RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

N° d'ordre :
N° de série :

UNIVERSITÉ KASDI MERBAH OUARGLA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MASTER
EN
MATHÉMATIQUES

OPTION
ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

INTITULÉ

Groupes fondamentaux de variétés affinement plates complètes

PAR
Hamdan BENHADDAD

Devant le jury :

Mohamed Boussaid	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Président
Yassine Guerboussa	M.C. Universié Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Tayeb Benmoussa	M.A. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Examinateur
Mohamed Amine Bahayou	M.C. Université Kasdi Merbah - Ouargla	Rapporteur

Soutenu publiquement le : 06 – 06 – 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :
Mes chers parents ;
Mes frères et ma soeur ;
Mon encadreur Mohammed Amine Bahayou ;
Tous mes amis surtout : Sammeh, Houssem, Mohammed, Khmissi, Naimi, Seddik, Ilias, Assad ;
Mes collègues des mathématiques ;
Tous les profs que j'ai mentionné et aux autres que j'ai oublié, veuillez m'excuser.

Hamdan Benhaddad.

Remerciements

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant de m'avoir aidé à achever ce travail.

Je tiens à remercier en premier lieu mon encadreur Monsieur **Mohamed Amine BAHAYOU** de m'avoir proposé un des plus importants thèmes et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Je voudrai aussi le remercier pour sa gentillesse, sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je voudrais remercier également : **Mr. Mohamed Boussaid** de m'avoir honoré par la présidence du jury de mon mémoire. Mes remerciements vont aussi à : **Mr. Yassine Guerboussa** et à **Mr. Mohamed Tayeb Benmoussa** qui ont accepté la tâche d'examinateur.

Je remercie Monsieur **Seddik Merdaci** pour ses efforts et ses conseils dans la préparation de ce mémoire.

Je remercie également les membres du département de Mathématiques de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de mon travail. Merci également à tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Je remercie aussi toute personne qui, de près ou de loin, a contribué à la finalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Nous étudions dans ce mémoire un article de Milnor[1] qui traite la question du groupe fondamental d'une variété affinement plate complète donnée. Milnor a montré que la classe de ces groupes fondamentaux contient les groupes virtuellement polycycliques sans torsion. Notre travail s'est limité à reproduire la preuve de ce théorème et à acquérir les notions nécessaires (qui vont de la théorie des groupes polycycliques aux groupes algébriques, structures affines...).

Un groupe Γ est virtuellement polycyclique s'il possède un sous-groupe d'indice fini Γ_0 qui soit polycyclique, i.e. il existe une suite finie de sous-groupes

$$\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = \{0\}$$

où chaque quotient Γ_i/Γ_{i+1} est cyclique.
Une variété différentielle M est affinement plate si elle possède un atlas dont tout les changements de cartes sont des applications affines. On définit la notion de géodésique pour une variété affine et on dit que cette variété est complète si la géodésique est définie sur toute la droite $\mathbb{R}$.

Le théorème de Milnor qui nous intéresse, s'énonce comme suit :

Théorème 1. *Tout groupe virtuellement polycyclique et sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète.*

Ce mémoire se présente de la façon suivante :

1. Premier chapitre de généralités, sur la notion du groupe fondamental et sur la notion de variété affine

2. Deuxième chapitre, consacré aux théorèmes de Milnor : un groupe virtuellement polycyclique et sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète. Caractériser les groupes de Lie dont tout sous-groupe discret est virtuellement polycyclique.

3. Une annexe qui regroupe les notions liées aux groupes polycycliques et aux groupes algébriques.

Nous terminons par une petite conclusion, où on indique les conjectures encore ouvertes à ce jour. Tout à la fin, nous donnons une bibliographie de la littérature qui traite ces questions plus en détail.

1. John Willard Milnor est un grand mathématicien, né le 20 février 1931 à Orange dans le New Jersey. Médaillé Fields en 1962, pour ses œuvres en topologie différentielle.

Notations

$\mathrm{Aff}(A)$	groupe des applications affines bijectives de A.
dim	dimension.
$\pi_1(X,x)$	groupe fondamental de (X,x).
$\widetilde{M}$	revêtement universel de M.
$\oplus$	somme directe.
$\otimes$	produit tensoriel.
$\sim$	relation d'homotopie.
T^n	tore de dimension n.
tr	opérateur trace.
(U,φ)	carte locale d'une variété.

Table des figures

Chapitre

1 Éléments de topologie et de géométrie

Définition 1.1 (Homotopie). *Soient X et Y deux espaces topologiques et soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues.*
On dit que f est homotope *à g et on note $f \sim g$, s'il existe une application continue (dite homotopie)*

$$\begin{array}{rccc} H: & X \times [0,1] & \to & Y \\ & (x,t) & \mapsto & H(x,t) \end{array} \tag{1.1}$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$.

Remarques.

1. *L'homotopie est une relation d'équivalence.*
2. *Si X et Y sont des variétés différentielles et si f et g sont lisses et homotopes, alors elles sont C^∞-homotopes.*

Définition 1.2 (Type d'homotopie). *Ont dit que deux espaces topologiques X et Y* ont le même type d'homotopie *s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que :*

$$f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y \quad \textit{et} \quad g \circ f \sim \mathrm{Id}_X .$$

Rétraction par déformation. Un exemple important et intuitive d'homotopie entre deux espaces est la rétraction par déformation. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Une rétraction de X sur A est une application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x$ pour $x \in A$. L'application $r : X \to A$ est appelée une *rétraction par déformation* si de plus $i \circ r : X \to X$, où $i : A \to X$ est l'injection canonique, est homotope à Id_X. On dit que A est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation $X \to A$.

Exemples.

1. *Deux espaces homéomorphes sont homotopes.*
2. *Un cercle est un rétracte par déformation d'un cylindre.*

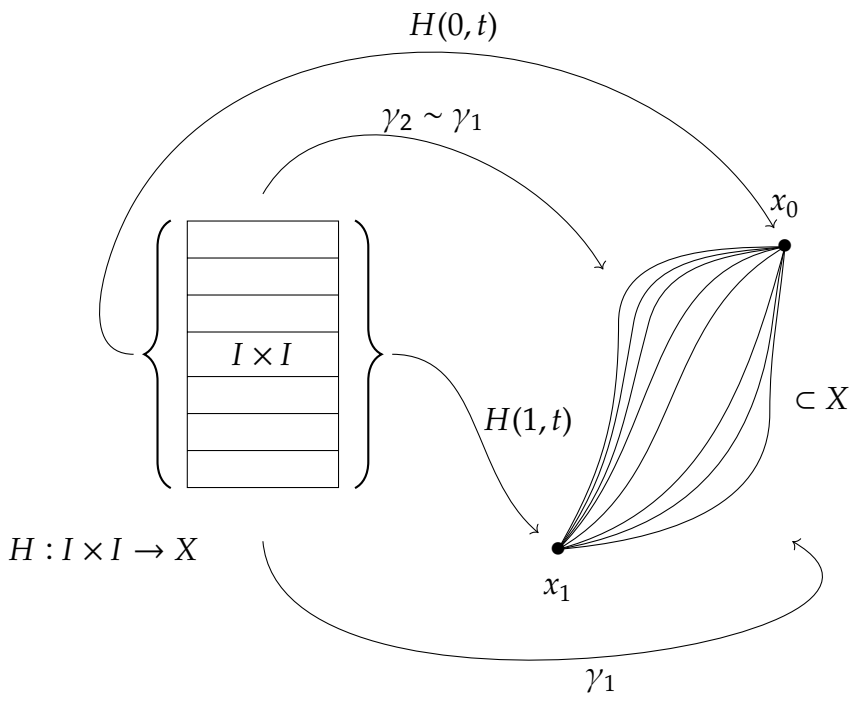

FIG. 1.1 : Deux courbes homotopes dans un espace X.

3. *Si Y est contractile (homotope à un point), alors toutes applications continues $f, g : X \to Y$ sont homotopes.*

4. *Un espace est dit simplement connexe s'il est connexe par arcs et si tout lacet (courbe fermée) est homotope à un point. Tout espace contractile est simplement connexe ; la réciproque est fausse : les sphère S^n ($n \geq 2$) sont simplement connexes mais non contractiles.*

5. *Le plan privé de l'origine n'est pas simplement connexe ; une courbe qui entoure l'origine n'est pas homotope à un point. L'anneau $\{z \in \mathbb{C},\ 0 < r < |z| < R\}$ et le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ ne sont pas simplement connexes.*

6. *$\mathbb{R}^n - \{pt\}$ est homotope à la sphère S^{n-1} (la sphère est un rétracte par déformation de $(\mathbb{R}^n)^*$ par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$).*

7. *Par les projections stéréographiques $S^n - \{pt\} \sim \mathbb{R}^n$ et*

$$(S^n - \{N\}) \cap (S^n - \{S\}) \sim (\mathbb{R}^n)^* \sim S^{n-1}.$$

1.1 Groupe fondamental et revêtements

Le groupe fondamental est introduit pour la première fois, par Poincaré, dans une note aux comptes rendus de l'Académie des sciences en 1892.. Il s'agit d'associer à un espace topologique donné, un groupe, de tel sorte que deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.

Plus précisément, soit X un espace topologique et $x \in X$, (on dira que (X, x) est un espace pointé). Soit $\mathscr{L}(X, x)$ l'ensemble des lacets basés en x, i.e. les applications continues $\gamma : [0, 1] \to X$ avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. On voudrait faire de $\mathscr{L}(X, x)$ un groupe, avec la concaténation des lacets :

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

mais cette opération n'est pas associative.

L'homotopie est compatible avec la concaténation des lacets et descend au quotient pour en former un groupe, appelé le groupe fondamental de (X, x) :

$$\pi_1(X, x) = \frac{\mathscr{L}(X, x)}{\text{homotopie}}.$$

Ce groupe dépend, à priori, du point base x. Néanmoins, si X est connexe par arcs, $\pi_1(X,x)$ ne dépend plus de x et on notera simplement $\pi_1(X)$. Plus précisément, si c un chemin de x à y dans X. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(X,y) \\ & [\gamma] & \mapsto & [c\cdot\gamma\cdot c^{-1}] \end{array}$$

est un isomorphisme qui ne dépend que de la classe d'homotopie de c.

Exemples.
- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. *On montre en fait que* $\pi_1(S^1,1) = \{\gamma_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *où* $\gamma_n(t) = e^{i2\pi nt}$.
- $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ *est trivial. En effet, tout les lacets de* $\mathbb{R}^n$ *sont homotopes.*

Revêtements Soit B un espace topologique. Un revêtement de B est la donné d'un espace topologique E et d'une application continue $p : E \to B$ ayant la propriété de *trivialisation locale* suivante. Pour tout point b de B, il existe un voisinage V de b dans B, un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}(V) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & V\times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Ceci veut dire qu'un revêtement est un *fibré* à fibres discrètes.

Autrement dit, $p : E \to B$ est un revêtement si tout point de B appartient à un ouvert V tel que $p^{-1}(V)$ soit une réunion disjointe d'ouverts appliqués homéomorphiquement par p sur V.

Proposition 1. *Soit* $p : E \to B$ *un homéomorphisme local surjectif, avec* E *compact. Alors* p *est un revêtement.*

Démonstration. Soit $b \in B$ et $p^{-1}(b) = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit W_i un voisinage ouvert de x_i tel que $p|_{W_i}$ soit un homéomorphisme de W_i sur un ouvert U_i contenant b. Quitte à les rétrécir, on peut supposer les W_i deux à deux disjoints. Soit

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \setminus p\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

et soit $V_i = \left(p|_{W_i}\right)^{-1}(U)$. Alors, par construction, $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des V_i. □

Théorème 2. *Soit X un espace topologique et G un groupe opérant sur X de façon que, pour tout $g \in G$, l'application $x \to g{\cdot}x$ est un homéomorphisme de X. On fait l'hypothèse suivante :*

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que,

$$\text{pour tout } g \neq e \text{ dans } G, gU \cap U = \varnothing. \quad \text{(P)}$$

Alors X est un revêtement de X/G.

Exemples.

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{it}$. *D'après le théorème précédent avec* $G = \mathbb{Z}$.

$p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. *D'après la proposition précédente.*

$p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = [x]$. *D'après le théorème précédent avec* $G = \{-\mathrm{Id}, \mathrm{Id}\}$.

1.2 Structures affines

1.2.1 Espaces affines

Soit V un espace vectoriel (réel et de dimension finie) et soit A un ensemble. On dit que A est un espace affine dirigé par V s'il existe $\Phi : A \times A \to V$ telles que, pour tout $x, y, z \in A$:

- $\Phi(x, y) + \Phi(y, z) = \Phi(x, z)$ (relation de Chasles).
- l'application $\Phi_x : A \to V$, $y \mapsto \Phi(x, y)$ est bijective.

En d'autres termes, s'il existe une action libre et transitive du groupe abélien $(V, +)$ sur A. Cette action est généralement notée additivement :

$$\begin{aligned} V \times A &\longrightarrow A \\ (v, x) &\longmapsto x + v. \end{aligned}$$

Applications affines. Étant donné deux espaces affines (A, V) et (B, V'). Une application $f : A \longrightarrow B$ est dite *affine* s'il existe $x_0 \in A$ et une application linéaire $L : V \longrightarrow V'$ tel que :

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + L(v)$$

Dans ce cas $f(x + v) = f(x) + L(v)$ est vérifiée pour tout $x \in A$ et tout $v \in V$.

L'application L est appelée la partie linéaire de f et notée L_f.

On a les propriétés suivantes :

- La composée de deux applications affines, f et g, est une application affine et

$$L_{f\circ g} = L_f \circ L_g.$$

- L'application f est injective (respectivement, surjective) si, et seulement si, L_f est injective (respectivement, surjective).

- Si $\mathrm{Aff}(A)$ est le groupe des applications affines bijectives de A alors on a l'homomorphisme surjective :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}(A) & \to & \mathrm{GL}(V) \\ f & \mapsto & L_f \end{array}$$

  et son noyau est constitué des translations.

1.2.2 (G, X)-structures

Soit X une variété connexe et G un groupe de Lie réel qui agit effectivement sur X. On dit que l'action est *analytique* si, pour tout $g, h \in G$ et tout ouvert non vide U de X, si les difféomorphismes g et h coïncident sur U alors $g = h$.

Désormais, on supposera toujours que l'action de G sur X est effective et analytique ; en vu de définir les espaces localement modelées sur X.

Définition 1.3 ((G, X)-structures). *Soit M une variété différentielle. Une (G, X)-structure sur M est la donnée d'un atlas de cartes $\varphi_i : U_i \longrightarrow X$ telles que :*

- *les ouverts U_i recouvrent M,*

- *les applications φ_i sont des difféomorphismes sur leur image.*

- *les changements de cartes $f_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ sont localement donnés par des éléments de G i.e. pour tout x dans $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, il existe un g de G et un voisinage U de x tel que $f_{ij} = g$ sur U.*

Remarques.

1. *L'élément g est unique et l'égalité $g = f_{ij}$ est valable sur toute la composante connexe de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ contenant x.*

2. *On considère comme égales deux (G, X)-structures définies par des atlas dont la réunion est encore un atlas qui définit une (G, X)-structure... autrement dit, une (G, X)-structure c'est un atlas maximal vérifiant les propriétés ci-dessus.*

3. *Les structures affines (plates) sont celles pour lesquelles G est le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de $X = \mathbb{R}^n$.*

4. *L'exemple le plus simple de (G, X)-variété est X elle même.*

On appelle (G, X)-variété une variété munie d'une (G, X)-structure. L'intérêt de ces structures est que les constructions géométriques locales faites sur X descendent sur M. On peut penser par exemple à des métriques invariantes par le groupe G.

Définition 1.4 ((G, X)-morphismes). *Un morphisme de (G, X)-variétés $F : M \to N$ est une application C^∞ qui se lit localement dans les cartes des (G, X)-structures comme l'action d'un élément de G i.e. pour tout point x de M, il existe des cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) au voisinage de x et de $F(x)$ et un élément g de G tels que*

$$\psi_j \circ F = g \circ \varphi_i.$$

Ces morphismes sont des difféomorphismes locaux.

Lorsqu'il s'agit de structures affines, on dit que F est une application affine.

Développante et holonomie Une façon de comprendre une (G, X)-structure sur une variété M connexe est de construire l'application développante. C'est le but de cette section. On se repose pour cela sur l'hypothèse d'analyticité de l'action de G sur X : en partant d'une carte, on peut en faire le prolongement analytique[1] grâce aux changements de cartes, pour finir par construire une application du revêtement universel $\widetilde{M}$ de M vers X. Cette application est par construction un difféomorphisme local, mais on verra que son comportement global peut-être très compliqué. Ayant construit cette application développante, l'action du groupe fondamental de M sur son revêtement universel se traduit par l'action d'éléments du groupe G : on obtient naturellement la représentation d'holonomie de la (G, X)-structure, c'est-à-dire un morphisme $\pi_1(M) \to G$.

Soit M une (G, X)-variété connexe. Son revêtement universel est naturellement muni d'une (G, X)-structure en composant les cartes par l'application de revêtement. On montre maintenant qu'il existe un (G, X)- morphisme D du revêtement universel $\widetilde{M}$ dans X, qui est essentiellement unique : on l'appelle application *développante*

Proposition 2. *Il existe un (G, X)-morphisme D de $\widetilde{M}$ dans X. De plus, tout autre (G, X)-morphisme de $\widetilde{M}$ dans X est de la forme $g \circ D$, pour un élément $g \in G$.*

Démonstration. Fixons un point $v_0 \in \widetilde{M}$. On choisit une carte de la (G, X)-structure $\varphi_0 : V_0 \to X$ autour de v_0. L'application D recherchée coïncidera avec φ_0 sur V_0 et on cherche à la prolonger. On montrera plus précisément : il existe un unique (G, X)-morphisme D de $\widetilde{M}$ dans X qui coïncide avec φ_0 sur un voisinage de v_0.

1. de façon parfaitement similaire au prolongement analytique des fonctions holomorphes.

Construction de la développante. Fixons un point v_0 de M et une carte (U_0, φ_0) au voisinage de v_0. Soit v un point de M. Relions v_0 à v par un chemin γ. Choisissons une partition $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{p+1} = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ de sorte qu'il existe des ouverts $U_0, \cdots, U_p$ de cartes $\varphi_0, \cdots, \varphi_p$ de sorte que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Soient g_i les éléments de G tels que $\varphi_i = g_{i+1} \circ \varphi_{i+1}$ au voisinage de $\gamma(t_{i+1})$. On pose

$$D(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_p(\varphi_p(v)).$$

On vérifie grâce au lemme ci-dessus que, à partition fixée, $D(v)$ ne dépend pas du choix des cartes $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$. En effet, donnons nous d'autres cartes ψ_i avec $\psi_0 = \varphi_0$, et notons g_i' les éléments de G qu'elles permettent de construire. On a l'égalité, avec h_i dans G, $\psi_i = h_i \circ \varphi_i$ au voisinage de $\gamma([t_i, t_{i+1}])$. Et donc $g_i' = h_{i-1} \circ g_i \circ h_i$. On en déduit que $D(v)$ ne dépend pas de la partition et enfin que $D(v)$ ne dépend pas du lacet choisi car M est simplement connexe. □

Nous avons utilisé le lemme suivant, qui met en évidence l'utilité de l'hypothèse d'analyticité :

Lemme 1.1. *Soit M une (G, X)-variété connexe. Deux (G, X)-morphismes φ, ψ à valeurs dans X qui coïncident sur un ouvert non vide coïncident sur tout M.*

Démonstration. On considère l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels φ et ψ coïncident sur un voisinage de x. C'est un ensemble non-vide, ouvert par construction. Il reste à voir qu'il est fermé. Pour cela, soit x un point dans l'adhérence. Lisons φ et ψ dans une carte autour de x. Ils sont chacun donnés par un élément g et h de G, par définition de (G, X)-morphisme. De plus, g et h coïncident sur un ouvert inclus dans la carte, par hypothèse sur x. L'analyticité de l'action de G garantit que $g = h$, c'est-à-dire que φ et ψ coïncident au voisinage de x. □

On fixe une (G, X)-variété connexe et on choisit un point base $x \in M$. Notons $\Gamma = \pi_1(M, x)$. Ce groupe agit sur le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. On fixe une application développante D de la (G, X)-structure. La proposition suivante définit le morphisme d'holonomie associé :

Proposition 3. *Il existe un unique morphisme $h : \Gamma \to G$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a*

$$D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

Démonstration. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $D \circ \gamma$ est un (G, X)-morphisme de $\widetilde{M}$ vers X. D'après la proposition précédente, il existe un élément de G, qu'on note $h(\gamma)$ tel que

$$D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

On vérifie que h est bien un morphisme de groupes. Pour les notions d'application développante et de morphisme d'holonomie, on fait des choix. Remarquons que si on change l'application développante D en $g \circ D$, alors on conjugue le morphisme d'holonomie : $h(\gamma)$ devient $g \circ h(\gamma) \circ g^{-1}$. □

1.2.3 Variétés affinement plates

Géodésiques Soit M une variété affinement plate, c'est à dire une (G, X)-variété où l'espace modèle X est l'espace affine $V = \mathbb{R}^n$ et où G est le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ des transformations affines de $\mathbb{R}^n$. On choisit une développante $D : \widetilde{M} \to V$ et on note $h : \pi_1(M) \to G$ le morphisme d'holonomie. On appelle *géodésique* sur M (ou sur $\widetilde{M}$) une courbe qui, lue dans les cartes, est un segment de droite paramétré affinement. Pour tout x dans M et v dans T_xM, il existe une unique géodésique notée $t \to \phi_v(t)$ qui part de x à la vitesse v au temps 0. Lorsqu'on peut définir cette géodésique jusqu'au temps 1, on note $\exp_x(v)$ la valeur prise au temps $t = 1$. On a donc $\phi_v(t) = \exp_x(tv)$. On note F_x l'ensemble des points de M que l'on peut joindre à x par une géodésique. C'est un ouvert de M.

Un *segment affine* dans une variété affinement plate M est donné par une application $\sigma : I \longrightarrow M$ d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans M qui, lorsqu'il est composé avec n'importe quel système de coordonnées local de l'atlas affine de M donne une carte de I à un certain $\mathbb{R}^n$ qui est localement la restriction d'une application affine.

À noter qu'un segment affine est uniquement déterminé par son image par une paramétrisation affine, c'est-à-dire si $\sigma : I \longrightarrow M$ et $\tau : J \longrightarrow M$ sont deux segments affines avec $\sigma(I) = \tau(J)$ alors il existe un automorphisme affine $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\tau = \sigma \circ g$.

Une *ligne affine* dans M est un segment affine défini sur toute la droite $\mathbb{R}$.

Complétude Une variété affinement plate M est dite *complète* si chaque segment affine dans M est la restriction d'une ligne affine de M.

Si M est une variété affinement plate, son revêtement universel $\widetilde{M}$ est aussi une variété affinement plate d'une manière naturelle ; et M est complète si et seulement si $\widetilde{M}$ est complète.

Chaque variété affinement plate complète et simplement connexe est une variété affine isomorphe à $\mathbb{R}^n$, si $\dim M = n$. Il s'ensuit que le groupe de transformations du revêtement universel est $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}) \simeq \pi_1(M)$ est un sous-groupe proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. L'action de Γ sur $\mathbb{R}^n$ a la propriété qu'aucun élément $g \neq e$ n'a de point fixe. Cette propriété équivaut à Γ sans torsion. La raison en est que chaque groupe fini de transformations affines a un point fixe, par exemple le centre de gravité d'une orbite. Inversement, si Γ est un sous-groupe sans torsion proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ alors $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$ est une variété affinement plate complète dont le groupe fondamental s'identifie à Γ.

Chapitre

2

Groupes fondamentaux de variétés affinement plates

2.1 Construction d'actions affines

Cette partie contient les résultats principaux concernant le groupe fondamental d'une variété affinement plate complète donnée. (Voir [8]).

Un groupe G est dit virtuellement polycyclique, s'il possède un sous groupe d'indice fini Γ possédant une suite fini :

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = \{0\}.$$

où chaque Γ_i est un sous-groupe normal de Γ_{i-1} et chaque quotient Γ_{i-1}/Γ_i est cyclique.

Remarque. *Quitte à remplacer Γ par son cœur*

$$\text{cœur}_G(\Gamma) = \bigcap_{g \in G} g\Gamma g^{-1},$$

qui est un sous-groupe normal ; et d'indice fini (comme Γ), on peut toujours ajouter dans la définition d'un groupe polycyclique, que le sous-groupe Γ est normal.

Nous rappelons qu'une action d'un groupe discret G sur un espace localement compact X est dite *proprement discontinue* si pour tout compact K de X, l'ensemble

$$G_K = \left\{g \in G,\ gK \cap K \neq \varnothing\right\}$$

est fini[1].

Le théorème suivant nous permettra de construire des actions effectives et proprement discontinues de certains espaces euclidiens.

Théorème 3. *Tout groupe virtuellement polycyclique admet une action effective et proprement discontinue par transformations affines de $\mathbb{R}^n$ (pour certain $n \geq 1$).*

1. En particulier, les groupes d'isotropie sont finis

Démonstration. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe polycyclique d'indice fini. Le groupe Γ_0 peut être plongé dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$ (voir [8]). On peut donc voir Γ_0 comme sous-groupe discret du groupe de Lie complexe $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$.

La fermeture de Zariski de Γ_0 est à la fois une sous-variété algébrique et un sous-groupe de Lie complexe résoluble de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. La composante irréductible du neutre S est un sous-groupe d'indice fini (voir Annexe). L'intersection $\Delta = S \cap \Gamma_0$ est donc d'indice fini dans Γ_0. En effet, Comme S est un sous-groupe normal de $\overline{\Gamma_0}$ alors, le deuxième théorème d'isomorphisme donne :

$$\Gamma_0/(S \cap \Gamma_0) \simeq S\Gamma_0/S \hookrightarrow \overline{\Gamma_0}/S.$$

Comme S est un sous-groupe algébrique connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$, il est conjugué au groupe de Borel B constitué de matrices triangulaires supérieures, (c'est un Théorème de Borel pour les groupes algébriques résolubles). Quitte à appliquer un automorphisme intérieur (conjugaison), on peut supposer $\Delta \subset B$.

Comme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \times & \times & \times & \times \\ & \ddots & \times & \times & \times \\ & & \ddots & \times & \times \\ & 0 & & \ddots & \times \\ & & & & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times & \times \\ & \ddots & \times & \times & \times \\ & & \ddots & \times & \times \\ & 0 & & \ddots & \times \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \cdots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

alors $B = UD$ où U est le sous-groupe des matrices unipotentes (i.e. triangulaires supérieures avec que des 1 sur la diagonale) et D est le sous-groupe abélien des matrices diagonales. À noter que U est un espace affine complexe de dimension $\frac{m(m-1)}{2}$. Comme U est un sous-groupe normal, on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow B \xrightarrow{p} D \longrightarrow 1.$$

Le morphisme surjectif p permet de définir une action de B sur U par :

$$b \cdot u := bup(b)^{-1}.$$

C'est une action (non nécessairement effective ou proprement discontinue), par des transformations affines ($\Phi_b(u) = bup(b)^{-1}$ est la restriction d'une application linéaire au sous-espace affine U). Par restriction, Δ opère aussi sur U par des transformations affines.

Comme Γ est polycyclique, il est résoluble de type fini (et de même pour ces sous-groupes). En particulier, Δ est de type fini. On déduit que le quotient $\Delta/(\Delta \cap U)$ est de type fini et abélien (on peut le plonger dans le groupe, abélien $D \simeq B/U$). On a alors

$$\Delta/(\Delta \cap U) = \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_p$$

où chaque Λ_i est cyclique[2]. Tout groupe cyclique Λ_i agit effectivement et proprement discontinument sur $\mathbb{C}$, par des transformations affines. En effet, si Λ est cyclique fini, i.e $\Lambda = \mathbb{Z}_k = \{z \in \mathbb{C},\ z^k = 1\}$, alors Λ opère sur $\mathbb{C}$ par rotation : $z_k \cdot z := z_k z$. Si Λ est cyclique infini, i.e. $\Lambda = \mathbb{Z}$, alors Λ opère sur $\mathbb{C}$ par translation : $n \cdot z := z + n$.

Donc $\Delta/(\Delta \cap U)$ opère effectivement et proprement discontinument sur $\mathbb{C}^p$ par des transformations affines, (chaque facteur agit sur $\mathbb{C}$, par rotation ou translation, suivant le facteur cyclique est fini ou infini).

L'action diagonale de Δ sur $U \times \mathbb{C}^p$ définie par :

$$b \cdot (u, z_1, ..., z_p) := \left(bup(b)^{-1}, [b] \cdot (z_1, ..., z_p)\right),$$

où $[b]$ est la classe à gauche de $\Delta/(\Delta \cap U)$, est effective et proprement discontinue. En effet, si pour tout $(u, z_1, ..., z_p) \in U \times \mathbb{C}^p$, $b \cdot (u, z_1, ..., z_p) = (u, z_1, ..., z_p)$, alors $[b] = 0$, i.e. $b \in \Delta \cap U$. Par suite, $bup(b)^{-1} = u$ donne $p(b) = u^{-1}bu \in U$ et donc $b = \mathrm{Id}$. Soit K un compact de $U \times \mathbb{C}^p$ et soit K_2 sa projection sur $\mathbb{C}^p$. On a

$$\begin{aligned} b \in G_K &\Longleftrightarrow \exists (u, z_1, ..., z_p), (v, w_1, ..., w_p) \in K,\ (v, w_1, ..., w_p) = b \cdot (u, z_1, ..., z_p) \\ &\Longrightarrow (z_1, ..., z_p), (w_1, ..., w_p) \in K_2,\ (w_1, ..., w_p) = b \cdot (z_1, ..., z_p) \\ &\Longrightarrow b \in G_{K_2}. \end{aligned}$$

mais G_{K_2} est fini, donc G_K est fini.

Nous allons prolonger l'action du sous-groupe Δ en une action de Γ qui possède les mêmes propriétés. Δ est d'indice fini q dans Γ. Plus précisément :

$$[\Gamma : \Delta] = [\Gamma : \Gamma_0] \times [\Gamma_0 : \Delta].$$

Et, d'après ce qui précède, Δ opère effectivement et proprement discontinument par des transformations affines de $\mathbb{R}^k$ ($k = m(m-1) + 2p$). Soit

$$\mathrm{Hom}_\Delta(\Gamma, \mathbb{R}) = \left\{f : \Gamma \to \mathbb{R}^k,\ f(\delta\gamma) = \delta f(\gamma),\ \forall \delta \in \Delta, \forall \gamma \in \Gamma\right\}$$

i.e. les fonctions $f : \Gamma \to \mathbb{R}^k$ Δ-équivariantes.
Si $\gamma_1, ..., \gamma_q$ sont les représentants des classes à droite de Γ/Δ, alors $\Gamma = \Delta\gamma_1 \cup ... \cup \Delta\gamma_q$. Tout $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(\Gamma, \mathbb{R})$ est uniquement déterminée par ses valeurs $f(\gamma_1), ..., f(\gamma_q) \in \mathbb{R}^k$, qui peuvent être choisies arbitrairement, ce qui établi une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Delta(\Gamma, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{kq} \\ f & \mapsto & \left(f(\gamma_1), ..., f(\gamma_q)\right) \end{array}$$

On définit une action de Γ sur $\mathrm{Hom}_\Delta(\Gamma, \mathbb{R})$ par l'application affine :

$$\left(\varphi \cdot f\right)(\gamma) := f(\gamma\varphi)$$

2. Ceci est vrai pour tout groupe abélien de type fini.

Il est immédiat que $\varphi \cdot f$ est Δ-équivariante.

Comme l'action de Δ sur $\mathbb{R}^k$ est effective et proprement discontinue, l'action induite de Γ sur $\mathrm{Hom}_\Delta(\Gamma, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{kq}$ l'est aussi. □

Le théorème précédent va nous permettre d'énoncer et de démontrer le théorème central suivant.

Théorème 4. *Tout groupe virtuellement polycyclique et sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète.*

Démonstration. Si un groupe de Lie G opère proprement et librement sur une variété M alors le quotient M/G possède une unique structure de variété pour laquelle $M \to M/G$ est une fibration de fibre type G. Si G est discret et M est simplement connexe alors $M \to M/G$ est un revêtement (universel) et le groupe fondamental du quotient s'identifie à G (i.e. $\pi_1(M/G) \simeq G$). (Voir [3]).

Si Γ est un groupe virtuellement polycyclique, alors Γ opère proprement discontinument par des transformations affines sur un certain $\mathbb{R}^k$ (d'après le théorème précédent). Comme Γ est sans torsion, tout ses sous-groupes finis sont triviaux. En particulier, le stabilisateur de chaque point qui est fini (car l'action est proprement discontinue), est donc trivial et l'action est donc libre. Par suite, $M = \mathbb{R}^k/\Gamma$ est la variété cherchée ($\pi_1(M) \simeq \Gamma$). □

2.2 Sous-groupes discrets de groupes de Lie

Nous nous intéressons dans cette partie aux sous-groupes discrets des groupes de Lie[3]. Plus précisément, nous allons prouver un certain nombre de lemmes pour caractériser les groupes de Lie dont tout sous-groupe discret est virtuellement polycyclique.

Le premier lemme est une conséquence de l'alternative de Tits (voir [6]).

Lemme 2.1. *Soit G un groupe de Lie à nombre fini de composantes connexes et soit Γ un sous-groupe discret. Alors, Γ est soit virtuellement polycyclique, soit il contient un sous-groupe libre non cyclique.*

Démonstration. Remarquons d'abord que c'est bien une alternative, i.e. Γ ne peut pas à la fois, posséder un sous-groupe libre à deux générateurs et être virtuellement polycyclique.

Si Γ admet une représentation fidèle $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ pour un certain n, alors l'alternative de Tits affirme que Γ est soit virtuellement résoluble, soit il contient un sous-groupe libre à deux générateurs.

3. Sophus Lie (1842-1899), mathématicien norvégien. On lui doit la création de la notion d'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie.

La même dichotomie subsiste si Γ peut être plongé dans un groupe de Lie G à nombre fini de composantes connexes. En effet, par le Théorème d'Ado, l'algèbre de Lie de G admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie. Il existe donc un groupe de Lie G' localement isomorphe à G avec $G' \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (pour un certain n). Soit G_0 la composante connexe du neutre de G et soit $\widetilde{G_0}$ son revêtement universel. On a deux morphismes de groupes de Lie surjectifs, à noyaux discrets :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G_0} \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "p'"] & \\ G & G' \end{tikzcd}$$

Pour tout sous-groupe Γ de G on associe un sous-groupe Γ' de G' par :

$$\Gamma' = p'\left(p^{-1}(\Gamma \cap G_0)\right).$$

On vérifie alors que Γ est virtuellement polycyclique (respectivement, contenant un sous-groupe libre à deux générateurs) si, et seulement si, Γ' est virtuellement polycyclique (respectivement, contenant un sous-groupe libre à deux générateurs).

Un Théorème de Mostow affirme qu'un sous groupe discret résoluble d'un groupe de Lie connexe est forcément polycyclique. Ce qui permet de conclure que pour les sous-groupes discrets, virtuellement résoluble implique virtuellement polycyclique. □

Groupes moyennables. Avant d'énoncer le deuxième lemme, nous aurons besoin de la notion de moyennabilité des groupes.

Soit G un groupe topologique et soit B l'espace de ses fonctions continues et bornées

$$B = \left\{f : G \to \mathbb{R}, \text{continue } \exists M > 0,\ \forall g \in G,\ |f(g)| \leq M\right\}.$$

Le groupe G agit à gauche sur B par :

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

Le groupe G est dit *moyennable* (ou *amenable*) si B possède une moyenne invariante par translation à gauche. i.e. une fonctionnelle linéaire, à valeur réelle : $f \mapsto m(f)$ telles que :

- Pour tout $g \in G$, $m(g \cdot f) = m(f)$.
- $\inf f \leq m(f) \leq \sup f$.

Exemples.

1. Tout groupe fini est moyennable.
2. Tout groupe abélien est moyennable.
3. Toute extension d'un groupe moyennable est moyennable.
4. Tout sous-groupe discret d'un groupe moyennable est moyennable.
5. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ n'est pas moyennable.
6. Tout groupe libre non cyclique, n'est pas moyennable.

Chapitre

3 Annexe

3.1 Éléments de la théorie des groupes

Un groupe G est dit *polycyclique* s'il existe une suite décroissante finie $(H_k)_{k=0,..,n}$ de sous-groupes de G telle que :

$$\{1\} = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G,$$

les quotients H_k/H_{k+1} étant cycliques (pour $k = 0, \dots, n-1$) si n est strictement positif. Il résulte directement de la définition que la polycyclicité est stable par extension. Plus précisément, si un groupe G possède un sous-groupe $H \lhd G$ tel que H et G/H soient polycycliques, alors G est polycyclique.

Exemples.

1. *Tout groupe cyclique est polycyclique.*
2. *Tout groupe fini résoluble est polycyclique.*
3. *Tout groupe nilpotent de type fini est polycyclique.*

Proposition 4.

1. *Tout sous-groupe d'un groupe polycyclique est polycyclique.*
2. *Tout quotient d'un groupe polycyclique est polycyclique.*
3. *Un produit direct fini de groupes polycycliques est polycyclique.*

Démonstration. Voir [9]. □

Proposition 5. *Pour un groupe G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *G est polycyclique.*

2. *G est résoluble et vérifie la condition maximale*[1].

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$
Soient :

$$\{1\} = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G$$

des sous-groupes de G tels que H_k/H_{k+1} soit cyclique pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. En particulier, les quotients H_k/H_{k+1} sont résolubles et ils vérifient la condition maximale. Mais la résolubilité et la condition maximale sont des propriétés stables par extension, donc G est résoluble et vérifie la condition maximale.

$2 \Rightarrow 1$

Le groupe G étant résoluble, il possède une série

$$\{1\} = H_n \subseteq H_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G$$

telle que H_k/H_{k+1} soit abélien pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. De plus, G vérifiant la condition maximale, H_k/H_{k+1} est de type fini. Or, suivant un résultat bien connu, un groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques. Supposons que pour un entier k donné ($k = 0, 1, \dots, n-1$), H_k/H_{k+1} soit isomorphe au produit direct $A_1 \times \cdots \times A_{i_k}$, où chaque A_i est cyclique. La série à quotients cycliques

$$\{1\} \subseteq A_1 \subseteq A_1 \times A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_1 \times \cdots \times A_{i_k} \simeq H_k/H_{k+1},$$

montre que H_k/H_{k+1} est polycyclique. La polycyclicité étant stable par extension, G est polycyclique. □

3.1.1 Groupes virtuellement polycycliques

Définition 3.1. *Soit G un groupe, on dit que G est* virtuellement *polycyclique si, il existe un sous groupe H de G telle que G/H fini et H est polycyclique.*

Exemples.

1. *tout groupe polycyclique est virtuellement polycyclique.*

2. *Le produit direct d'un groupe polycyclique apr un groupe fini est virtuellement polycyclique*

1. Tout sous-groupe de G est de type fini.

3.2 Groupes algébriques

Les groupes algébriques sont des objets munis d'une structure de variété algébrique et d'une structure de groupe compatible. Définissons donc d'abord les variétés algébriques affines (on considère uniquement des groupes algébriques linéaires, donc il suffit de présenter les variétés affines). Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera un corps algébriquement clos. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A l'algèbre $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$. Si I est un idéal de A, on note $v(I)$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ qui est le lieu des zéros des polynômes de I, c'est-à-dire :

$$v(I) := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall P \in I, P(x) = 0\}.$$

On montre que ces sous-parties de $\mathbb{K}^n$ vérifient les axiomes des parties fermées d'un espace topologique. On peut donc définir une topologie sur $\mathbb{K}^n$, appelée *topologie de Zariski*, telle que les fermés sont les sous-ensembles de la forme $v(I)$, où I est un idéal de $A = \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$.

Définition 3.2 (Variété algébrique affine). *Une variété algébrique affine sur $\mathbb{K}$ est un sous-ensemble fermé (pour la topologie de Zariski) d'un certain $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, muni de la topologie induite.*

Géométriquement, une variété affine est donc un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par des équations polynômiales (les polynômes de I).

À une variété affine X de la forme $v(I)$, où I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$, on associe son algèbre des fonctions $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]/I$. On peut remarquer que, comme l'algèbre des polynômes sur un corps est noethérienne, tout idéal I est engendré par un nombre fini de générateurs. Cela veut donc dire concrètement qu'un nombre fini d'équations définit une variété affine.

Définissons maintenant les morphismes entre variétés.

Définition 3.3. *Si X et Y sont respectivement des sous-variétés de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, un morphisme de variétés $\varphi : X \to Y$ est une application polynômiale $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ telle que $\varphi(X) \subset Y$.*

On peut maintenant définir ce qu'est un groupe algébrique linéaire.

Définition 3.4. *Un groupe algébrique linéaire est une variété algébrique affine munie d'une structure de groupe telle que :*

- *la multiplication $G \times G \to G$ est un morphisme de variétés,*
- *l'inverse $G \to G$ est un morphisme de variétés.*

Les groupes de matrices classiques sont des groupes algébriques linéaires : le groupe orthogonal $O(n)$, le groupe spécial orthogonal $SO(n)$, le groupe spécial $Sl(n)$, les matrices diagonales D_n , les matrices triangulaires T_n...

Proposition 6. *Soit G un groupe algébrique linéaire. Alors il existe un isomorphisme φ entre G et un sous-groupe fermé d'un certain $GL(n, \mathbb{K})$.*

Donc finalement les groupes algébriques linéaires ne sont autres que des groupes de matrices définis par un certain nombre fini d'équations algébriques.

Conclusion

Plusieurs conjectures de longue date, liées aux structures affines, sont encore ouvertes. Nous avons revu le travail de Milnor et les idées qui y sont derrière en vu d'étudier ces conjectures avec de possibles résultats nouveaux.

Conjecture de Markus. Une variété affinement plate compacte est complète si, et seulement si, elle a possède une forme volume parallèle.

Conjecture d'Auslander. Tout groupe cristallographique est virtuellement résoluble.

Conjecture de Chern. Toute variété fermée (compacte et sans bord) et affinement plate est de caractéristique d'Euler nulle.

Bibliographie

[1] H. Abels, *Properly discontinuous groups of affine transformations : a survey*, Geom. Ded. 87 no. 1-3, 309-333. 2001.

[2] R.D. Canary A. Marden, D.B.A. Epstein, *Fundamentals of Hyperbolic Geometry : Selected Expositions*, Cambridge University Press, 2006.

[3] Y. Félix, D. Tanré, *Topologie algébrique*, Sciences Sup, 2010.

[4] W. Ferrer Santos, A. Rittatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups*, CRC Press, 2005.

[5] W. M. Goldman, *Two papers which changed my life : Milnor's seminal work on flat manifolds and flat bundles*, 2011, `https://arxiv.org/abs/1108.0216v2`

[6] C. Löh, *Geometric Group Theory : An Introduction*, Springer Universitext, 2017.

[7] G. Margulis, *Free properly discontinuous groups of affine transformations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 272,937-940, 1983.

[8] J. Milnor, *Fundamental Groups of Affinely Flat Manifolds*, Journal of Geometry and Physics 62 (2012) 1600-1610.

[9] D. Segal, *Polycyclic Groups*, Cambridge University Press, 2005.

[10] C.C. Sims *Computation with Finitely Presented Groups*, Cambridge University Press, 1994.

[11] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser, 1981.

[12] W. Thurston, *The Geometry and Topology of* 3*-Manifolds*, Princeton University, 1979.

[13] Y. Benoist, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie*, European Summer School in Group Theory Luminy July 7-18, 1997

Résumé

Nous nous intéressons aux variétés affinement plates complètes et à leurs groupes fondamentaux. Milnor dans [8], a montré que tout groupe virtuellement polycyclique sans torsion est le groupe fondamental d'une certaine variété affinement plate complète et a conjecturé que se sont les seuls groupes fondamentaux possibles. Quelques années plus tard, Margulis (voir [7]) a donné un exemple, en dimension 3, d'une variété lorentzienne plate dont le groupe fondamental est libre (non abélien), donnant ainsi un contre-exemple à la conjecture de Milnor.

Mots clefs : structures affinement plates, groupes polycycliques, groupe fondamental.

Abstract

We are interested in complete affinely flat manifolds and in their fundamental groups. Milnor in [8], showed that any virtually polycyclic and torsion-free group is the fundamental group of some complete affinely flat manifold and has conjectured that are the only possible fundamental groups. A few years later, Margulis (see [7]) gave an example, in dimension 3, of a flat Lorentzian manifold whose fundamental group is free (non-abelian), thus giving a counter-example to the Milnor conjecture.

Keywords : affinely flat structures, polycyclic groups, fundamental group.