الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة قاصدي مرباح _ ورقلة

كلية الرياضيات وعلوم المادة

قسم الفيزياء

مذكرة : 2 ماستر LMD

مجال :علوم المادة

تخصص :فيزياء نظرية

من إعداد الطالبة :شاء الله رجاء

الموضوع :

ذرة الهيدروجين والذرات الشبيهة بها في معادلة ديراك

L'atome hydrogène et ion hydrogenoide dans l'équation de Dirac

نوقشت يوم :2018/ 10/07

أمام اللجنة المحترمة المكونة من :

دويس السعيد	أستاذ محاضر (أ)	جامعة ورقلة	الرئيس
طراد حسام الدين	أستاذ مساعد	جامعة ورقلة	المناقش
مفتاح محمد الطيب	أستاذ التعليم العالي	جامعة ورقلة	المؤطر

الموسم الجامعي :2018/2017

شكـــــر وعرفـــــــــــــــــــان

بسم الله الرحمن الرحيم وصلى الله على سيدنا ومولانا محمد معلم البشرية وخير البرية وعلى آله وصحبه وسلم تسليما كثيرا

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله**,** الشكر أولا وأخيرا لله عز وجل الذي وفقت بفضله العظيم في إتمام هاته المذكرة.

وبكل مشاعر التقدير والعرفان أتقدم بوافر الشكر إلى الدكتور **مفتاح محمد الطيب** لتفضله بالإشراف على هاته الرسالة ،ولما بذله من جهد مخلص في المتابعة والتوجيه ولما وهبني إياه من وقته الثمين وعلمه الواسع وخلقه العظيم .

كما أتوجه بجزيل الشكر وعظيم الإمتنان لأستاذي **بن طويلة عمر** الذي كان عونا وسندا لي، وأوجه إمتناني لأساتذتي الأفاضل أعضاء اللجنة المناقشة على تفضلهم مشكورين بقبول الإشتراك في لجنة المناقشة والحكم على الرسالة وعلى رأسهم الأستاذ **طراد حسام الدين** مناقشا والأستاذ **دويس السعيد** رئيسا.

كما لا أنسى أن أترحم على أستاذي الفاضل المرحوم **بن بيتور عبد الوهاب،** وأتوجه بالشكر الخاص للأستاذ الفاضل **فضيل بن عمر** ،والشكر الجزيل إلى أساتذتي في قسم الفيزياء في جامعة قاصدي مرباح ورقلة لما بذلوه من مجهود لإيصالي إلى هذه المرحلة.

وإلى كل من قرأ صفحة من مذكرتي فهو شرف لي أن أكون مصدر عون لغيري ...

أتقدم بالشكر أيضا إلى جميع من قدم لي مساعدة سائلة المولى عز وجل أن يجزيهم على خير الجزاء .

شاء الله

الإهـــــــداء

اهدي هذا العمل المتواضع :

إلى الشمعة التي أضاءت ليالي مضحية بأغلى ما لديها إلى رمز المحبة والحنان ...أمي

إلى النور الذي ينير درب نجاحي إلى رمز الصبر والإخلاص ...أبي

إلى زينة الحياة وشموع الدرب إلى أحبائي ...إخوتي وأخواتي

إلى من شاركوني النجاح وشجعوني للنهوض من جديد بعد الفشل
إلى رمز الدفء والراحة والوفاء ...جدَتي وكل أخوالي

إلى رمز البراءة والطفولة لأزهار منزلنا ....بنات وأولاد إخوتي وأخوالي

إلى رمز العلم والعمل والأدب ...زملائي الطلاب 2 ماستر فيزياء نظرية دفعة جوان 2018

إلى كل من هو منقوش في عمق القلب ولم يذكره حبر القلم

داعية المولى عز وجل أن يمد في عمرهم ويمتعهم بموفور الصحة والعافية انه سميع مجيب الدعاء.

رجاء

الفهرس

مقدمة عامة

ظهرت ميكانيك الكم في القرن العشرين تتضمن عدة نظريات فيزيائية خاصة بتفسير الظواهر على المستوى الذري والجسيمات دون المستوى الذري، حيث دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية للأجسام وبالتالي تصبح ميكانيك الكم مسؤولة عن التفسير الفيزيائي لهذا المستوى.

تعتبر ميكانيك الكم تعميم للفيزياء الكلاسيكية التي لا يمكن تطبيقها على المستوى الذري، وأطلق عليها هاته التسمية لأنها تصف كميات الصغيرة للطاقة المنبعثة بشكل متقطع (الطيف) ونسبة لكميات الطاقة المتبادلة بين الجسيمات.

وفي ظل هذا ظهرت أيضا ميكانيك الكم النسبي، حيث قام بول ديراك بوضع ميكانيك الكم بصيغته حين قام بتطوير المعادلة الموجية التي أوجدها شرودينغر عام 1925 ،لتتناسب مع مبادئ النسبية الخاصة حيث وصفت بميكانيكا المصفوفات.

وفي مذكرتنا هذه سنقوم بدراسة معادلة ديراك لذرة الهيدروجين والأيون الهيدروجيني (الذرات الشبيهة بالهيدروجين)، حيث تتضمن ثلاث فصول سنستعرض فيها أسس الفيزياء لميكانيكا الكم وميكانيكا الكم النسبي هي:

- ✓ **الفصل الأول: معادلة شرودينغر لذرة الهيدروجين.**
- ✓ **الفصل الثاني: معادلة كلين غوردون.**
- ✓ **الفصل الثالث: معادلة ديراك لذرة الهيدروجين.**

و نختم بحثنا بخلاصة عامة تشمل كل الفصول.

الفصل الأول:

معادلة شرودينغر لذرة الهيدروجين.

تعتبر معادلة شرودينغر المبدأ الأساسي في ميكانيك الكم حيث تصف كيفية تغير الحالة الكمومية لنظام فيزيائي بتطور الزمن، وقد صاغها العالم النمساوي إرفين شرودينغر عام 1925 ونشرت في عام بعد هذا.

تدرس هذه المعادلة حالات النظم الكمومية المعتمدة على الزمن، ولها أهمية خاصة في ميكانيك الكم حيث تعتبر كقانون التحريك الثاني لنيوتن في الفيزياء الكلاسيكية، وتعطى العلاقة العامة لها ب:

$$E\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\Psi \text{.........(I-1)}$$

حيث:

E: الطاقة الكلية.

Ψ: الدالة الموجية.

$\hbar$: ثابت بلانك.

m: كتلة الجسيم.

∇: لابلاسيان.

V: الطاقة الكامنة للجسيم.

1. الكمون المركزي:

تكتب معادلة شرودينغر على الشكل:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi$$

$$= (\frac{P^2}{2m} + V(r))\Psi$$

$$= (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\overrightarrow{r}))\Psi \ldots\ldots (I\text{-}2)$$

حيث:

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$H = (\frac{P^2}{2m} + V(r))$$

$$P = -\hbar\nabla$$

أما $V(r)$ فهو الكمون المركزي ويكون متعلق بالبعد r.

ونكتب معادلة شرودينغر باستخدام الإحداثيات الكروية التالية:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2}$$

حيث:

$$L^2 = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

تصبح معادلة شرودينغر$(I\text{-}2)$ كالآتي:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r))\Psi \ldots\ldots\ldots (I\text{-}3)$$

ولحل هذه المعادلة نفصل المتغيرات فنضع:

$$\Psi = \Psi(t.r) = \Psi_{nlm}(r)e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$$

حيث:

n: عدد الكم الرئيسي.

l: عدد الكم المداري.

m: عدد الكم المغناطيسي.

وبالتالي الدالة الموجية $\Psi_{nlm}(r)$ تحل معادلة شرودينغر التفاضلية التالية:

$$E_n\Psi_{nlm} = (-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r))\Psi_{nlm} \quad \text{.........(I-4)}$$

نفصل مرة أخرى متغيرات الدالة الموجية $\Psi_{nlm}(r)$ كالآتي:

$$\Psi_{nlm} = \Psi_{nlm}(r) = R_{nl}(r)F_l^m(\theta,\varphi)$$

حيث:

$F_l^m(\theta,\varphi)$: دالة لزاويتان φوθ.

$R_{nl}(r)$: دالة للبعد r.

بعد تبسيط المعادلة(I-4) نجد:

$$\frac{1}{R_{nl}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{nl}}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r) - E_n) = \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{F_l^m}L^2F_l^m \quad \text{.........(I-5)}$$

أي:

$$L^2F_l^m = F_l^m\hbar^2(\frac{1}{R_{nl}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{nl}}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r) - E_n)) \quad \text{........(I-6)}$$

نستبدل الجزء الزاوي للابلاسيان في المعادلة(I-6)بالقيمة الذاتية $l(l+1)$ فنجد:

$$L^2F_l^m = \hbar^2 l(l+1)F_l^m \ldots\ldots\ldots\ldots(I\text{-}7)$$

حيث:

$F_l^m = Y_l^m(\theta,\varphi)$ هي توافقية كروية.

نستنتج إذن:

$$\frac{1}{R_{nl}}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR_{nl}}{dr} - \frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r) - E_n)) = l(l+1)\ldots\ldots\ldots(I\text{-}8)$$

بوضع: $U_{nl}(r) = rR(r)_{nl}$ نجد:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U_{nl}}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]U_{nl} = E_nU_{nl}\ldots\ldots\ldots(I\text{-}9)$$

هذه المعادلة هي من الشكل معادلة شرودينغر في بعد واحد بكمون فعال يعطي بالشكل:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}$$

حيث الحد الثاني يسمى بحد الطرد المركزي أين يدفع الجسيم بعيدا عن المركز.

2. كمون كولومب:

نعتبر V كمون كولومب لذرة الهيدروجين يعطى بالشكل التالي:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

وبالتالي نكتب معادلة شرودينغر بالشكل الآتي:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2U_{nl}}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]U_{nl} = E_nU_{nl}\ldots\ldots\ldots(I\text{-}10)$$

أي:

$$\frac{d^2U_{nl}}{dr^2} = (-\frac{2mE_n}{\hbar} + \frac{2m}{\hbar}\left[-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right])U_{nl}\ldots\ldots\ldots(I-11)$$

ولإيجاد الدوال الذاتية والطاقات الذاتية نحل معادلة$(I-11)$من أجل الحالات المرتبطة حيث الجسيم لا يمكنه الهروب من

الكمون إلى الملا نهاية كما في حالة الهزاز التوافقي وبالتالي نأخذ:$E < 0$.

وبوضع:

$$K_n = \frac{\sqrt{-2mE_n}}{\hbar}$$

$$\rho_{0n} = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2K_n}$$

$$\rho = K_n r$$

حيث:

e: شحنة الإلكترون.

ε_0: سماحية الفراغ.

ومنه المعادلة $(I-11)$ تكافئ:

$$\frac{d^2u_{nl}}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_{0n}}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]U_{nl}\ldots\ldots\ldots(I-12)$$

لحل هذه المعادلة نستعمل طريقة فروبينيوس.

ومنه:

- لما $\rho = \infty$تصبح المعادلة $(I-12)$ كالتالي:

$$\frac{d^2U_{nl}}{d\rho^2} = U_{nl} \ldots\ldots\ldots(I\text{–}13)$$

وبالتالي يعطى حل هذه المعادلة كالآتي:

$$U_{nl}(r) = Ae^{-\rho} + Be^{+\rho}$$

- و لما $\rho \to \infty$ تصبح أيضا المعادلة $(I\text{–}12)$ كالتالي:

$$\frac{d^2U_{nl}}{d\rho^2} = \frac{l(l+1)}{\rho^2}U_{nl} \ldots\ldots\ldots\ldots(I\text{–}14)$$

و يكون حلها من الشكل:

$$U_{nl}(r) = C\rho^{l+1} + D\rho^{-1}$$

بتعويض بقيمة ρ و ρ_{0n} نحصل على الطاقات الذاتية والدوال الذاتية وتكتب بالشكل:

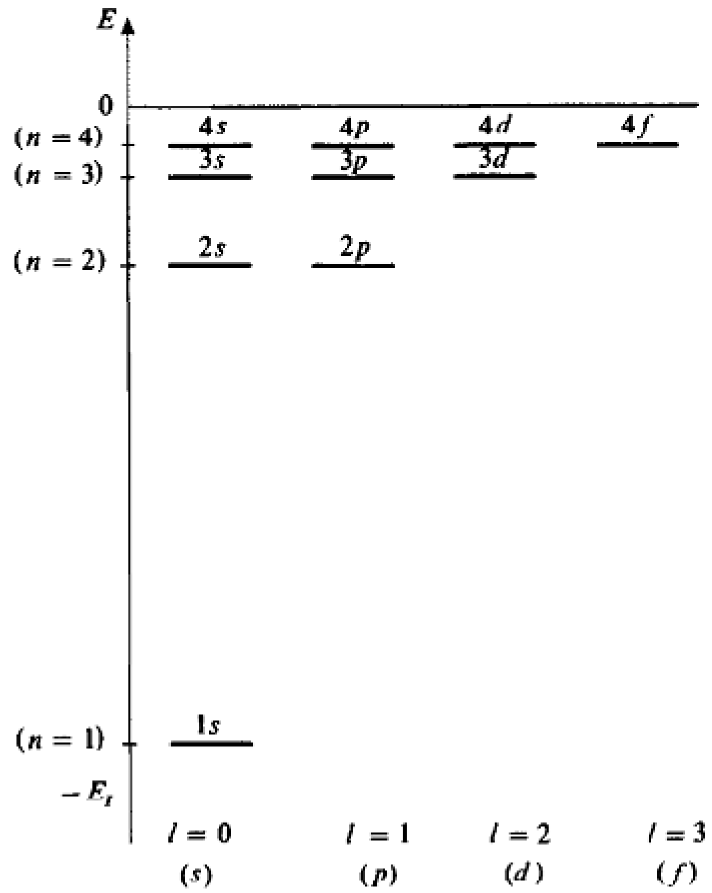
$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

حيث:

$$R_{nl}(r) = \frac{U_{nl}(r)}{r} = \frac{\rho^{l+1}}{r}e^{-\rho}U_{nl}(\rho)$$

ونرفق هذا الحل بالرسم التالي الذي يوضح بعض مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين:



الشكل-1-:مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين.

ترتبط الطاقة بعدد الكم الرئيسي n وقيم عدد الكم المداري lو عدد الكم المغناطيسي m،مثلا لما n=1 فإن l=0فيوافق هذا المستوي الأولي للطاقة كما هو موضح في الشكل أعلاه.

خلاصة:

إن دراستنا في هذا الفصل ترتبط بتحديد مستويات الطاقة والدوال الذاتية لذرة الهيدروجين حيث قمنا بإستخدام الإحداثيات الكروية r, θ, φ وهذا بحل معادلة شرودينغر، حيث شكلت هاته الأخيرة أفقا جديدا في فهم الفيزياء وبفضلها برزت ميكانيك الكم .

وقد تحصلنا على النتائج التالية:

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

و بالرغم من المكانة التي أخذتها هاته المعادلة وعظمة نتائجها المبهرة إلا أن لها نقائص ومشاكل وعيوب حيث أنها تصف فقط الجسيمات عديمة السبين وأنها أيضا لا تتوافق مع النسبية الخاصة ولذلك ومع تطور العلم توصل العلماء إلى معادلات أخرى تتفق مع النسبية الخاصة وتصف جسيمات ذات السبين النصف وغيره وهذا ما سنراه في الفصول القادمة.

الفصل الثاني:

معـــــــادلـــــــــــــــة كـــلين غـــــــوردون.

مدخل:

على الرغم من النجاح الكبير الذي حققته معادلة شرودينغر في وصف الفيزياء الميكروسكوبية (الفيزياء الذرية وغيرها)، إلا أن لهذه المعادلة مشكلتين تتلخص في ما يلي:

- أولا لا تتوافق معادلة شرودينغر مع النسبية الخاصة ، حيث أنها غير قادرة على وصف الجسيمات الميكروسكوبية التي تتحرك بسرعة الضوء.
- ثانيا تصف هذه المعادلة الجسيمات معدومة السبين فقط.

وبالتالي ومن خلال ميكانيك الكم و النسبية الخاصة قام كل من أوسكار كلين و والتر غوردون بوضع معادلة موجية نسبية مستقلة تصف الجسيمات عديمة السبين بشكل يتوافق مع ميكانيك الكم والنسبية الخاصة.

وتعطى الطاقة ومؤثر الزخم في ميكانيك الكم كالتالي:

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; P = -i\hbar\vec{\nabla} \text{.........}(II\text{–}1)$$

وتعطى هذه العلاقات في صيغة الطاقة النسبية كالآتي:

$$E^2 = P^2C^2 + m^2C^4$$

نحصل على المعادلة الموجية التالية:

$$E^2|\psi\rangle = (P^2C^2 + m^2C^4)|\psi\rangle$$

بالتعويض بعبارة الطاقة والزخم نحصل على المعادلة التالية:

$$-\hbar^2\frac{\partial}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = (-\hbar^2C^2\vec{\nabla}^2 + m^2C^4)\psi(\vec{r},t) \text{..............}(II\text{–}2)$$

تسمى المعادلة (II–2) بمعادلة كلين غوردون.

بتبسيط المعادلة (II–2) نتحصل على العبارة التالية :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(\mathrm{ct})^2}-\vec{\nabla}^2\right)\psi(\vec{x},t)=-\frac{m^2C^2}{\hbar^2}\psi(\vec{x},t)$$

بوضع :

$$\square=\left(\frac{\partial^2}{\partial(\mathrm{ct})^2}-\vec{\nabla}^2\right)$$

ومنه نكتب:

$$\left(\square+\frac{m^2C^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{x},t)=0 \text{..................(II–3)}$$

1. الشكل المتغاير لمعادلة كلين غوردون:

نستطيع كتابة المعادلة (II–3) على الشكل :

$$\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-m^2C^2\right]\psi(\vec{x},t)$$

ومنه:

$$\left[P_\mu P^\mu-m^2C^2\right]\psi(\vec{x},t) \text{.......(II–4)}$$

حيث:

$$P_\mu P^\mu=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{c^2\,\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

بما أن القيمة m^2C^2 سلمية و$P_\mu P^\mu$ هي ثابتة فإن معادلة كلين غوردون تبقى ثابتة تحت تحويلات لورونتز.

ومنه المعادلة (II–4) تسمى بالشكل المتغاير لمعادلة كلين غوردون.

2. المعادلة المستمرة:

نشتق المعادلة المستمرة لكلين غوردون بإتباع نفس الأسلوب المستعمل في معادلة شرودينغر ونكتب :

$$\psi^*\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2+\frac{m^2C^2}{\hbar^2}\right]\psi=0\ldots\ldots(a)$$

$$\psi\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2+\frac{m^2C^2}{\hbar^2}\right]\psi^*=0\ldots\ldots(b)$$

بطرح العلاقتين السابقتين نتحصل على :

$$(a)-(b)=\frac{1}{c^2}\left[\psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi-\psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi^*\right]\left[\psi^*\vec{\nabla}^2\psi-\psi\vec{\nabla}^2\psi^*\right]\psi^*=0$$

ولدينا:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)=\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}$$

$$=\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}$$

وبالتالي تصبح:

$$(a)-(b)=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)-\vec{\nabla}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(i\frac{\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi-\psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\right)}_{\rho}+\vec{\nabla}\underbrace{\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*\right)}_{\vec{j}}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{j}=0\ldots\ldots(II-5)$$

بخلاف كثافة الإحتمال لشرودينغر ρ المعتمدة على ψ فإن كثافة الإحتمال للمعادلة (II-5) تعتمد دائما على ψ و ψ^*

وبالتالي تكون موجبة أو سالبة.

وهكذا يمكن تفسير معادلة كلين غوردون بالإضافة إلى كثافة الإحتمال على أنها شيء غير إعتيادي.

وبوضع:

$$j^{\mu}\begin{cases} j = c.\rho \\ j^{i} = \vec{j} \end{cases} ; \partial_{\mu}\begin{cases} \frac{\partial}{\partial(ct)} = \partial_{0} \\ \frac{\partial}{\partial x} = \nabla_{i} = \partial_{i} \end{cases}$$

تأخذ المعادلة (II–5) الشكل التالي :

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0$$

ومنه:

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} j^{\mu} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (II\text{–}6)$$

وهي الشكل المتغاير للمعادلة الإستمرارية لكلين غوردون.

خلاصة:

لقد رأينا في فصلنا هذا الشكل العام لمعادلة كلين غوردون ، حيث أنها تصف الجسيمات عديمة السبين كما هي معادلة شرودينغر ،ومع أنها تتوافق مع النسبية الخاصة إلا أنها تبقى ناقصة حيث أنه لا يمكن استخدامها لمعالجة الجسيمات ذات نصف السبين ولهذا سوف نتطرق في فصلنا الأخير إلى معادلة تختص بهاته الجسيمات.

الفصل الثالث:

معادلة ديراك لذرة

الهيدروجين.

لمحة على معادلة ديراك:

على الرغم من توافق معادلة كلين غوردون مع النسبية الخاصة لكنها تختص فقط بالجسيمات عديمة السبين ولهذا لا بد أن نرى معادلة أخرى تختص بجسيمات ذات نصف السبين ولابد أن تتوافق مع ميكانيك الكم والنسبية الخاصة و هكذا نتجت نظرية الكم النسبية تعتمد على المبادئ التالية:

- حيث أنه لكل نظام فيزيائي لابد أن يوصف بدالة حالة تسمى الدالة الموجية ψ.
- أي ملاحظة فيزيائية تمثل بمؤثر هيرميتي خطي: $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$.
- يمكن كتابة الدالة الموجية على شكل كثير حدود.
- يمكن لأي نظام فيزيائي مستقل عن الزمن أن نعبر عنه بمعادلة شرودينغر التالية: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$.

هذه أبسط المبادئ التي وضعت من أجل أن تتوافق ميكانيك الكم مع النسبية الخاصة وهي التي اعتمد عليها ديراك من أجل وضع معادلته الشهيرة والتي تسمى بمعادلة ديراك.

ومن أجل معرفة ماهية معادلة ديراك والشكل العام لها نتتبع المسار التاريخي لسنة 1928 والذي قام فيها ديراك بتعديل المعادلة المتغايرة لشرودينغر:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \ldots\ldots (III-1)$$

حيث قام بتشكيل هاميلتونيان خطي بإستخدام المشتقات الفضائية حيث حصل على:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)+\beta mc^2\psi\equiv H\psi\ldots\ldots(\mathrm{III-2})$$

بما أن المعادلة(III–2)متغايرة ،إذن لا يمكن أخد α_i معاملات عددية أي أنالدالة الموجية لا يجب أن تكون سلمية لذلك

قام ديراك بوضع معادلة على شكل مصفوفات من خلا النظرية اللانسبية لميكانيك الكم حيث تكتب دالة الموجة على الشكل:

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \cdot\\ \psi_N\end{bmatrix}$$

أي تكون α_i وβ مصفوفات مربعة من الشكل $N\times N$.

و بإستخدام هاته الخواص تؤول المعادلة(III–2)إلىالشكل الآتي:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}=\frac{\hbar c}{i}\sum_{T=1}^{N}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_{\sigma T}\psi_T+\sum_{T=1}^{N}\beta_{\sigma T}\,mc^2\psi_T\equiv H\psi_T\ldots\ldots(\mathrm{III-3})$$

حيث:

σ ،N،T: دلائل.

∂ : المشتق.

$\hbar$: ثابت بلانك المختزل.

i:عدد التخيلي (المركب).

أيضا اقترح ديراك أولا أن تكون عبارة طاقة الزخم على الشكل التالي:

$$E^2 = P^2c^2 + m^2c^4$$

وثانيا يجب أن تكون المعادلة مستمرة تفسر الدالة الموجية $\boldsymbol{\psi}$.

وثالثا يجب أن تكون متغايرة و تتوافق مع تحويلات لورنتز.

1. الصيغة المتغايرة لمعادلة ديراك:

من أجل العلاقة الصحيحة لطاقة الزخم المستنتجة من العلاقة (III-2)، يجب أن تكون الدالة الموجية $\boldsymbol{\psi}$متوافقة كما في معادلة كلين غوردون و نكتب :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\Psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2c^4)\Psi_\sigma \ldots\ldots\ldots (\text{III-4})$$

نربع العلاقة(III-3)فنجد:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i.j=1}^{3} \frac{\alpha_j\alpha_i + \alpha_i\alpha_j}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\,\partial x^j} + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2 c^4 \psi \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III-5})$$

حيث:

$$\alpha_j\alpha_i + \alpha_i\alpha_j = 2\delta_{ik}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

$$\beta^2 = 1$$

وبالتالي تصبح المعادلة (III–5) كالآتي:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i.j=1}^{3} \delta_{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \, \partial x^j} + m^2 c^2 \psi \ldots\ldots\ldots (III\text{-}6)$$

رأى ديراك أن المصفوفات α_iوβ يجب أن تكون هيرميتية وبالتالي الهاميلتونيان في العلاقة(III–3)سيكون هيرميتي وتعطى

القيم الذاتية لـ α_iوβكالتالي:$\alpha_i = \beta = \pm 1$.

ويجب أن تكون أيضا لا تباديلية أي:

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta$$

وبالتالي تعطى المصفوفات βوα_i كالآتي:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حيث:

α_i:مصفوفات باولي.

β: مصفوفة الوحدة.

ومنه نعطي الشكل الهيرميتي المرافق للمعادلة (III–2) من أجل الجسيم الحر كالآتي:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta m c^2 \psi \ldots\ldots\ldots\ldots (III\text{-}7)$$

ونعطي الحل المقترح بالدوال الذاتية كالآتي:

$$\psi^1 = e^{-\left(imc^2/\hbar\right)t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \psi^2 = e^{-\left(imc^2/\hbar\right)t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\psi^3 = e^{+\left(imc^2/\hbar\right)t}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \psi^4 = e^{+\left(imc^2/\hbar\right)t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بحيث الدالتين الأولين يوافقان الطاقة الموجبة، و الدالتين الأسفلين يوافقان الطاقة السالبة.

هذه الحلول السالبة الإستثنائية أدت إلى إكتشاف عظيم وهو وجود الجسيم المضاد لأي مادة .

2. ذرة الهيدروجين:

والآن نعتبر حالة خاصة للإلكترون في حقل كولوم ومن اجل هذا نستطيع كتابة معادلة ديراك على الشكل التالي:

$$H\psi = [\alpha.p + \beta m + V(r)]\psi = E\psi \ \dots\dots\dots \ (III\text{-}8)$$

حيث:

$$V = -\frac{z\alpha}{r} = -\frac{ze^2}{r}$$

لحل هذه المعادلة نفصل المتغيرات في الدوال الذاتية التي رأيناها في النقطة السابقة (2) ونأخذ بذالك بعين الاعتبار للعزم الزاوي.

يعطي العزم الكلي كالأتي:

$$J = L + S = r \times p + \frac{1}{2}\sigma$$

حيث يتبادل العزم J معا لهاميلتونيانH وبهذا نستطيع إيجاد الدوال الذاتية والقيم الذاتية لـ H و J^2 و J_Z باستخدام مصفوفات

باوليσ.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

ومنه نستطيع كتابة ψ على شكل سبينور ذو مركبتين ونكتب:

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

وتعطى الدوال الذاتية من خلال المركبات الزاوية كالآتي :

من اجل: $J = l + \frac{1}{2}$

$$\varphi_{j,m}^{(+)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}}\, Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}}\, Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots(III-9)$$

من اجل: $J = l - \frac{1}{2}$

حيث: $l > 0$

$$\varphi_{j,m}^{(-)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}}\mathrm{Y}_l^{m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}}\mathrm{Y}_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots(\mathrm{III}-10)$$

مع: Y_l^m توافقية كراوية.

وبهذا نكتب الحل العام من اجل حقل مركزي كالآتي:

$$\Psi_{jm} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}G_j^+}{r}\varphi_{jm}^{(+)} + \frac{\mathrm{i}G_j^-}{r}\varphi_{jm}^{(-)} \\ \frac{\mathrm{i}F_j^+}{r}\varphi_{jm}^{(-)} + \frac{\mathrm{i}F_j^-}{r}\varphi_{jm}^{(+)} \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{III}-11)$$

حيث:

$$G_{lj} = \begin{cases} G_j^+ & , \quad j = l + \frac{1}{2} \\ G_j^- & \quad\;\; j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

و:

$$\varphi_{jm}^{l} = \begin{cases} \varphi_{jm}^+ & , \quad j = l + \frac{1}{2} \\ \varphi_{jm}^- & \quad\;\; j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

وأيضا:

$$F_{lj} = \begin{cases} F_j^+ & , \quad j = l + \frac{1}{2} \\ F_j^- & \quad\;\; j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه تكتب(III-11) على الشكل :

$$\Psi_{jm}^{l}=\begin{bmatrix} i\frac{G_{lj}}{r}\varphi_{jm}^{l} \\ \frac{F_{lj}}{r}\frac{\delta .r}{r}\varphi_{jm}^{l} \end{bmatrix}\ldots\ldots\ldots(III-12)$$

والآن لإيجاد القيم الذاتية للطاقة نحل المعادلتين التفاضلية التالية :

$$\left(E-m+\frac{z\alpha}{r}\right)G_{lj}(r)=-\frac{dF_{LJ}(r)}{dr}+\frac{k}{r}F_{lj}(r)\ \ldots\ldots\ldots(III-13)$$

وكذلك:

$$\left(E+m+\frac{z\alpha}{r}\right)F_{lj}(r)=\frac{dG_{LJ}(r)}{dr}+\frac{k}{r}G_{lj}(r)\ \ldots\ldots\ldots(III-14)$$

بجمع المعادلة (III-13)و(III-14)نحصل على :

$$\left(E+\frac{z\alpha}{r}\right)\left[G_{lj}(r)+F_{lj}(r)\right]-mG_{lj}(r)+mF_{lj}(r)$$

$$=\frac{d}{dr}\left[G_{LJ}(r)-F_{LJ}(r)\right]+\frac{k}{r}\left[F_{lj}(r)+G_{lj}(r)\right]$$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية فنحصل على الحلول في العبارة التالية:

$$E_n\simeq m\left[1+\left(\frac{z\alpha}{n-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\alpha^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\ \ldots\ldots\ldots(III-15)$$

حيث :

$n = 1,2,3 \ldots \ldots$:عدد كمي

العزم الزاوي:

$$0 < j < \mathrm{m}, 0 \leq \mathrm{l} \leq \mathrm{n} - 1$$

تسمى العبارة (III–15) بالطاقات الذاتية لمعادلة ديراك لذرة الهيدروجين وكذا هي العبارة نفسها بالنسبة للذرات الشبيهة بها .

ننشر العلاقة (III–15) فنحصل على :

$$\mathrm{E_n} \simeq \mathrm{m}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{z}^2\alpha^2}{\mathrm{n}^2}\left[1 + \frac{(\mathrm{z}\alpha)^2}{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{J} + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4\mathrm{n}}\right)\right] + 0((\mathrm{z}\alpha)^6)\right\}$$

من اجل :$n = 1$ و $j = \frac{1}{2}$فإنها توافق الحالة الابتدائية:

$$\mathrm{E_1} \simeq \mathrm{m}\sqrt{1 - \mathrm{z}^2\alpha^2} \simeq \mathrm{m} - \frac{1}{2}\mathrm{z}^2\alpha^2\mathrm{m} - \frac{1}{8}\mathrm{z}^4\alpha^4\mathrm{m} + \cdots$$

وبالتالي تعطى الدوال الذاتية بعد التعويض كالتالي :

لما سبين up:

$$\psi_{n=1,j=\frac{1}{2}}(r,\theta,\varphi) \uparrow$$

$$= \frac{(2\mathrm{mz}\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2\mathrm{mz}\alpha r)^{\gamma-1}e^{-\mathrm{mz}\alpha r}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i(1-\gamma)}{z\alpha}\cos\theta \\ \frac{i(1-\gamma)}{z\alpha}\sin\theta\, e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

لما سبين down :

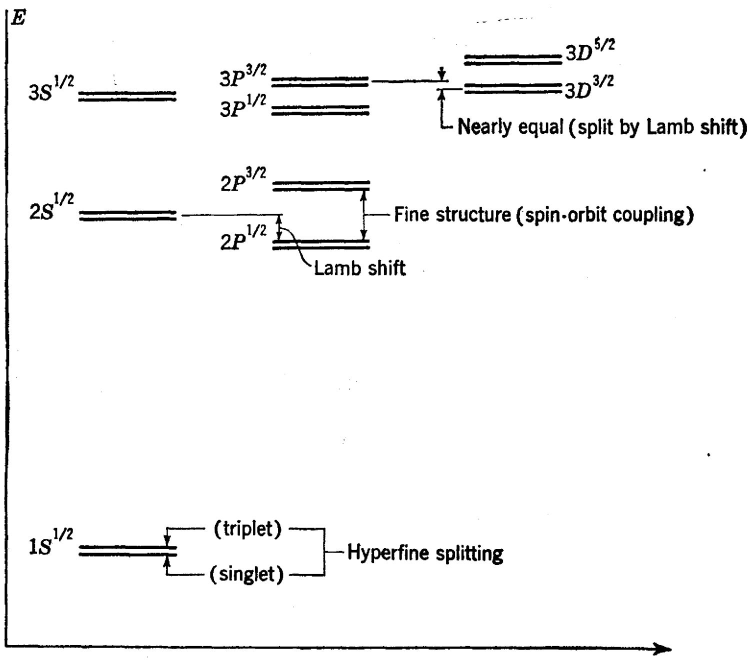
$$\psi_{n=1,j=\frac{1}{2}}(r,\theta,\varphi)\downarrow$$

$$=\frac{(2mz\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+2\gamma)}}(2mz\alpha r)^{\gamma-1}e^{-mz\alpha r}\begin{bmatrix}0\\1\\\frac{i(1-\gamma)}{z\alpha}\sin\theta\, e^{i\varphi}\\-\frac{i(1-\gamma)}{z\alpha}\cos\theta\end{bmatrix}$$

حيث:

$$\gamma=\sqrt{1-z^2\alpha^2}$$

نرفق هاته الحلول بالشكل التالي الذي يوضح فيه مستويات الطاقة :



الشكل-2-:مستويات الطاقة لذرة الهيدروجين لمعادلة ديراك.

3. المادة المضادة:

تحدثنا سابقا عن المادة المضادة التي أشار إليها ديراك من خلال معادلته ، فما هي إذن حقيقة هذه المادة وكيف تم الكشف عنها ؟

وفقا لنظرية الانفجار العظيم فإن هذا الانفجار يجب أن يولد كميات متساوية ومتعادلة من المادة والمادة المضادة مثل إنتاج البوزيترون مقابل كل إلكترون ، ومضاد كوارك مقابل كل كوارك .... الخ .لكن يبقى عدم الوضوح في التوازن ما بين المادة والمادة المضادة في الكون المرئي مشكل قائم في الفيزياء.

قام بول ديراك في عام 1928 بالتنبأ بوجود هذه المادة ، حيث وضح وجود حلول سالبة لمعادلته، فتنبأ بوجود جسيمات ذات خواص عكسية غير مشابهة للموجودات الفيزيائية التي كانت معروفة آنذاك وتبين أن هذه المادة ما هي إلا صورة معاكسة للمادة مشابهة لها في الحجم وتعاكسها في الشحنة ، وتوقع أنه بوجود طاقة كافية يمكن خلق بوزيترونات من العدم (حيث أنه العدم لا وجود له فيزيائيا و إيجاد من العدم بوزيترون يعني أنه يوجد في مكان ما لم يكن موجود فيه أبدا).

كانت تنبؤات بول ديراك صحيحة فعليا ففي عام 1933 نجح كارل أندرسون في عرض هيئة مضاد الإلكترون والذي دعاه بالبوزيترون و أظهرت هاته النتائج بأنه يمكن خلق المادة في المختبر بتجارب مضبوطة تدعى بالمسرعات الفائقة أو بمصادم الهادرونات حيث تمكننا أيضا من الاحتفاظ بها ضمن حجرات مغناطيسية.

ونضيف أيضا انه من خواص هاته المادة فانه عندما تلتقي المادة والمادة المضادة فإنهما تدمران بعضهما وتفنيان بشكل كامل منتجين توهجا شديدا من الضوء المكون من أشعة قاما عالية الطاقة.

- **عيوب معادلة ديراك:**

على الرغم من انه بسبب هاته المعادلة تم الكشف عن وجود المادة المضادة والتي تعتبر من أعظم الأشياء إلا انه لا يمكن لها بالتنبؤ بكيفية توليد هاته الجسيمات وتدميرها حيث تعتبر مفارقة غريبة للعالم الكمي كيف انه هاته النظرية توقعت ولادة أزواج المادة المضادة ولا يمكن آن تصف هذه العملية بشكل مناسب ، ولكن بظهور نظرية الحقول الكمية تم القضاء على هذا النقص حيث يمكن لها أن تصف كيفية تفاعلها وكيفية إنتاج الجسيمات الأولية وكيفية تدميرها.

خلاصة:

لقد ناقشنا في هذا الفصل معادلة ديراك بصفة عامة ،حيث تطرقنا إلى الشكل العام لهاته المعادلة و كيفية الحصول عليها ثم قمنا بحلها من أجل ذرة الهيدروجين وحصلنا على الطاقات والدوال الذاتية ، وكما ذكرنا أيضا الإكتشاف العظيم الذي حققته معادلة ديراك وهو وجود المادة المضادة في الكون .

وتطرقنا أيضا إلى النقائص والعيوب التي جعلت منها غير كافية والتي من أجلها أدخلنا نظرية الحقول الكمية فحلت هاته النقائص .ولكن رغم ها فإن معادلة ديراك تعتبر أعظم المعادلات التي توصل إليها العلم آنذاك.

خلاصة عامة

خلاصة عامة

تدرس ميكانيك الكم الجسيمات الذرية ودون الذرية بإستخدام معادلة شرودينغر، وهذا ما استخدمناه في فصلنا الأول من مذكرتنا هذه لدراسة ذرة الهيدروجين، وهذا من أجل الحصول على الدوال الذاتية والطاقات الذاتية.

لكن معادلة شرودينغر لا تصلح إلا على الالكترونات ولا تستطيع وصف حركة باقي الجسيمات الأخرى ،حيث أدخلت أيضا عامل تغيير الزمن ولكنها لم تصف أي زمن حيث أن الزمن يتغير بتغير السرعة (النسبية الخاصة) .

وكما أنها لا تصف حركة الإلكترون ولا تتوقع حركته في مجال مغناطيسي .

وكذلك هو الأمر بالنسبة لميكانيك الكم النسبي ونعني بالأمر معادلة كلين غوردن وهذا ما تطرقنا له في الفصل الثاني حيث تدرس هاته الأخيرة الجسيمات عديمة السبين فقط ولم تكن تصلح للجسيمات ذات النصف السبين ومن هنا قام بول ديراك بتعديل معادلة شرودينغر وذلك بربط ميكانيك الكم مع النسبية الخاصة حيث :

- أدخل عامل سرعة الضوء لأن الزمن يتغير بتغير السرعة حسب النسبية الخاصة .
- أدخل اللف المغزلي على المعادلة حيث يمكن لها أن تتوقع حركة إلكترون في مجال مغناطيسي.
- جعل المعادلة تنطبق على جميع الجسيمات .
- كما استخدم أيضا مبدأ الإستبعاد لبولي لشرح كيفية وجود الطاقات السالبة حيث ينص هذا المبدأ على أنه لا يمكن لفرميونين أن يكون لهما نفس الحالة الكمومية ، وهذا المبدأ ينطبق على الجسيمات ذات اللف المغزلي يساوي النصف وكما فسر أيضا كيفية تواجد الإلكترونات في الذرة وهي لها نفس الشحنة ولا تتنافر.

خلاصة عامة

كل هذا ناقشنها في الفصل الأخير وتطرقنا أيضا إلى معادلة ديراك في حقل كولومب أي نعني معادلة ديراك لذرة الهيدروجين و الذرات الشبيهة بها وهذا هو أهم عنصر في مذكرتنا هذه حيث رأينا الطاقات الناتجة عن إنفصال المستويات الطاقوية.

قائمة المراجع

المراجع الأجنبية:

1. V.B . BERESTETSKII,E.M. Lifshitz and L . P . Pitaevskii, "Quantum électrodynamics" volume 4 .

2. J.D .Bjorken , S . D . Drell, "Relativistic Quantum mechanics , Stanford university .

3. C . Cohen . Tannoudj , " Quantum mechanics", volume 1, volume 2

4. A. Messiah ," Quantum mechanics", volume2. North- Holland Book.

5. C. Aslangul," Mécanique quantique 2",de Boeck .

6. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz , L .P. Pitaevskii, "Relativistic Quantum théorie " ,Volume 4 part 1, pergamon press.

7. W. Greiner, " relativistic Quantum Mechanics" Third Edition, Springer.

8. D.S.F Crothers, "relativistic Heavy .particle Collision on theory " ,the queen's university of Belfast.

الملخص :

تمثل معادلة ديراك أساس ميكانيك الكم النسبي،حيث يمكن لها دراسة جسيمات ذات نصف السبين،على غرار معادلتي شرودينغر و كلين غوردن اللتان لا تختصان بهاته الخاصية.

وقد استخدمنا كل منها من أجل إيجاد الدوال الذاتية والطاقات الذاتية عند حلها، لكن معادلة ديراك أعطت لنا نتائج مبهرة حيث نرى انفصال مستويات الطاقة واضحا أفضل مما في معادلة شرودينغر و كما تم من خلالها إكتشاف الجسم المضاد .وفي ظل هذا إلا أن لها نقائص قضي عليها بظهور نظرية الحقول الكمية .

Summary

The Dirac equation represents the basis of relative quantum mechanics, where it can study particles of half-spin, similar to Schrodinger and Klein Gordon equations, which are not limited to its properties.

We used each of them to find self-functions and self-energies when they were solved, but the Dirac equation gave us impressive results. We see the separation of energy levels better than in the Schrodinger équation and the discovery of the antibody. With the emergence of quantitative field theory.