UNIVERSITE KASDI MERBAH
OUARGLA

Faculté des Mathématiques et des Sciences
de la Matière

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Modélisation et Analyse numérique

Par :Gherib Fatma Zohra

Thème

L'ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA POUTRE DE VON KÁRMÁN

Soutenu publiquement le : 18/06/2019

Devant le jury composé de :

Mr. MEFLAH Mabrouk	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Président
M. KALICHE Kaltoum	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Examinateur
M. OUCIF Dallel	M.A. Université KASDI Merbah - Ouargla	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédication

Je dédie ce travail à :

- Mes parents

- A mes frères et

mes sœurs, et toute la famille ***GHERIB***

- mes chers amis

- Á tout promotion de Modélisation et Analyse numérique

- Et a tous mes professeurs

- Finalement à tous ceux qui m'on aider de proche ou de loin

Remerciement

Premièrement nous remercions le dieu notre créateur. Je voudrais d'abord et avant tout remercier mon encadreur vertueuse ***M. OUCIF Dallel*** *pour tous leurs efforts en vue d'établir ce mémoire, elle a eu le rôle fondamental et essentiel et la grand mérite dans tout ce qui a été réalisé, comme cela avait toujours été, près de moi et me guider et corriger mes erreurs et me donner de précieux conseils et les conseils appropriés et les alertes considérés. Nous voulons également remercier :****Mr. MEFLAH Mabrouk*** *pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire remerciements vont également a :****M. KALICHE Kaltoum*** *honorer de leur présence dans ce jury. Nos remerciements s'adressent également à tous ce qui ont aidé et ont permis de faire aboutir ce travail.*

Notations et définitions

➤ $\mathbb{R}^n$: Espace euclidien de dimension n.

➤ Ω : Est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

➤ pp : Presque partout.

➤ $\| \,.\, \|$: La norme euclidienne.

➤ L^P :Espaces de lebesgue

➤ $\mathrm{W}^{m,p}$:Espace de Sobolev d'ordre m.

➤ L^∞ : l'espace des fonctions essentiellement bornées .

➤ L^2 :est un espaces de Hilbert .

➤ H^m : Espace de Hilbert séparable.

➤ $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$: les éléments de $\mathrm{C}_c(\Omega)$ à support compact dans Ω.

➤ $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} .... \partial x_N^{\alpha_N}}$: Dérivée partielle par rapport au multi-indice α.

➤ $\langle ., . \rangle$:le produit scalaire .

Table des matières

Introduction générale

Dans le domaine de l'ingénierie il existe plusieurs models de poutres, par exemple la poutre d'euler bernoulli, Timoshenko...etc qui sont en faîte des poutres linéaires. Maintenant avec l'existence de la pression axiale, on obtient ce quand appelle la poutre de von Kármán qui ont des poutres non linéaires. L'un des premiers travaux est celui de lagnese qui est un couplage de deux équations hyperboliques donné par : [6, 9]

$$\begin{cases} \rho A\eta_{tt}(x,t) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathrm{E}I\eta_{xx}(x,t)) - \dfrac{\partial}{\partial x}(P(x,t)\eta_x(x,t)) = 0, \\ \rho A\mu_{tt}(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x}P(x,t) = 0 \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Ce système est complété par des conditions aux limites et des conditions initiales, La pression axiale est donnée comme suit :

$$P(x,t) := \mathrm{E}I\left(\mu_x(x,t) + \frac{1}{2}\eta_x^2(x,t)\right), \quad t \geq 0, x \in (0,L),$$

Avec les coefficients :

- $\mu(x,t)$ le déplacement longitudinal d'un point générique.
- $\eta(x,t)$ représente le déplacement transversal d'un point générique.
- EI la rigidité de la poutre ou la rigidité à la flexion.
- ρA le poids par unité de longueur.
- E le module de Young

- A la surface en section transversale de la poutre .
- L est la longueur de la poutre.

Dans ce travail, on considère le système de von Kármán suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x + \gamma\theta_{tx} = 0 \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 w_x \right)_x + D_2 w_{xxxx} = 0 \\ \theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2\theta_t + \gamma u_{tx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{0.0.2}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1, \\ w(.,0) = w_0, w_t(.,0) = w_1, \\ \theta(.,0) = \theta_0, \theta_t(.,0) = \theta_1 \end{cases} \tag{0.0.3}$$

et les conditions aux limites de Dirichlet pour u, Neumann-Dirichlet pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0,.) = u(L,.) = w(0,.) = w(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ w_x(0,.) = w_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ \theta_x(0,.) = \theta_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{0.0.4}$$

Cette mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappelons les définitions de quelques espaces fonctionnels et les définitions et les notations de quelques inégalités intégrales qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail.

Dans le deuxiéme chapitre, nous étudions le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec deux dissipations de frictions.

Dans le troisième chapitre, nous démontrons la stabilité exponentielle de la poutre de von Kármán avec dissipation thermale et de friction.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions des espaces fonctionnels concernant les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et les espaces de lebesgue $L^{P}(\Omega)$ et certains résultats sur les inégalités dans ce même espace. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et les notations de quelques inégalités intégrales qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Quelques espaces fonctionnels

Nous présentons quelques définitions importantes, les espaces de lebesgue $L^{P}(\Omega)$ et les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de R^{n} muni de la mesure de lebesgue dx.

1.2.1 Espaces de lebesgue $L^{P}(\Omega)$

Définition 1.2.1 *Soit* $\mathrm{p} \in [1;1]$. *On définit l'espace* L^p *:*

$$L^p = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \textit{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}. \tag{1.2.1}$$

Pour $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *on note*

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.2.2 *On dit qu'une fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est essentiellement bornée s'il existe un réel* $C \geq 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *pp sur* Ω.
On note :

$$\sup_{x\in\Omega} ess\, |f(x)| = \inf(\{C \geq 0, |f(x)| \leq C \ pp \quad sur \ \Omega\}) \tag{1.2.2}$$

Définition 1.2.3 *On appelle espace* L^∞ *l'espace des fonctions essentiellement bornées sur* Ω *:*

$$\mathrm{L}^\infty = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \quad mesurable \quad et \ \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C pp \ sur \ \Omega\} \tag{1.2.3}$$

Pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. *On noté :*

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess\, |f(x)| \, . \tag{1.2.4}$$

Remarque 1.2.1 *On appelle l'espace* $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *est un espaces de Hilbert pour p=2 .*
En effet la norme $\| \, . \, \|$ *émane du produit scalaire :*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) g(x) dx \tag{1.2.5}$$

et ainsi on a

$$\| f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.6}$$

Théorème 1.2.2 *Pour tous* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *on a*

$$\mathrm{L}^q(\Omega) \subset \mathrm{L}^p(\Omega) \tag{1.2.7}$$

1.2.2 Easpes de sobolev $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.4 *Soit* $m \in N$ *,*$1 \leq p < \infty$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on le note* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *l'espace :*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega) : D^\alpha f \in \mathrm{L}^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in N^N . 0 \leq |\alpha| \leq m \right\} . \tag{1.2.8}$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} .... \partial x_N^{\alpha_N}}$ *est la dérévée partielle de* f *d'ordre* α *au sens de distribution .*

Théorème 1.2.3 *l'espace* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme :*

- $\| f \|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^{\alpha} f \|^{p}_{\mathrm{L}^{p}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$ *si* $1 \leq p \leq \infty$ *est un espace de Banach.*
- $\| f \|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\max_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^{\alpha} f \|_{\mathrm{L}^{\infty}(\Omega)}\right)$ *si* $p = \infty$
- $\| f \|_{\mathrm{W}^{m,2}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^{\alpha} f \|^{2}_{\mathrm{L}^{2}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$ *pour* $p = 2$ *est un espace de Hilbert (Séparable) que l'on noté* H^{m}.

Théorème 1.2.4 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et soit* $m \in \mathbb{N}$. *L'espace* $\mathrm{H}^m(\Omega)$ *muni du produit scalaire (1.2.9) est un espace de Hilbert séparable.*

On introduit sur $\mathrm{H}^m(\Omega)$ *le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_m = \sum_{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u * D^{\alpha} v dx. \tag{1.2.9}$$

et la norme associée à ce produit scalarie :

$$\| u \|_{\mathrm{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} \| D^{\alpha} u \|_2^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.10}$$

Dans le cas $m = 1$, *en utilisant la densité de* $\mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)$ *dans* $\mathrm{H}^1(\Omega)$, *on définit l'espace de Sobolev :*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \left\{ f \in \mathrm{H}^1(\Omega) \ tel \ \ que \ f = 0 \ sur \ \partial\Omega \right\} \tag{1.2.11}$$

1.3 Rappel de quelques inegalités

On dit que $p, q \in [1, 1]$ sont des exposants conjugués si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dans toute la suite, on désigne par q l'exposant conjugué de p.

1.3.1 Inégalité de Young

Lemme 1.3.1 *Soient* $a, b \geq 0$ *et* $p, q \in]1, \infty[$. *Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.3.1}$$

En particulier pour $p = q = 2$ on a :

$$ab \leq \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 4} b^2 \forall \varepsilon > 0 \tag{1.3.2}$$

Preuve. Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est facile, donc on peut supposer que $ab > 0$ la fonction expossentielle exp est convexe. On a donc :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1] \exp(tx + (1-t)y) \leq t \exp(x) + (1-t)\exp(y) \tag{1.3.3}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln(ab)) \\ &= \exp(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

■

1.3.2 Inégalité de Hölder

Lemme 1.3.2 *Soient $p, q \in [1, \infty]$, $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$et $g \in \mathrm{L}^q(\Omega)$. Alors $f.g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et*

$$\| f.g \|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leq \| f \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \| g \|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \tag{1.3.4}$$

Preuve. L'inégalité de Young (1.3.1) donne :

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q} \forall x \in \Omega \tag{1.3.5}$$

En intégrant

$$\int_\Omega |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |g(x)|^q\,dx \leq \infty \tag{1.3.6}$$

donc $f.g \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Pour montrer (1.3.4) on distingue 3 cas :

cas 1 : Si $p = 1$ et $q = \infty$

$$\begin{aligned}\| f.g \|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f|\,|g|\,dx \\ &\leq \int_\Omega |f| \| g \|_\infty \\ &= \| g \|_\infty \int_\Omega |f|\,dx \\ &= \| f \|_{L^1(\Omega)} \| g \|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

cas 2 : Si $p = \infty$ est similaire .

cas 3 : p , $q \in [1, \infty]$:

(i) Si $\| f \|_p = 0$ ou $\| g \|_q = 0$ alors $f = 0$ pp sur Ω ou $g = 0$ pp sur Ω, on en déduit $f.g = 0$ pp sur Ω donc $\| f.g \|_1 = 0$ et (1.3.4)est varaie .

(ii) Si$\| f \|_p = 1$ et $\| g \|_q = 1$, avec (1.3.6) on a :

$$\| f.g \|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, g(x)\, ||\, dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \| f \|_p \| g \|_q$$

(iii) On suppose $\| f \|_p > 0$ et $\| g \|_q > 0$, $f_1 = \dfrac{f}{\| f \|_p}$ et $g_1 = \dfrac{g}{\| g \|_q}$ de sort que $\| f \|_p$ et $\| g \|_q$ le cas(ii), donne

$$\begin{aligned}\| f.g \|_1 &= \| f \|_p \| g \| \frac{f}{\| f \|_p} . \frac{g}{\| g \|_q} \|_1 \\ &\leq \| f \|_p \| g \|_q .1 \\ &\leq \| f \|_p \| g \|_q .\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.1 *Lorsque $p = 2$, $q = 2$ on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cas particulier de l'inégalité de Hölder) :*

$$\int_\Omega |f(x).g(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.3.7}$$

1.3.3 Inégalité de Poincaré

Lemme 1.3.3 *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, Il existe une constante $C > 0$ vérifiant :*

$$\forall f \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : \| f \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \tag{1.3.8}$$

où $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

Notons qu'à partir de cette inégalité, on montre que $\| \nabla f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ définit une norme sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $\mathrm{H}^1(\Omega)$, et par conséquent $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(x) \nabla g(x) dx \tag{1.3.9}$$

où le $\langle , \rangle$ signifie le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Aussi, on donne l'inégalité de Poincaré habituelle dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à partir du lemme suivant.

Lemme 1.3.4 *Soit $f \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive vérifiant :*

$$\| f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \tag{1.3.10}$$

Preuve. On a $\Omega \in [a, b]$,

pour $x \in [a, b]$, on a :

$$f(x) = \int_a^x f'(y) dy.$$

alors

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(y) dy \right)^2 \\ &\leq \int_a^x (f'(y))^2 dy \int_a^x dy \end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation, on trouve :

$$\int_a^b f^2(x) \leq \int_a^b \left[\int_a^x (f'(y))^2 dy \times (x-a) \right] dx \leq \| f' \|_{L^2(a,b)}^2 \times \int_a^b (x-b) dx$$

donc

$$\| f \|_{L^2(a,b)}^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \| f' \|_{L^2(a,b)}^2$$
$$\| f \|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \| f' \|_{L^2(a,b)}$$

D'où

$$\| f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leq C \| \nabla f \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

■

1.4 Inégalitié Intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet, plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants.

Lemme 1.4.1 *[12]*

Soient $\mathrm{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante et,* $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction strictement croissante de classe* $C^1(\mathbb{R}_+)$ *telle que :*$\phi(0) = 0$
et $\lim_{t\to+\infty} \phi(0) = +\infty$ *Supposons que :* $\exists p \geq 0$ *et* $d > 0$ *tels que :*

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t)\mathrm{E}^{p+1} dt \leq \frac{1}{d}\mathrm{E}^p(0)\mathrm{E}(s) \qquad \forall s > 0 \tag{1.4.1}$$

alors

$$\begin{cases} \mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0)e^{1-d\phi(t)} & \forall t > 0 si \quad p = 0 \\ \mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0)\left(\dfrac{1+p}{1+pd\phi(t)}\right)^{\frac{1}{p}} & \forall t > 0 si \quad p > 0 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Dans le cas particulier où $\phi(t) = t$ *nous déduisons les inégalités suivantes :*

- $\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0)e^{1-dt} \qquad \forall t > 0 si \qquad p = 0$
- $\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0)\left(\dfrac{1+p}{1+pdt}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall t > 0 si \qquad p > 0$

Lemme 1.4.2 *[12]*

Soit $\mathrm{E} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue (décroissante) vérifiant :*

$$\int_s^{+\infty} \phi(\mathrm{E}(t))dt \leq \frac{1}{d}\mathrm{E}(s) \qquad \forall s > 0 \tag{1.4.3}$$

où d *est un réel strictement positif et* $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant* $\phi(0) = 0$*. Alors il existe trois réels strictement positifs* t_0*,* c_0 *et* c_1 *tels que :*

$$\mathrm{E}(t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\right) \qquad \forall t > t_0 \tag{1.4.4}$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est définie par :*

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\phi(t)dt}, \qquad \forall s > 0 \tag{1.4.5}$$

Chapitre 2

Stabilité d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec deux dissipations de frictions

2.1 introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle mathématique du comportement dynamique d'une poutre non linéaire dite poutre d'Euler-Bernoulli gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} + c_1 u_t - k\left[P(x,t)\right]_x = 0 \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0 \\ \rho_2 w_{tt} + c_1 w_t - k\left[P(x,t) w_x\right]_x + \ \sigma w_{xxxx} = 0 \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec

$$P(x,t) = \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right], \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet pour u et Dirichlet-Neumann pour w :

$$\begin{cases} u(0,.) = u(L,.) = 0 \\ w(0,.) = w(L,.) = 0 \\ w_x(0,.) = w_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

et des conditions initiales pour u et w :

$$\begin{cases} u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1, & x \in \Omega. \\ w(.,0) = w_0, w_t(.,0) = w_1, & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Où t désignant la variable positive du temps positive et $\Omega = (0, L)$, $u(x,t)$ le déplacement longitudinal et $w(x,t)$ le déplacement transversal et P(x,t) la tension axiale appliquée sur la poutre, K le module de Young, σ le moment d'inertie de la poutre, ρ_1 et ρ_2 sont deux constantes positives.

Le but de ce travail est d'obtenir une estimation de l'énergie pour la poutre non linéaire en utilisant la méthode des multiplicateurs.

2.2 Calcul d'énergie

Théorème 2.2.1 *[1] Soit* $((u_0, u_1), (w_0, w_1)) \in V$ *où*

$$V = (\mathrm{H}_0^1(0, L) \times L^2(0, L)) \times (\mathrm{H}_0^2(0, L) \times L^2(0, L))$$

avec

$$\mathrm{H}_0^2(0, L) = \left\{ v \in \mathrm{H}^2(0, L) : v(0) = v(L) = v_x(0) = v_x(L) = 0 \right\}.$$

Alors le système ((2.1.1) − (2.1.3)) *admet une unique solution globale au sens faible (variationnelle) avec*

$$(u, u_t, w, w_t) \in C([0, \infty); V).$$

L'énergie associée au système ((2.1.1) − (2.1.3)) *est définie par :*

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \{\rho_1 u_t^2 + \rho_2 w_t^2 + \sigma w_{xx}^2 + k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)^2 \} dx = \mathrm{E}(t, u, w) \tag{2.2.1}$$

Preuve. On multiplie la première équation par u_t et la deuxième par w_t respectivement du système ((2.1.1) − (2.1.3)), on intégre sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$\begin{cases} \int_\Omega \rho_1 u_{tt} u_t dx + \int_\Omega c_1 u_t^2 dx - \int_\Omega k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x u_t dx = 0 \\ \int_\Omega \rho_2 w_{tt} w_t dx + \int_\Omega c_1 w_t^2 dx - \int_\Omega k \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x w_t dx + \int_\Omega \sigma w_{xxxx} w_t dx = 0 \end{cases}$$

on a

$$\int_0^L \rho_1 u_{tt} u_t = \rho_1 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \rho_1 {u_t}^2 dx\right\} \tag{2.2.2}$$

$$\int_0^L \rho_2 w_{tt} w_t = \rho_2 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \rho_2 {w_t}^2 dx\right\} \tag{2.2.3}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_0^L k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x u_t dx = \int_0^L k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) u_{tx} dx \tag{2.2.4}$$

$$-\int_0^L k\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x w_t dx = \int_0^L k\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] w_{tx} dx \tag{2.2.5}$$

$$\int_0^L \sigma w_{xxxx} w_t dx = -\int_0^L \sigma w_{xxx} w_{tx} dx = \int_0^L \sigma w_{xx} w_{txx} dx \tag{2.2.6}$$

d'aprés (2.2.4) nous avons :

$$\int_0^L k u_x u_{tx} = k\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L k u_x^2 dx\right\} \tag{2.2.7}$$

$$\int_0^L k\frac{1}{2}(w_x)^2 u_{tx} dx = k\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_x)^2 u_x dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L k(w_x)^2 u_x dx\right\} \tag{2.2.8}$$

d'aprés (2.2.5) nous avons :

$$\int_0^L k u_x w_x w_{tx} = k\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_x (w_x)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L k u_x (w_x)^2 dx\right\} \tag{2.2.9}$$

$$\int_0^L k\frac{1}{2}(w_x)^2 w_x w_{tx} dx = k\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_x)^3 w_{tx} dx = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L k(w_x)^4 dx\right\} \tag{2.2.10}$$

d'aprés (2.2.6) nous avons :

$$\int_0^L \sigma w_{xx} w_{txx} = \sigma\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_{xx}^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \sigma w_{xx}^2 dx\right\} \tag{2.2.11}$$

La somme des équations (2.2.2), (2.2.3), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10) et (2.2.11) avec $c_1 \int_0^L u_t^2 dx$ et $c_1 \int_0^L w_t^2 dx$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 {u_t}^2 + \rho_2 {w_t}^2 + \sigma w_{xx}^2 + k u_x^2 + \frac{1}{4}(w_x)^4 + k u_x (w_x)^2 dx\right] + c_1\int_0^L u_t^2 dx + c_1\int_0^L w_t^2 dx = 0$$

donne

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 {u_t}^2 + \rho_2 {w_t}^2 + \sigma w_{xx}^2 + k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx\right] = -c_1\int_0^L u_t^2 dx - c_1\int_0^L w_t^2 dx$$

d'où

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_1 {u_t}^2 + \rho_2 {w_t}^2 + \sigma w_{xx}^2 + k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx$$

Par ailleurs, la dérivée de l'énergie sera donnée par :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) \leq -c_1 \int_0^L u_t^2 dx - c_1 \int_0^L w_t^2 dx \qquad (2.2.12)$$

■

Remarque 2.2.2 *D'aprés (2.2.12), il est clair que l'énergie fonctionnelle diminue, c'est-à-dire que le système est dissipatif. Nous devons donc construire une nouvelle fonctionnelle équivalente à la fonctionnelle* E*, appelée fonctionnelle de Lyapunov, notée* F *: il existe deux constantes positives m, M telles que :*

$$m\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{F}(t) \leq M\mathrm{E}(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

et on a l'inégalité suivante

$$\mathrm{F}'(t) \leq -C\mathrm{E}(t) \qquad \forall t \geq t_0$$

avec $C > 0$ et t_0 un instant fixe.

2.3 Résultats principaux

Lemme 2.3.1 *Soit (u, w) la solution du système ((2.1.1) − (2.1.3)). Alors, la fonctionnelle* I_1 *définie par :*

$$\mathrm{I}_1(t) = \int_\Omega (\rho_1 u_t u + \frac{\rho_2}{2} w_t w + \frac{c_1}{2} u^2 + \frac{c_1}{4} w^2) dx \qquad t > 0 \qquad (2.3.1)$$

la dérivée de cette fonction nous fournira les deux termes négatifs :

$$-\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx$$

et

$$-\int_\Omega w_{xx}^2 dx$$

satisfait, l'estimation

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq -k\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \int_\Omega (\rho_1 u_t^2 + \frac{\rho_2}{2} w_t^2) dx \qquad (2.3.2)$$

Preuve. On multiplie la première équation par u et la deuxième équation par $\frac{w}{2}$ du système ((2.1.1) − (2.1.3)) et on intégre sur $\Omega = [0, L]$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \left[\rho_1 u_{tt} dx + c_1 u_t dx - k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x \right] u dx = 0 \tag{2.3.3}$$

$$\int_\Omega \rho_1 u_{tt} u dx + \int_\Omega c_1 u_t u dx - \int_\Omega k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x u dx = 0$$

on a

$$\int_\Omega \rho_1 u_{tt} u dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_1 u_t u dx - \int_\Omega \rho_1 u_t^2 dx \tag{2.3.4}$$

$$\int_\Omega c_1 u_t u = c_1 \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u^2 dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{c_1}{2} u^2 dx \tag{2.3.5}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$-\int_\Omega k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x u dx = \int_\Omega k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) u_x dx \tag{2.3.6}$$

Insérant (2.3.4), (2.3.5) et (2.3.6) dans (2.3.3), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_1 u_t u dx - \int_\Omega \rho_1 u_t^2 dx + \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{c_1}{2} u^2 dx + \int_\Omega k \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) u_x dx \tag{2.3.7}$$

de plus

$$\int_\Omega \left[\rho_2 w_{tt} dx + c_1 w_t dx - k \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x dx + \sigma w_{xxxx} \right] \frac{w}{2} dx = 0 \tag{2.3.8}$$

$$\int_\Omega \rho_2 w_{tt} \frac{w}{2} dx + \int_\Omega c_1 w_t \frac{w}{2} dx - \int_\Omega k \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x \frac{w}{2} dx + \int_\Omega \sigma w_{xxxx} \frac{w}{2} dx = 0$$

on a

$$\int_\Omega \rho_2 w_{tt} \frac{w}{2} dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_2 w_t \frac{w}{2} dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_2 w_t^2 dx \tag{2.3.9}$$

$$\int_\Omega c_1 w_t \frac{w}{2} = c_1 \int_\Omega \frac{1}{4} \frac{d}{dt} w^2 dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega \frac{c_1}{4} w^2 dx \tag{2.3.10}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$-\int_\Omega k \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x \frac{w}{2} dx = \int_\Omega k \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right] \frac{w_x}{2} dx \tag{2.3.11}$$

$$\int_\Omega \sigma w_{xxxx} \frac{w}{2} dx = -\int_\Omega \sigma w_{xxx} \frac{w_x}{2} dx = \int_\Omega \sigma w_{xx} \frac{w_{xx}}{2} = \frac{\sigma}{2} \int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{2.3.12}$$

Insérant (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) et (2.3.12) dans (2.3.8), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_2 w_t \frac{w}{2} dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_2 w_t^2 dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{c_1}{4} w^2 dx + \int_\Omega k\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]\frac{w_x}{2} dx + \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{2.3.13}$$

La somme des équations (2.3.7) et (2.3.13), nous donne :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega (\rho_1 u_t u + \frac{c_1}{2}u^2 + \rho_2 w_t \frac{w}{2} + \frac{c_1}{4}w^2) dx \\ &= \int_\Omega \rho_1 u_t^2 dx - \int_\Omega k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) u_x dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_2 w_t^2 dx \\ &- \int_\Omega k\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]\frac{w_x}{2} dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx = \frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) &= \int_\Omega \rho_1 u_t^2 dx - \int_\Omega k\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) u_x dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_2 w_t^2 dx \\ &- \int_\Omega k\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]\frac{w_x}{2} dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ &= -k\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \int_\Omega (\rho_1 u_t^2 + \frac{\rho_2}{2}w_t^2) dx \end{aligned}$$

On obtient l'estimation

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq -k\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \int_\Omega (\rho_1 u_t^2 + \frac{\rho_2}{2}w_t^2) dx \tag{2.3.14}$$

D'où le résultat. ∎

Théorème 2.3.1 *Soit $((u_0, u_1), (w_0, w_1)) \in \mathrm{V}$, il existe deux constantes positives α et β telles que l'énergie de la solution de système ((2.1.1) − (2.1.3)) satisfait :*

$$\mathrm{E}(t) \leq \alpha \mathrm{E}(0)\exp^{-\beta t} \qquad \forall t > 0$$

Preuve. On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathrm{F}(t) = N\mathrm{E} + \mathrm{I}_1 \qquad \forall N > 0 \tag{2.3.15}$$

La dérivée de $\mathrm{F}(t)$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{F}(t) &= \frac{d}{dt}\left(N\mathrm{E}(t) + \mathrm{I}_1(t)\right) \\ &\leq N\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

on a

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq -k\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \int_\Omega (\rho_1 u_t^2 + \frac{\rho_2}{2} w_t^2) dx \tag{2.3.17}$$

et

$$N\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) \leq -c_1 N\int_\Omega u_t^2 dx - c_1 N\int_\Omega w_t^2 dx \tag{2.3.18}$$

Insérant (2.3.17) et (2.3.18) dans (2.3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{F}(t) &\leq -\left[Nc_1 - \frac{\rho_2}{2}\right]\int_\Omega w_t^2 dx - [Nc_1 - \rho_1]\int_\Omega u_t^2 - k\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{\sigma}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\
&\leq -\left[Nc_1 - \frac{\rho_2}{2} + Nc_1 - \rho_1 + k + \frac{\sigma}{2}\right]\int_\Omega \left(w_t^2 + u_t^2 + \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + w_{xx}^2\right) dx \\
&\leq -\eta\int_\Omega \left(w_t^2 + u_t^2 + w_{xx}^2 + \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2\right) dx \\
&\leq -C\mathrm{E}(t)
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Pour certaines positives constantes η et C : Aussi, nous pouvons choisir N encore assez grand tel que :

$$m\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{F}(t) \leq M\mathrm{E}(t) \tag{2.3.20}$$

avec m et M deux constantes positives. En combinant les relations (2.3.19) et (2.3.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}'(t) \leq -C\mathrm{E}(t) \\
&m\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{F}(t) \\
&\mathrm{F}'(t) \leq -C\mathrm{E}(t) \leq \frac{1}{m}\mathrm{F}(t) \\
&\mathrm{F}'(t) \leq -\frac{C}{m}\mathrm{F}(t) \\
&\mathrm{F}'(t) \leq -\beta\mathrm{F}(t)
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

où $\beta = \dfrac{C}{m}$. On utilisant une intégration simple, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}'(t)}{\mathrm{F}(t)} &\leq -\beta \\
\int_\Omega \frac{\mathrm{F}'(t)}{\mathrm{F}(t)} dx &\leq \int_\Omega -\beta dx \\
\ln|\mathrm{F}(t)| &\leq -\beta t + C \\
\exp^{\ln|\mathrm{F}(t)|} &\leq \exp^{-\beta t + C} \\
\mathrm{F}(t) &\leq \exp^{-\beta t} \lambda
\end{aligned}$$

avec $\lambda = \exp^C$, on utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(0) &\leq \exp^0 \lambda \\
\mathrm{F}(0) &\leq \lambda
\end{aligned}$$

D'aprés l'equivalence entre $F(t)$ et $E(t)$, nous obtenons :

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0) \exp^{-\beta t} \tag{2.3.22}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

Stabilité exponentielle de la poutre de von Kármán avec dissipation thermale et de friction

3.1 introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle von Kármán en dissipation thermale et de frictionnelle gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right]_x + \gamma\theta_{tx} = 0 \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0 \\ \theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2\theta_t + \gamma u_{tx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet pour u, Neumann-Dirichlet pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0,.) = u(L,.) = w(0,.) = w(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ w_x(0,.) = w_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ \theta_x(0,.) = \theta_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1, \\ w(.,0) = w_0, w_t(.,0) = w_1, \\ \theta(.,0) = \theta_0, \theta_t(.,0) = \theta_1 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Où t désignant la variable du temps et $\Omega = [0, L]$, K_1 , K_2,D_1, D_2 ,l et γ sont constantes positives.

3.2 Calcul d'énergie

Théorème 3.2.1 *[8] Soit* $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in V$ *où*

$$V = (\mathrm{H}_0^1(0, L) \times L^2(0, L)) \times (\mathrm{H}_0^2(0, L) \times L^2(0, L)) \times (\mathrm{H}^1(0, L) \times L^2(0, L))$$

Alors, la solution globale unique est satisfaite

$$(u, u_t, w, w_t, \theta, \theta_t) \in C([0, \infty[; V).$$

L'énergie associée au système ((3.1.1) − (3.1.3)) *est définie par :*

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \{u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + D_2 w_{xx}^2 + l\theta_x^2 + D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 \}dx = \mathrm{E}(t, u, w, \theta) \tag{3.2.1}$$

Preuve. On multiplie la première équation par u_t du système ((3.1.1) − (3.1.3)), on intégre sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[u_{tt} - D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x + \gamma\theta_{tx}\right] u_t dx = \\ &\int_\Omega u_{tt} u_t dx - \int_\Omega D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x u_t dx + \int_\Omega \gamma\theta_{tx} u_t dx \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

où

$$\int_0^L u_{tt} u_t = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_t^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L {u_t}^2 dx \right\} \tag{3.2.3}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_0^L D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x u_t dx = \int_0^L D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) u_{tx} dx \tag{3.2.4}$$

De plus (3.2.4) devient :

$$\int_0^L D_1 u_x u_{tx} = D_1 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L D_1 u_x^2 dx\right\} \tag{3.2.5}$$

et

$$\int_0^L D_1 \frac{1}{2}(w_x)^2 u_{tx} dx = D_1 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_x)^2 u_x dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L D_1 (w_x)^2 u_x dx\right\} \tag{3.2.6}$$

Insérant (3.2.3), (3.2.5) et (3.2.6) dans (3.2.2), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L {u_t}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L D_1 u_x^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L D_1 (w_x)^2 u_x dx + \int_\Omega \gamma \theta_{tx} u_t dx \tag{3.2.7}$$

On multiplie la deuxième équation par w_t du système ((3.1.1) $-$ (3.1.3)), on intégre sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x + D_2 w_{xxxx}\right] w_t dx = \\ &\int_\Omega w_{tt} w_t dx + \int_\Omega K_1 w_t^2 dx - \int_\Omega D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x w_t dx + \int_\Omega D_2 w_{xxxx} w_t dx \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

où

$$\int_0^L w_{tt} w_t = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L {w_t}^2 dx\right\} \tag{3.2.9}$$

d'aprés l'utilisation de l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_0^L D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x w_t dx = \int_0^L D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] w_{tx} dx \tag{3.2.10}$$

$$\int_0^L D_2 w_{xxxx} w_t dx = -\int_0^L D_2 w_{xxx} w_{tx} dx = \int_0^L D_2 w_{xx} w_{txx} dx \tag{3.2.11}$$

De plus (3.2.10) devient :

$$\int_0^L D_1 u_x w_x w_{tx} = D_1 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_x (w_x)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L D_1 u_x (w_x)^2 dx\right\} \tag{3.2.12}$$

$$\int_0^L D_1 \frac{1}{2}(w_x)^2 w_x w_{tx} dx = D_1 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_x)^3 w_{tx} dx = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L D_1 (w_x)^4 dx\right\} \tag{3.2.13}$$

et (3.2.11) devient :

$$\int_0^L D_2 w_{xx} w_{txx} = D_2 \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt} w_{xx}^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L D_2 w_{xx}^2 dx\right\} \tag{3.2.14}$$

Insérant (3.2.9), (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.14) dans (3.2.8), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L {w_t}^2dx+\int_\Omega K_1w_t^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L D_1u_x(w_x)^2dx+\frac{1}{8}\frac{d}{dt}\int_0^L D_1(w_x)^4dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L D_2w_{xx}^2dx \tag{3.2.15}$$

On multiplie la troisième équation par θ_t du système ((3.1.1) $-$ (3.1.3)), on intégre sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on trouve :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [\theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2\theta_t + \gamma u_{tx}]\,\theta_t dx =\\ &\int_\Omega \theta_{tt}\theta_t dx - \int_\Omega l\theta_{xx}\theta_t dx + \int_\Omega K_2\theta_t^2 dx + \int_\Omega \gamma u_{tx}\theta_t dx\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

où

$$\int_0^L \theta_{tt}\theta_t = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\theta_t^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L {\theta_t}^2 dx\right\} \tag{3.2.17}$$

d'aprés l'utilisation de l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_\Omega l\theta_{xx}\theta_t dx = \int_\Omega l\theta_x\theta_{tx} dx \tag{3.2.18}$$

De plus (3.2.18) devient :

$$\int_0^L l\theta_x\theta_{tx} = l\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\theta_x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L l{\theta_x}^2 dx\right\} \tag{3.2.19}$$

Insérant (3.2.17) et (3.2.19) dans (3.2.16), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega {\theta_t}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega l{\theta_x}^2 dx + \int_\Omega K_2\theta_t^2 dx + \int_\Omega \gamma u_{tx}\theta_t dx \tag{3.2.20}$$

La somme des équations (3.2.7), (3.2.15) et (3.2.20), nous donne :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega {u_t}^2 + {w_t}^2 + {\theta_t}^2 + D_2w_{xx}^2 + D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + l{\theta_x}^2 dx\right] + \int_\Omega K_1w_t^2 + \int_\Omega K_2\theta_t^2 dx = 0$$

sachant que :$\int_\Omega \gamma\theta_{tx}u_t dx + \int_\Omega \gamma u_{tx}\theta_t dx = 0$ d'où

$$\mathrm{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + D_2w_{xx}^2 + l\theta_x^2 + D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2\}dx$$

La dérivée de l'énergie sera donnée par :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) = -K_1\int_\Omega w_t^2 - K_2\int_\Omega \theta_t^2 dx \tag{3.2.21}$$

■

Remarque 3.2.2 *D'après l'équation (3.2.21), il est clair que le système est dissipatif, car* $\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) < 0$.

3.3 Décroissance exponentielle du système

Lemme 3.3.1 *Soit (u, w, θ) la solution du système ((3.1.1) − (3.1.3)). Alors, la fonctionnelle I_1 définie par :*

$$\mathrm{I}_1(t) = \int_\Omega (u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{K_1}{4} w^2) dx \qquad t \geq 0 \tag{3.3.1}$$

la dérivée de cette fonction nous fournira les deux termes négatifs :

$$-\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)^2 dx$$

et

$$-\int_\Omega w_{xx}^2 dx$$

satisfait, pour $\varepsilon_1 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq -D_1 \int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{D_2}{2} \int_\Omega w_{xx}^2 dx + \\ \int_\Omega (u_t^2 + \frac{1}{2} w_t^2) dx + \varepsilon_1 \int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_\Omega \theta_t^2 dx. \qquad \forall t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Preuve. On multiplie la première équation par u et la deuxième équation par $\frac{w}{2}$ du système ((3.1.1) − (3.1.3)) et on intégre sur $\Omega = [0, L]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[u_{tt} - D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x + \gamma \theta_{tx} \right] u dx = \\ \int_\Omega u_{tt} u dx - \int_\Omega D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x u dx + \int_\Omega \gamma \theta_{tx} u dx \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

où

$$\int_\Omega u_{tt} u dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega u_t^2 dx \tag{3.3.4}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_\Omega D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right)_x u dx = \int_\Omega D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 \right) u_x dx \tag{3.3.5}$$

$$\int_\Omega \gamma \theta_{tx} u dx = -\int_\Omega \gamma \theta_t u_x dx \tag{3.3.6}$$

Insérant (3.3.4), (3.3.5) et (3.3.6) dans (3.3.3), on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)u_x dx - \gamma\int_\Omega \theta_t u_x dx \tag{3.3.7}$$

de plus

$$\begin{gathered}\int_\Omega\left[w_{tt} + K_1 w_t - D_1\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]_x + D_2 w_{xxxx}\right]\frac{w}{2}dx = \\ \int_\Omega w_{tt}\frac{w}{2}dx + \int_\Omega K_1 w_t\frac{w}{2}dx - \int_\Omega D_1\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]_x\frac{w}{2}dx + \int_\Omega D_2 w_{xxxx}\frac{w}{2}dx\end{gathered} \tag{3.3.8}$$

tel que :

$$\int_\Omega w_{tt}\frac{w}{2}dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t\frac{w}{2}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx \tag{3.3.9}$$

$$\int_\Omega K_1 w_t\frac{w}{2} = K_1\int_\Omega \frac{1}{4}\frac{d}{dt}w^2 dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{K_1}{4}w^2 dx \tag{3.3.10}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-\int_\Omega D_1\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]_x\frac{w}{2}dx = \int_\Omega D_1\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]\frac{w_x}{2}dx \tag{3.3.11}$$

$$\int_\Omega D_2 w_{xxxx}\frac{w}{2}dx = -\int_\Omega D_2 w_{xxx}\frac{w_x}{2}dx = +\int_\Omega D_2 w_{xx}\frac{w_{xx}}{2}dx = \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{3.3.12}$$

Insérant (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11) et (3.3.12) dans (3.3.8), on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega\frac{K_1}{4}w^2 dx + \int_\Omega D_1\left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]\frac{w_x}{2}dx + \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{3.3.13}$$

En sommant (3.3.7) et (3.3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega(u_t u + \frac{1}{2}w_t w + \frac{K_1}{4}w^2)dx = \\ &= \int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx - \int_\Omega D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)\frac{w_x}{2}dx \\ &- \int_\Omega D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)u_x + \gamma\int_\Omega\theta_t u_x dx + \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ &= \int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx - \int_\Omega D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \gamma\int_\Omega\theta_t u_x\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) = \int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx - \int_\Omega D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + \\ \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \gamma\int_\Omega \theta_t u_x dx\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

On utilise l'inégalité de Young pour $\varepsilon_1 > 0$:

$$\gamma\int_\Omega \theta_t u_x dx \leq \varepsilon_1\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \theta_t^2 dx$$

On obtient l'estimation :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq -D_1\int_\Omega\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - \frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \\ \int_\Omega (u_t^2 + \frac{1}{2}w_t^2)dx + \varepsilon_1\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega \theta_t^2 dx. \qquad \forall t \geq 0\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.3.2 *Soit (u, w, θ) la solution du système ((3.1.1) − (3.1.3)). Alors, la fonctionnelle I_2 définie par :*

$$\mathrm{I}_2(t) = \int_\Omega\left(\int_0^x \theta_t(t,y)dy\right)u_t dx + l\int_\Omega \theta_x u dx \qquad t > 0 \tag{3.3.16}$$

satisfait, pour $\varepsilon_2 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) \leq -\frac{\gamma}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx + C_1(\varepsilon_2)\int_\Omega \theta_t^2 dx + \\ \varepsilon_2 D_1^2\int_\Omega\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \varepsilon_2\left[D_1 u_x^2(L) + \theta_t^2(L)\right]\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

où

$$C_1(\varepsilon_2) = \frac{1}{4\varepsilon_2} + \gamma + \frac{l^2}{4\varepsilon_2} + \frac{D_1}{4\varepsilon_2} + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + \frac{K_1^2}{2\gamma}L^2.$$

Preuve. On a

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega\left(\int_0^x \theta_t(t,y)dy\right)u_t dx + l\int_\Omega \theta_x u dx\right)$$

alors

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) = \int_\Omega\int_0^x \theta_{tt}u_t dy dx + \int_\Omega\int_0^x \theta_t u_{tt} dy dx + l\int_\Omega \theta_{tx} u dx + l\int_\Omega \theta_x u_t dx \tag{3.3.18}$$

d'après le système ((3.1.1) − (3.1.3)), on a :

$$\theta_{tt} = l\theta_{xx} - K_2\theta_t - \gamma u_{tx} \tag{3.3.19}$$

et

$$u_{tt} = D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x - \gamma\theta_{tx} \tag{3.3.20}$$

Insérant (3.3.19) et (3.3.20) dans (3.3.18), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) = &\int_\Omega\int_0^x \left[l\theta_{xx} - K_2\theta_t - \gamma u_{tx}\right]u_t dydx + \int_\Omega\int_0^x \theta_t(t,y)dy\left[D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x - \gamma\theta_{tx}\right]dx\\ &+ l\int_\Omega \theta_{tx}udx + l\int_\Omega \theta_x u_t dx\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

on a

$$\int_0^x \theta_{xx}(t,y)dy = [\theta_x(t,y)]_0^x = \theta_x(t,x) - \theta_x(t,0) = \theta_x(t,x)$$

donc

$$\int_\Omega\int_0^x l\theta_{xx}u_t dydx = l\int_\Omega \theta_x u_t dx \tag{3.3.22}$$

de même, nous avons :

$$\int_0^x u_{tx}(t,y)dy = [u_t(t,y)]_0^x = u_t(t,x) - u_x(t,0) = u_x(t,x)$$

donc

$$-\int_\Omega\int_0^x \gamma u_{tx}u_t dydx = -\int_\Omega \gamma u_t u_t dx = -\gamma\int_\Omega u_t^2 dx \tag{3.3.23}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^x \theta_t(t,y)dyD_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x dx =\\ &= -\int_\Omega\int_0^x \theta_{tx}(t,y)dyD_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx + \left[\int_0^x \theta_t dyD_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)\right]_{x=0}^{x=L}\\ &= -\int_\Omega \theta_t D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx + \left[\int_0^L \theta_t dxD_1\left(u_x(L) + \frac{1}{2}(w_x)^2(L)\right)\right]\\ &= -\int_\Omega \theta_t D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx + \int_0^L \theta_t dx\left[D_1 u_x(L)\right]\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

de plus

$$\begin{aligned}-\gamma\int_{\Omega}\int_{0}^{x}\theta_t(t,y)dy\theta_{tx}dx &= \gamma\int_{\Omega}\int_{0}^{x}\theta_{tx}dy\theta_t dx-\left[\int_{0}^{x}\theta_t dy\gamma\theta_t\right]_{x=0}^{x=L}\\ &= \gamma\int_{\Omega}\theta_t^2dx-\int_{0}^{L}\theta_t dx+[\gamma\theta_t(L)]\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

et

$$l\int_{\Omega}\theta_{tx}udx=-l\int_{\Omega}\theta_t u_x dx\tag{3.3.26}$$

Insérant (3.3.22), (3.3.23), (3.3.24), (3.3.25) et (3.3.26) dans (3.3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t)=&l\int_{\Omega}\theta_x u_t dx-\int_{\Omega}\int_{0}^{x}K_2\theta_t(t,y)dyu_t dx-\gamma\int_{\Omega}u_t^2dx-\int_{\Omega}\theta_t D_1\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx+\\ &\int_{0}^{L}\theta_t dx\left[D_1u_x(L)\right]+\gamma\int_{\Omega}\theta_t^2dx-\int_{0}^{L}\theta_t dx\left[\gamma\theta_t(L)\right]-l\int_{\Omega}\theta_t u_x dx+l\int_{\Omega}\theta_x u_t dx\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t)=&-\int_{\Omega}\int_{0}^{x}K_2\theta_t(t,y)dyu_t dx-\gamma\int_{\Omega}u_t^2dx-\int_{\Omega}\theta_t D_1\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx+\\ &\int_{0}^{L}\theta_t dx\left[D_1u_x(L)-\gamma\theta_t(L)\right]+\gamma\int_{\Omega}\theta_t^2dx-l\int_{\Omega}\theta_t u_x dx\end{aligned}\tag{3.3.28}$$

On utilise l'inégalité de Young pour $\varepsilon_2>0$, on obtient

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega}\int_{0}^{x}K_2\theta_t(t,y)dyu_t dx\\ &\le\frac{K_2^2}{2\gamma}\int_{\Omega}\int_{0}^{x}\theta_t^2(t,y)dydx+\frac{\gamma}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx\\ &\le\frac{K_2^2L^2}{2\gamma}\int_{\Omega}\theta_t^2dx+\frac{\gamma}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

ensuite

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\theta_t D_1\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx\\ &\le\int_{\Omega}\varepsilon_2D_1^2\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2+\frac{1}{4\varepsilon_2}\int_{\Omega}\theta_t^2dx\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

de plus

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{L}\theta_t dx\left[D_1u_x(L)-\gamma\theta_t(L)\right]\\ &\le\varepsilon_2\left[D_1u_x(L)^2-\theta_t(L)^2\right]+\left(\frac{D_1}{4\varepsilon_2}+\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\right)\int_{\Omega}\theta_t^2dx\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

et

$$l\int_\Omega \theta_t u_x dx \leq \varepsilon_2 \int_\Omega u_x^2 dx + \frac{l^2}{4\varepsilon_2}\int_\Omega \theta_t^2 dx \tag{3.3.32}$$

On obtient l'estimation :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) &\leq \left(\frac{\gamma}{2}-\gamma\right)\int_\Omega u_t^2 dx + \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx + \left(\frac{1}{4\varepsilon_2}+\gamma+\frac{l^2}{4\varepsilon_2}+\frac{D_1}{4\varepsilon_2}+\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}+\frac{K_1^2}{2\gamma}L^2\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx\\ &+ \varepsilon_2 D_1^2\int_\Omega\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)dx + \varepsilon_2\left[D_1 u_x^2(L)+\theta_t^2(L)\right]\\ &\leq -\frac{\gamma}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx + C_1(\varepsilon_2)\int_\Omega \theta_t^2 dx\\ &+ \varepsilon_2 D_1^2\int_\Omega\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \varepsilon_2\left[D_1 u_x^2(L)+\theta_t^2(L)\right]\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.3.3 *Soit (u,w,θ) la solution du système $((3.1.1)-(3.1.3))$. Alors, on a définie $q\in C^1(\Omega)$:*

$$q(x) = 2-\frac{4}{L}x \qquad x\in\Omega$$

La fonctionnelle I_3 définie par :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3(t) &= \int_\Omega \theta_t q\theta_x dx + \int_\Omega w_t q w_x dx\\ &+ \int_\Omega u_t q u_x dx + \gamma\int_\Omega \theta_x q u_x dx \qquad t>0\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3(t) \leq &-\left[\theta_t^2(L)+\theta_t^2(0)\right] - D_1\left[u_x^2(L)+u_x^2(0)\right] + \frac{2D_1}{L}\int_\Omega u_x^2 dx +\\ &\left(\frac{6D_2}{2L}+K_1C_p\right)\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \left(\frac{2l}{L}+K_2\right)\int_\Omega \theta_x^2 dx + \left(\frac{2}{L}+K_2\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx +\\ &\frac{2}{L}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{8D_1}{L}\int_\Omega\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \left(K_1+\frac{2}{L}\right)\int_\Omega w_t^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Où C_p est la constante de Poincaré.

Preuve. On a

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx + \int_\Omega w_t q w_x dx + \int_\Omega u_t q u_x dx + \gamma \int_\Omega \theta_x q u_x dx\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3(t) = &\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx \\ &+ \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t q u_x dx + \gamma \frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_x q u_x dx\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

La dérivation du Premier terme de l'équation (3.3.36), donne :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx = \int_\Omega \theta_{tt} q \theta_x dx + \int_\Omega \theta_t q \theta_{tx} dx \tag{3.3.37}$$

d'après le système ((3.1.1) − (3.1.3)), on a :

$$\theta_{tt} = l\theta_{xx} - K_2\theta_t - \gamma u_{tx}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx &= \int_\Omega (l\theta_{xx} - K_2\theta_t - \gamma u_{tx})\, q\theta_x dx + \int_\Omega \theta_t q \theta_{tx} dx \\ &= l\int_\Omega \theta_{xx} q \theta_x dx - K_2 \int_\Omega \theta_t q \theta_x dx - \gamma \int_\Omega u_{tx} q \theta_x dx + \int_\Omega \theta_t q \theta_{tx} dx\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$l\int_\Omega \theta_{xx} q \theta_x dx = l\int_\Omega (\theta_x^2)_x q dx = -\frac{l}{2}\int_\Omega \theta_x^2 q_x dx + \frac{l}{2}[q\theta_x^2]_{x=0}^{x=L} \tag{3.3.39}$$

$$\int_\Omega \theta_t q \theta_{tx} dx = \int_\Omega (\theta_t^2)_x q dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \theta_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q\theta_t^2]_{x=0}^{x=L} \tag{3.3.40}$$

Insérant (3.3.39) et (3.3.40) dans (3.3.38), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx = &-\frac{l}{2}\int_\Omega \theta_x^2 q_x dx - K_2\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx - \gamma \int_\Omega u_{tx} q \theta_x dx \\ &-\frac{1}{2}\int_\Omega \theta_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q\theta_t^2]_{x=0}^{x=L}\end{aligned} \tag{3.3.41}$$

D'aprés $q'(x) = -\dfrac{4}{L}$ nous avons :

$$-\frac{l}{2}\int_\Omega \theta_x^2 q_x dx = \frac{2l}{L}\int_\Omega \theta_x^2 dx \tag{3.3.42}$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \theta_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q\theta_t]_{x=0}^{x=L} = \frac{2}{L}\int_\Omega \theta_t^2 dx + [\theta_t^2(L) - \theta_t^2(0)] \tag{3.3.43}$$

On utilise l'inégalité de Young pour $|q(x)| \leq 2$ pour tout $x \in [0, L]$, on obtient :

$$K_2 \int_\Omega \theta_t q \theta_x dx \leq K_2 \int_\Omega \theta_t^2 dx + K_2 \int_\Omega \theta_x^2 dx \tag{3.3.44}$$

Insérant (3.3.42), (3.3.43) et (3.3.44) dans (3.3.41), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t q \theta_x dx \leq & \frac{2l}{L}\int_\Omega \theta_x^2 dx + \frac{2}{L}\int_\Omega \theta_t^2 dx + [\theta_t^2(L) - \theta_t^2(0)] + \\ & K_2 \int_\Omega \theta_t^2 dx + K_2 \int_\Omega \theta_x^2 dx - \gamma \int_\Omega u_{tx} q \theta_x dx\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

La dérivation du deuxième terme d'équation (3.3.36), donne :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx = \int_\Omega w_{tt} q w_x dx + \int_\Omega w_t q w_{tx} dx \tag{3.3.46}$$

d'après le système ((3.1.1) − (3.1.3)), on a :

$$w_{tt} = -K_1 w_t + D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x - D_2 w_{xxxx}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx &= \int_\Omega (-K_1 w_t + D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x - D_2 w_{xxxx}) q w_x dx + \int_\Omega w_t q w_{tx} dx \\ &= -K_1 \int_\Omega w_t q w_x dx + D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x q w_x dx \\ &- D_2 \int_\Omega w_{xxxx} q w_x dx + \int_\Omega w_t q w_{tx} dx\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x q w_x dx = -D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] (q w_x)_x dx \tag{3.3.48}$$

$$-D_2 \int_\Omega w_{xxxx} q w_x dx = D_2 \int_\Omega w_{xxx} (q w_x)_x dx \tag{3.3.49}$$

$$\int_\Omega w_t q w_{tx} dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (w_t^2)_x q dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q w_t^2]_{x=0}^{x=L} \tag{3.3.50}$$

et comme : $(qw_x)_x = q_x w_x + q w_{xx}$

$$D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x q w_x dx = -D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] (q_x w_x + q w_{xx}) dx \tag{3.3.51}$$

et

$$-D_2 \int_\Omega w_{xxxx} q w_x dx = D_2 \int_\Omega w_{xxx}(q_x w_x + q w_{xx}) dx \tag{3.3.52}$$

Insérant (3.3.50), (3.3.51) et (3.3.52) dans (3.3.47), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx = &- K_1 \int_\Omega w_t q w_x dx - D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] (q_x w_x + q w_{xx}) dx \\ &+ D_2 \int_\Omega w_{xxx}(q_x w_x + q w_{xx}) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q w_t^2]_{x=0}^{x=L}\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

D'aprés $q'(x) = -\dfrac{4}{L}$ nous avons :

$$-D_1 \int_\Omega \left[\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right] (q_x w_x) dx = \frac{4D_1}{L} \int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx \tag{3.3.54}$$

et

$$+D_2 \int_\Omega w_{xxx}(q_x w_x) = -\frac{4D_2}{L} \int_\Omega w_{xxx} w_x dx \tag{3.3.55}$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 q_x dx + \frac{1}{2}[q w_t]_{x=0}^{x=L} = \frac{2}{L}\int_\Omega w_t^2 dx - [w_t^2(L) + w_t^2(0)] \tag{3.3.56}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx = &- K_1 \int_\Omega w_t q w_x dx - D_1 \int_\Omega \left((u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2) w_x\right) q w_{xx} dx \\ &+ \frac{4D_1}{L}\int_\Omega (u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2) w_x^2 dx + D_2 \int_\Omega w_{xxx} q w_{xx} dx \\ &- \frac{4D_2}{L}\int_\Omega w_{xxx} w_x dx + \frac{2}{L}\int_\Omega w_t^2 dx - [w_t^2(L) + w_t^2(0)]\end{aligned} \tag{3.3.57}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$\begin{aligned}-D_1 \int_\Omega (\frac{1}{2}(w_x)^2) w_x q w_{xx} dx &= \frac{D_1}{4}\int_\Omega ((w_x)^2) w_x q (w_x^2)_x dx \\ &= \frac{D_1}{8}\int_\Omega (w_x)^4 q_x dx \\ &= -\frac{D_1}{2L}\int_\Omega (w_x)^4 dx\end{aligned} \tag{3.3.58}$$

de plus

$$\begin{aligned} D_2\int_\Omega w_{xxx}qw_{xx}dx =\frac{D_2}{2}\int_\Omega (w_{xx}^2)_x q dx =& -\frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 q_x dx + \frac{D_2}{2}[qw_{xx}^2]_{x=0}^{x=L} \\ =&\frac{2D_2}{L}\int_\Omega w_{xx}^2 dx - D_2[w_{xx}^2(L)+w_{xx}^2(0)] \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

et

$$-\frac{4D_2}{L}\int_\Omega w_{xxx}w_x dx = \frac{4D_2}{L}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{3.3.60}$$

Insérant (3.3.58), (3.3.59) et (3.3.60) dans (3.3.57), on obtient : :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx =& -K_1\int_\Omega w_t q w_x dx - D_1\int_\Omega u_x w_x q w_{xx} dx - \frac{D_1}{2L}\int_\Omega (w_x)^4 dx \\ &+ \frac{4D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx + \frac{6D_2}{L}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ &- D_2[w_{xx}^2(L)+w_{xx}^2(0)] + \frac{2}{L}\int_\Omega w_t^2 dx - [w_t^2(L)+w_t^2(0)] \end{aligned} \tag{3.3.61}$$

On utilise l'inégalité de Young pour $|q(x)| \leq 2$ pour tout $x \in [0, L]$, on obtient :

$$K_1\int_\Omega w_t q w_x dx \leq K_1\int_\Omega w_t^2 dx + K_1\int_\Omega w_x^2 dx \tag{3.3.62}$$

l'inégalité de Poincaré, donne :

$$K_1\int_\Omega w_x^2 dx \leq K_1 C_p\int_\Omega w_{xx}^2 dx \tag{3.3.63}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{4D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx \\ &\leq \frac{16D_1}{2L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + \frac{D_1}{2L}\int_\Omega w_x^4 dx \\ &\leq \frac{8D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 + \frac{D_1}{2L}\int_\Omega w_x^4 dx \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega w_t q w_x dx \leq& K_1\int_\Omega w_t^2 dx + \left(\frac{6D_2}{L}+K_1C_p\right)\int_\Omega w_{xx}^2 dx - D_1\int_\Omega u_x w_x q w_{xx} dx \\ &+ \frac{8D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 - D_2[w_{xx}^2(L)+w_{xx}^2(0)] \\ &+ \frac{2}{L}\int_\Omega w_t^2 dx - [w_t^2(L)+w_t^2(0)] \end{aligned} \tag{3.3.65}$$

La dérivation du la troisième terme d'équation (3.3.36), donne :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t q u_x dx = \int_{\Omega} u_{tt} q u_x dx + \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \tag{3.3.66}$$

d'après le système ((3.1.1) − (3.1.3)), on a :

$$u_{tt} = D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x - \gamma\theta_{tx}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t q u_x dx &= \int_{\Omega}\left(D_1\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x - \gamma\theta_{tx}\right) q u_x dx + \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx \\ &= D_1\int_{\Omega}\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)_x q u_x dx - \gamma\int_{\Omega}\theta_{tx} q w_x dx + \int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx\end{aligned} \tag{3.3.67}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$\begin{aligned}D_1\int_{\Omega}(u_x)_x q u_x dx = D_1\int_{\Omega} u_{xx} q u_x =& \frac{D_1}{2}\int_{\Omega}(u_x^2)_x q dx \\ =& -\frac{D_1}{2}\int_{\Omega} u_x^2 q_x dx + \frac{D_1}{2}[q u_x^2]_{x=0}^{x=L}\end{aligned} \tag{3.3.68}$$

et

$$\int_{\Omega} u_t q u_{tx} dx = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_t^2)_x q dx = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2 q_x dx \tag{3.3.69}$$

Insérant (3.3.51), (3.3.52) et (3.3.50) dans (3.3.47), on obtient : :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u_t q u_x dx =& -\frac{D_1}{2}\int_{\Omega} u_x^2 q_x dx + \frac{D_1}{2}[q u_x^2]_{x=0}^{x=L} + D_1\int_{\Omega}(w_x) w_{xx} q u_x dx \\ & -\gamma\int_{\Omega}\theta_{tx} q u_x dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2 q_x dx\end{aligned} \tag{3.3.70}$$

D'aprés $q'(x) = -\frac{4}{L}$ nous avons :

$$-\frac{D_1}{2}\int_{\Omega} u_x^2 q_x dx + \frac{D_1}{2}[q u_x^2]_{x=0}^{x=L} = \frac{2D_1}{L}\int_{\Omega} u_x^2 dx - D_1[u_x^2(L) + u_x^2(0)] \tag{3.3.71}$$

et

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_t^2 q_x dx = \frac{2}{L}\int_{\Omega} u_t^2 dx \tag{3.3.72}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t q u_x dx =& \frac{2D_1}{L}\int_\Omega u_x^2 dx - D_1[u_x^2(L)+u_{x:}^2(0)] + D_1\int_\Omega w_x w_{xx} q u_x dx \\ &- \gamma\int_\Omega \theta_{tx} q u_x dx + \frac{2}{L}\int_\Omega u_t^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.73}$$

La dérivation du quatrième terme d'équation (3.3.36) on a :

$$\gamma\frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_x q u_x dx = \gamma\int_\Omega \theta_{tx} q u_x dx + \gamma\int_\Omega \theta_t q u_{tx} dx \tag{3.3.74}$$

Insérant (3.3.45), (3.3.65), (3.3.73) et (3.3.74) dans (3.3.36), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3(t) \leq& -[\theta_t^2(L)+\theta_t^2(0)] - D_1[u_t^2(L)+u_t^2(0)] + \left(\frac{2l}{L}+K_2\right)\int_\Omega \theta_x^2 dx \\ &+ \left(\frac{2}{L}+K_2\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx + \left(\frac{2}{L}+K_1\right)\int_\Omega w_t^2 dx \\ &+ \left(\frac{6D_2}{L}+K_1C_p\right)\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \frac{8D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 \\ &+ \frac{2D_1}{L}\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{2}{L}\int_\Omega u_t^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.75}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.3.4 *Soit (u, w, θ) la solution du système ((3.1.1) − (3.1.3)). Alors, la fonctionnelle I_4 définie par :*

$$\mathrm{I}_4(t) = \int_\Omega \theta_t\theta dx + \int_\Omega \frac{K_2}{2}\theta^2 dx + \int_\Omega \gamma u_x\theta dx \qquad t>0 \tag{3.3.76}$$

satisfait, pour $\varepsilon_2 > 0$ l'estimation

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}_4(t) \leq -l\int_\Omega \theta_x^2 dx + \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}+1\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx \qquad \forall t>0. \tag{3.3.77}$$

Preuve. On multiplie la troisième équation du système ((3.1.1) − (3.1.3)) par θ et on integre sur $\Omega = [0.L]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [\theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2\theta_t + \gamma u_{tx}]\,\theta dx \\ &\int_\Omega \theta_{tt}\theta dx - l\int_\Omega \theta_{xx}\theta dx + K_2\int_\Omega \theta_t\theta dx + \gamma\int_\Omega u_{tx}\theta dx\end{aligned} \tag{3.3.78}$$

on a

$$\int_\Omega \theta_{tt}\theta dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \theta_t\theta dx - \int_\Omega \theta_t^2 dx \tag{3.3.79}$$

$$K_2\int_\Omega \theta_t\theta dx = K_2\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\theta^2 dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{K_2}{2}\theta^2 dx \tag{3.3.80}$$

$$\gamma\int_\Omega u_{tx}\theta dx = \gamma\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\theta dx - \gamma\int_\Omega u_x\theta_t dx \tag{3.3.81}$$

d'aprés l'utilisation d'une l'integration par partie sur l'intervalle $\Omega = [0, L]$, on a :

$$-l\int_\Omega \theta_{xx}\theta dx = l\int_\Omega \theta_x\theta_x dx = l\int_\Omega \theta_x^2 dx \tag{3.3.82}$$

La somme des equation (3.3.79), (3.3.80), (3.3.82) et (3.3.81), nous donne :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\theta_t\theta + \frac{K_2}{2}\theta^2 + \gamma u_t\theta\right) dx \\ &= \int_\Omega \theta_t^2 dx + \gamma\int_\Omega u_x\theta_t dx - l\int_\Omega \theta_x^2 dx = \frac{d}{dt}\mathrm{I}_4(t) \end{aligned} \tag{3.3.83}$$

On utilise l'inégalité de Young pour $\varepsilon_2 > 0$, on obtient :

$$\gamma\int_\Omega u_x\theta_t dx \le \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}\int_\Omega \theta_t^2 dx \tag{3.3.84}$$

On obtient l'estimation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{I}_4(t) \le &-l\int_\Omega \theta_x^2 dx + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + 1\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx \\ &+ \varepsilon_2\int_\Omega u_x^2 dx \end{aligned} \tag{3.3.85}$$

D'où le résultat. ■

Théorème 3.3.1 *Soit* $((u_0, u_1), (w_0, w_1), (\theta_0, \theta_1)) \in \mathrm{V}$,*il existe deux constantes positives* C *et* d *telles que l'énergie de la solution de système* ((3.1.1) − (3.1.3)) *satisfait :*

$$\mathrm{E}(t) \le C\mathrm{E}(0)\exp^{-dt} \qquad \forall t > 0$$

Preuve. On définit la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathrm{F}(t) = N\mathrm{E} + \frac{\gamma}{4}\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \varepsilon_2\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4 \qquad \forall t \ge 0 \tag{3.3.86}$$

La dérivée de $\mathrm{F}(t)$ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{F}(t) &= \frac{d}{dt}\left(N\mathrm{E}(t) + \mathrm{I}_1(t) + \mathrm{I}_2 + \varepsilon_2\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4\right) \\ &\leq N\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathrm{I}_2 + \varepsilon_2\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3 + \frac{d}{dt}\mathrm{I}_4\end{aligned} \tag{3.3.87}$$

Nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_x^2 dx &= \int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2 - \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx \\ &\leq 2\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega w_x^4 dx \\ &\leq 2\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \frac{L}{4}\int_\Omega w_{xx}^2 dx\end{aligned}$$

d'aprés l'equation de l'érgrie on a :

$$N\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t) \leq -NK_1\int_\Omega w_t^2 - NK_2\int_\Omega \theta_t^2 dx \tag{3.3.88}$$

ensuite

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{4}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_1(t) \leq &\left(\frac{\varepsilon_1\gamma}{2} - \frac{\gamma D_1}{4}\right)\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx \left(\frac{\gamma L\varepsilon_1}{16} - \frac{\gamma D_2}{8}\right)\frac{D_2}{2}\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ &+ \frac{\gamma}{4}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{\gamma}{8}\int_\Omega w_t^2 dx + \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1}\int_\Omega \theta_t^2 dx. \qquad \forall t \geq 0\end{aligned} \tag{3.3.89}$$

de plus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_2(t) \leq &-\frac{\gamma}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + C_1(\varepsilon_2)\int_\Omega \theta_t^2 dx + \left(\varepsilon_2 D_1^2 + 2\varepsilon_2\right)\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx \\ &+ \frac{\varepsilon_2 L}{4}\int_\Omega w_{xx}^2 dx + \varepsilon_2\left[D_1 u_x^2(L) + \theta_t^2(L)\right]\end{aligned} \tag{3.3.90}$$

aussi

$$\begin{aligned}\varepsilon_2\frac{d}{dt}\mathrm{I}_3(t) \leq &-\varepsilon_2\left[\theta_t^2(L) + \theta_t^2(0)\right] - D_1\varepsilon_2\left[u_x^2(L) + u_x^2(0)\right] + \varepsilon_2\left(\frac{6D_2}{2L} + K_1C_p + \frac{D_1L}{2}\right)\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ &+ \varepsilon_2\left(\frac{2l}{L} + K_2\right)\int_\Omega \theta_x^2 dx + \varepsilon_2\left(\frac{2}{L} + K_2\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx + \varepsilon_2\frac{2}{L}\int_\Omega u_t^2 dx \\ &+ \varepsilon_2\frac{12D_1}{L}\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \varepsilon_2\left(K_1 + \frac{2}{L}\right)\int_\Omega w_t^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.91}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{I}_4(t) \leq & -l\int_\Omega \theta_x^2 dx + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}+1\right)\int_\Omega \theta_t^2 dx \\ & + 2\varepsilon_2 \int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx + \varepsilon_2 \frac{L}{4}\int_\Omega w_{xx}^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.92}$$

Insérant (3.3.88), (3.3.89), (3.3.90), (3.3.91) et (3.3.92) dans (3.3.87), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) \leq & -\left[\frac{\gamma}{4}-\frac{2\varepsilon_2}{L}\right]\int_\Omega u_t^2 dx - \left[K_1 N - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2\left(K_1 + \frac{2}{L}\right)\right]\int_\Omega w_t^2 dx \\ & - \left[K_2 N - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} - C_1(\varepsilon_2) - \varepsilon_2\left(\frac{2}{L}+K_2\right) - \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2}+1\right)\right]\int_\Omega \theta_t^2 dx \\ & - \left[\frac{\gamma D_2}{8} - \varepsilon_1\frac{\gamma L}{16} - \varepsilon_2\frac{L}{2} - \varepsilon_2\left(\frac{6D_2}{2L} + K_1 C_p + \frac{D_1 L}{2}\right)\right]\int_\Omega w_{xx}^2 dx \\ & - \left[\frac{\gamma D_1}{4} - \varepsilon_1\frac{\gamma}{2} - \varepsilon_2\left(D_1^2 + \frac{12 D_1}{L} + 4\right)\right]\int_\Omega \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx \\ & - \left[l - \varepsilon_2\left(\frac{2l}{L}+K_2\right)\right]\int_\Omega \theta_x^2 dx\end{aligned} \tag{3.3.93}$$

Maintenant, nous devons choisir nos coefficients d'une manière appropriée.

Nous choisissons ε_2 , ε_1 assez petit, nous obtenons :

$$l - \varepsilon_2\left(\frac{2l}{L}+K_2\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 \leq \left(\frac{2l}{L}+K_2\right)^{-1} l$$

$$\frac{\gamma}{4} - \frac{2\varepsilon_2}{L} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 \leq \frac{\gamma L}{8}$$

$$\frac{\gamma D_1}{4} - \varepsilon_2\left(D_1^2 + \frac{12D_1}{L} + 4\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 \leq \frac{\gamma}{4}D_1\left(D_1^2 + \frac{12D_1}{L} + 4\right)^{-1}$$

$$\frac{\gamma D_2}{8} - \varepsilon_2\left(\frac{6D_2}{2L} + K_1C_p + \frac{L}{2} + \frac{D_1L}{2}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_2 \leq \frac{\gamma D_2}{8}\left(\frac{6D_2}{2L} + K_1C_p + \frac{L}{2} + \frac{D_1L}{2}\right)^{-1}$$

donc

$$\varepsilon_2 \leq \min\left\{\left(\frac{2l}{L}+K_2\right)^{-1} l, \frac{\gamma L}{8}, \frac{\gamma}{4}D_1\left(D_1^2 + \frac{12D_1}{L} + 4\right)^{-1}, \frac{\gamma D_2}{8}\left(\frac{6D_2}{2L} + K_1C_p + \frac{L}{2} + \frac{D_1L}{2}\right)^{-1}\right\}$$

d'autre part

$$\frac{\gamma}{4}D_1 - \varepsilon_1\frac{\gamma}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_1 \leq \frac{D_1}{2}$$

$$\frac{\gamma}{8}D_2 - \varepsilon_1\frac{\gamma L}{16} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_1 \leq \frac{2D_2}{L}$$

donc

$$\varepsilon_1 \leq \min\left\{\frac{D_1}{2}, \frac{2D_2}{L}\right\}$$

Nous choisissons N assez grand pour que :

$$K_1 N - \frac{\gamma}{8} - \varepsilon_2\left(K_1 + \frac{2}{L}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N > K_1^{-1}\left(\frac{\gamma}{8} + \varepsilon_2\left(K_1 + \frac{2}{L}\right)\right)$$

$$K_2 N - \frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} - C_1(\varepsilon_2) - \varepsilon_2\left(\frac{2}{L} + K_2\right) - \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + 1\right) = 0 \Longrightarrow$$
$$N > K_2^{-1}\left(\frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} + C_1(\varepsilon_2) + \varepsilon_2\left(\frac{2}{L} + K_2\right) + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + 1\right)\right)$$

donc

$$N > \max\left\{K_1^{-1}\left(\frac{\gamma}{8} + \varepsilon_2\left(K_1 + \frac{2}{L}\right)\right), K_2^{-1}\left(\frac{\gamma^3}{16\varepsilon_1} + C_1(\varepsilon_2) + \varepsilon_2\left(\frac{2}{L} + K_2\right) + \left(\frac{\gamma^2}{4\varepsilon_2} + 1\right)\right)\right\}$$

Par conséquent, (3.3.93) prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{F}(t) &\leq -\eta\int_\Omega \{u_t^2 + w_t^2 + \theta_t^2 + \theta_x^2 + w_{xx}^2 + \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2\}dx \\ &\leq -C\mathrm{E}(t) \end{aligned} \tag{3.3.94}$$

Pour certaines positives constantes η et C : Aussi, nous pouvons choisir N encore assez grand tel que :

$$\beta_2\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{F}(t) \leq \beta_1\mathrm{E}(t) \tag{3.3.95}$$

avec β_2 et β_1 deux constantes positives. En combinant les relations (3.3.94) avec le membre de droite de (3.3.95), nous obtenons :

$$\mathrm{F}'(t) \leq -C\mathrm{E}(t)$$

$$\beta_2\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{F}(t)$$

$$\mathrm{F}'(t) \leq -C\mathrm{E}(t) \leq \frac{C}{\beta_2}\mathrm{F}(t)$$

$$\mathrm{F}'(t) \leq -\frac{C}{\beta_2}\mathrm{F}(t)$$

$$\mathrm{F}'(t) \leq -d\mathrm{F}(t)$$

avec d constante positive. On utilisant une intégration simple, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}'(t)}{\mathrm{F}(t)} &\leq -d \\
\int_\Omega \frac{\mathrm{F}'(t)}{\mathrm{F}(t)} dx &\leq \int_\Omega -d dx \\
\ln|\mathrm{F}(t)| &\leq -dt + C \\
\exp^{\ln|\mathrm{F}(t)|} &\leq \exp^{-dt+C} \\
\mathrm{F}(t) &\leq \exp^{-dt} \lambda
\end{aligned}$$

avec $\lambda = \exp^C$, on utilisant les condition initiales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(0) &\leq \exp^{(0)} \lambda \\
\mathrm{F}(0) &\leq \lambda
\end{aligned}$$

D'aprés l'equivalence entrè $F(t)$ et $E(t)$, nous obtenons :

$$\mathrm{E}(t) \leq \mathrm{E}(0) \exp^{-dt} \tag{3.3.96}$$

D'où le résultat. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons examiné la stabilité exponentielle du système de Von Kármán avec dissipation thermale et de friction, avec des conditions aux limites et des conditions initiales.

Le système de Von Kármán est présenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left[u_x + \dfrac{1}{2}(w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0 \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \dfrac{1}{2}(w_x)^2 \right) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0 \\ \theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_2 \theta_t + \gamma u_{tx} = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty). \end{cases} \tag{3.3.97}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet pour u, Neumann-Dirichlet pour w et Neumann pour θ :

$$\begin{cases} u(0,.) = u(L,.) = w(0,.) = w(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ w_x(0,.) = w_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \\ \theta_x(0,.) = \theta_x(L,.) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.3.98}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1, \\ w(.,0) = w_0, w_t(.,0) = w_1, \\ \theta(.,0) = \theta_0, \theta_t(.,0) = \theta_1 \end{cases} \tag{3.3.99}$$

Où t désignant la variable du temps et $\Omega = [0, L]$, K_1 , K_2,D_1, D_2 ,l et γ sont constantes positives.

Lors de l'étude du système de Von Kármán, nous avons démontré la décroissance exponentielle du systèmem, en utilisant la méthode du multiplicateur basée sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov.

Bibliographie

[1] A. Benabdallah and I. Lasiecka, Exponential decay rates for a full von Kármán system of dynamic thermoelasticity, J. Differential Equations 160 (2000), no. 1, 51–93.

[2] A. Djebabla and N- e. Tatar, Exponential stabilization of the full Von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping, Georgian Math. J. 20 (2013), 427-438.

[3] A. Haraux, Comportement à I'infini pour une equation d'ondes non lineaire dissipative, C. R. Acad. Sci.Paris Ser I Math. 287 (1978), 507-509.

[4] Haïm Brézes, Analyse fonctionnelle théories et application. Dunod 1999.

[5] H.M.Eller, J.E. Lagnese, and S. Nicaise, Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping, Comput. Appl. Math. 21 (2002), no. 1, 135–165. Special issue in memory of Jacques-Louis Lions.

[6] J. E. Lagnese, Boundary Stabilization of Thin Plates, SIAM Studies in Applied Mathematics 10, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.

[7] J. E. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, Nonlinear Anal. 16 (1991), no. 1, 35–54.

[8] J. E. Lagnese and G. Leugering, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback, J. Differential Equations 91 (1991), no. 2, 355–388.

[9] J. E. Lagnese and J.-L. Lions, Modelling Analysis and Control of Thin Plates, Recherches en Mathématiques Appliquées 6, Masson, Paris, 1988.

[10] J. Lagnese, Modelling and stabilization of nonlinear plates, in : Estimation and Control of Distributed Parameter Systems (Vorau 1990), Internat. Ser. Numer. Math. 100, Birkhäuser, Basel (1991), 247–264.

[11] M. Martinez, (1998) 'What is problem solving ?', Phi Delta Kappan 79(8),606-609.

[12] Oucif Dallel " Stabilité de la poutre de Von Kármán", Universite badji mokhtar, Annba, 2017.

[13] V. Komornik : "Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method", Masson, Paris, and John & Wiley Sons, Chicester, 1994.

ملخص

هذا العمل، ندرس استقرار عارضة فون كارمان ، باستخدام طريقة المضاعف التي تعتمد على بناء وظيفة لايبينوف، تعتمد هذه الطريقة على دراسة الاستقرار الأسي لنظام فون كرمان.

الكلمات المفتاحية : نظام فون كرمان، وظيفة لايبينوف.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la stabilité de la poutre de von Kármán, en utilisant la méthode du multiplicateur basée sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov. Cette méthode est basée sur l'étude de la stabilité exponentielle du système de von Kármán .

Mots-clés : Système de von Kármán, fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

In this work, we study the stability of the von Kármán beam, using the multiplier method based on the construction of a Lyapunov functional, This method is based on the study of the exponential stability of the von Kármán system.

Key words: von Kármán system, Lyapunov functional.