رقم الترتيب:

رقم التسلسل:

جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة مقدمة لإستكمال متطلبات شهادة ماسترأكاديمي

ميدان: رياضيات و إعلام آلي

فرع: رياضيات

تخصص: تحليل دالي

الموضوع

التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

من إعداد الطالبة :

- خرفي عائشة

تحت إشراف الأستاذ :

- عسيلة مصطفى

نوقشت يوم 14 جوان 2018 من طرف أعضاء اللجنة :

الأستاذ.مزابية محمد الهادي	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	رئيسا
الأستاذ.السعيد محمد السعيد	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مناقشا
الأستاذ.عسيلة مصطفى	جامعة قاصدي مرباح ورقلة	مشرفا

السنة الجامعية 2017-2018

إهداء

أحمد الله حمدا يدوم بدوام الدهر و أشهد له بالوحدانية في السر و العلن, و أصلي وأسلم على نبيه مشروح الصدر الذي نسبة فضله على الأنبياء والبشر .

أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهقهما:

إلى منبع الحب و الحنان، إلى من ترعرعت بين أحضانها

"امي الحنون".

إلى من هو قدوتي في الحياة الذي تعب و كد من أجل تعليمي،"أبي الغالي".

إلى من يشاركني طعم الحياة "زوجي" و إلى من هو قطعة مني فلذة كبدي إبني "عبد السميع".

و إلى اخوتي " لخضر ،عبد الرزاق،عثمان ،عبد الغني ،عادل ،محمد، عبد الجبار" و إلى زوجاتهم وأبنائهم و أخصهم ذكرا "مصطفى".

و إلى زهرة بيتنا أختي "فتيحة".

و إلى إبنة عمي "مريم" و أولادها "فاطمة ياسين خضرة ". و إلى عائلة زوجي كبيرهم و صغيرهم.

و إلى رفقاء الدرب :نورالدين ،عيسى، مسعودة، سمر، وداد، سليمة ،عائشة ،دليلة ،نور الهدى ،إبتسام ،فاطمة و زهية. و إلى أساتذة و طلبة قسم الرياضيات خاصة دفعة" 2013". و إلى كل من نسيهم قلمي و من لم تنساهم ذاكرتي .

شكر وعرفان

الحمد لله و كفى و الصلاة و السلام على المصطفى و على من سار على دربه و اقتفى
أما بعد حمد الله و شكره لا يسعني إلا ان أتقدم بخالص شكري و امتناني إلى فضيلة الأستاذ الذي شرفني بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ الدكتور :

"مصطفى عسيلة"

الذي لم يبخل علينا بما جاء في رصيده المعلوماتي و لا بوقته الثمين.
و إلى أساتذة الجنة المناقشة:إلى الأستاذالدكتور"عمارة عبد القادر" و الأستاذ الدكتور"السعيد محمد السعيد". كما أتقدم بشكري إلى زميلي "نور الدين قمولي" الذي كلما طلبت يد العون و جدته جاهزا.
و إلى كل من سقاني من كأس العلم طيلة مشواري الدراسي,و أخصهم ذكرا الأستاذ"محمد الأمين باحيو" والأستاذ "شاشة جمال"

دليـــــل الرّمـــــوز			
الرّمـز	**مدلوله**	**الرّمـز**	**مدلوله**
X	مجموعة كيفية	$\ker F$	نواة المؤثر F
$P(X)$	مجموعة كل المجموعات الجزئية من X	$\Gamma(F)$	بيان المؤثر F
τ	تبولوجيا	L(X,Y)	فراغ المؤثرات الخطية من X في Y
(X,τ)	فراغ تبولوجي	X^*	فراغ الأشكال الخطية على X
(X,d)	فراغ متري	$l(X,Y)$	المؤثرات من $L(X,Y)$ والمحدودة
$\\|.\\|$	تطبيق النظيم	X'	الأشكال الخطية والمحدودة على X
$(X,\\|.\\|)$	الفراغ الشعاعي النظيمي	F^*	المؤثر القرين للمؤثر F
$\langle,\rangle$	تطبيق الجداء السلمي	$(X,\langle,\rangle)$	فراغ شبه هيلبرتي
H	فراغ هيلبار	$x\perp y$	العنصر x عمودي على y
$x\perp A$	x عمودي على المجموعة A	$A^\perp$	مجموعة العناصر العمودية على A
$X_0^\perp$	المتمم التبولوجي للفراغ X_0 بالنسبة H	$\sum$	المجموع
$F:X\longrightarrow Y$	F مؤثر من X في Y	$f(F)$	دالة المؤثر للمؤثر F
$D(F)$	مجموعة تعريف المؤثر F	$\dotplus$	الجمع الجبري
$E(F)$	مجموعة قيم المؤثر F	$\oplus$	الجمع التبولوجي
$\sigma(F)$	طيف المؤثر F	$P_\sigma(F)$	الطيف النقطي للمؤثر F
$C_\sigma(F)$	الطيف المستمر للمؤثر F	$(A_n)_{n\geq1}$	متتالية المؤثرات

دليـــل الرّمـــوز			
الرّمـز	**مدلوله**	**الرّمـز**	**مدلوله**
P	مؤثر الاسقاط	$F\|_{E(U)}$	اقتصار المؤثر F على $E(U)$
$\overline{E(F)}$	لصاقة مجموعة قيم المؤثر F	$\|F\|$	القيمة المطلقة للمؤثر F
$\imath$	عدد تخيلي	$Al(H)$	مجموعة المؤثرات القرينة لنفسها
I	المؤثرالحيادي	Sng	دالة الاشارة
E_λ	الدالة الطيفية	$\Bbbk$	حقل ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$)
F^{-1}	المؤثر العكسي للمؤثر F		

الفهرس

مقدّمـــــة

إن أبرز فروع الرياضيات ،التحليل الدالي الذي يهتم بدراسة فضاءات الدوال ,و من أهم مفاهيمه مفهوم المؤثرات وخاصة الخطية منها.

و من بين هذه الدراسات التي تطرأ على المؤثر هي تحليله إلى جداء مؤثرات.

و بما أن هناك عدة أنواع من التحاليل;فقد ركزنا في مذكرتنا هذه على التحليل القطبي ، و اعتمدنا في الدراسة على المؤثر القرين لنفسه من نوع خاص.

تحتوي هذه المذكرة المعنوة ب:

" التحليل القطبي للمؤثرات الخطية"

على فصلين :

1. الفصل الأول:"مفاهيم أساسية "،و عرفنا فيه أهم المفاهيم المتعلقة بالتبولوجيا ،التحليل المركب و التحليل الدالي و بالأخص المفاهيم الخاصة بالمؤثرات الخطية التي سنستعملها في الفصل الثاني.

2. الفصل الثاني:"التحليل القطبي للمؤثرات الخطية "، و تطرقنا فيه إلى مفهوم الجذر التربيعي و المؤثر الموجب ; كما قمنا ببرهان النظريات المتعلقة بمؤثر التقايس الجزئي و علاقته بقرينه .
بالإضافة إلى برهان وجود و وحدانية التحليل القطبي .و كذالك تبيين أهم تطبيقاته.و اعتمدنا في الدراسة على مؤثر قرين لنفسه من نوع خاص.

الفصل

1

مفاهيم أساسية

1.1 الفراغ التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية، و $P(X)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من X .

تعريف 1.1.1

تعرف التبولوجيا على X، ويرمز لها بالرمز τ على أنها أسرة جزئية من $P(X)$ ، تحقق :

① $\varnothing, X \in \tau$

② $\forall O_1, O_2 \in \tau \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$

③ $(O_i \in \tau \ / \ i \in I) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$, حيث I مجموعة دلائل كيفية

- الزوج (X, τ) ، يسمى فراغا تبولوجيا .
- عناصر الأسرة τ ، تسمى مفتوحات الفراغ التبولوجي (X, τ) .

تعريف 2.1.1

تعرف المجموعة المغلقة في الفراغ التبولوجي، على أنها متمم المفتوح فيه.

تعريف 3.1.1

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا، و x من X
المجموعة الجزئية V من X يقال أنها جوار للنقطة x ، إذا وجد مفتوح O $(O \in \tau)$ ، يحقق $x \in O \subset V$.
مجموعة كل جوارات النقطة x ، يرمز لها بالرمز $V(x)$ ، وتسمى أسرة جوارات النقطة x .

تعريف 4.1.1

ليكن (X, τ) فراغا تبولوجيا، و M مجموعة جزئية غير خالية من X ، و x نقطة من X.

يقال أن النقطة x نقطة تلاصق للمجموعة M، إذا كان كل جوار للنقطة x ، يحوي نقطة على الأقل من M .

يرمز لمجموعة نقط تلاصق M بالرمز $\overline{M}$ ، و تسمى لصاقة M ، ونكتب :

$$x \in \overline{M} \Longleftrightarrow (\forall V \in \vartheta(x) \longrightarrow V \cap M \neq \varnothing)$$

2.1 الفراغ المتري

لتكن X مجموعة غير خالية.

تعريف 1.2.1

يقال أن على المجموعة X عرفت مسافة، إذا عرف تطبيق d من $X \times X$ في $\mathbb{R}$ ، يحقق من أجل كل x, y, z من X ، مايلي :

① $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

② $d(x,y) = d(y,x)$

③ $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$

التطبيق d يسمى مسافة، والعدد الحقيقي $d(x,y)$، هو المسافةبين x و y ، و الزوج (X,d) ، يسمي فراغا متريا.

نتيجة 1.2.1

❖ $\forall x, y \in X \rightarrow d(x,y) \geqslant 0$

❖ $|d(x,y) - d(x,z)| \leqslant d(z,y)$

❖ كل فراغ متري، يكون فراغا تبولوجيا.

1.2.1 المتتاليات في الفراغ المتري

لتكن $(x_n)_{n\geqslant 1}$، متتالية من الفراغ المتري (X,d) ، و x_0 عنصر من X .

تعريف 2.2.1

① يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة نحو العنصر x_0 ، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_\varepsilon \geqslant 1\ , \forall n \geqslant n_\varepsilon \longrightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

② يقال أن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ لكوشي، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_\varepsilon \geqslant 1\ , \forall q, p \geqslant n_\varepsilon \longrightarrow d(x_q, x_p) < \varepsilon$$

نتيجة 2.2.1

❖ كل متتالية متقاربة تكون لكوشي

3.1 الفراغ الشعاعي النظيمي

تعريف 1.3.1

يسمى فراغا شعاعيا نظيميا، كل زوج $(X, \|.\|)$، حيث X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ أو $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ، و $\|.\|$ تطبيق من X في $\mathbb{R}$ ، يحقق الشروط التالية:

$$X \longmapsto \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \|x\|$$

① $\forall x \in X, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

③ $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

الرمز $\|.\|$، يسمى نظيما، والعدد $\|x\|$ ، يسمى نظيم العنصر x .

نتيجة 1.3.1

كل فراغ شعاعي نظيمي، يكون فراغا متريا، عندها يكون:

❖ $d(x, 0) = \|x\|$

❖ $\forall x \in X \rightarrow \|x\| \geqslant 0$

❖ $d(x, y) = \|x - y\|$

ملاحظة

الفراغ الشعاعي النظيمي، إختصارا يكتب: ف.ش.ن .

1.3.1 مسألة أحسن تقريب

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن،و $(X_0, \|.\|_{X_O})$ ف.ش.ن.جزئي منه و x عنصرا من X، حيث $x \notin X_0$.

تعريف 2.3.1

نقول إن العنصر y_0 من X_0 هو أحسن تقريب للعنصر x من X إذا حقق:

$$\|y_0 - x\| = \inf\{\|y - x\|, y \in X_O\}$$

قضية 1.3.1

لكل x من X يوجد أحسن تقريب له y_0 من X_O

البرهان [1]

■

2.3.1 فراغ بناخ

ليكن $(X, \|.\|)$ ف.ش.ن .

تعريف 3.3.1

يقال إن X فراغ بناخ، إذاكانت كل متتالية كوشي منه متقاربة فيه.

4.1 الفراغ الهيلبرتي

1.4.1 الجداء السلمي

ليكن X فراغ شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

تعريف 1.4.1

يعرف الجداء السلمي على X، بأنه تطبيق h من $X\times X$ في $\mathbb{K}$، يحقق من أجل كل x,y,z من X و α من $\mathbb{K}$ ، مايلي:

① $h(x,x) \geqslant 0$, $h(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

② $h(\alpha x,x)=\alpha h(x,x)$

③ $h(x,y)=\overline{h(y,x)}$

④ $h(x+y,z)=h(x,z)+h(y,z)$

يرمز للجداء السلمي، بالرمز $\langle,\rangle$، عندها الزوج $(X,\langle,\rangle)$ ، يسمى فراغا شبه هيلبرتي .

نتيجة 1.4.1

كل فراغ شبه هيلبرتي، يكون فراغ شعاعي نظيمي مع النظيم: $\|.\|=\sqrt{\langle.,.\rangle}$

قضية 1.4.1

إذا كان X ، فراغا شبه هيلبرتي، فإن:

① $\forall x,y\in X, |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (متراجحة كوشي شوارتز).

② $\forall x,y\in X, \|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (قاعد متوازي الأضلاع).

③ $\forall x,y\in X, 4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)$

البرهان [1]

■

2.4.1 فراغ هيلبار

تعريف 2.4.1

فراغ هيلبار هو كل فراغ شبه هيلبرتي تام، ونرمز لفراغ هيلبار بالرمز H .

3.4.1 التعامد

ليكن X فراغا شبه هيلبرتي، A , B مجموعتان من X ، حيث $A \neq \varnothing \neq B$.

تعريف 3.4.1

- يقال أن الشعاعين x, y من X متعامدان، ونكتب $(x \perp y)$ ، إذا كان جداؤهما السلمي معدوما، أي:

$$x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

- يقال أن الشعاع x من X ، عمودي على المجموعة A ،إذا كان عموديا على كل شعاع منها، ونكتب:

$$x \perp A \Longleftrightarrow (\forall y \in A \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0)$$

يرمز لمجموعة العناصر العمودية على A ، بالرمز $A^{\perp}$.

- يقال أن A, B متعامدان، إذا تحقق:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$$

ونكتب: $A \perp B$.

4.4.1 الإسقاط العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار .

نظرية 1.4.1

إذا كانت A، مجموعة مغلقة ومحدبة من H، و x عنصر من H ، حيث $x \notin A$ ، فإنه يوجد عنصر وحيد y_0 من A ، يكون أحسن تقريب للعنصر x ، في المجموعة A ، أي:

$$\forall x \in H, (x \notin A), \exists! y_0 \in A \;/\; d(x, y_0) \equiv \|x - y_0\| = d_0(x, A)$$

البرهان [1]

■

نظرية 2.4.1

إذا كان $X_0,$ فراغا جزئيا مغلقا من $H,$ و x شعاع من $H,$ حيث $x \notin X_0$ ، فإنه يوجد شعاع وحيد y_0 من X_0 ، يمثل أحسن تقريب للشّعاع x في X_0 ، يحقق:

$$(x - y_0) \perp X_0$$

في هذه الحالة، يسمى y_0 المسقط العمودي للشّعاع x على الفراغ X_0 ، ويرمز له بالرمز $P_{X_0}x$.

البرهان [1]

■

5.4.1 التحليل العمودي

ليكن H فراغا لهيلبار، و X_0 فراغا جزئيا مغلقا منه.

تعريف 4.4.1

يعرف المتمم العمودي للفراغ $X_0,$ بالنسبة للفراغ $H,$ بأنه مجموعة كل العناصر من H ، العمودية على X_0 أنه المجموعة $X_0{}^{\perp}$.

نتيجة 2.4.1

❖ $X_0{}^{\perp}$ فراغ جزئي مغلق من H .

❖ كل عنصر x من H ، يكتب بشكل وحيد كالتالي:

$$x = y + z \ / \ y \in X_0, z \in X_0{}^{\perp}$$

❖ $H = X_0 \oplus X_0{}^{\perp}$ ، عندها نقول أن X_0 و $X_0{}^{\perp}$ ، هما التحليل العمودي للفراغ H ، ونكتب:

$$y = P_{X_0}x, z = P_{X_0{}^{\perp}}x$$

حيث P_{X_0} تطبيق الإسقاط على الفراغ X_0، و $P_{X_0{}^{\perp}}$ تطبيق الإسقاط على الفراغ $X_0{}^{\perp}$.

قضية 2.4.1

تطبيق الإسقاط P_{X_0} ، هو تطبيق خطي ومحدود ويحقق:

① $P_{X_0} = P_{X_0}^2$

② $\|P_{X_0}\| \leqslant 1$

③ $\forall x, y \in H \longrightarrow \langle P_{X_0}x, y\rangle = \langle x, P_{X_0}y\rangle$

البرهان [1]

■

6.4.1 الجمع المباشر الجبري والتبولوجي

ليكن X ف.ش.ن و X_2, X_1 فراغان جزئيان من X .

تعريف 5.4.1

يقال أن الفراغ X، يكتب بشكل جمع مباشر جبري للفراغين X_1 و X_2 ، ونكتب: $X = X_1 + X_2$

إذا تحقق:

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}$$

$$\forall x \in X, \exists! x_1 \in X_1, \exists! x_2 \in X_2 / x = x_1 + x_2 \tag{1.1}$$

عندها يقال أن X_1, X_2، كلا منهما متمم جبري للأخر بالنسبة للفراغ X .

نتائج

- المجموع $X = X_1 + X_2$ ، يكون جمع مباشر جبري، إذا وفقط إذا كان $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.
- كل فراغ جزئي من X، يملك على الأقل متمما جبريا له بالنسبة للفراغ X .
- الكتابة $X_1 + X_2$، تقتضي وجود تطبيقي إسقاط P_{x_1}, P_{x_2} ، معرفين كالتالي :

$$P_{x_1} : X \longmapsto X_1 \ / \ P_{x_1}(x = x_1 + x_2) = x_1$$

$$P_{x_2} : X \longmapsto X_2 \ / \ P_{x_2}(x = x_1 + x_2) = x_2$$

التطبيقان P_{x_1}, P_{x_2}، واضح أنهما خطيان، لكن في الحالة العامة قد يكونا غير مستمرين.

- إستمرار أحد التطبيقين P_{x_1} أو P_{x_2} ، يقتضي إستمرار الأخر ذلك لأن $x = P_{x_1}x + P_{x_2}x$.

تعريف 6.4.1

الجمع المباشرالجبري $X = X_1 + X_2$ يسمى جمعا مباشرا طبولوجيا, إذا وفقط إذا كان على الأقل أحد التطبيقين P_{x_1}, P_{x_2} مستمرا، ونكتب $X = X_1 \oplus X_2$ ، عندها يقال أن X_1, X_2 ، كلا منهما متمما تبولوجيا للأخر بالنسبة للفراغ X .

تعريف 7.4.1

يعرف الجمع المباشر التبولوجي لفرغات هيليار $H_1, H_2, ..., H_n, ...$ ، بأنه الفراغ H ، حيث:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

الصيغة الأخيرة هي التحليل العمودي للفراغ H ، حيث:

$$\xi \in H \longrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \ / \ \xi_n \in H_n, n \geqslant 1$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{H_n}^2$ متقاربة .

5.1 الجملة المتعامدة والمتجانسة

1.5.1 الجملة المتعامدة والمتجانسة

ليكن X فراغ شبه هلبيرتي، و $A = \{x_i, i \in I\}$ جملة عناصرها من X ، (I مجموعة دلائل كيفية)

تعريف 1.5.1

① يقال أن الجملة A متعامدة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى .

② يقال أن الجملة A متعامدة ومتجانسة، إذا كانت متعامدة مثنى مثنى، وتحقق: $\|x_i\| = 1$.

6.1 المؤثرات ونظرية الأطياف

1.6.1 المؤثرات الخطية

ليكن $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ فراغين شعاعيين نظيميين على نفس الحقل $\mathbb{K}$, ولتكن D مجموعة غير خالية من X.

تعريف 1.6.1

إذا أرفق بكل عنصر x من D ، عنصرا معينا y من Y ، يقال أنه قد عرف مؤثرا من X في Y ، يرمز له بالرمز F ، ونكتب $y = F(x)$ أو $y = Fx$.

- المجموعة D ، تسمى مجموعة تعريف المؤثر F ، ويرمز لها بالرمز $D(F)$.
- مجموعة العناصر y من Y ، حيث $y = F(x)$ و $x \in D(F)$ ، تسمى مجموعة قيم المؤثر F ، ويرمز لها بالرمز $E(F)$ ، و نكتب:

$$E(F) = \{y \in Y \;/\; y = Fx, x \in D(F)\}$$

- صيغة المؤثر F تكتب كالتالي: $X \supset D(F) \xrightarrow{\text{F}} E(F) \subset Y$

إختصارا نكتب: $F : X \longmapsto Y$

- مجموعة الأزواج (x, Fx) ، من فراغ الجداء $X \times Y$ ، حيث $x \in D(F)$ ، تسمى بيان المؤثر F ، ويرمز لها بالرمز Γ_F ، ونكتب:

$$\Gamma_F = \{(x, Fx) \;/\; x \in D(F)\} \subset X \times Y$$

- مجموعة أصفار المؤثر F ، تسمى نواة المؤثر F ، ويرمز لها بالرمز $KerF$ ، ونكتب:

$$KerF = \{x \in D(F) \;/\; Fx = 0\}$$

نتيجة 1.6.1

❖ المجموعاتين $E(F),\ KerF$ فراغين جزئيين من Y,X على التوالي .

تعريف 2.6.1

المؤثر F من X في Y ، يقال أنه خطي، إذا تحقق مايلي:
① المجموعة $D(F)$ ، فراغ شعاعي جزئي من الفراغ X .
② $\forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \longrightarrow F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2)$.
يرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X في Y ، بالرمز $L(X,Y)$.
❏ في حالة $X = Y$ ، إختصارا نكتب: $L(X,X) = L(X)$.
❏ في حالة $Y = \mathbb{K}$ ، المجموعة $L(X,\mathbb{K})$ ، تسمى مجموعة الأشكال الخطية على X ، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي، ويرمز لها بالرمز X^* ، وتسمى الثنوي الجبري للفراغ X .

2.6.1 المؤثرات الخطية المحدودة

ليكن F مؤثرا خطيا من X في Y .

تعريف 3.6.1

① يقال أن F مستمر في نقطة x_0 من X ، إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \|x - x_0\|_X < \delta \longrightarrow \|Fx - Fx_0\|_Y < \varepsilon$$

و أنه مستمر إذا كان مستمر في كل نقطة. ② يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا حول كل مجموعة محدودة في X ، إلى مجموعة محدودة في Y .
③ يقال أن F محدود على X أو محدود، إذا تحقق:

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in X \longrightarrow \|Fx\|_Y \leqslant \alpha \|x\|_X$$

❏ التعريف 2) يكافئ التعريف 3) .
❏ نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية المحدودة من X في Y ، بالرمز $l(X,Y)$ ، وهي فراغ جزئي من الفراغ $L(X,Y)$.
في حالة $X = Y$ ، إختصارا نكتب: $l(X,Y) = l(X)$.
في حالة $Y = \mathbb{K}$ ، المجموعة $l(X,\mathbb{K})$ ، تسمى مجموعة الأشكال الخطية المحدودة على X ، وعناصرها تسمى شكل أو دالي خطي محدود، ويرمز لها بالرمز X' ، وتسمى الثنوي التبولوجي للفراغ X .

نتيجة 2.6.1

❖ إذا كان F من $l(X,Y)$ ، فإن $KerF$ فراغ جزئي مغلق من X .

تعريف 4.6.1

يعرف نظيم المؤثر F من $l(X,Y)$ ، بإحدى الصيغ التالية:

① $\|F\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$

② $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Fx\|_Y$

③ $\|F\| = \inf\{c > 0 \ / \ \|Fx\|_Y \leqslant c\|x\|_X\}$

④ $\|F\| = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Fx\|_Y$

3.6.1 المؤثر القرين

ليكن H_2, H_1 فراغي هيلبار، و F مؤثر من $l(H_1, H_2)$.

تعريف 5.6.1

يسمى مؤثرا قرينا للمؤثر F ، المؤثر F^* ، المعرف من H_2 في H_1 ، كالتالي من أجل كل (x,y) ، من $H_1 \times H_2$ يكون:

$$\langle Fx, y\rangle = \langle x, F^*y\rangle$$

نظرية 1.6.1

إذا كان F من $l(H_1, H_2)$ ، فإن F^* موجود ووحيد من $l(H_2, H_1)$ ، ويحقق:

$$\|F\| = \|F^*\|$$

البرهان [2]

■

خواص

إذا كان F, T من و $l(H)$ ، و α من $\mathbb{K}$ ، فإن:

1. $(F+T)^* = F^* + T^*$
2. $(\alpha F)^* = \overline{\alpha} F^*$
3. $(F^*)^* = F$
4. $I^* = I$
5. $(FT)^* = T^* F^*$

4.6.1 المؤثر القرين لنفسه

تعريف 6.6.1

يقال أن المؤثر F قرينا لنفسه، إذا إنطبق على قرينه، أي $F = F^*$ ، عندها يكون:

$$\forall x, y \in H, \langle Fx, y\rangle = \langle x, Fy\rangle$$

بالإضافة إلى تعريف النظيم (التعريف (2.6.1)) للمؤثر القرين لنفسه، يعرف النظيم كالتالي:

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle Fx, x\rangle|$$

يرمز لمجموعة المؤثرات القرينة لنفسها بالرمز $Al(H)$.

5.6.1 مؤثر الإسقاط العمودي

ليكن M فراغ جزئي مغلق من فراغ هيلبار H. يعرف مؤثر الإسقاط العمودي على M على أنه تطبيق الإسقاط المعرف على الفراغ M المعرف في النظرية (4.4.1) إختصارا يقال أنه مؤثر إسقاط.

1. المؤثر P_M قرين لنفسه.
2. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M, x\rangle \geqslant 0$
3. $\forall x \in H \longrightarrow \langle P_M, x\rangle \|x\|^2$

خواص

إذا كان F قرينا لنفسه في H و $F = F^2$ فإن F يمثل مؤثر إسسقاط على فراغ جزئي مغلق.

6.6.1 المؤثر العكسي

ليكن F مؤثر من $L(X, Y)$.

تعريف 7.6.1

يقال أن المؤثر F قابل للقلب ، إذا كانت المعادلة $Fx = y$، تقبل حلا وحيدا x، من أجل كل $y \in E(F)$، إذا كان F يقبل القلب ، فمن أجل كل $y \in E(F)$، يوجد عنصر وحيد $x \in D(F)$، هو حل المعادلة $y = Fx$، يسمى المؤثر من $E(F)$ في $D(F)$، الذي يرفق بالعنصر y العنصر x، مقلوب المؤثر F، ونرمز له بالرمز F^{-1} .

7.6.1 قابلية القلب بإستمرار

تعريف 8.6.1

المؤثر F من $L(X,Y)$، يقال أنه قابل للقلب بإستمرار، إذا وجد له مؤثر عكسي، معرف ومحدود على كل الفراغ Y، أي $F^{-1} \in l(Y,X)$.

8.6.1 مفهوم الطيف والحالة للمؤثر الخطي

ليكن F مؤثرا من $L(X)$، حيث X فراغ بناخ مركب، $(\mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$.
مفهوم الطيف والحالة للمؤثر F، له علاقة بقابلية الحل للمعادلة الدالية التالية:

$$Fx - \lambda x = y$$

إختصارا نكتب:

$$F_\lambda x = y \ / \ F_\lambda = F - \lambda I$$

حيث I المؤثر الحيادي من X في نفسه و x مجهول من $D(F)$ ، و y معطى من X ، و λ وسيط مركب في حالة $y = 0$ ، المعادلة تسمى معادلة متجانسة .

تعريف 9.6.1

العدد المركب λ، يقال أنه نقطة نظامية للمؤثر F، إذا كان المؤثر F_λ، قابلا للقلب باستمرار، أي:
$\exists F_\lambda^{-1} \in l(X)$.
يرمز لمجموعة النقط النظامية للمؤثر F، بالرمز $\rho(F)$، وتسمى مجموعة الحالة، ونكتب:

$$\rho(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ \exists F_\lambda^{-1} \in l(X)\}$$

تعريف 10.6.1

يعرف طيف المؤثر F، ويرمز له بالرمز $\sigma(F)$، بأنه متمم مجموعة النقط النظامية للمؤثر F بالنسبة للمستوي المركب، أي: $\sigma(F) = \mathbb{C} \setminus \rho(F)$
ينقسم الطيف إلى ثلاثة أقسام، وهي:
① مجموعة الأعداد المركبة λ، التي من أجلها المؤثر F_λ، لا يقبل مؤثرا عكسيا،(أي مجموعة القيم الذاتية للمؤثر F)، تسمى هذه المجموعة بالطيف النقطي، ويرمز له بالرمز $P_\sigma(F)$، ونكتب:

$$P_\sigma(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ KerF_\lambda \neq 0\}$$

② مجموعة الأعداد المركبة λ، التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا، مجموعة تعريفه، أي المجموعة $E(F_\lambda)$ كثيفة في X، لكنه غير محدود (F_λ^{-1} غير محدود)، تسمى هذه المجموعة بالطيف المستمر، ويرمز

له بالرمز $C_\sigma(F)$، ونكتب:

$$C_\sigma(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ /\ \overline{E(F_\lambda)}=X\}$$

③ مجموعة الأعداد المركبة λ، التي من أجلها المؤثر F_λ يقبل مؤثرا عكسيا (محدود أو غير محدود)، مجموعة تعريفه، أي المجموعة $E(F_\lambda)$، ليست كثيفة في X. تسمى هذه المجموعة بالطيف الباقي، ونرمز له بالرمز $R_\sigma(F)$. ونكتب:

$$R_\sigma(F)=\{\lambda\in\mathbb{C}\ /\ \overline{E(F_\lambda)}\neq X\}$$

9.6.1 طيف المؤثر القرين لنفسه

إذا كان F قرين لنفسه فإن:

1. كل القيم الذاتية للمؤثر F حقيقية.
2. $F=F^*\Longrightarrow\sigma(F)\subset[m_F,M_F]$، حيث

$$M_F=\sup_{\|x\|=1}\langle Fx,x\rangle\quad,\quad m_F=\inf_{\|x\|=1}\langle Fx,x\rangle$$

3. كل شعاعين ذاتيين مرفقين بقيمتين ذاتيتين مختلفتين يكونا متعامدين.

10.6.1 التحليل الطيفي

نظرية 2.6.1

كل مؤثر F من $l(H)$ قرين لنفسه يمكن تمثيله بشكل وحيد في مجموعة مؤثرات إسقاط E_λ متعلقة بوسيط حقيقي μ و تحقق:

1. $\lambda\leqslant\mu\quad E_\lambda\leqslant E_\mu;$.
2. $E_{\lambda+0}=E_\lambda$.
3. $\lambda\geqslant M_F\longrightarrow E_\lambda=I\qquad \lambda<\mu\longrightarrow E_\lambda=0;$.

عندها المؤثر F يكتب بالشكل:

$$F=\int_{m_F-0}^{M_F}\lambda dE_\lambda$$

البرهان [2]

■

تعريف 11.6.1

نعرف الدالة الطيفية لـ F بأنها الدالة E_λ.

الفصل

2

التحليل القطبي للمؤثرات الخطية

1.2 المؤثر الموجب والجذر التربيعي

1.1.2 المؤثر الموجب

تعرف على المجموعة $Al(H)$ العلاقة " أكبر أو يساوي" أو " أصغر أو يساوي" كالتالي:
إذا كان F و T من $Al(H)$ ،فإنه يقال أن F أكبر أو يساوي من T ، أو T أصغر أو يساوي من F ونكتب: $F \geqslant T$ أو $T \leqslant F$ إذا كان

$$\langle Ff, f\rangle \geqslant \langle Tf, f\rangle, \forall f \in H$$

تعريف 1.1.2

يقال أن المؤثر F من $Al(H)$ ، أنه غير سالب (أكبر أو يساوي المؤثر المعدوم)، ونكتب: $F \geqslant 0$ ، إذا كان

$$\langle Ff, f\rangle \geqslant 0, \forall f \in H$$

تعريف 2.1.2

يقال أن المؤثر F من $Al(H)$ ، أنه موجب (أكبر من المؤثر المعدوم)، ونكتب: $F > 0$ ، إذا كان

$$\langle Ff, f\rangle > 0, \forall f \in H$$

تعريف 3.1.2

المؤثر F من $Al(H)$ ، يقال أنه غير سالب ، إذا وفقط إذا كان $m_F \geqslant 0$.

2.1.2 الجذر التربيعي

نظرية 1.1.2

كل مؤثر F من $Al(H)$ غير سالب، يقبل جذرا تربيعيا وحيدا، يرمز له بالرمز $F^{\frac{1}{2}}$ يحقق مايلي:

① $F^{\frac{1}{2}}$ غير سالب من $l(H)$.

② $F^{\frac{1}{2}}$ يعتبر نهاية قوية لمتتالية كثير حدود في F.

③ $F^{\frac{1}{2}}$ تبديلي مع أي مؤثر تبديلي مع F .

البرهان

يكفي دراسة $0 \leqslant F \leqslant I$

نضع $T = F^{\frac{1}{2}}$.

لإيجاد الجذر التربيعي نحل المعادلة

$$T^2 = F \tag{1.2}$$

بوضع $A = I - T$ $\quad$ $B = I - F$ حيث $0 \leqslant B \leqslant I$

، حل المعادلة (1.2) يكافئ حل المعادلة

$$A = \frac{1}{2}(B = A^2) \tag{2.2}$$

لحل المعادلة (2.2) نستعمل طريقة المتتاليات التكرارية، أي :

$$A_0 = 0 \quad , \quad A_1 = \frac{1}{2}B \quad ,....., \quad A_{n+1} = \frac{1}{2}(B + A_n^2)$$

نبرهن أن المتتالية $(A_n)_{n\geqslant 1}$ متتالية رتيبة ومحدودة لمؤثرات غير سالبة.

نبرهن هذا بالتراجع.

لاحظ

$$A_0 = 0 \quad , \quad A_1 = \frac{1}{2}BA_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2A_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3 + \frac{1}{132}B^4 \tag{3.2}$$

أيضا

$$A_1 - A_0 = \frac{1}{2}BA_2 - A_1 = \frac{1}{8}B^2A_3 - A_2 = \frac{1}{16}B^3 + \frac{1}{132}B^4 \tag{4.2}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0, 1, 2, \ldots$ نفرض الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$ نتأكد بالتراجع نبرهن $(A_n)_{n\geqslant 1}$ مؤثرات غير سالبة

ومنه $(A_n)_{n\geqslant 1}$ ليست متناقصة ومحدودة من الأعلى بمؤثرات غير سالبة، ومنه توجد نهاية قوية للمتتالية $(A_n)_{n\geqslant 1}$ ، نرمز لها بالرمز $\widehat{A}$ (مؤثر غير سالب).

$$\widehat{A} = s - \lim_{n\to\infty} A_n$$

من الصغة $A_{n+1} = \frac{1}{2}(B + A_n^2)$ نجد $\widehat{A} = \frac{1}{2}(B + \widehat{A}^2)$ ومنه $\widehat{A}$ حل للمعادلة (2.2).

بالرجوع للمتغيرات الأولى نجد حل المعادلة (1.2) هو $F^{\frac{1}{2}} = T = I - \widehat{A}$

نبرهن وحدانية الجذر التربيعي

ليكن Φ مؤثر غير سالب ويحقق $\Phi^2 = F$

Φ يحقق كل شروط النظرية، واضح أن Φ يحقق $\Phi T = T\Phi$

ومنه من أجل كل x من H ، بوضع $y = (T - \Phi)x$ وبإعتبار $(\Phi T = T\Phi)$ يكون

$$0 = \langle (F - F)x, (T - \Phi)x\rangle = \langle (T^2 - \Phi^2)x, (T - \Phi)x\rangle = \langle (T + \Phi)(T - \Phi)x, (T - \Phi)x\rangle$$

$$= \langle (T + \Phi)y, y\rangle = \langle Ty, y\rangle + \langle \Phi y, y\rangle$$

بما أن T, Φ غير سالبين فإنه يكون:

$$\langle Ty, y\rangle = 0 \qquad \langle \Phi y, y\rangle = 0$$

$$0 = \langle (\sqrt{T})^2 y, y\rangle = \langle \sqrt{T}y, \sqrt{T}y\rangle \Rightarrow \sqrt{T}y = 0$$

نفس الشيء نجد $\sqrt{\Phi}y = 0$ ،ومنه

$$Ty = \sqrt{T}y\sqrt{T}y = 0 \qquad \Phi y = \sqrt{\Phi}y\sqrt{\Phi}y = 0 \tag{5.2}$$

أي من أجل كل x من H ، يكون

$$T(T - \Phi)x = 0 \qquad \Phi(T - \Phi)x = 0$$

أي

$$T(T - \Phi) = 0 \qquad \Phi(T - \Phi) = 0$$

ومنه

$$\|(T-\Phi)x\|^2 = \langle (T-\Phi)x, (T-\Phi)x\rangle = \langle (T-\Phi)^2 x, x\rangle = \langle T(T-\Phi)x, x\rangle - \langle \Phi(T-\Phi)x, x\rangle = 0$$

ومنه $T = \Phi$ ■

نتيجة 1.1.2

❖ جداء مؤثرين غير سالبين وتبديلين هو مؤثر غير سالب.

تعريف 4.1.2

تعرف القيمة المطلقة للمؤثر F ويرمز لها بالرمز $|F|$ بأنها المؤثر الوحيد T الذي يحقق: $T^2 = F^*F$ ، أي $|F| = \sqrt{F^*F}$.

2.2 التقايس الجزئي

تعريف 1.2.2

ليكن U مؤثر من H يقال إنه تقايس جزئي إذا وجد فضاء جزئي M من H : $M = D(U) \subset H$ ، حيث :

$$\|Ux\| = \|x\| \qquad \forall x \in D(U);$$

$$U(x) = 0 \qquad \forall x \in \overline{D(U)}$$

نظرية 1.2.2

إذا كان U تقايس جزئي من H في H ، فإن :

1. $U^*U = P_{D(U)}$ و $UP_{D(U)} = U$
2. $E(U)$ فضاء جزئي مغلق من H
3. U^* تقايس جزئي من $D(U^*) = E(U)$ في $E(U^*) = D(U)$ عندها يكون: $UU^* = P_{D(U)}$ و $U^*P_{D(U)} = U^*$.

البرهان

1. من أجل كل $x \in H$: $x = P_{D(U)}x \oplus z$ حيث:

$$Ux = UP_{D(U)}x + Uz = UP_{D(U)} \qquad z \in D(U)^{\perp}$$

و منه $U = UP_{D(U)}$

$$\langle Ux, Ux\rangle = \langle x, y\rangle \qquad x, y \in D(U)$$

و من تعريف التقايس الجزئي و من أجل كل $P_{D(U)}x, P_{D(U)}y \in E(U)$ $\quad x, y \in H$ لدينا:

$$\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle UP_{D(U)}x, UP_{D(U)}y\rangle$$
$$= \langle P_{D(U)}x, P_{D(U)}y\rangle$$
$$= \langle P_{D(U)}x, y\rangle$$

و منه : $U^*U = P_{D(U)}x$

2. لدينا: $x \in \overline{E(U)}$ $\quad E(U) = UE(P_{D(U)}) = UD(U)$
فإنه توجد متتالية $(y_n) \in D(U)$ حيث $x \longmapsto Uy_n$.

$$\|y_m - y_n\| = \|Uy_m - Uy_n\| \to 0 \quad m, n \to \infty$$

بمأن H تام فإنه يوجد $y \in H$ ، حيث $y_n \to y$ و $Uy_m \longmapsto Uy$
إذن $x = Uy$ ومنه : $\overline{E(U)} = E(U)$

3. من أجل كل $x \in E(U)$ يوجد $y \in D(U)$ ، حيث $Uy = x$ و $\|x\| = \|y\|$

$$U^*x = U^*Uy = P_{D(U)}y = y$$

إذن:

$$\|U^*x\| = \|x\| \qquad \forall x \in (E(U))^{\perp}$$

وبمأن $Uy \in E(U)$ من أجل كل $y \in H$

$$\langle U^*x, y\rangle = \langle x, Uy\rangle = 0$$

أي $U^*x = 0$ ، فإن U^* تقايس جزئي من $D(U^*) = E(U)$ في $D(U) = E(U^*)$ لأن:

$$E(U^*) = U^*E(U) = U^*UH = P_{E(U)}H = D(U)$$

$$U^*P_{E(U)} = U^* \quad \text{و} \quad UU^* = P_{E(U)}$$

■

نتيجة 1.2.2

من خلال الصيغة 1 يمكن إستبدال U بـ U^* و $D(U)$ بـ $E(U)$.

نظرية 2.2.2

إذا كان U مؤثر من فراغ هيلبار H فإن الإثباتات التالية:

1. a. U تقايس جزئي.
   b. U^* تقايس جزئي .
2. a. $UU^*U = U$
   b. $U^*UU^* = U^*$
3. a. U^*U مؤثر إسقاط .
   b. UU^* مؤثر إسقاط .

متكافئة.

البرهان

$1.a. \Rightarrow 2.a.$

من النقطة 1 النظرية السابقة نجد : $U^*U = UP_{D(U)} = U$

$2.a. \Rightarrow 3.a.$

و من خلال النقطة 2 فإن : $U^*UU^*U = U^*U$

U^*U مؤثر رواح و قرين لنفسه إذن : U^*U مؤثر إسقاط.

$3.a \Rightarrow 1.a$

بوضع $U^*U = P_{D(U)}$ من أجل كل $x \in H$ نجد:

$$\|Ux\|^2 = \langle U^*Ux, x\rangle = \langle P_{D(U)}x, x\rangle = \|P_{D(U)}x\|^2 = \|x\|^2$$

إذن: $\|Ux\| = \|x\|$ من أجل كل $x \in D(U)$ محققة.

و منه U تقايس جزئي.

أما التكافئات الأخرى نستنتجها من خلال خصائص مؤثر القرين . ■

3.2 التحليل القطبي

مؤثر F من $l(H)$ يوجد تقايس جزئي وحيد يحقق الصيغة:

$$F = U|F| \tag{6.2}$$

الصيغة الأخيرة تسمى التحليل القطبي للمؤثر F و تعميم للصيغة المركبة $Z = |Z|e^{\imath w}$.

البرهان

نعرف المؤثر U_0 كالتالي:

$$U_0 : E(|F|) \longmapsto E(F)$$

$$U_0(|F|x) = Fx$$

بمأن:

$$\||F|x\|^2 = \langle x, F^2 x\rangle = \langle x, F^* Fx\rangle = \|Fx\|^2$$

فإن:

1. المؤثر U_0 معرف جيدا أي:

$$|F|\Psi = |F|\Phi \Longrightarrow F\Psi = F\Phi$$

2. $\ker(F) = \ker(|F|)$

3. المؤثر U_0 تقايس جزئي على $E(|F|)$.
بمأن الفراغ H تام ،فانه يمكن تمديد المؤثر U_0 بالتقايس على $\overline{E(|F|)}$ في $\overline{E(F)}$.

$$U_1 : \overline{E(|F|)} \longmapsto \overline{E(F)}$$

$$U_1(|F|) = Fx$$

نرمز لتمديد U_0 بالرمز U_1 حسب النقطة 2 و بمأن المؤثر $|F|$ قرين لنفسه ،فإن:

$$|\overline{E(|F|)} = (\ker |F|)^{\perp} = (\ker F)^{\perp}$$

و عليه المؤثر U_1 تقايس على $\ker(F)$
نعرف على الفراغ H مؤثر U_y كالتالي :

$$U_y = \begin{cases} U_y & , y \in (\ker F)^{\perp} \\ 0 & , y \in \ker F \end{cases}$$

واضح أن المؤثر U هو تمديد للمؤثر U_0 هو تقايس على $(\ker F)^{\perp}$ ، ويحقق $F = U|F|$.
لبرهان أن U تقايس جزئي يكفي برهان أن : $\ker F = \ker U$ و هذا صحيح حسب تعريف المؤثر U.

نبرهن الوحدانية

ليكن W تقايس يحقق $Fx = W|F|x$

$$\forall x \in H \quad \ker W = \ker F$$

لاحظ أن :

$$\forall x \in H \quad \longrightarrow UFx = Fx = W|F|x$$

وهذا يعني أن :

$$U_y = W_y \quad \forall y \in \overline{E(|F|)}$$

بما أن :

$$\overline{E(|F|)} = (\ker U)^{\perp} = (\ker F)^{\perp}$$

$$U_y = W_y = 0 \quad \forall y \in \ker F$$

فإن: $U = W$

■

نتيجة 1.3.2

1. $|F|^* = |F| \quad U^*F = U^*U|F| = P_{E(F)}$.
2. $|F|^* = |F| \quad F^*U = |F|^* = |F|$، أي $E(|F|) \subset E(F^*)$
   $|F|U^* = F^*$، أي $E(F^*) \subset E(|F|)$
   إذن $E(|F|) = E(F^*)$

ملاحظة

إذا كان $F = U|F|$ التحليل القطبي للمؤثر F، فإن $F^* = |F|U^*$ هو التحليل القطبي للمؤثر F^*.

تعريف 1.3.2

F مؤثر من $l(H)$ حيث $F = U|F|$ و $\ker(U) = \ker(|F|)$ فإن $F = U|F|$ هو التحليل القطبي للمؤثر F.

نظرية 1.3.2

إذا كان F مؤثر من فراغ هيلبار H فإنه يوجد تقايس جزئي U يحقق:

$$F = U|F|$$

بالإضافة إلى الخصائص التالية:

$$E(U) = \overline{E(|F|)} = E(F^*) \tag{7.2}$$

$$\ker(U) = \ker(|F|) \tag{8.2}$$

$$U^*U|F| = |F| \tag{9.2}$$

البرهان

لدينا $|T|^2 = T^*T$ فإنه يوجد تقايس جزئي U يحقق $E(U) = \overline{E(|F|)}$ و $F = U|F|$ و منه :

$$\ker(U)^{\perp} = \overline{E(|F|)} = \ker(|F|)^{\perp}$$

إذن: $\ker(U) = \ker(|F|)$.

و من جهةأخرى : $U^*F = U^*U|F| = P_{E(U)}|F| = |F|$

و الآن نبرهن العلاقة (7.2) من المساواة $F^*U = |F|^* = |F|$ نجد: $E(|F|) \subset E(F^*)$

و من المساواة $|F|U^* = F^*$ نجد: $E(F^*) \subset E(|F|)$

و منه نستنتج: $E(F^*) = E(|F|) = E(U)$. ■

تعريف 2.3.2

يقال أن F ثنائي تبديلي مع T إذا كان تبديلي مع T و T^*

قضية 1.3.2

ليكن $F_1 = U_1|F_1|$ و $F_2 = U_2|F_2|$ التحليل القطبي لـ F_2 و F_1 على الترتيب.

إذا كان F_1 ثنائي تبديلي مع F_2 فإن :

$F_2F_1 = U_1U_2(|F_1||F_1|)$ هو التحليل القطبي لـ F_2F_1 و $\ker(U_1U_2) = \ker(|F_1||F_2|)$.

البرهان

$$U_1U_2(U_1U_2)^*U_1U_2 = U_1U_2U_2^*U_1^*U_1U_2$$

$$= U_1U_2^*U_1U_2U_2^*U_2 = U_1U_2$$

إذن U_1U_2 هو تقايس جزئي . ولدينا :

$$|F_1F_2| = (F_1F_2)^*(F_1F_2)$$

$$= (F_1^*F_1)(F_2^*F_2)$$

$$= |F_1|^2|F_2|^2$$

$$= (|F_1||F_2|)^2$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$x \in \ker(U_1U_2) \Leftrightarrow U_1U_2x = 0 \Leftrightarrow U_1x \in \ker(U_2) = \ker(|F_1|)$$

$$\Leftrightarrow |F_2|U_1x = 0 \Leftrightarrow U_1|F_1|x = 0 \Leftrightarrow U_2x \in \ker(U_1) = \ker(|F_1|)$$

$$\Leftrightarrow (|F_1||F_2|)x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(|F_1||F_2|)$$

■

نظرية 2.3.2

إذا كان $F = U|F|$ التحليل القطبي لـ F فإن $F^* = U^*|F^*|$ هو التحليل القطبي لـ F^*.

البرهان

لدينا $F = U|F|$ و $\ker(U) = ker(|F|)$ فإن:

$$F^* = |F|U^* = U^*U|F|U^*$$

و بما أن $F^* = U|F|U^*$، فإن : $F^* = U^*|F^*|$

و الآن نبرهن أن $ker(U^*) = ker(|F^*|)$

لدينا:

$$\langle U^*x, U^*x\rangle = \langle UU^*x, x\rangle = \|U^*x\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |F|U^*x = 0 \Leftrightarrow F^*x = 0 \Leftrightarrow |F^*|x = 0$$

■

نظرية 3.3.2

ليكن $F = U|F|$ التحليل القطبي لـ F :

1. إذا كان F ناظمي فان U كذلك .
2. إذا كان F قرين لنفسه فإن U كذلك .
3. إذا كان F موجب فإن U كذلك و يمثل إسقاط.

البرهان

1. بما أن $F^* = U^*|F^*|$ التحليل القطبي لـ F^* فإن :

$$\langle F, F^*\rangle = \langle U|F|, U^*|F^*|\rangle$$

تكافئ أن $U|F|$ ثنائي تبديلي مع $U^*|F^*|$.

2. بما أن F قرين لنفسه فإن :

$$U|F| = F = F^* = U^*|F^*|$$

و منه نستنتج أن : U قرين لنفسه .

3. بما أن U^*U إسقاط

و

$$\ker(U^*U) = \ker(U) = \ker(|F|)$$

و

$$U|F| = F = |F| = U^*U|F|$$

فإننا نستنتج: $U = U^*U$

و بما أن التحليل القطبي وحيد فإن U هو إسقاط.

■

نظرية 4.3.2

إذا كان $F = U|F|$ التحليل القطبي لـ F فإن :

$$F^2 = 0 \Leftrightarrow U^2 = 0$$

.

البرهان

$$0 = F^2 = U|F|U|F| \Leftrightarrow |F^2|U|F| \Leftrightarrow |F|U|F| = 0 \Leftrightarrow U^2|F| = 0$$

$$\Leftrightarrow |F|U^{*2} = 0 \Leftrightarrow UU^{*2} = 0 \Leftrightarrow (UU^{*2})^*UU^{*2} = 0 \Leftrightarrow U^2U^{*2} = 0 \Leftrightarrow U^2 = 0$$

■

ملاحظة

إذا كان $F = U|F|$ هو التحليل القطبي لـ F و $F^* = V^*|F^*|$ التحليل القطبي لـ F^*، فإن $V = U^*$.

نظرية 5.3.2

إذا كان $F = U|F|$ هو التحليل القطبي لـ F، فإن F يحقق :

$$\ker(|F|) = \ker(F) \tag{10.2}$$

$$|F^*|^q = U|F|^qU^* \tag{11.2}$$

البرهان

1. لدينا:

$$|F|x = 0 \Leftrightarrow |F|^2x = 0$$

$$\langle |F|^2x, x\rangle = \||F|x\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow F^*Fx = 0$$

$$\Leftrightarrow Fx = 0$$

2. واضح أن: $\ker(F^q) = \ker(F) \quad \forall q \geqslant 0$

لدينا: $\overline{E(|F|^q)} = \overline{E(|F|)}$ اذن:

$$U^*U|F|^q = |F|^q$$

و منه نجد:

$$|F^*|^2 = FF^* = U|F||F|U^* = U|F|U^*U|F|U^*$$
$$= (U|F|U^*)^2$$

و منه من أجل كل كثير حدود

$$f_n(|F^*|^2) = f_n(U|F|U^{*2}) = Uf_n(|F|^2)U^*$$

نأخذ $t^{1/2} \longmapsto f_n(t)$ فإن: $|F^*| = U|F|U^*$ محققة. بالإضافة إلى أنه من أجل كل عدد طبيعي n و m العلاقة $|T^*|^{n/m} = U|T|^{n/m}U^*$ محققة.

و الآن ليكن $q \longmapsto (n/m)$ فإن $|T^*|^q = U|T|^qU^*$ لأن $U^*U|T|^q = |T|^q$

■

نتيجة 2.3.2

التقايس الجزئي المعرف بشكل وحيد يحقق الخصائص التالية:

1. $(\ker U)^{\perp} = \overline{E(F^*)}$
2. $U^*U = P_{\overline{E(F^*)}}$
3. $UU^* = P_{\overline{E(F)}}$
4. $E(U) = \overline{E(F)}$

قضية 2.3.2

من أجل كل مؤثر F يكون:

$$U_F^* = U_{F*} \tag{12.2}$$

البرهان

لدينا:

$$F|F| = |F^*|F \tag{13.2}$$

بالتراجع نجد $F(F^*F)^n = (F^*F)^nF$

و منه من أجل كل كثير حدود P يكون : $FP(F^*F)^n = P(F^*F)^nF$

و باعتبار أن الجذر التربيعي للمؤثر غير سالب هو نهاية قوية لمتتالية كثير حدود نحصل على :

$$U_{F*}|F^*|^2{U^*}_{F^*} = (U_{F*}|F^*|)(U_{F*}|F^*|)^*$$

$$= F^*F^{**} = F^*F = |F|^2$$

و منه باعتبار الصيغة 1 من النتيجة (1،3،2) نجد :

$$U^*{}_{F*}|F|^2 = U^*{}_{F*}U_{F*}|F^*|^2U^*{}_{F*} = |F^*|^2U^*{}_{F*}$$

و من الصيغة الأخيرة و باعتبار الصيغة (13،2) نحصل على :

$$U^*_{F*}|F|^2 = |F^*|^2U^*{}_{F*} = |F^*|(U_{F*}|F^*|^*)^*$$

$$= |F^*|F^{**}$$

$$= |F^*|F = F|F|$$

التي تكافئ :

$$U^*{}_{F*}|F| = F|_{E(|F|)}$$

المساواة الأخيرة مع الساواة $U^*{}_{F*}|F| = F|_{\ker(|F|)}$ نحصل على :

$$U^*{}_{F*}|F| = F$$

$$\ker(U^*)_{F*} = (E(U_{F*}))^{\perp}$$

من الصيغة 4 من النتيجة (2،3،2) نجد :

$$\ker U^*{}_{F*} = (E(U_{F*}))^{\perp} = \ker F$$

و من (10،2) نجد :

$$\ker(U^*)_{F*} = \ker(|F|)$$

و بما أن F قرين لنفسه، فإن U_F أيضا قرين لنفسه. عندها يكون $U_F = SgnF$ ■

في بعض الأحيان من المفيد في التحليل القطبي للمؤثر القرين لنفسه .
نضع تناظر قرين لنفسه S_F نعرفه كالتالي:

$$S_F = U_F|_{\overline{E}(F)\oplus I_{\ker F}}$$

و عليه نكتب : $F = S_F|F| = |F|S_F$

عندها يكون: $U_F = S_F P_{E(F)} = P_{E(F)} S_F$

ملاحظة

إذا اعتبرنا الدالة الطيفية للمؤثر القرين لنفسه F مستمرة من اليسار فإنه يكون: $S_F = SignF$ حيث $Sign$ هي دالة الإشارة الحادة معرفة كالتالي:

$$SingF = \begin{cases} 1 & , x \geqslant 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

عندها يسمى S_F بالإشارة الحادة للمؤثر F.

❖ ليكن

$$H = H_1 \oplus H_2 \qquad (14.2)$$

تحليل الفراغ H و B مؤثر من H_2 في H_1 و C مؤثر قرين لنفسه في H حيث :

$$BC = 0 \qquad (15.2)$$

قضية 3.3.2

المؤثرات B و C تحقق:

1. $P_{\ker B}|C| = C$
2. $U_B|C| = 0$
3. $S_C P_{\ker B} = P_{\ker B} S_C$
4. $\ker(|B| + |C|) = \ker(B) \bigcap \ker(C)$
5. $(B^*B + C^2)^{1/2} = |B| + |C|$

البرهان

1. الصيغة (15.2) تكافئ: $E(C) \subseteq \ker B$

و منه و باعتبار النقطة 2 من النتيجة (1.3.2) يكون:

$$E(|C|) \subseteq \overline{E(|C|)} = \overline{E(C)} \subseteq \ker B \qquad (16.2)$$

أي : $P_{\ker B}|C| = |C|$ و بما أن : $\overline{E(|C|)} = \overline{E(C)}$

إذن : $P_{\ker B}|C| = C$

2. لدينا من (7.2) و (10.2) $\ker U_B = \ker |B| = \ker B$

و من الصيغة (16.2) $E(|C|) \subseteq \ker B$

إذن : $U_B|C| = 0$

3. لدينا من (16.2): $E(C) \subseteq \overline{E(C)} \subseteq \ker B$

و منه $P_{\ker B}C = C$.

إذن: $CP_{\overline{E(B)}} = CP_{(\ker(B))^{\perp}} = 0$ و منه يكون :

$$P_{\ker B}C = C = CP_{\ker B} + CP_{\overline{E(B)}} = CP_{\ker B}$$

4. من (10.2) نجد: $\ker(|C|) = \ker C$ $\quad$ $\ker(|B|) = \ker B$ إذن:

$$\ker B \bigcap \ker C \subseteq \ker(|B| + |C|)$$

و الآن نبرهن الإحتواء الثاني .

بضرب الصيغة (15.2) من اليمين بـ S_C نجد:

$$BCS_C = 0$$

و بضرب العلاقة الأخيرة من اليسار ب ${U_B}^*$ نجد: ${U_B}^*BCS_C = 0$

و باعتبار النقطة 1 من النتيجة (1.3.2) نجد: $|B|CS_C = 0$

و بما أن S_C تبديلي مع C فإن : $|B||C| = 0$

بوضع: $|B|h + |C|h = 0$

و بتركيب $|B|$ في طرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$|B|^2h + |B||C|h = 0$$

أي: $|B|^2h = 0$ $|B|h = 0$

و باعتبار الصيغة (10.2) نجد : $Bh = 0$ و $Ch = 0$

و بالتالي يكون :

$$\ker(|B| + |C|) \subseteq \ker B \bigcap \ker C$$

و منه نستنتج أن :

$$\ker(|B| + |C|) = \ker B \bigcap \ker C$$

5. لدينا باستعمال التراجع

$$(B^*B + C^2)^n = (B^*B)^n + C^{2n} \quad n \geqslant 1 \qquad (17.2)$$

نلاحظ أن المساواة محققة من $n=1$
و الآن نفرض أنها صحيحة من أجل n و نبرهنا من أجل $(n+1)$

$$(B^*B+C^2)^{n+1}=(B^*B+C^2)^n=(B^*B+C^2)=(B^*B+C^2)^n(B^*B+(B^*B+C^2)^nC^2$$

و باستعمال الصيغة (17،2) نجد:

$$(B^*B+C^2)^{n+1}=(B^*B)^{n+1}+C^{2(n+1)}$$

و منه المساواة محققة من أجل كل $n\geqslant 1$
من أجل كل كثير حدود P يكون:

$$P(B^*B+C^2)=P(B^*B)+PC^2$$

و كما في برهان القضية (12،2) نستنتج العلاقة (5)

■

❖ نعتبر الآن F مؤثر قرين لنفسه.
باعتبار الصيغة (14،2) و (15،2) نكتب:

$$F=\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

$$AB=0 \tag{19.2}$$

نظرية 6.3.2

المؤثر F المعرف بالصيغ (15،2)،(18،2) و (19،2) يحقق:

$$\begin{cases} |F|=\begin{bmatrix} |B^*|+|A| & 0 \\ 0 & |B|+|C| \end{bmatrix} \\ S_F=\begin{bmatrix} S_AP_{\ker B^*} & U_B \\ U_{B^*} & S_CP_{\ker B} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{20.2}$$

البرهان

نلاحظ أنه من الصيغة (19،2) و العلاقة (7،2) تحقق المعدلات الموجودة في القضية السابقة.
بالنسبة لتحويل $H_1 \rightleftarrows H_2$; $C\longrightarrow A;\ B\longrightarrow B^*$

من المعادلة الأولى في (20،2)، و الصيغة (15،2) والنقطة 1 من القضية السابقة و (19،2) يكون :

$$F^2 = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 + BB^* & AB + BC \\ B^*A + CB^* & BB^* + C^2 \end{bmatrix}$$

ومنه بإستعمال (14،2) و (15،2) من القضية السابقة و الصيغة الأخيرة نجد :

$$F^2 = \begin{bmatrix} A^2 + BB^* & 0 \\ 0 + CB^* & BB^* + C^2 \end{bmatrix} \qquad (21.2)$$

ومنه بإستخدام (5) من القضية السابقة والصيغة الأخيرة نجد:

$$|F| = (F^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} (A^2 + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 + CB^* & (BB^* + C^2)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B^*| + |A| & 0 \\ 0 & |B| + |C| \end{bmatrix}$$

من ناحية ثانية ليكن S مؤثر قرين لنفسه مصفوفته حسب (14،2) من القضية السابقة

$(S_{ij})_{ij=\overline{1,2}}$ و $S_{21} = S_{12}^*$

S يعتبرإشارة حادة للمؤثر F إذا وفقط إذا تحققت الشروط:

$$\begin{cases} 1) \ S_{11}(|B^*| + |A|) = A \\ 2) \ S_{12}(|B| + |C|) = B \\ 3) \ S_{21}^*(|B^*| + |A|) = B^* \\ 4) \ S_{22}(|B| + |C|) = C \end{cases} \qquad (22.2)$$

$$\begin{cases} 5) \ S_{11}^2 + S_{12}S_{12}^* = I_{H_1} \\ 6) \ S_{22}^2 + S_{12}^*S_{12} = I_{H_2} \\ 7) \ S_{11}S_{12} = S_{12}S_{22} = 0 \end{cases} \qquad (23.2)$$

$$\begin{cases} \forall h_1 \in \ker B^* \cap \ker A \\ \forall h_2 \in \ker B \cap \ker C \\ 8) \ S_{11}h_1 + S_{12}h_2 = h_1 \\ 9) \ S_{12}^*h_2 = S_{22}h_2 = h_2 \end{cases} \qquad (24.2)$$

المجموعة (22،2) تعني $S|F| = F.$

المجموعة(23،2) تعني $S^2 = I_H.$

المجموعة(24.2) تعني $S|_{\ker|F|}$.
نلاحظ أن الصيغة (8) و (9) تحقق :

$$\ker|F| = \ker\begin{bmatrix} |B^*|+|A| & 0 \\ 0 & |B|+|C| \end{bmatrix} = (\ker B^* \cap \ker A) \oplus (\ker B \cap \ker C)$$

أيضا نلاحظ أن الشروط (4),(2),(6),(9) تؤول إلى (1),(3),(5),(8) على التوالي في (14.2)

$$(S_{12} \to S_{12}^* \quad ; S_{22} \to S_{11}; \quad h \leftrightarrows h_2) \qquad (25.2)$$

نأخذ الأن في مكان S المصفوفة الثانية في الصيغة (15.2) عندها وبإعتبار القضية (13.2) نحصل على الصيغة الأخيرة من أجل S
هذا يعني أنه من أجل برهان المساواة $S = S_F$ يكفي برهان فقط العلاقات (4),(2),(6),(7),(9) في هذه الحالة
2) بإستعمال الصيغة (2) من القضية (3.3.2) نجد:

$$S_{12}(|B|+|C|) = V_B|B|+ = V_B|C| = B$$

4) بإستعمال الصيغة (10.2) و الصيغة (1) من القضية (3.3.2) نجد:

$$S_{22}(|B|+|C|) = S_C P_{\ker B}|B| = SP_{\ker B}|C| = S_C P_{\ker B}|B| = S|C| = C$$

6) بإستعمال الصيغة (2) من النتيجة (2.3.2) و الصيغة (3) من القضية (3.3.2) نجد:

$$S_{22}^2 + S_{12}^* S_{12} = S_C^2 P_{\ker B} + V_B^* V_B = P_{\ker B} = P_{E(B^*)} = I_{H_2}$$

7) بإستعمال الصيغة (4) من النتيجة (2.3.2) ، و (3) من القضية (3.3.2) ، (7.2) و (10.2) نجد:

$$S_{11}S_{12} + S_{12}S_{22} = S_A P_{\ker B^*} V_B + V_B S_C P_{\ker B} = V_B + V_B P_{\ker B} S_C = 0$$

والأن نبرهن (9) :
ليكن $h_1 \in \ker B^* \cap \ker A \; ; \; h_2 \in \ker B \cap \ker C$ أشعة كيفية،
بإستعمال الصيغة (7.2) و (10.2)

$$V_B^* h_1 = V_{B^*} h_1 \in V_{B^*} \ker B^* = \{0\}$$

من ناحية ثانية

$$P_{\ker B} h_2 = h_2 \qquad ; \qquad S_C h_2 = h_2$$

ومنه :

$$S_{12}^{*}h_1 + S_{22}h_2 = V_B^{*}h_1 + S_C P_{\ker B}h_2 = h_2$$

■

خـــــاتمة

يندرج محتوى هذه المذكرة في العمل على تبيين وجود و وحدانية التحليل القطبي وأهميته في التحليل الدالي ،فقد ركزنا في الدراسة على مؤثر قرين لنفسه من نوع خاص.

لهذا الغرض جمعنا أهم المقالات التي تناولت هذا الموضوع و بعض المراجع من التحليل الدالي و نظريةالمؤثرات.

كل هذا يكمن في تسهيل حلول المعادلات الدالية التي معاملاتها مؤثرات قرينة لنفسها و العمل يبقى مفتوحا من أجل مؤثرات أخرى.

قائمة المراجع

[1] عسيلة مصطفى، دروس في التبولوجيا و التحليل الدالي، د.م.ج-الجزائر-2009.

[2] عسيلة مصطفى، دروس في المؤثرات ونظر يةالأطياف،الجزءالأول،المؤثرات المحدودة،UKMO , 2013.

[3] T. Furuta;Invitation to linear operators : from marixes to bounded linear operars on a hilbert space ,Taylor et Fancis ,New york,2001.

[4] G.K.Pedersen; Analysis New ,New york,1989.

[5] D.L.Tyshkevich, M.M.I.TOM21(60)N=1 (2008) p:52-58.

[6] M.S.Birman ,Spectral Theory of Self-adjoint Operators in Hilbert spaace ,D.Reidel Publishing Company,BookCompany ,1987.

[7] N.Dunford ;J.T.Schwartz ,Linear Operator,party:General Theory,wily interscience,New York,1958.

[8] V.C.L.Huston ;J.S.Pym ,Functional Analysis and Operators Theory, Academic Press, London,1980.

[9] V.Muller , Spectal Theory of linear Operators ,Birkhauer-Verlag,2007.

[10] T.Kato ;Perturbation Theory for Linear Operators , Springer-Verlage Berlin-Heidelberg-New York(1966).

التحليل القطبي للمؤثر الخطي

ملخص

هذا العمل يهدف إلى تبين وجود و وحدانية التحليل القطبي للمؤثر الخطي و تطبيقاته. فقد ركزنا في الدراسة على مؤثر قرين لنفسه من نوع خاص.
و أساس هذا العمل هو توضيح لما ورد في المقالات الموجودة في قائمة المراجع .

الكلمات المفتاحية: التحليل القطبي ، التقايس الجزئي ، مؤثر قرين لنفسه.

polar decomposition of linear operator

Abstract

Our aim in this work is clarfiy existance and unicity of polar decomposition of linear operator and your aplication.
We have based Our study on special sefl-adjoint operator.
This study iss to explaing the content of the arcicles listed in the bibliography.

Key words: polar decomposition , partial isometry , sefl-adjoint operator.