UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences de la Matière

N° d'ordre :
N° de série :

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Algébre et Géométrie

Par : BOUGOFFA Abdelfattah

Théme

Les groupes libres et moyannebles

Soutenu publiquement le : 06/06/2018

Devant le jury composé de :

GUERBOUSSA Yassine	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Président
BAHAYOU Mohamed Amine	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
BENMOUSSA Mohamed Tayeb	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Examinateur
BOUSSAID Mohamed	M.A. Université KASDI Merbah- Ouargla	Rapporteur

Remerciements

Je remercie vivement mon encadreur, **Mr : Mohammed BOUSSAID**, pour nous avoir proposé ce sujet d'actualité assez passionnant ; sa patience et son organisation nous ont permis de surmonter de nombreuses difficultés liées à ce travail.

Je tene à lui exprimer nos sincères déférences pour son encadrement. Merci également à tous ceux qui ont contribué à notre formation spirituelle. Notre gratitude s'adresse également à tous ceux qui, de loin ou de prés, ont participé à la réalisation de ce travail. Nous tenons aussi à remercier toute l'équipe pédagogique pour nous avoir transmis leur savoir tout au long de notre cycle d'étude.

Je remercie sincèrement les membres du jury et également les membres du département de Mathématique et Informatique de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail.

Résumé

Ce travail comprend trois chapitres :

Le premier chapitre concerne certaines notions et définitions essentielles des groupes comme par exemple celle de groupe libre, d'équid écomposabilité, l'actions des groupes d'isométrie sur ensembles.

Le deuxième : Puisque nous allons montrer qu'il existe une mesure issue de la mesure de Lebesgue définie sur tout R^2, pour parvenir, nous avons besoin de la définition d'une algèbre de Boole, ainsi que quelques propriétés élémentaires, ceci fait l'objet de ce chapitre.

Le chapitre 2 nous donne les outils pour pouvoir construire une extension de la mesure de Lebesgue définie sur R^2. En particulier pour démontrer le théorème qui étend sur une algèbre de Boole une mesure définie sur un de ses sous-anneaux. Nous savons que $(P(R^2), \cap, \cup, \complement)$ est une algèbre de Boole et que les ensembles Lebesgue-mesurables forment un sous-anneau de cette algèbre sur lequel est définie la mesure de Lebesgue.

Le troisième chapitre traite : $G(2)$ est un groupe d'automorphismes pour lequel la mesure de Lebesgue est invariante, d'où, si $G(2)$ est moyennable , il existe une mesure exhaustive sur R^2 , $G(2)$- invariante, finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue. Montrons ainsi, que le groupe $G(2)$ est moyennable. Pour ça nous prouvons, d'une part, que tout groupe commutatif est moyennable et, d'autre part, que si N est un sousgroupe normal d'un groupe G tel que N et G/N sont moyennables, alors G est moyennabl

---

Abstract

This work includes three chapters :

The first chapter concerns some basic notions and definitions of groups as for example that of free group, of equid ecomposability, the action of groups of isometrics on sets.

The second : Since we are going to show that there is a measure from the measurement of Lebesgue defined on all R^2 to reach, we need the definition of an algebra of Boole, as well as some elementary properties, this is the subject of this chapter.

Chapter 2 : gives us the tools to build an extension of the measurement of Lebesgue set to R^2 . In particular to demonstrate the theorem that extends over an algebra of Boole a measure defined on one of his sub-rings. We know that $(P(R^2), \cap, \cup, \complement)$ is a Boolean algebra and that the Lebesgue-measurable sets form a sub-ring of R^2 this algebra on which is defined the measure of Lebesgue.

The third chapter : deals with : $G(2)$ is a group of automorphisms for which the measure Lebesgue is invariant, hence, if $G(2)$ is amenable, there is an exhaustive measure of R^2, $G(2)$ - invariant, finitely additive that extends the measure of Lebesgue. Let's show that the Group $G(2)$ is amenable. For that we prove, on the one hand, that any commutative group is amenable and, on the other hand, that if N is a normal subgroup of a group G such as N and G/N are amenable, so G is amenable.

Table des matières

Introduction

Tout borné d'intérieur non vide de l'espace euclidien de dimension trois peut être découpé en un nombre fini de morceaux de sorte que, en réarrangeant par des isométries, on peut le dédoubler. Il s'agit d'un des résultats les plus troublants en mathématiques.

Un ensemble qui a cette propriété est dit paradoxal sous l'action du groupe des isométries ; le but de cette mémoire est la collecte des outils pour l'étude des ensembles paradoxaux d'une manière générale.

Nous pouvons mentionner que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de la nature de l'ensemble mais des propriétés du groupe agissant sur lui. Par exemple, si un groupe libre possè de deux éléments indépendants et agit librement sur un ensemble alors l'ensemble est paradoxal.

L'existence de ces ensembles est contre-intuitive(d'où leurs nom), puisque nous avons l'idée de conservation de l'aire (la mesure d'un ensemble est égal à la somme des mesures de ses sous-parties).

De la, l'explication possible à l'existence de tel ensemble est qu'on ne sait pas associer une mesure à certains ensembles intervenant dans la décomposition. Autrement dit,certains de ces sous-ensembles sont non mesurables. Cela montre que l'étude des ensembles paradoxaux est étroitement liée à la théorie de la mesure.

Chapitre 1

Rappels et notions de base.

1.1 les groupes libres :

Dans cette section, nous introduisons la notion de groupe libre ainsi que quelques propriétés s'y rapportant. Pour le lecteur avide d'en savoir plus, nous conseillons Pour commencer, rappelons quelques généralités sur les groupes.

Définition 1.1.1 *Soient G un ensemble et $\circ : G \times G \to G$ une opération binaire et interne sur G. Le couple $(G;\circ)$ est un groupe si*

(i) $\forall x; y; z \in G$ *;* $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ *(i.e. l'op ération est associative) ;*

(ii) $\exists e \in G; \forall x \in G$ *tel que* $x\circ\ e = x = e \circ x$ *(i.e. il existe un unique neutre pour noté e) ;*

(iii) $\forall x \in G; \exists y \in\ G$ *tel que* $x \circ y = e = y \circ x$ *(i.e. chaque élément* $x \in G$ *possède un unique inverse que l'on note* x^{-1}*).*

De plus, si pour tous $x; y \in G$ *ona* $x \circ y = y \circ x$*, on dit que le groupe* $(G;\circ)$ *est commutatif. Par abus de langage, on notera* G *le groupe* $(G;\circ)$*.*

Pour fixer les notations, donnons quelques exemples de groupe qu'on utilisera tout au long de ce mémoire. Les vérifications sont immédiates.

Exemple 1.1.1 *1. Une isométrie de R^n est une bijection $f : R^n \to R^n$ qui préserve les distances, c'est à dire telle que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous $x; y \in R^n$. L'ensemble des isométries. est un groupe avec la lois $\circ$ des composition des applications.*

Définition 1.1.2 *Soient $(G; \circ)$ un groupe et $H \subseteq G$. Si $H \neq \phi$ et H est stable pour $\circ$ et pour le passage à l'inverse alors H est un sous-groupe de G.*

Remarque 1.1.1 *Il est clair que l'intersection de sous-groupes est encore un sous-groupe.*

Dès lors, si $X \subseteq G$ alors le plus petit sous-groupe de G contenant X est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X. On dit que c'est le sous-groupe engendré par X et on le note $\langle X \rangle$. On vérifie facilement qu'on a :

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \circ ....x_n^{\varepsilon_n} / n \in N_{0;} x_i \in X \quad et\ \varepsilon_i = \pm 1\ \forall i \in \{1....n\} \quad \}.$$

Si $G = \langle X \rangle$ alors on dit que X engendre G ou de façon équivalente que X est une partie génératrice de G.

Exemple 1.1.2 *On sait que si $A \in O(n)$ alors l'endomorphisme associé est lui-même orthogonal, c'est-à-dire qu'il conserve le produit scalaire et est donc une isométrie. Donc $O(n)$ est un sous-groupe de$G(n)$. Il est clair que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$ et par conséquent de $G(n)$. A présent, nous allons rappeler la notion d'action de groupe qui sera constamment utilisée dans la suite.*

Définition 1.1.3 *Soit X un ensemble. Une action du groupe G sur l'ensemble X est la donnée d'une application :*

$$G \times X \to X$$

$$(g, x) \longmapsto g \cdot x$$

satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $e \cdot x = x$

(ii) $(g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ *pour tout $x \in X$ et pour tous $g; h \in G$.*

S'il existe une telle application on dit que le groupe G agit sur l'ensemble X. On pose

$$g : X \to X$$

$$x \mapsto g\ \ (x) = g \cdot x$$

pour tout $g \in G$. On vérifie facilement que l'application $g : X \to X$ est une bijection dont l'inverse est donné par g^{-1}. Il est important de bien garder en mémoire l'exemple suivant car il réapparaitra très fréquemment dans ce travail. Il permettra par exemple de définir la notion de groupe paradoxal.

Exemple 1.1.3 *Un groupe G agit toujours sur lui-même par l'action de translation à gauche définie par*

$$G \times G \to G$$

$$(g; h) \mapsto g \cdot h = g \circ h :$$

1. *Les groupes$O(n), SO(n)$ et $SL(n)$ agissent sur R^n par l'action*

$$(A, X) \to A \cdot X$$

$$A \cdot X = AX^T$$

2. *Le groupe des isométries $G(n)$ agit aussi sur R^n par l'action*

$$(f, x) \longmapsto f \cdot x = f\,(x)$$

Définition 1.1.4 *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$ on définit l'orbite de x de la manière suivante :*

$$orb(x) = \{g \cdot x \diagdown g \in G\}\,.$$

Remarque 1.1.2 *Si nous définissons la relation d'équivalence R sur X comme suit*

$$xRy \iff \exists g \in G : g \cdot x = y,$$

alors il est clair que $orb(x) = [x]_R = \{y \in X \diagdown xRy\}$. Ainsi, les orbites partitionnent l'ensemble X.

Définition 1.1.5 *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$ on définit le stabilisateur de x de la manière suivante :*

$$stab(x) = \{g \in G \diagdown g \cdot x = x\}$$

(i.e. l'ensemble des éléments de G qui fixent x). On vérifie aisément que stab(x) est un sous-groupe de G pour tout $x \in X$. A présent, nous allons introduire briévement la notion de groupe libre. Pour plus d'informations, nous conseillons au lecteur.

Définition 1.1.6 *Soient G un groupe et X un sous-ensemble non vide de G. Si tout élément de $G \diagdown \{e\}$ s'écrit de façon unique sous la forme :*

$$x_1^{\varepsilon_1} \circ .... \circ x_n^{\varepsilon_n} \tag{1.1}$$

Où $n \in N_0, x_i \in X,\ \varepsilon_i\ = \pm 1 \forall i \in \{1.....n\}$ et $x_i^{\varepsilon i} \circ x_{i+1}^{i+1}\ \neq e \forall i \in \{1.....n-1\}$ alors X est une famille génératrice libre de G. De plus, si un élément de $G \diagdown \{e\}$ est écrit sous la forme (1.1) *, on dit qu'il est écrit sous forme réduite .*

Définition 1.1.7 *Si un groupe G possède une famille génératrice libre X alors G est un groupe libre. Dans ce cas, on dit que G est engendré librement par X.*

Exemple 1.1.4 *Si $X = \{x\}$ engendre librement G alors tout élément de $G \diagdown \{e\}$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$x^{\varepsilon} \circ .... \circ x^{\varepsilon} o \varepsilon = \pm 1.$$

Donc

$$G = \left\{x^k \diagdown k \in Z_0\right\} \cup \{e\}$$

et ains

$$(G; \circ)\ \simeq (Z; +)$$

où l'isomorphisme est donné par

$$f : Z \to G \qquad k \mapsto f(k) = x^k.$$

$$f(0) = e.$$

Définition 1.1.8 *Soit G un groupe libre. Le cardinal d'une famille génératrice libre de G est appelé le rang de G.*

Théorème 1.1.1 *Soit G un groupe libre. Toutes les familles génératrices libres de G ont le même cardinal.*

Théorème 1.1.2 *Deux groupes libres de même rang sont isomorphes.*
On obtient aisément ce résultat à partir de la Propriété Universelle du groupe libre. Cela justifie le fait que l'on puisse parler du groupe libre à n éléments.

1.2 La propriété universelle des groupes libres

Théorème 1.2.1 *Soit G un groupe avec un ensemble générateur $X \subseteq G$. Alors G est libre sur X si et seulement si la propriété universelle suivante contient : chaque plan $\varphi : X \to H$ de X dans un groupe H peut être étendu à un homomorphisme unique $\varphi^* : G \to H$ pour que le diagramme ci-dessous commutative.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ & \overset{\varphi}{\searrow} & \downarrow \varphi^* \\ & & H \end{array}$$

(ici $X \underset{\to}{i} G$ est l'inclusion de X dans G).

Démonstration. Soit G un groupe libre librement généré par$X$ et $\varphi : X \to H$ un plan de X dans un groupe H.

Puisque G est libre sur X alors tout élément $g \in G$ est défini par un mot réduit unique dans $X^{\pm 1}$,

$$g = x_1^{\varepsilon_1}....x_n^{\varepsilon_n} \quad , \qquad (x_{ij} \in X \quad \varepsilon_i \in \{1, -1\}) \, .$$

Mettre :

$$g^{\varphi^*} = \left(x_{i_1}^{\varphi}\right)^{\varepsilon_1} .... \left(x_{i_n}^{\varphi}\right)_{i_n}^{\varepsilon_n} .$$

Nous prétendons que φ^* est un homomorphisme. En effet, soit $g; h \in G$ et

$$\begin{aligned} g &= y_1......y_n z_1....z_m. \\ h &= z_m^{-1}....z_1^{-1} y_{n+1}...y_k. \end{aligned}$$

sont les mots réduits correspondants dans $X^{\pm 1}$, où $y_i\ z_j\ \in X^{\pm 1}$ et $y_n \neq y_{n+1}^{-1}$, (nous permettons aux sous-mots $y_1...y_n$;$z_1....z_m$; et $y_{n+1}...y_k$ d'être vide). alors

$$gh = y_1......y_n y_{n+1}...y_k$$

est un mot réduit dans $X^{\pm 1}$ présentant gh . présent.

$$(gh)^{\varphi^*} = y_1^{\varphi^*}......y_n^{\varphi^*} y_{n+1}^{\varphi^*}...y_k^{\varphi^*} = y_1^{\varphi^*}......y_n^{\varphi^*} z_1^{\varphi^*}....z_m^{\varphi^*} \left(z_m^{\varphi^*}\right)^{-1}.... \left(z_1^{\varphi^*}\right)^{-1}...y_{n+1}^{\varphi^*}...y_k^{\varphi^*} = g^{\varphi^*} h^{\varphi^*}.$$

Donc φ^* est un homomorphisme.

Clairement, φ^* étend φ et le diagramme correspondant commute.

Observer que tout homomorphisme $\varphi^* : G \to H$, qui rend le diagramme commutatif, doit satisfaire les égalités 2, donc φ^* est unique. Cela montre que G satisfait le propriété universelle requise.

Supposons maintenant qu'un groupe G avec un ensemble générateur X satisfait l'universel propriété. Prenez $H = F(X)$ et definie une plan $\varphi : X \to H$ par $x^{\varphi} = x; (x \in X)$.

Alors par la propriété universelleφ 's'étend à un homomorphisme unique $\varphi^* : G \to F(X)$.

Soit w un mot de groupe réduit non vide sur X. Alors w définie un élément g en G pour lequel $g^{\varphi^*} = w \in F(X)$. $g^{\varphi^*} \neq 1$.Donc et par conséquent $g \neq 1$ dans G.

Cela montre que G est un groupe libre sur X. Cela prouve le théorème ....

Observez que l'argument ci-dessus implique le résultat suivant, que nous état comme corollaire.

■

Chapitre 2

Notions d'algèbre de Boole :

2.1 Algebère de Boole

Définition 2.1.1 *Soient $\mathcal{A}$ un ensemble non vide,$\wedge, \vee$ deux opérations binaires et internes définie sur A et une opération unaire et interne définie sur $\mathcal{A}$ également. Le quadruplet $(\mathcal{A}; \wedge, \vee, ^*)$ est une algèbre de Boole si :*

(i) $a \wedge b = b \wedge a$ et $a \vee b = b \vee a$ (commutativité) ;

(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ et $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (associativité) ;

(iii)$(a \wedge b) \vee b = b$ et $(a \vee b) \wedge b = b$ (absorption) ;

(iv) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distributivité) ;

(v) $(a \wedge a^*) \vee b = b$ et $(a \vee a^*) \wedge b = b$ (complémentarité).

On pose $1 = a \vee a^*$ et $0 = a \wedge a^*$.

Dans la suite, on écrira A pour représenter l'algèbre de Boole $(\mathcal{A}; \wedge, \vee, ^*)$.

On tire immédiatement de cette définition les résultats suivants :

1. $a \wedge 1 =$ a et $a \vee 0 = a$.

Ces égalités découlent de la définition de 1 et 0 et de (iii).

2.

$$a \vee a = a.$$

On a :

$$a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (a \vee a^*) = a \vee (a \wedge a^*) = a \vee 0 = a.$$

3.

$$a \wedge a = a$$

On a :

$$a \wedge a = (a \wedge a) \vee 0 = (a \wedge a) \vee (a \wedge a^*) = a \wedge (a \vee a^*) = a \wedge 1 = a.$$

4.

$$(a^*)^* = a.$$

On a :

$$a = ((a^*)^* \vee a^*) \wedge a = (a^*)^* \wedge a) \vee (a^* \wedge a) = (a^*)^* \wedge a$$

et

$$((a^*)^* \wedge a = ((a^*)^* \wedge a) \vee ((a^*)^* \wedge a^*) = ((a^*)^* \wedge (a \vee a^*) = ((a^*)^* :$$

Définition 2.1.2 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. On définit la relation suivante sur $\mathcal{A}$*

$$a \leq b, \Longleftrightarrow a \wedge b = a :$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathcal{A}$.

Remarque 2.1.1 *1. On a*

$$a \wedge b = a, a \vee b = b :$$

En effet, si $a \wedge b = a$ alors $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ par l'axiome d'absorption. De même, si $a \vee b = b$ alors $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$. Autrement dit, $a \leq b$ si et seulement si $a \vee b = b$.

2. Il est clair que 1 est l'élément maximum de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ et 0 l'élément minimum.

Remarque 2.1.2 *On definie* $(+)$ *et* $(.)$ *sur*$\mathcal{A}$ *par*

$$a + b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$$

$$a.b = a \wedge b;$$

Soit $(\mathcal{A}, +, .)$ *un anneau qui verifie*

$$a + a = 0; \quad a.a = a$$

Exemple 2.1.1 *Si* $\mathcal{A}$ *est un ensemble non vide, le quadruplet* $(P(\mathcal{A}), \cap, \cup, \complement)$ *est une algèbre de Boole où* $1 = \mathcal{A}, 0 = \emptyset$ *; et où la relation d'ordre est l'inclusion.*

Définition 2.1.3 *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Boole. Un sous-ensemble non vide* $\mathcal{A}_0$ *de* $\mathcal{A}$ *est une sous-algèbre de Boole de* $\mathcal{A}$ *si*

$$a; b \in \mathcal{A}_0 \rightarrow a \wedge b; a \vee b \text{ et } a^* \in \mathcal{A}_0$$

Remarque 2.1.3

1. *Toute sous-algèbre de Boole* $\mathcal{A}_0$ *contient* 1 *et* 0.

   En effet, si $a \in \mathcal{A}_0$ *alors* $1 = a \vee a^*; 0 = a \wedge a^* \in \mathcal{A}_0$.

2. *Une sous-algèbre de Boole* $\mathcal{A}_0$ *de* $\mathcal{A}$ *est une algèbre de Boole où on a restreint les opérations de* $\mathcal{A}$ *à* $\mathcal{A}_0$.

3. *L'intersection de sous-algèbres de Boole est une sous-algèbre de Boole.*

Pour tout $X \sqsubseteq \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, on peut à présent définir la plus petite sous-algèbre de Boole contenant X, qui est l'intersection de toutes les sous-algèbres de Boole de $\mathcal{A}$ contenant X.

Définition 2.1.4 *Soient* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Boole et* $X \sqsubseteq \mathcal{A}$ *un ensemble. La sous-algèbre engendrée par* X *est la plus petite sous-algèbre de Boole de* $\mathcal{A}$ *contenant* X. *On la note* $\langle x \rangle$

Proposition 2.1.1 *Une sous-algèbre de Boole engendrée par un ensemble fini est finie.*

Définition 2.1.5 *Soient* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Boole et* $b \in \mathcal{A}$. *On pose*

$$\mathcal{A}_b = \{a \in \mathcal{A} \ \mid \text{a} \leq b\}$$

et on définit $\vee_{\mathcal{A}_b}$, $\wedge_{\mathcal{A}_b}$ et $^{*\mathcal{A}_b}$ des opérations sur $\mathcal{A}_b$ comme étant

$$\begin{aligned} a_1 \vee_{\mathcal{A}_b} a_2 &= a_1 \vee a_2 \\ a_1 \wedge_{\mathcal{A}_b} a_2 &= a_1 \wedge a_2 \wedge b \\ a^{*\mathcal{A}_b} &= a^* \wedge b \end{aligned}$$

pour tous a_1 ; a_2 ; $a \in \mathcal{A}_b$. Dans ces conditions, la quadruplet $(\mathcal{A}_b ;\wedge_{\mathcal{A}_b} ;\vee_{\mathcal{A}_b} ; {}^{*\mathcal{A}_b})$ est une algèbre de Boole. Et on a : $a \wedge_{\mathcal{A}_b} a^{*\mathcal{A}_b} = 0$ et $a \vee_{\mathcal{A}_b} a^{*\mathcal{A}_b} = b$ si $a \in \mathcal{A}_b$.

Définition 2.1.6 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. Un élément $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un atome si $(b \in \mathcal{A}$ et $b \leq a)$ $\Longrightarrow$ $(b = 0$ ou $b = a)$:*

Exemple 2.1.2 *Les atomes de l'algèbre de Boole $(P(\mathcal{A}), \cap, \cup, \complement)$ où $\mathcal{A} \neq \emptyset$; sont les singletons. En effet, il est clair que les singletons sont des atomes. De plus, si $B \in P(\mathcal{A}) \setminus \{\emptyset\}$ n'est pas un singleton alors il existe $b \in B$ tel que :*

$$\{b\} \subsetneq B.$$

Ainsi,$\{b\} \neq \emptyset$; et $\{b\} \neq B$; donc B n'est pas un atome.

La proposition suivante donne une autre caractérisation des atomes.

Proposition 2.1.2 *Si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ alors a est un atome de $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $b \in \mathcal{A}$, $a \leq b$ ou $a \wedge b = 0$.*

Démonstration. Si a est un atome et si $b \in \mathcal{A}$, on a : $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$ donc $a \wedge b \leq a$; vu la définition des atomes, on a alors $a \wedge b = 0$ ou $a \wedge b = a$ (i.e. $a \leq b$).

Montrons à présent que la condition est suffisante. Soit $b \in \mathcal{A}$ tel que $b \leq a$. Si $b \neq 0$, alors $b = a \wedge b \neq 0$ et donc par hypothèse, $a \leq b$. Par antisymétrie, il vient alors $b = a$. ■

Remarque 2.1.4 *La condition $a \wedge b = 0$ de la proposition précédente est équivalente à $a \leq b^*$ (i.e. $a \wedge b^* = a$). En effet, si $a \wedge b = 0$ alors $a \wedge b^* = (a \wedge b^*) \vee (a \wedge b) = a \wedge 1 = a$ et si $a \wedge b^* = a$ alors $a \wedge b = (a \wedge b^*) \wedge b = 0$.*

Remarque 2.1.5 *Si $a\,;\, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ sont des atomes alors $a \wedge b = 0$si $a \neq b$.*

En effet, a est un atome, on a $a \leq b$ ou $a \wedge b = 0$.

Si $a \leq b$ alors $a = b$ ou $a = 0$ car b est un atome, ce qui est impossible.

Donc $a \wedge b = 0$. Nous aimerions montrer un résultat très important pour la suite qui affirme que n'importe quel élément d'une algèbre de Boole finie s'écrit comme la sup des atomes plus petit. Pour cela, nous définissons une algèbre de Boole atomique et nous montrons que les algèbres de Boole finies sont atomiques.

Définition 2.1.7 *Une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est atomique si pour tout $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, il existe un atome b de $\mathcal{A}$ tel que $b \leq a$.*

Proposition 2.1.3 *Toute algèbre de Boole finie est atomique.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole finie et $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ Si a_0 est un atome, il n'y a rien à faire car$a_0 \leq a_0$. Sinon, il existe $a_1 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tel que $a_1 \leq a_0$ et $a_1 \neq a_0$; si a_1 est un atome, le résultat est démontré. Sinon, il existe $a_2 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tel que $a_2 \leq a_1$ et $a_2 \neq a_1$; si a_2 est un atome, le résultat est démontré. En étirant le procédé et puisque l'algèbre est finie, il existe $a_n \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ un atome tel que $a_n \leq a_{n-1} \leq a_0$ et $a_n \neq a_{n-1}$ ce qui permet de conclure. ■

Nous pouvons à présent montrer le théorème souhaité.

Théorème 2.1.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole finie. Pour tout $b \in \mathcal{A}$, on a*

$$b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a atome}} a$$

Démonstration. Soit $b \in \mathcal{A}$. Posons

$$c = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a atome}} a$$

il est clair que $c \leq b$ car $c \wedge b = \left(\bigvee_{\substack{a \leq b \\ a atome}} a \right) \wedge b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a atome}} (a \wedge b) = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a atome}} a = c$ Il reste à montrer que $b \leq c$, c'est-à-dire $b \wedge c = b$ ou encore $b \wedge c^* = 0$,et puisque $(c^*)^* = c$. Procédons par l'absurde et supposons que $b \wedge c^* \neq 0$. et puisque $\mathcal{A}$ est fini, $\mathcal{A}$ est atomique et il existe alors a_0 un atome tel que a_0 $b \wedge c^*$ or ,

$$(b \wedge c^*) \wedge b = b \wedge c^*$$

donc $b \wedge c^* \leq b$ et par suite, $a_0 \leq b$. De plus, $a_0 \leq c$ car $a_0 \wedge \left(\bigvee_{\substack{a \leq b \\ aatome}} a \right) = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ aatome}} (a_0 \wedge a)$ et on a

$$a_0 \wedge a = a_0 \text{ si } a = a_0$$

$$a_0 \wedge a = 0 \text{ si } a \neq a_0$$

Pour résumer, on a

$$a_0 \leq b \wedge c^*, a_0 \leq b \; et \; a_0 \leq c$$

et on obtient ainsi ,

$$a_0 = a_0 \left((b \wedge c^*) \wedge b \wedge c \right) = \; a_0 \wedge b \wedge c^* \wedge c = 0$$

ce qui est absurde puisque a_0 est un atome. ∎

2.2 Théorème d'extension de mesure

Désormais, nous avons à notre disposition tous les outils pour pouvoir construire une extension de la mesure de Lebesgue définie sur R^2. Plus précisément, nous démontrons le théorème qui étend sur une algèbre de Boole une mesure dé finie sur un de ses sous-anneaux

2.3 Théorème d'extension :

Commençons par une série de définition

Définition 2.3.1 *Un automorphisme* $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *d'une algèbre de Boole* $\mathcal{A}$ *est une bijection qui préserve les opérations* $\wedge, \vee, ^*$.

Définition 2.3.2 *Une mesure* μ *définie sur une algèbre de Boole* $\mathcal{A}$ *est une application*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty]$$

finiment additive (i.e. $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ $\forall a; b \in \mathcal{A}$ *tels que* $a \wedge b = 0$*) telle que* $\mu(0) = 0$.

Définition 2.3.3 *Une mesure exhaustive et finiment additive sur l'ensemble X est une mesure :*$\mathcal{P}(X) \to [0;\infty]$ *définie sur l'algèbre de Boole* $\mathcal{P}(X)$.

Définition 2.3.4 *Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Une mesure μ définie sur $\mathcal{A}$ est G-invariante si $\mu(g(a)) = \mu(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et pour tout $g \in G$.*

Définition 2.3.5 *Un sous-anneau $\mathcal{A}_0$ d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{A}$ tel que :*

$$a, b \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow a \vee b, a \wedge b^* \in \mathcal{A}_0$$

Remarque 2.3.1 1. *L'intersection de sous-anneaux est un sous-anneau.*
2. *Une sous-algèbre de Boole est toujours un sous-anneau. En particulier, l'intersection d'une sous-algèbre de Boole avec un sous-anneau est un sous-anneau.*
3. *Un sous-anneau contient toujours* 0.

Exemple 2.3.1 *La collection des ensembles Lebesgue-mesurables dans R^n est un sous-anneau de l'algèbre de Boole de $\mathcal{P}(R^n)$ car l'ensemble des ensembles Lebesgue-mesurables est, en particulier, stable par passage au complémentaire, union finie et intersection finie.*

Définition 2.3.6 *Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Le sous-anneau $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ est G-invariant si pour tout $g \in G$ on a $g(\mathcal{A}_0) \sqsubseteq \mathcal{A}_0$.*

Remarque 2.3.2 *On peut définir une mesure μ sur le sous-anneau $\mathcal{A}_0$ de la même façon que sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$, c'est- à-dire une application $\mu : \mathcal{A}_0 \to [0;\infty]$ finiment additive et telle que $\mu(0) = 0$.*

Exemple 2.3.2 *La mesure de Lebesgue est définie sur le sous-anneau des ensembles. Lebesgue-mesurables. De plus, elle est $G(n)$-invariante.*
La proposition suivante est un premier grand pas vers notre objectif, à savoir étendre la mesure de Lebesgue à tout R^2 en une mesure $G(2)$-invariante et finiment additive.

Proposition 2.3.1 *.(AC) : Soit $\mathcal{A}_0$ un sous-anneau d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Si μ est une mesure sur $\mathcal{A}_0$ alors il existe une mesure $\overline{\mu}$ qui étend μ sur $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ est fini et procédons par récurrence sur le nombre d'atomes de $\mathcal{A}$.

Cas de base : $\mathcal{A} = \{0.1\}$

Soit $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ et on pose $\overline{\mu} = 0$ sur $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{A}_0 = \{0.1\}$ et il n'y a rien à faire.

Induction :

Si $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ alors $\overline{\mu} = 0$ sur A convient. Si $\mathcal{A}_0 \neq \{0\}$ soit $b \in \mathcal{A}_0 \setminus \{0\}$ minimal dans $\mathcal{A}_0$, i.e. $(a \in \mathcal{A}_0; a \leq b)$ $(a = b$ ou $a = 0)$. On a :

$$\mathcal{A}_{b^*} = \{a \in \mathcal{A} \setminus a \leq b^*\} \sqsubseteq \mathcal{A}$$

et il est clair que $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$ est un sous-anneau de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_{b^*}$. Une simple vérification nous apprend que les atomes de $\mathcal{A}_{b^*}$ sont des atomes de A et nous allons montrer qu'il existe un atome de $\mathcal{A}$ qui n'est pas un atome de $\mathcal{A}_{b^*}$. Dans ce cas, on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à la mesure $\mu_{|\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}}$ définie sur le sous-anneau $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$ de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_{b^*}$.

puisque $\mathcal{A}$ est fini, il existe $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$un atome de $\mathcal{A}$ tel que $a_0 \leq b$. De plus, cet atome n'appartient pas à $\mathcal{A}_{b^*}$, car sinon $a_0 \leq b^*$, d'où

$$\begin{aligned} a_0 \wedge b^* &= a_0 \Longrightarrow (a_0 \wedge b) \wedge b^* = a_0 \quad \text{car } a_0 \wedge b = a_0 \\ &\Longrightarrow a_0 \wedge 0 = a_0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par hypothèse de récurrence, il existe une mesure $\boldsymbol{v}$: $\mathcal{A}_{b^*} \to [0; \infty]$qui étend $\mu_{|\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}}$. Si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un atome alors, $a_0 \leq b^*$ ou $a_0 \leq b$; on pose

$$\begin{array}{ll} \overline{\mu}(a) = \boldsymbol{v}\ (a) & \text{si } a \leq b^* \\ \overline{\mu}(a) = \mu(b) & \text{si } a = a_0 \\ \overline{\mu}(a) = 0 & \text{si } a \leq b \text{ et } a \neq a_0 \end{array}$$

De cette façon est bien défini sur tous les atomes de $\mathcal{A}$. Si $c \in \mathcal{A}$ on pose,

$$\overline{\mu}(c) = \sum_{\substack{a \leq c \\ a\ atome}} \overline{\mu}(a)$$

et l'application $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0; \infty]$ est celle recherchée car, comme nous allons le montrer, elle est finiment additive et on a $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_0} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$.

Montrons d'abord qu'elle est finiment additive. Soient $u; v \in \mathcal{A}$ tels que $u \wedge v = 0$, on a $\{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome}; a \leq u \vee v\} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome}; a \leq u\} \cup \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome}; a \leq v\}$de façon disjointe. En effet, si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un atome tel que $a \leq u$ et $a \leq v$ alors $a = a \wedge u \wedge v = 0$, ce qui n'est pas possible. Pour montrer l' égalité, procédons par double inclusion. Soit a un atome de $\mathcal{A}$ tel que $a \leq u \vee v$ et $a \nleq u$ (en particulier, $a \wedge u = 0$). On a

$$a = a \wedge (u \vee v) = (a \wedge u) \vee (a \wedge v) = a \wedge v;$$

ce qui montre que $a \leq v$. Soit a un atome tel que $a \leq u$ (le cas où $a \leq v$ est similaire). On sait que $a \nleq v$ et par conséquent, $a \wedge v = 0$ et par suite.

$$a \wedge (u \vee v) = (a \wedge u) \vee (a \wedge v) = a,$$

ce qui montre que $a \leq u \vee v$. Finalement ,

$$\overline{\mu}(u \vee v) = \sum_{\substack{a \leq u \vee v \\ a \ atome}} \overline{\mu}(a) = \sum_{\substack{a \leq u \\ a \ atome}} \overline{\mu}(a) + \sum_{\substack{a \leq v \\ a \ atome}} \overline{\mu}(a) = \overline{\mu}(u) + \overline{\mu}(v)$$

et $\overline{\mu}$ est finiment additive. Pour montrer que $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_0} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$, commençons par remarquer

que $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_{b^*}} = \boldsymbol{v}$, car si $c \in \mathcal{A}_{b^*}$ $(i.e. c \leq b^*)$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(c) &= \sum_{\substack{a \leq c \\ a \ atome}} \overline{\mu}(a) \\ &= \overline{\mu}(c) = \sum_{\substack{a \leq c \\ a \ atome}} \boldsymbol{v}(a) \quad a \leq c \leq b^* \Longrightarrow a \leq b^* \\ &= \boldsymbol{v}\left(\bigvee_{\substack{a \leq c \\ a \ atome}} a\right) \quad \boldsymbol{v} \text{ est finiment additive} \\ &= \boldsymbol{v}(c) \quad \mathcal{A} \quad \text{est fini} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{\mu}(d) = \mu(d)$ si $d \in \mathcal{A}_0$. Soit $d \in \mathcal{A}_0$; on sait que $b \wedge d \leq b$ et par minimalité de b, on obtient $b \leq d$ ou $d \wedge b = 0$. Dans le premier cas, on a $b \vee d = d$. Par conséquent, $d = (b \vee d) \wedge (b \vee b^*) = b \vee (d \wedge b^*)$ et il s'ensuit que

$$\overline{\mu}(d) = \overline{\mu}(b \vee (d \wedge b^*)) = \overline{\mu}(b) + \overline{\mu}(d \wedge b^*)$$

car $b \wedge (d \wedge b^*) = 0$.or $d \wedge b^* \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$, donc $\overline{\mu}(d \wedge b^*) = \boldsymbol{v}(d \wedge b^*) = \mu(d \wedge b^*)$. On a aussi

$$b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \ atome}} a = a_0 \vee \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \ atome \\ a \neq a_0}} a$$

et donc $\overline{\mu}(b) = \overline{\mu}(a_0) = \mu(b)$. Finalement

$\overline{\mu}(d) = \overline{\mu}(b) + \overline{\mu}(d \wedge b^*) = \mu(b) + \mu(d \wedge b^*) = \mu(b \vee (d \wedge b^*)) = \mu(d)$.

Dans le deuxième cas, $d \wedge b^* = (d \wedge b^*\ )\ \ (d \wedge b) = d$ donc $d \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$. Il s'ensuit que $\overline{\mu}(d) = \boldsymbol{v}(d) = \mu(d)$. Ainsi, dans tous les cas, $\overline{\mu}(d) = \mu(d)$ si $d \in \mathcal{A}_0$, d'où la conclusion.

Supposons à présent que $\mathcal{A}$ n'est pas fini. Soit C une sous-algèbre finie de $\mathcal{A}$. On pose

$$M(C) = \left\{ \boldsymbol{v} \in [0, \infty]^{\mathcal{A}} \mid \boldsymbol{v}_{|C} \ \text{ mesure qui étend } \mu_{|C \cap \mathcal{A}_0} \right\}$$

et vu le cas précédent, $M(C)$ est non vide ; de plus il est fermé. Soient $n \in N_0$ et $C_1, ..., C_n$ des sous-algèbres finies de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, $\langle C_1 \cup ... \cup C_n \rangle$ [[Cni est une sous-algèbre finie de $\mathcal{A}$ et on a

$$\emptyset \neq M(\langle C_1 \cup ... \cup C_n \rangle) \sqsubseteq M(C_1) \cap .... \cap M(C_n)$$

Par conséquent, étant donné que $[0, \infty]^{\mathcal{A}}$ est un compact (théorème de Tychonoff et que

$$M = \{M(C) \mid C \text{ sous-algèbre finie de } \mathcal{A}\}$$

est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide, alors

$$\bigcap_{M(C) \in M} M(C) \neq \emptyset$$

Un élément de cette intersection satisfait l'énoncé. En effet, si

$$\boldsymbol{v} \in \bigcap_{M(C) \in M} M(C)$$

alors $\boldsymbol{v} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ et $\boldsymbol{v}(0) = 0$. De plus,$\boldsymbol{v}(u \vee v) = \boldsymbol{v}(u) + \boldsymbol{v}(v)$ si $u \wedge v = 0$ car $M(\langle u, v \rangle) \in M$. Pour finir, si $\mu \in \mathcal{A}_0$ alore $\boldsymbol{v}(u) = \mu(u)$ car $M(\langle u \rangle) \in M$ ■

Pour la suite, donnons deux définitions et rappelons un théorème.

Définition 2.3.7 *Soit X un ensemble. L'application μ est une moyenne sur X si c'est une mesure exhaustive sur X, finiment additive telle que $\mu(X) = 1$.*

Définition 2.3.8 *Le groupe G est moyennable s'il existe une moyenne G-invariante sur G (G agissant sur lui-même par l'action de translation à gauche).*

Théorème 2.3.1 *Soient X un ensemble et G un groupe qui agit sur X. Si μ est une mesure exhaustive G-invariante sur X et f une application définie sur X à valeur dans$[0;\infty]$, alors*

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \int f(h.x)\,d\mu(x)$$

pour tout $h \in G$.

Démonstration.

Notons $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des fonctions simples définies sur X à valeurs positives.

Et rappelons que dans les conditions de l'énoncé, on a

$$\int f(x)\,d\mu(x) = sup\left\{g(x)\,d\mu(x) \mid g \in \mathcal{S}^+ \text{ et } g \leq f\right\}.$$

Soit g une fonction simple sur X à valeurs positives telle que $g \leq f$. Il existe alors $n \in N_0$, $a_1;....;a_n > 0$ et $A_1;....;A_n \sqsubseteq X$ des ensembles deux à deux disjoints tels que

$$g\ (x) \ = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i}(x)$$

Soit $h \in G$, on a $g \circ h \leq f \circ h$ et

$$g\ (h{\cdot}x) \ = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{A_i}(x) \leq f(h{\cdot}x)$$

pour tout $x \in X$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int g(h \cdot x)\,d\mu(x) .. &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu\left(h^{-1} \cdot A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(\cdot A_i) \\
&= \int g(x)\,d\mu(x)
\end{aligned}$$

car est G-invariant

On en déduit que $\int f(x)\,d\mu(x) \leq \int f(h \cdot x)\,d\mu(x)$ pour tout $h \in G$. De plus,

$$\int f(h \cdot x)\,d\mu(x) \leq \int f\left(h \cdot \left(h^{-1} \cdot x\right)\right)d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x)$$

pour tout $h \in G.$, ce qui permet de conclure. ■ Nous pouvons à présent démontrer le théorème qui nous intéresse.

2.4 Théorème :(Théorème d'extension de mesure (AC)).

Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Soient $\mathcal{A}_0$ un sous-anneau G-invariant de $\mathcal{A}$ et μ une mesure G-invariante sur $\mathcal{A}_0$. Si G est moyennable alors μ peut être étendu en une mesure $\overline{\mu}$ sur $\mathcal{A}$ qui est G-invariante.

Démonstration. Il existe une mesure $\boldsymbol{v} : \mathcal{A} \to [0;\infty]$ qui étend μ. ■

Soit $\theta : \mathcal{P}(G) \to [0;\infty]$ une moyenne G -invariante sur G. Pour $b \in \mathcal{A}$ on pose

$$f_b : G \to [0;\infty] \qquad g \longmapsto \boldsymbol{v}\left(g^{-1}(b)\right)$$

et on définit $\overline{\mu}$ de la façon suivante

$$\begin{array}{ll} \overline{\mu}(b) = \int f_b d\theta & \text{si } f_b \text{ est borné} \\ \overline{\mu}(b) = \infty & \text{si } f_b \text{ n'est pas borné} \end{array}$$

pour tout $b \in \mathcal{A}$. Dans ce cas $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0;\infty]$ est une mesure G-invariante qui étend μ. En effet, remarquons que si $b \in \mathcal{A}_0$, on a

$$\boldsymbol{v}\left(g^{-1}(b)\right) = \boldsymbol{\mu}\left(g^{-1}(b)\right) = \mu(b)$$

car $\mathcal{A}_0$ et μ sont G-invariants et par conséquent,$f_b(g) = \mu(b)$ pour tout $g \in G$. De plus, si f_b n'est pas borné, alors pour tout $r > 0$ il existe $g \in G$ tel que

$$f_b(g) \geq r$$

c'est-à-dire $\mu(b) \geq r$ pour tout $r > 0$ et donc $f_b(g) = \mu(b) = \infty$. Ainsi, si $b \in \mathcal{A}_0$ on a

$$\overline{\mu}(b) = \int \mu(b)\, d\theta = \mu(b)$$

si f_b est borné. Sinon $\overline{\mu}(b) = \infty$ et $\mu(b) = \infty$, ce qui montre que $\overline{\mu} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$. De plus,$\overline{\mu}$ est finiment additive. En effet, soient $a; b \in \mathcal{A}$ tels que $a \wedge b = 0$. Il suffit alors de remarquer que $f_{a\vee b} = f_a + f_b$.

Il reste à montrer que $\overline{\mu}(k(b)) = \overline{\mu}(b)$ pour tout $k \in G$ et pour tout $b \in \mathcal{A}$. Soient $k \in G$ et $b \in \mathcal{A}$. Sif_b n'est pas borné alors $f_{k(b)}$ non plus. En effet, pour tout $r > 0$, il existe $g \in G$ tel que $f_b(g) \geq r$ et par conséquent, $f_{k(b)}(k \circ g) \geq r$. Dans ce cas $\overline{\mu}(k(b)) = \overline{\mu}(b) = \infty$.

Sinon,f_b est borné et on a

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(k(b)) &= \int f_{k(b)}(slg)d\theta\,(g) \\
&= \int f_b\left(k^{-1}\circ g\right)d\theta\,(g) \\
&= \textstyle\int f_b(slg)d\theta\,(g) \\
&= \overline{\mu}\,(b)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Chapitre 3

Moyennabilité du groupe G(2)

3.1 Moyennabilité du groupe G(2) :

Nous savons que $(\mathcal{P}(R^2)\,;\cap,\cup,\complement)$ est une algèbre de Boole et que les ensembles Lebesguemesurables forment un sous-anneau de cette algèbre.
De plus, $G(2)$ est un groupe d'automorphismes pour lequel la mesure de Lebesgue est invariante. De cette façon, si $G(2)$ est moyennable, il existe une mesure exhaustive sur R^2, $G(2)$ invariante, finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue.

Montrons ainsi, que le groupe $G(2)$ est moyennable. Pour ce faire, nous prouvons, d'une part, que tout groupe commutatif est moyennable et, d'autre part, que si N est un sousgroupe normal d'un groupe G tel que N et G/Nsont moyennables, alors G est moyennable.

Commençons par une proposition et un lemme.

Proposition 3.1.1 ***(AC)*** *:Soient I un ensemble d'indices et $G_i(i \in I)$ des groupes tels que pour tous $i; j \in I$, il existe $k \in I$ tel que G_i et G_j sont des sous-groupes de G_k. Supposons que G_i est moyennable pour tout $i \in I$. Alors $G = \bigcup_{i\in I} G_i$ est un groupe moyennable.*

Démonstration. Vu les hypothèses, il est clair que G est un groupe. Pour tout $i \in I$, notons μ_i une moyenneG_i-invariante sur G_i et posons

$$M_i = \left\{\mu \in [0,1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \mu \text{ moyenne } G_i\text{-invariante}\right\}.$$

L'ensemble M_i est non vide et fermé pour tout $i \in I$, car on vérifie facilement que l'application

$$\mathcal{P}(G) \to [0,1] \quad A \longmapsto \mu_i (A \cap G_i)$$

est un élément de M_i. Soient $i; j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $G_i; G_j \sqsubseteq G_k$ et par conséquent,

$$\emptyset \neq M_K \sqsubseteq M_i \cap M_j.$$

On en tire que l'ensemble $\{M_i \mid i \in I.\}$ est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide. Par compacité

$$\bigcap_{i\in I} M_i \neq \emptyset$$

et si μ est un élément de cette intersection alors, μ est une moyenne G-invariante sur G et par suite, le groupe G est moyennable. ■

Remarque 3.1.1 *Soient G un groupe et C la collection de tous les sous-groupes finiment engendrés de G. On a*

$$G = \bigcup_{H\in C} H$$

et si $H_1; H_2 \in C$ alors il existe $H_3 \in C$ tel que $H_1 \sqsubseteq H_3$ et $H_2 \sqsubseteq H_3$. Ainsi, pour montrer qu'un groupe est moyennable, il suffit de montrer que tous ses sous-groupes finiment engendrés le sont.

Lemme 3.1.1 *Soit $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ un groupe commutatif. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe μ_ε : $\mathcal{P}(G) \to [0;1]$ une application telle que (i) $\mu_\varepsilon (G) = 1$ (ii) $\mu_\varepsilon (A \cup B) = \mu_\varepsilon (A) + \mu_\varepsilon (B)$ pour tous $A, B \sqsubseteq G$ tels que $A \cap B = \emptyset$; (iii) $|\mu_\varepsilon (A) - \mu_\varepsilon (g_i \cdot A)| \leq \varepsilon$ pour tout $A \sqsubseteq B$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in N_0$ tel que $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$ On pose

$$N^n \mu_\varepsilon (A) = \# \left\{(k_1, ..., k_n) \mid 1 \leq k_1, ..., k_n \leq N \text{ et } g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_n^{k_n} \in A\right\}$$

pour tout $A \sqsubseteq G$. On sait que

$$\#\left\{(k_1,...,k_n) \mid 1 \leq k_1,...,k_n \leq N \text{ et } \mathrm{g}_1^{k_1} \circ \cdots \circ \mathrm{g}_n^{k_n} \in A\right\} \leq N$$

en particulier, le point (i) est vérifié et, de plus, le point (ii) est évident. Si $i \in \{1,....,n\}$ alors, vu la commutativité, on a

$$\begin{aligned} g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{ki} \cdots \circ g_n^{k_n} \quad &\in \quad A \\ &\Leftrightarrow \quad g_i \circ g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{ki} \cdots \circ g_n^{k_n} \in g_i \cdot A \\ &\Longleftrightarrow \quad g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{ki+1} \cdots \circ g_n^{k_n} \in g_i \cdot A \end{aligned}$$

et on en tire que

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(\mathrm{g}_i \cdot A)| \leq \frac{2N^{n-1}}{N^n} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon$$

pour tout $i \in \{1,....,n\}$ d'où la conclusion ■

Proposition 3.1.2 ***(AC)*** *: Tout groupe commutatif est moyennable.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $H = \langle \mathrm{g}_1, ..., \mathrm{g}_n \rangle \sqsubseteq G$ alors il est moyennable. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$M_\varepsilon = \left\{\mu \in [0,1]^{p(H)} \mid \mu \text{ vérifie } (i)\,;\,(ii) \text{ et } (iii)\right\}$$

et $M_\varepsilon \neq \emptyset$;. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, M_ε est fermé. Soient $p \in N_0$ et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p > 0$, on a

$$\emptyset \neq M_{\substack{\inf \\ i=1}\ \substack{p \\ \varepsilon_1}} \sqsubseteq M_{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap M_{\varepsilon_p}$$

et par compacité de $[0,1]^{p(H)}$, on a $\bigcap_{\varepsilon \succ 0} M_\varepsilon \neq \emptyset$ Soit

$$\mu \in \bigcap_{\varepsilon \succ 0} M_\varepsilon$$

on a trivialement $\mu(H) = 1$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tous $A; B \sqsubseteq H$ tels que $A \cap B = \emptyset$ De plus, si $i \in \{1,....,n\}$, on a

$$|\mu(A) - \mu(\mathrm{g}_i \cdot A)| \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \sqsubseteq H$. Finalement, $\mu(A) = \mu(\mathrm{g}_i \cdot A)$ pour tout $i \in \{1,....,n\}$et tout $A \sqsubseteq H.$; par conséquent, pour tout $\mathrm{g} \in H$, on a $\mu(A) = \mu(\mathrm{g} \cdot A)$, d'où la conclusion. ■

La proposition suivante nous permettra d'affirmer que n'importe quel groupe résoluble est moyennable. Avant de l'énoncer et de la démontrer, rappelons la définition d'un sousgroupe normal et fixons les notations.

Définition 3.1.1 *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On dit que H est un sous-groupe normal de G si*

$$x \circ H = H \circ x$$

pour tout $x \in G$. Dans ce cas, on notera $H \lhd G$.

Proposition 3.1.3 *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G. Si N et $G \setminus N$ sont des groupes moyennables alors G est moyennable.*

Démonstration. Soit $\mu_1(resp.\mu_2)$ une moyenne N-invariante (*resp.* $G \setminus N$-invariante) sur N (*resp.* $G \setminus N$). Pour tout $A \sqsubseteq G$, on pose

$$f_A : G \setminus N \to [0, \infty] \qquad\qquad g \circ N \longmapsto \mu_1 \left(N \cap \ \mathrm{g}^{-1} \circ A \right).$$

Cette définition est bien indépendante du représentant choisi. En effet, si

$$g_1 \circ N = \ g_2 \circ N$$

dans $G \setminus N$ alors il existe $h \in N$ tel que

$$g_1 = \quad g_2 \circ N \Longleftrightarrow g_2^{-1} \circ g_1 = h \Longleftrightarrow g_2^{-1} = h \circ g_1^{-1}.$$

ainsi pour tout $A \sqsubseteq G$, on obtient

$$\begin{aligned} f_A \left(\mathrm{g}_2 \circ N \right) &= \mu_1 \left(N \cap \ \mathrm{g}_2^{-1} \circ A \right) \\ &= \mu_1 \left(N \cap \left(h \circ \mathrm{g}_1^{-1} \right) \circ A \right) \\ &= \mu_1 \left(h \circ \left(N \cap \ \mathrm{g}_1^{-1} \circ A \right) \right) \qquad \text{car } h \circ N = N \\ &= \mu_1 \left(N \cap \ \mathrm{g}_1^{-1} \circ A \right) \qquad \text{car } \mu_1 \text{est } N - i \text{ nvariant} \\ &= f_A \left(\mathrm{g}_1 \circ N \right) \end{aligned}$$

Posons

$$\mu : \quad G \to [0, \infty] \qquad A \to \int_{G \setminus N} f_A d \ \ \mu_2$$

cette application est une moyenne G-invariante sur G. En effet,

$$f_G(g \circ N) = \mu_1(N) = 1$$

pour tout g $\in G$ et donc,$\mu(G) = 1$ puisque $\mu_2$est une moyenne sur $G \setminus N$. De plus,μ est clairement finiment additive et si g $\in G$ et $A \sqsubseteq G$, on a

$$f_{g\circ A}(h\circ N) \ = \mu_1\left(N\cap h^{-1}\circ g\circ A\right) = \mu_1\left(N\cap \ \left(g_1^{-1}\circ h\right)^{-1}\circ A\right) = f_A\left(g_1^{-1}\circ h\circ N\right)$$

on a

$$\mu(g\circ A) = \int_{G\setminus N} f_{g\circ A}d\ \ \mu_2 \ \ = \int_{G\setminus N} f_A d\ \ \mu_2 = \ \ \ \mu(A),$$

ce qui prouve que est G-invariante. Comme annoncé, nous déduisons directement de ces deux propositions que tout groupe résoluble est moyennable. En effet, rappelons que si G est un groupe résoluble alors il existe

$$\{e\} = G_0; G_1, ..., G_{n-1}; G_n = G$$

une suite de sous-groupes de G tels que $G_i \lhd G_{i+1}$ et le groupe $G_{i+1} \setminus G_i$ est commutatif pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$ Dans ce cas, G_0 et $G_1 \setminus G_0$ sont des groupes moyennables, puisqu'ils sont commutatifs. on en déduit que G_1 est moyennable. De là, G_2 est moyennable puisque G_1 et $G_2 \setminus G_1$ le sont. En itérant, on prouve la moyennabilité du groupe résoluble G. A présent, nous montrons que $G(2)$ est un groupe résoluble. Pour ce faire, rappelons quelques notions élémentaires. Si g$\in G(2)$ alors il existe $\rho \in SO(2)$ et $\mathcal{T} \ \in T(2)$ tels que g $=\mathcal{T} \ \circ \rho$ ou g $=$ $\mathcal{T} \ \circ \rho \circ \mu$ où μ est la réflexion, i.e.

$$\mu : (x; y) \longmapsto (x; -y).$$

Le groupe $G(2)$ est résoluble . Il suffit de considérer la suite

$$\{e\} \lhd T(2) \lhd \langle T(2), SO(2)\rangle \lhd G(2).$$

En effet, par définition d'un sous-groupe normal, on a $T(2) \lhd \langle T(2), SO(2)\rangle$ et par le premier théorème d'isomorphie appliqué à l'application déterminant noté det, on a

$$\langle T(2), SO(2)\rangle \lhd G(2).$$

car ker(det) $=\langle T(2), SO(2)\rangle$. De plus,

$$\langle T(2), SO(2)\rangle \diagup T(2) = SO(2) \quad et G(2)\diagup \quad \langle T(2), SO(2)\rangle = \{\mu, e\}$$

Or, $SO(2)$ et $\{\mu, e\}$sont des groupes commutatifs. D'où la conclusion. ■

On en tire un corollaire immédiat.

Corollaire 3.1.1 *(AC) : Le groupe G(2) est moyennable.*

Nous sommes à présent capables de montrer que les ensembles paradoxaux de R^2(pour le groupe des isométries) sont d'intérieur vide. Pour ce faire, notons $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue et $\mathcal{L}$ la mesure finiment additive obtenue en appliquant le **théorème 2.4** à la mesure de Lebesgue définie sur le sous-anneau des ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathcal{P}(R^2)$.

Théorème 3.1.1 *:Si $X \sqsubseteq R^2$ est un ensemble paradoxal pour le groupe $G(2)$ alors il est d'intérieur vide.*

Démonstration. :Par hypothèse, il existe $X_1; X_2 \sqsubseteq X$ tels que $X1 \cap X2 = \emptyset$, $X_1 \sim X$ et $X_2 \sim X$. On peut supposer que $X_1 \cup X_2 = X$ Dans ce cas, il existe des partitions $(X_1;_i)_{i=1}^n$ et $(X_2;_i)_{i=1}^m$ de X_1 et X_2 respectivement, ainsi que des éléments de $G(2)$ $f_1, ..., f_n$,g_1....,g_m tels que $(f_i(X_2;_i))_{i=1}^n$ et $((g_i(X_2;_i))_{i=1}^m$ soient tous les deux des partitions de X. Procédons par l'absurde et supposons que $X \neq \emptyset$;. Il existe $r > 0$ et $y \in X$ tels que $B(y;r) \sqsubseteq X$. Pour obtenir une absurdité, montrons que $\mathcal{L}(B(y;r)) = \mathcal{L}(B(y;r)) = 0$. Posons

$$s = \underset{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}{max} \left\{ \left| y - f_i^{-1}(y) \right|, \left| y - g_j^{-1}(y) \right| \right\}.$$

De cette façon, si $x \in B(y;r)$ et puisque f_i^{-1} est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} \left| y - f_i^{-1}(x) \right| &\leq \left| y - f_i^{-1}(y) \right| + \left| f_i^{-1}(y) - f_i^{-1}(x) \right| \\ &\leq \left| y - f_i^{-1}(y) \right| + |y - x| \\ &\leq s + r, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f_i^{-1}(B(y;r)) \sqsubseteq B(y;r+s) \sqsubseteq X$. De même, $g_i^{-1}(B(y;r)) \sqsubseteq B(y;r+s) \sqsubseteq X$. Il est clair que

$$B(y;r) = \underset{i=1}{\overset{n}{\bigcup}} = (f_i(X_{1,i}) \cap B(y;r)) = \underset{i=1}{\overset{m}{\bigcup}} (g_i(X_{2,i}) \cap B(y;r))$$

On en tire que ■

$$
\begin{aligned}
2\bar{\mathcal{L}}\left(B\left(y,r\right)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\bar{\mathcal{L}}\left(f_i\left(X_{1,i}\right)\cap B\left(y,r\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mathcal{L}}\left(g_i\left(X_{2,i}\right)\cap B\left(y,r\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\bar{\mathcal{L}}\left(f_i^{-1}f_i\left(X_{1,i}\right)\cap B\left(y,r\right)\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mathcal{L}}\left(g_i^{-1}\left(g_i\left(X_{2,i}\right)\cap B\left(y,r\right)\right)\right)\\
&\le \sum_{i=1}^{n}\bar{\mathcal{L}}\left(\left(X_{1,i}\right)\cap B\left(y,r+s\right)\right)+\sum_{i=1}^{m}\bar{\mathcal{L}}\left(\left(X_{2,i}\right)\cap B\left(y,r+s\right)\right)\\
&\le \bar{\mathcal{L}}\left(B\left(y,r+s\right)\right).
\end{aligned}
$$

Par récurrence, on obtient l'inégalité

$$2^k\bar{\mathcal{L}}\left(B(y;r)\right)\le\bar{\mathcal{L}}\left(B(y;r+ks)\right)$$

pour tout $k\in N$. En passant à la limite, il vient

$$0\le\bar{\mathcal{L}}\left(B(y;r)\right)\le\lim\frac{\pi\left(r+ks\right)^2}{2^k}$$

ce qui suffit.

Conclusion

Vue l'importance de la théorie des ensemble et la logique des proposition et comme l'ensemble des classes des proposition forme une algebre de boole.

Il est tré important de voir la signification de l'extention de la mesure et les ensembles paradoxeau dans l'algebre de bool des proposition ce que apporte certainement des repons àcertain probléme logique.

Bibliographie

[1] **MacLane Categories** for the Working Mathematician, 1972,

[2] **MacLane Homology**,Springer, 1967.

[3] **Magnus W., Karrass A**,Solitar D. Théorie des groupes combinatoires, Nouveau York, Wiley, 1966.

[4] **Johnson, Présentations de groupes**, Plus avancé : Lyndon R., Schupp P. Théorie des groupes combinatoires, Springer,

[5] **1977. Epstein D.**, et tous les traitements de texte dans les groupes, Jones and Bartlett Pub- lishers, Boston, 1992.

Résumé

Ce travail comprend trois chapitres :

Le premier chapitre concerne certaines notions et définitions essentielles des groupes comme par exemple celle de groupe libre, d'équid écomposabilité, l'actions des groupes d'isométrie sur ensembles.

Le deuxième : Puisque nous allons montrer qu'il existe une mesure issue de la mesure de Lebesgue définie sur tout R^2, pour parvenir, nous avons besoin de la définition d'une algèbre de Boole, ainsi que quelques propriétés élémentaires, ceci fait l'objet de ce chapitre.

Le chapitre 2 nous donne les outils pour pouvoir construire une extension de la mesure de Lebesgue définie sur R^2. En particulier pour démontrer le théorème qui étend sur une algèbre de Boole une mesure définie sur un de ses sous-anneaux. Nous savons que $\left(P(R^2), \cap, \cup, \complement\right)$ est une algèbre de Boole et que les ensembles Lebesgue-mesurables forment un sous-anneau de cette algèbre sur lequel est définie la mesure de Lebesgue.

Le troisième chapitre traite : $G(2)$ est un groupe d'automorphismes pour lequel la mesure de Lebesgue est invariante, d'où, si $G(2)$ est moyennable , il existe une mesure exhaustive sur R^2 , $G(2)$- invariante, finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue. Montrons ainsi, que le groupe $G(2)$ est moyennable. Pour ça nous prouvons, d'une part, que tout groupe commutatif est moyennable et, d'autre part, que si N est un sousgroupe normal d'un groupe G tel que N et G/N sont moyennables, alors G est moyennabl

---

Abstract

This work includes three chapters :

The first chapter concerns some basic notions and definitions of groups as for example that of free group, of equid ecomposability, the action of groups of isometrics on sets.

The second : Since we are going to show that there is a measure from the measurement of Lebesgue defined on all R^2 to reach, we need the definition of an algebra of Boole, as well as some elementary properties, this is the subject of this chapter.

Chapter 2 : gives us the tools to build an extension of the measurement of Lebesgue set to R^2 . In particular to demonstrate the theorem that extends over an algebra of Boole a measure defined on one of his sub-rings. We know that $(P(R^2), \cap, \cup, \complement)$ is a Boolean algebra and that the Lebesgue-measurable sets form a sub-ring of R^2 this algebra on which is defined the measure of Lebesgue.

The third chapter : deals with : $G(2)$ is a group of automorphisms for which the measure Lebesgue is invariant, hence, if $G(2)$ is amenable, there is an exhaustive measure of R^2, $G(2)$ - invariant, finitely additive that extends the measure of Lebesgue. Let's show that the Group $G(2)$ is amenable. For that we prove, on the one hand, that any commutative group is amenable and, on the other hand, that if N is a normal subgroup of a group G such as N and G/N are amenable, so G is amenable.