $\bar{H}^{-1}(c)$ définie par :

$$\lambda((t_1, \ldots, t_n), x) = \phi_1(t_1, \phi_2(t_2, (\ldots, (\phi_n(t_n, x)) \ldots)))$$

est transitive. Dès lors cette action à une seule orbite : $\bar{H}^{-1}(c)$. Et donc $\bar{H}^{-1}(c)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n/G_x$ où $G_x = \{t \in \mathbb{R}^n : \ \lambda(t, x) = x\}$ pour un point donné x de $\bar{H}^{-1}(c)$. On peut montrer que $\mathbb{R}^n/G_x$ est séparé et compact si et seulement si G_c est discret i.e. isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. D'où le résultat. ■

2.3 Théorème d'Arnold-Liouville 2

Soit (H, ω) un système hamiltonien complètement intégrable et $\bar{H} : M \to \mathbb{R}^n$ l'application associée.

Lemme 2.3.1 (Guillemin-Sternberg) *Si c est une valeur régulière de $\bar{H}$ et $\bar{H}^{-1}(c)$ est compact alors il existe un voisinage ouvert U de c tel que $\omega|_{\bar{H}^{-1}(U)}$ est exacte.*

Démonstration. Un théorème de topologie différentielle nous dit qu'il existe un voisinage ouvert U de c et un champ de vecteurs X sur M tel que

1. le flot ϕ de X est défini sur $I = [0, 1]$ pour tout point x de $\bar{H}^{-1}(U)$
2. $\phi_1(\bar{H}^{-1}(U)) = \bar{H}^{-1}(c)$

On a :

$$\phi_1^*(\omega) - \phi_0^*(\omega) = \int_0^1 \frac{d}{ds}(\phi_s^*(\omega))_{s=t} dt$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\phi_t^*(L_X\omega) &= \phi_t^*(\lim_{s\to 0} \frac{\phi_s^*(\omega) - \omega}{s}) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\phi_{s+t}^*(\omega) - \phi_t^*(\omega)}{s} \\
&= \frac{d}{ds}(\phi_s^*(\Omega))_{s=t}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\phi_1^*(\omega) - \phi_0^*(\omega) = \int_0^1 \phi_t^*(L_x\omega) dt$$

Or $L_X\omega = i_X d\omega + d i_X \omega = d i_X \omega$. De plus $\phi_0^*(\omega)$. Et donc :

$$\phi_1^*(\omega) = \omega - d\rho$$

avec $\rho = -\int_0^1 \phi_t^*(i_X\omega) dt$. Mais $\phi_1(\bar{H}^{-1}(U)) = \bar{H}^{-1}(c)$ et $\omega|_{\bar{H}^{-1}(c)} = 0$ (puisque $\omega(X_i, X_j) = 0$ et que tout champ de vecteur sur $\bar{H}^{-1}(c)$ est combinaison linéaire des X_i). Dès lors :

$$\phi_1^*(\omega)|_{\bar{H}^{-1}(U)} = \phi_1^*(\omega|_{\bar{H}^{-1}(c)}) = 0$$

et donc $(\omega - d\rho)|_{\bar{H}^{-1}(U)} = 0$. ■

Théorème 2.3.1 (Arnold-Liouville 2) *Sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$ le flot de H_i est linéaire et s'écrit dans le système de coordonnées $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $T^n = \bar{H}^{-1}(c)$:*

$$\phi_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\varphi_1 + \omega_{i1}t, \ldots, \varphi_n + \omega_{in}t)$$

Démonstration. Considérons le revêtement universel $\tilde{H} \xrightarrow{\pi} \bar{H}^{-1}(U)$. Nous admettrons qu'il existe des fonctions lisses $U_1, \ldots, U_n$ sur U telles que $(H_1, \ldots, H_n, U_1, \ldots, U_n)$ soit un système de coordonnées locales de $\bar{H}$. Notons dorénavant $\omega = \omega|_{H}^{-1}(U)$. Considérons $\bar{H}^{-1}[U)$ comme contenu dans son revêtement universel (localement par une section triviale). Modulo ces identifications ω s'écrit dans ces coordonnées :

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dH_i \wedge dH_j + b_{ij} dH_i \wedge dU_j + c_{ij} dU_i \wedge dU_j$$

X_i s'écrit :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial}{\partial H_j} + B_{ij} \frac{\partial}{\partial U_i}$$

Mais $dH_j(X_i) = \{H_j, H_i\} = 0$ donc $A_{ij} = 0$ pour tout i, j. Donc :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \frac{\partial}{\partial U_i}$$

La matrice B des $B_{ij} = dU_j(X_i)$ est la matrice de l'application linéaire qui envoie la famille libre des $\frac{\partial}{\partial U_i}$ sur la famille libre des X_i. Donc B est inversible. De plus :

$$\begin{aligned}
-dH_i &= i_{X_i}\omega \\
&= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} dH_k + \sum_{u,v=1}^{n} c_{uv}(B_{iu} dU_v - B_{iv} dU_u) \\
&= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} dH_k + \sum_{v=1}^{n} (\sum_{u=1}^{n} c_{uv} B_{iu}) dU_v \quad \text{car } c_{uv} = -c_{vu}
\end{aligned}$$

Donc pour tout i et tout v :

$$\sum_{u=1}^{n} B_{iu} c_{uv} = (BC)_{iv} = 0$$

où C est la matrice des c_{uv}. Donc $BC = 0$ et donc comme B est inversible $C = 0$. Autrement dit pour tout couple i, j, $c_{ij} = 0$. Donc :

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dHi \wedge dH_j + b_{ij} dH_i \wedge dU_j$$

Mais d'après le lemme de Guillemin-Sternberg $\omega = d\rho$ sur $H^{-1}(U)$. ρ s'écrit dans les coordonnées (H_i, U_i) :

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} A_i dH_i + B_i dU_i$$

Donc

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i=1}^{n} dA_i \wedge dH_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial H_j} dH_i \wedge dU_j + \frac{\partial B_i}{\partial U_j} dU_i \wedge dU_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} dA_i \wedge dH_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial H_j} dH_i \wedge dU_j + \sum_{i<j} (\frac{\partial B_i}{\partial U_j} - \frac{\partial B_j}{\partial U_i}) dU_i \wedge dU_j\end{aligned}$$

et donc pour tout i, j $\frac{\partial B_i}{\partial U_j} = \frac{\partial B_j}{\partial U_i}$. Donc il existe une fonction S telle que $B_i = \frac{\partial S}{\partial U_i}$. dS s'écrit :

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial H_i} dH_i + B_i dU_i$$

donc

$$\rho - dS = \sum_{i=1}^{n} (A_i - \frac{\partial S}{\partial H_i}) dH_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dH_i$$

et donc :

$$\omega = d\rho = d(\rho - dS) = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dH_i$$

avec $p = \rho - dS$.

Soit $\gamma_1(c), \ldots, \gamma_n(c)$ les n cercles générateurs du tore $\bar{H}^{-1}(c)$. Posons $I_i = (\int_{\gamma_i(c)} p) \circ \pi$. A priori I_i sont des fonctions de H_j et p_j. Mais on a intégré les variables p_j. Donc $I_i = I_i(H_1, \ldots, H_n)$. Posons $S_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial H_j}$ et soit S la matrices des S_{ij}. On peut vérifier que :

$$S_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial H_j} = \int_{\gamma_i(c)} p_j$$

$S = S(H_1, \ldots, H_n)$ donc sur $\bar{H}^{-1}(c)$ S est constante. Nous admettrons qu'elle est inversible. Soit $S^{ij} = (S^{-1})_{ij}$. On a :

$$dI_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} dH_j$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} S^{ik} dI_k = \sum_{k,j=1}^{n} S^{ik} S_{kj} dH_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dH_j = dH_i$$

Dès lors :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dH_i = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} S^{ij} dp_i) \wedge dH_j$$

Posons alors $\varphi_j = \sum_{i=1}^n S^{ij} dp_i$. Dans ce système de coordonnées ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\varphi_i \wedge dI_i$$

De plus :

$$\int_{\gamma_i c} \varphi_j = \sum_{k=1}^n S^{kj} \int_{\gamma_i(c)} p_k = \sum_{k=1}^n S^{kj} S_{ik} = \delta_{ij}$$

Ceci montre que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système de coordonnées sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$.

Soit ϕ_i le flot de X_i : $\phi_i = (\varphi_j^i, I_j^i)_{j=1}^n$:

$$i_{X_i}\omega = \sum_{j=1}^n d\varphi_j(X_i) dI_j - dI_j(X_i) d\varphi_j = \sum_{j=1}^n \dot{\varphi}_j^i dI_j - \dot{I}_j^i d\varphi_j$$

Mais :

$$i_{X_i}\omega = dH_i = \sum_{j=1}^n S^{ij} dI_j$$

Donc le long du flot :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_j^i = S^{ij} = \omega_{ij} = \text{ constant sur le tore} \\ \dot{I}_j^i = 0 \end{cases}$$

et donc le flot s'écrit sur le tore :

$$\phi_i(t, (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = (\varphi_1 + \omega_{i1} t, \ldots, \varphi_i + \omega_{in} t)$$

■

2.4 Coordonnées Action-angle

Définition 2.4.1 *Les coordonnées I_i sont appelées les actions du système et les 1-formes $d\varphi_i$ les angles du système associées aux générateurs $\gamma_i(c)$ du tore $\bar{H}^{-1}(c)$.*

La matrice S est la matrice des période tandis que la matrice $S^{-1} = (\omega_{ij})$ est la matrice des fréquences.

On a "démontré" le théorème dit Action-angle

Théorème 2.4.1 *Si c est une valeur régulière et $\bar{H}^{-1}(c)$ il existe un voisinage ouvert U de c et des fonctions sur $H^{-1}(U)$ $I_1, \ldots I_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ telles que*

$$\omega|_{\bar{H}^{-1}(U)} = \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\varphi_i$$

De plus les flots des H_i sont linéaires sur le tore $\bar{H}^{-1}(c)$ et vérifient les équations d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{I}_j = \frac{\partial H_i}{\partial \varphi_j} = 0 & \forall\ i, j \\ \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H_i}{\partial I_j} = \omega_{ij} = \ cst & \forall\ i, j \end{cases}$$

Conclusion

La résolution d'un système hamiltonien intégrable, peut se faire par quadrature (i.e. par un nombre fini d'intégrations et d'opérations algébriques). L'intégrabilité peut être étudiée à l'aide de la théorie de Galois différentielle (voir [2]) ; question qui pourra être la continuité de ce travail.

Bibliographie

[1] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[2] M. Audin, *Les systèmes hamiltoniens et leurs intégrabilité*, EDP Sciences, 2001.

[3] M . Audin, A. Cannas da Silva, E. Lerman, *Symplectic Geometry of Integrable Hamiltonian Systems*. Birkhäuser, 2003.

[4] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer 2008.

[5] R.H. Cushman, L.M. Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Springer 2015.

[6] J.J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Commun. Pure Appl. Math. 33, 687, 1980.

[7] A. Knauf, *Mathematical Physics : Classical Mechanics*. Springer 2018.

[8] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer 2012.

[9] P. Libermann, Ch-M Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Springer 1987.

Résumé

Un système hamiltonien est la donnée d'un triplet (M,w,H), où (M,w) est une variété symplectique (de dimension 2n) et H est une fonction lisse sur M. Le système est dit intégrable s'il existe un n-uplet $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'intégrales premières en involution dont les différentielles sont génériquement indépendantes.

Le Théorème d'Arnold-Liouville affirme que si l'application moment F est propre et régulière alors ses fibres sont des tores (une fibration lagrangienne) et il existe des coordonnées action-angle qui linéarisent le système hamiltonien.

Nous nous intéressons à la construction de fibrations lagrangiennes associées aux systèmes intégrables et aux idées qui sont derrière le Théorème d'Arnold-Liouville et sa démonstration.

Mots clefs : systèmes hamiltoniens intégrables, fibration lagrangienne, application moment.

Abstract

An hamiltonian system is the given of a triple (M,w,H), where (M,w) is a symplectic manifold (of dimension 2n) and H is a smooth function on M. The system is said to be integrable if there exists a n-uplet $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ of first integrals in involution whose differentials are generically independent.

Arnold-Liouville's Theorem asserts that if the moment map F is proper and regular then its fibers are tori (a Lagrangian fibration) and there exist action-angle coordinates that linearize the hamiltonian system. We are interested in the construction of Lagrangian fibrations associated with integrable systems and ideas that are behind the Arnold-Liouville theorem and its demonstration.

Keywords : integrable hamiltonian systems, lagrangian fibration, moment map.